UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
Prírodovedecká fakulta
Ústav informatiky

Teória vypočítateľnosti

Ľubomír Antoni - Stanislav Krajči

Košice 2024

Teória vypočítateľnosti
Vysokoškolská učebnica

Autori:

doc. RNDr. Ľubomír Antoni, PhD.
prof. RNDr. Stanislav Krajči, PhD.
Prírodovedecká fakulta, Univezita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Recenzenti:

RNDr. Peter Eliaš, PhD.
Matematický ústav, Slovenská akadémia vied Košice

doc. RNDr. Gabriela Lovászová, PhD.
Fakulta prírodných vied a informatiky, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

Dostupné od:15.02.2024
Umiestnenie: www.unibook.upjs.sk
https://ics.upjs.sk/ krajci/skola/vyucba/ucebneTexty/vypocitatelnost.pdf

ISBN 978-80-574-0284-8 (e-publikácia)

Obsah

Predslov

Je paradoxné, že kľúč k pochopeniu obmedzenosti informačných technológií poskytuje samotná počítačová veda a ani sa tým netají. Dôležitou súčasťou teoretickej informatiky je totiž problematika Turingových strojov. Tento výpočtový model má dve základné vlastnosti:

1. Tak ako každý iný počítačový program, i softvér Turingovho stroja je zložený z inštrukcií, v jeho prípade sú však všetky jediného typu.
2. Každý iný (doteraz známy) počítačový program možno bez straty informácie transformovať na program nejakého Turingovho stroja.

Kým druhá črta redukuje otázku, čo nedokáže počítač, na otázku, čo nedokáže Turingov stroj, prvá umožňuje oveľa jednoduchší výskum takejto otázky. Pomocou tohto výpočtového modelu tak môžeme nájsť konkrétne problémy, s ktorými si žiaden automat nikdy neporadí (azda najznámejší je problém zastavenia sa Turingovho stroja). Ich existencia dokazuje principiálnu obmedzenosť (nielen ideálnych) výpočtových prostriedkov, a tak povzbudzuje kritickosť i pokoru nášho myslenia.

Turingovým strojom sa venuje prvá kapitola tohto učebného textu. Bez ujmy na všeobecnosti sa sústredíme na také, ktoré si navzájom vedia odovzdávať zmysluplné dáta v dohodnutej forme. Ukážeme, že všetky potrebné Turingove stroje možno vybudovať kombináciou veľmi malého počtu najjednoduchších z nich, a tak dokážeme simulovať základné črty každého programovacieho jazyka, a to sekvenciu príkazov, vetvenie a cyklus, čím vlastne dokážeme univerzalitu tohto výpočtového modelu.

Keďže teória turingovskej vypočítateľnosti pracuje len s prirodzenými číslami, všetky jej konečné objekty a ich vzájomné vlastnosti možno gödelovsky aritmetizovať – priradiť každému z nich jeho číselný kód, ktorý v sebe skrýva všetky potrebné informácie. V druhej kapitole sa preto venujeme funkciám na prirodzených číslach. Najprv pomocou zopár jednoduchých konštrukcií z niekoľkých základných typov funkcií induktívne vybudujeme triedu rekurzívnych funkcií a potom ukážeme prekvapivý fakt, že táto trieda splýva s množinou funkcií vypočítateľných na Turingových strojoch.

Myšlienkovým vrcholom textu je posledná stať venujúca sa problému zastavenia sa Turingovho stroja. Predvedieme v nej funkciu, ktorá napriek prirodzenosti svojej definície nie je rekurzívna, a teda jej výpočet nemožno algoritmizovať.

Prajeme príjemné čítanie.

Košice 2023 autori

Typografické poznámky

V tomto učebnom texte sa vyskytuje niekoľko typov odsekov označených pri ich ľavom hornom rohu obvykle jednou z týchto značiek s takýmto významom:

- **D** – definícia,
- **V** – veta,
- **I** – ilustračný príklad,
- **P** – poznámka.

Vety sú číslované v rámci každej state.

Tento text už na prvý pohľad porušuje typografické pravidlo striedmosti používania farieb, toto jeho nedodržanie však má za cieľ zjednodušiť čitateľovi orientáciu:

- Znaky abecedy Turingových strojov a inštrukcie z nich vytvorené sú písané modrou farbou.
- Červenou sú označené textové názvy funkcií, ktorých definičný obor je podmnožinou $\mathbb{N}^n$ pre niektoré n z $\mathbb{N}$.
- Na textové názvy relácií na množine $\mathbb{N}$ (čiže podmnožín $\mathbb{N}^n$ pre niektoré n z $\mathbb{N}$) používame fialovú farbu.
- Belasou farbou označujeme metódy vzniku takýchto funkcií z iných takýchto funkcií či relácií.
- Funkcie priraďujúce objektom ich kód sú značené zelenou.
- Na názvy ostatných funkcií používame hnedú farbu.
- Oranžovou farbou označujeme špeciálne Turingove stroje.
- Konečné postupnosti čísel, ktoré zodpovedajú blokom jednotiek na páske, sú často podfarbené svetlomodrou, ružovou či svetlozelenou farbou.
- Podfarbenie sivou farbou používame aj pri zdôrazňovaní rozdielu medzi symbolom ako takým a jeho významom.
- Svetložlté podfarbenie znamená odvolávku na príslušnú vetu alebo definíciu. Ak sa naň pri prezeraní v štandardnom prehliadači pdf súborov Adobe Reader premiestni kurzor, objaví sa bublinka obsahujúca plné znenie tejto vety, resp. definície, prípadne doplnené o „osoby a obsadenie“ – aktuálne hodnoty použitých premenných.

1

Turingove stroje

1.1 Základné princípy práce Turingovho stroja

Predstavme si „koľajnice“ – pevný na jednu stranu nekonečný rad štvorčekov, po ktorých sa skackavo pohybuje „vozík“, ktorý má šírku práve jedného štvorčeka. Každý zo štvorčekov pritom obsahuje vždy jeden predmet jedného z dvoch typov. Vo vozíku je (nevyčerpateľná) zásoba predmetov oboch typov, a tak (v prípade, že sa vozík nachádza v určitom stave) môžeme v tom štvorčeku, kde sa práve vozík nachádza, vymeniť predmet za iný.

Na konkrétnej podobe predmetov, pravdaže, nezáleží, budeme ich preto označovať iba symbolicky – znakmi `0` a `1`. Stavy vozíka tiež nebudeme popisovať slovami, ale číslami, presnejšie indexmi pevného symbolu `s`. Celú situáciu si teda môžeme znázorniť napríklad takýmto obrázkom (symbol $\mathtt{s}_7$ vľavo je stav vozíka a ten je znázornený zarámovaným políčkom):

$\mathtt{s}_7$	0	1	1	1	$\boxed{0}$	1	0	1	1	1	1	0	0	…

Aby sme sa vyjadrovali odbornejšie, takúto situáciu budeme nazývať *konfigurácia*, koľajniciam budeme hovoriť *páska* a vozíku *hlava*, pomenovanie *stav* si ponecháme.

Dodajme, že nás budú zaujímať iba tie konfigurácie, v ktorých je počet jednotiek konečný, inými slovami, od istého miesta sú už vo všetkých ďalších štvorčekoch iba nuly.

Našou snahou bude, pravdaže, pohyb vozíka kontrolovať a hlavne automatizovať. Na jeho ovládanie tak budeme používať isté *inštrukcie*. Je zaujímavé a dôležité, že všetky inštrukcie budú vyzerať v podstate rovnako, typickou ukážkou je napríklad $\mathtt{s}_7\mathtt{01Rs}_3$. Každá z nich teda bude mať päť znakov:

- Prvé dva budú kontrolovať jej aktuálnu použiteľnosť:
  - Prvý (v našom prípade $\mathtt{s}_7$) sa musí zhodovať s aktuálnym stavom hlavy.
  - Druhý (u nás `0`) musí byť rovnaký ako písmeno na štvorčeku s hlavou.

  V prípade splnenia oboch podmienok budeme hovoriť, že inštrukcia s aktuálnou konfiguráciou *korešponduje*. (Naša inštrukcia $\mathtt{s}_7\mathtt{01Rs}_3$ teda korešponduje s konfiguráciou na obrázku.)
- Zvyšné tri budú hovoriť, ako sa má konfigurácia zmeniť:
  - V štvorčeku, na ktorom sa nachádza hlava, sa doterajší znak nahradí tretím znakom inštrukcie (v našom prípade `1`). (O nahradzovaní môžeme hovoriť aj vtedy, keď sa druhý a tretí znak inštrukcie navzájom zhodujú, hoci sa v podstate nič nezmení.)
  - Štvrtý znak (ktorý môže byť len jedno z písmen `L`, `N` alebo `R`) hovorí, ako sa má zmeniť poloha hlavy:
    - `L`: Hlava sa posunie o jedno políčko doľava.
    - `N`: Hlava ostáva na svojom pôvodnom mieste.
    - `R`: Hlava sa posunie o jedno políčko doprava (to je prípad našej inštrukcie).
  - Posledný znak inštrukcie (u nás $\mathtt{s}_3$) hovorí, v akom stave bude hlava po jej vykonaní.

Po aplikovaní našej inštrukcie $\mathtt{s}_7\mathtt{01Rs}_3$ na vyššie uvedenú konfiguráciu tak dostávame novú konfiguráciu

$\mathtt{s}_3$	0	1	1	1	1	$\boxed{1}$	0	1	1	1	1	0	0	…

Ak ju porovnáme s východiskovou, vidíme, že na pôvodnom mieste hlavy sa písmeno `0` zmenilo na písmeno `1`, hlava sa posunula o políčko doprava a stav je už $\mathtt{s}_3$ – všetko v súlade s aplikovanou inštrukciou $\mathtt{s}_7\mathtt{01Rs}_3$.

Ľahko vidieť, že pre každú konfiguráciu vieme pripraviť inštrukciu, ktorú na ňu môžeme aplikovať – stačí z nej vyčítať stav a znak v zarámčekovanom štvorčeku a doplniť ich jedným písmenom `0` alebo `1`, jedným (vhodným) posunom a jedným stavom. Po aplikácii takto vytvorenej inštrukcie vznikne nová konfigurácia, tú však môžeme opäť zmeniť nejakou ďalšou inštrukciou. Takto celý proces podľa potreby opakujeme, až kým nevznikne konfigurácia, ktorú sme si predsavzali dosiahnuť.

Naozaj však inštrukcie musíme pripravovať až „na poslednú chvíľu“, teda až vtedy, keď ich chceme aplikovať? Čo keby sme ich vytvorili ešte predtým? Z interaktívneho módu by sme tak prešli do programovacieho. Úlohou tu už nebude pripraviť jednu inštrukciu, ale rovno *program*, ktorý z nich bude zložený. Takýto program budeme nazývať *Turingov stroj*. Pre danú konfiguráciu sa potom z tohto programu vyberie taká inštrukcia, ktorá s ňou korešponduje.

Uvedomme si, že pri takomto prístupe sa musíme vyhnúť situácii, keď s konfiguráciou koršponduje viac inštrukcií, v takom prípade by sme sa totiž nevedeli rozhodnúť, ktorú z nich použiť, a proces by sa tak stal nedeterministickým. Túto podmienku deterministickosti splníme ľahko – stačí od Turingovho stroja požadovať, aby žiadne jeho dve inštrukcie nemali prvé dva znaky rovnaké.

Vezmime si napríklad Turingov stroj – systém inštrukcií $\{s_0 00Rs_1, s_1 10Rs_2, s_2 00Ls_3, s_2 11Rs_1\}$ (všimnime si, že spĺňa podmienku deterministickosti) a úvodná konfigurácia nech je

$$s_0 \quad \boxed{0}\;1\;1\;1\;0\;0\;0\;\cdots$$

Sme v stave s_0 a aktuálne písmeno je 0. Korešpondujúca inštrukcia sa teda musí začínať na $s_0 0$. Jediná taká je $s_0 00Rs_1$. Tá nám prikazuje nemeniť písmeno v zarámčekovanom políčku, posunúť sa o jedno políčko doprava a zmeniť stav na s_1. Dostávame tak konfiguráciu

$$s_1 \quad 0\;\boxed{1}\;1\;1\;0\;0\;0\;\cdots$$

Pre túto konfiguráciu zasa hľadáme inštrukciu, ktorá sa začína na $s_1 1$. Je to inštrukcia $s_1 10Rs_2$. Tentoraz máme prepísať zarámčekované písmeno 1 na 0, posunúť sa opäť o jedno políčko doprava a zmeniť stav na s_2. Po splnení tejto inštrukcie dostávame konfiguráciu

$$s_2 \quad 0\;0\;\boxed{1}\;1\;0\;0\;0\;\cdots$$

Jediná inštrukcia, ktorá sa začína na $s_2 1$, je $s_2 11Rs_1$. Tá nám káže nemeniť zarámčekované písmeno, posunúť sa o jedno políčko doprava a zmeniť stav na s_1. Po jej poslúchnutí vzniká konfigurácia

$$s_1 \quad 0\;0\;1\;\boxed{1}\;0\;0\;0\;\cdots$$

Opäť sme sa dostali do stavu s_1, pričom aktuálne písmeno na páske je 1. Jediná inštrukcia, ktorá s touto konfiguráciou korešponduje, je však $s_1 10Rs_2$, ktorá už raz bola použitá. Mohlo by sa teda zdať, že je už nepoužiteľná, no nie je to pravda: pokojne ju môžeme, ba dokonca musíme aplikovať ešte raz. Tak dostávame konfiguráciu

$$s_2 \quad 0\;0\;1\;0\;\boxed{0}\;0\;0\;\cdots$$

Teraz sme sa dostali do stavu s_2, avšak zarámčekované písmeno je 0. Použijeme teda inštrukciu $s_2 00Ls_3$, čím vznikne konfigurácia

$$s_3 \quad 0\;0\;1\;\boxed{0}\;0\;0\;0\;\cdots$$

Dostali sme sa tým však do zvláštnej situácie. Sme totiž v stave s_3, takže na túto konfiguráciu už nemôžeme aplikovať žiadnu inštrukciu z nášho zoznamu. A to znamená, že náš *výpočet* (teda postupnosť konfigurácií sledujúcich inštrukcie) sa končí. Výsledkom takéhoto výpočtu je potom počet jednotiek na páske, v našom prípade je to 1.

Skúsme spustiť ten istý Turingov stroj na inú počiatočnú konfiguráciu, a to na

$$s_0 \quad \boxed{0}\;1\;1\;1\;1\;0\;0\;0\;\cdots$$

Ľahko vidieť, že výpočet prebieha takto:

s_0	$\boxed{0}$	1	1	1	1	0	0	0	⋯
s_1	0	$\boxed{1}$	1	1	1	0	0	0	⋯
s_2	0	0	$\boxed{1}$	1	1	0	0	0	⋯
s_1	0	0	1	$\boxed{1}$	1	0	0	0	⋯
s_2	0	0	1	0	$\boxed{1}$	0	0	0	⋯
s_1	0	0	1	0	1	$\boxed{0}$	0	0	⋯

Tentoraz sa výpočet skončil preto, lebo neexistuje inštrukcia so začiatkom $s_1 0$, ktorú by bolo možné aplikovať na poslednú uvedenú konfiguráciu. Počet jednotiek na jej páske, a teda výsledok celého výpočtu, je 2.

Aby sme mali obraz o práci Turingových strojov úplnejší, uveďme ešte jeden príklad: Aplikujme (oproti predchádzajúcemu mierne upravený) Turingov stroj $\{s_0 00Rs_1, s_1 10Rs_2, s_2 00Ns_2, s_2 11Rs_1\}$ na konfiguráciu

s_0	$\boxed{0}$	1	1	1	0	0	0	⋯

Prvých pár krokov výpočtu je takýchto:

s_0	$\boxed{0}$	1	1	1	0	0	0	⋯
s_1	0	$\boxed{1}$	1	1	0	0	0	⋯
s_2	0	0	$\boxed{1}$	1	0	0	0	⋯
s_1	0	0	1	$\boxed{1}$	0	0	0	⋯
s_2	0	0	1	0	$\boxed{0}$	0	0	⋯
s_2	0	0	1	0	$\boxed{0}$	0	0	⋯
s_2	0	0	1	0	$\boxed{0}$	0	0	⋯

⋮

Vidíme, že posledné tri znázornené konfigurácie sú úplne rovnaké a tak to zrejme bude pokračovať aj ďalej. To však znamená, že výpočet na tomto stroji z tejto konfigurácie sa nikdy neskončí. V takom prípade výsledok výpočtu nebude definovaný.

Už sme si povedali, aký má Turingov stroj výstup (buď počet jednotiek, alebo žiadny, ak sa výpočet nezastaví), treba ešte spomenúť, ako je to s jeho vstupom:

Turingov stroj vie, samozrejme, reagovať na každú vstupnú konfiguráciu. Aby však bol jeho výpočet rozumne interpretovateľný, bude vhodné, aby vstupná konfigurácia mala pásku zloženú zo súvislých *blokov* jednotiek. Keďže takýmto spôsobom treba vedieť zakódovať i hodnotu 0, číslo x budeme kódovať až $x+1$ jednotkami. A tak napríklad blok kódujúci číslo 3 bude vyzerať

1	1	1	1

kým blok kódujúci číslo 0 bude

1

Páska kódujúca usporiadanú n-ticu $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ (budeme ju nazývať *bloková páska*) potom bude združením blokov kódujúcich postupne čísla x_1, x_2, ..., x_n a oddelených od seba i od začiatku pásky vždy jednou nulou, pričom zvyšok pásky je vyplnený nulami. Napríklad páska kódujúca štvoricu čísel $\langle 2, 3, 0, 1 \rangle$ bude

`0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 …`

(zvislé bodkované čiary slúžia len na zdôraznenie príslušných častí pásky, stroj ich pri práci nijako neregistruje). Špeciálnym prípadom blokovej pásky je *prázdna páska* čiže

`0 0 0 …`

ktorá kóduje prázdnu ticu $\langle\rangle$.

Výpočty sa obvykle začínajú z konfigurácie, ktorej páska je bloková, hlava je nastavená na jej začiatku a stav je s_0. Takže štartovná bloková konfigurácia vyrobená z predchádzajúcej pásky, a teda kódujúca vstupnú štvoricu čísel $\langle 2, 3, 0, 1\rangle$, bude

s_0 `[0] 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 …`

Keďže už takto vieme číselne interpretovať vstupy aj výstup Turingovho stroja, môžeme ho chápať ako prostriedok na počítanie funkcie, ktorej definičným oborom sú (možno nie všetky) usporiadané n-tice prirodzených čísel (pri dopredu danom počte n) a oborom hodnôt je istá podmnožina množiny prirodzených čísel:

- Ak na Turingovom stroji existuje (zrejme jediný) konečný výpočet, ktorého úvodná konfigurácia je bloková a kóduje $\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$, tak hodnota $f(x_1, \dots, x_n)$ je rovná počtu jednotiek na páske poslednej konfigurácie tohto výpočtu.
- Ak taký (konečný) výpočet neexistuje, tak hodnota $f(x_1, \dots, x_n)$ nie je definovaná.

Po príklad sa vráťme k Turingovmu stroju $\{s_0 00Rs_1, s_1 10Rs_2, s_2 00Ls_3, s_2 11Rs_1\}$, ktorý sme ukážkovo spúšťali na (ako už vieme) blokových konfiguráciách

s_0 `[0] 1 1 1 0 0 0 …`

a

s_0 `[0] 1 1 1 1 0 0 0 …`

V prvom prípade bol teda vstup $\langle 2\rangle$ a výstup 1, v druhom vstup $\langle 3\rangle$ a výstup 2. Ľahko sa možno presvedčiť, že pre vstup $\langle 2k\rangle$ je výstupom číslo k, kým pre vstup $\langle 2k+1\rangle$ je výstupom číslo $k+1$. Znamená to teda, že tento Turingov stroj počíta funkciu f s jedným vstupom, pre ktorú platí

$$f(x_1) = \begin{cases} k, & \text{ak } x_1 = 2k, \\ k+1, & \text{ak } x_1 = 2k+1. \end{cases}$$

(Inými slovami, platí $f(x) = \lceil x/2 \rceil$.)

Turingov stroj $\{s_0 00Rs_1, s_1 10Rs_2, s_2 00Ns_2, s_2 11Rs_1\}$ zasa počítal funkciu g s jedným vstupom, pre ktorú platí

$$g(x_1) \begin{cases} \text{nie je definované}, & \text{ak } x_1 = 2k, \\ = k+1, & \text{ak } x_1 = 2k+1. \end{cases}$$

Všimnime si, že malá úprava tohto stroja $\{s_0 00Rs_1, s_1 10Rs_2, s_2 00Rs_2, s_2 11Rs_1\}$ počíta tú istú funkciu g. Vidíme teda, že jednu funkciu môže počítať i viacero rôznych Turingových strojov. Avšak naopak to neplatí – každý Turingov stroj počíta práve jednu funkciu s daným počtom vstupov.

Doteraz sme hľadali funkcie počítané danými Turingovými strojmi. Úloha je však veľmi často úplne opačná – k danej funkcii treba nájsť Turingov stroj, ktorý ju počíta.

Skúsme teda nájsť (čiže naprogramovať) Turingov stroj, ktorý počíta obvyklú funkciu $\mathtt{Súčet}$. Tá má dva argumenty, ako vstup výsledného Turingovho stroja teda bude slúžiť ľubovoľná dvojica prirodzených čísel. Zároveň je táto funkcia *totálna* (teda jej definičný obor je celá množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$), Turingov stroj teda musíme naprogramovať tak, aby zastal pre každý vstup. Vieme, že pri vstupe $\langle x_1, x_2 \rangle$ je na začiatku na páske $(x_1 + 1) + (x_2 + 1)$ jednotiek, čo je o dve viac, než treba mať na konci výpočtu. Úlohou teda bude dve z týchto jednotiek zmeniť na nuly. Ktoré to budú? Máme, pravdaže, viacero možností. Zdanlivo najjednoduchšia je vymazať prvé dve jednotky, vec má však háčik – čo ak bude prvý vstup 0? Druhá vymazaná jednotka bude musieť byť v takom prípade z druhého bloku, a navyše budeme musieť testovať, či tento prípad nastáva, alebo nie. Tomuto testovaniu sa vyhneme, ak budeme (spolu s prvou jednotkou prvého bloku) mazať (čiže nahradzovať nulou) prvú jednotku druhého bloku pre úplne každý vstup. Vezmime si teda nejaký netriviálny vstup, napríklad $\langle 3, 2 \rangle$ (takže na konci má na páske zostať $\mathtt{Súčet}(3, 2)$ čiže 5 jednotiek):

$\mathtt{s_0}$	$\boxed{0}$	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	…

Najprv sa pomocou inštrukcie $\mathtt{s_0 00R s_1}$ posunieme na susednú jednotku:

$\mathtt{s_1}$	0	$\boxed{1}$	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	…

Ďalšou inštrukciou $\mathtt{s_1 10R s_2}$ ju vymažeme. (Pokiaľ ide o stav, tu by bolo fatálnou chybou nezmeniť ho, príslušná inštrukcia $\mathtt{s_1 10R s_1}$ by sa totiž nevykonala iba raz, ale nenávratne by vymazala celý prvý blok jednotiek.) Dostávame tak konfiguráciu

$\mathtt{s_2}$	0	0	$\boxed{1}$	1	1	0	1	1	1	0	0	0	…

Teraz je naším cieľom prejsť celým zvyšným blokom jednotiek. V našom prípade sú tri, na prechod by preto stačilo použiť tri ďalšie inštrukcie. Uvedomme si však, že náš program túto hodnotu x_1 nepozná (vstupná konfigurácia je predsa zadávaná až neskôr), musí si preto poradiť s ľubovoľnou jej veľkosťou. Našťastie existuje elegantné riešenie – stačí použiť inštrukciu $\mathtt{s_2 11R s_2}$. Ako ľahko vidieť, po jej prvom vykonaní sme opäť v rovnakom stave $\mathtt{s_2}$ a hlava je opäť na znaku $\mathtt{1}$, preto sa táto inštrukcia použije vzápätí znova. Toto sa bude opakovať v našom prípade trikrát, vo všeobecnosti x_1-krát, až kým nenarazíme na deliacu nulu. Dostávame tak postupne konfigurácie

$\mathtt{s_2}$	0	0	1	$\boxed{1}$	1	0	1	1	1	0	0	0	…
$\mathtt{s_2}$	0	0	1	1	$\boxed{1}$	0	1	1	1	0	0	0	…
$\mathtt{s_2}$	0	0	1	1	1	$\boxed{0}$	1	1	1	0	0	0	…

Teraz sa už jednoducho posunieme z deliacej nuly na prvú jednotku druhého bloku, pričom musíme zmeniť stav, aby sme nechtiac v stave $\mathtt{s_2}$ neprešli cez celý druhý blok až na jeho koniec. Vykonáme teda inštrukciu $\mathtt{s_2 00R s_3}$, čím dostávame

$\mathtt{s_3}$	0	0	1	1	1	0	$\boxed{1}$	1	1	0	0	0	…

Napokon stačí vymazať jednotku, na ktorej je hlava nastavená, a keďže sa tým pádom získa správny počet jednotiek, zmeníme stav na doposiaľ nepoužitý, aby sme mali záruku, že výpočet už nebude pokračovať. Môžeme to docieliť napríklad inštrukciou $\mathtt{s_3 10N s_4}$:

$\mathtt{s_4}$	0	0	1	1	1	0	$\boxed{0}$	1	1	0	0	0	…

Výsledný Turingov stroj je teda $\{\mathtt{s_0 00R s_1}, \mathtt{s_1 10R s_2}, \mathtt{s_2 11R s_2}, \mathtt{s_2 00R s_3}, \mathtt{s_3 10N s_4}\}$.

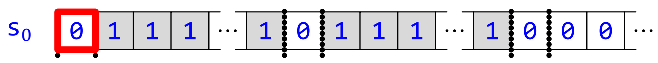
Zostrojme ešte Turingov stroj, ktorý počíta funkciu Rozdiel. Tá má tiež dva argumenty, ako vstup výsledného Turingovho stroja teda bude slúžiť ľubovoľná dvojica prirodzených čísel. Na rozdiel od predchádzajúcej funkcie však táto totálna nie je – veď napr. hodnota Rozdiel$(1,2)$ nie je (v obore prirodzených čísel) definovaná. Znamená to, že pre niektoré vstupy (presnejšie pre práve tie $\langle x_1, x_2\rangle$, pre ktoré platí $x_1 < x_2$) sa výpočet na Turingovom stroji nesmie zastaviť.

Myšlienka Turingovho stroja, ktorý budeme o chvíľu konštruovať, je (pre kladné x_1 a x_2) založená na rovnosti hodnôt Rozdiel(x_1, x_2) a Rozdiel$(x_1 - 1, x_2 - 1)$ (a v prípade, že nie je jedna z nich definovaná, ani druhá nie je definovaná). Budeme preto striedavo mazať jednotky (teda prepisovať ich nulami) z oboch blokov (pričom začneme druhým), a to až dovtedy, kým jeden z blokov nezanikne.

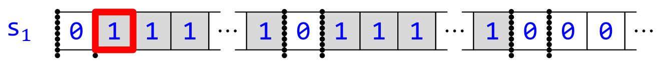
- V prípade, že skôr zanikne druhý blok, platí $x_1 \geq x_2$, a teda výsledkom je počet jednotiek v (už redukovanom) prvom bloku, avšak zmenšený o 1 (keďže sme začali mazať z druhého bloku, z prvého sme zatiaľ vymazali o jednu jednotku menej).
- V prípade, že skôr zanikne prvý blok, platí $x_1 < x_2$, a teda výpočet na stroji sa nemá zastaviť.

Ešte sa musíme rozhodnúť, ktoré jednotky z oboch blokov budeme mazať. Všetky možnosti tu síce vedú k cieľu, ak však budeme mazať prvú jednotku z prvého bloku a poslednú z druhého, zachováme si výhodu existencie jedinej deliacej nuly.

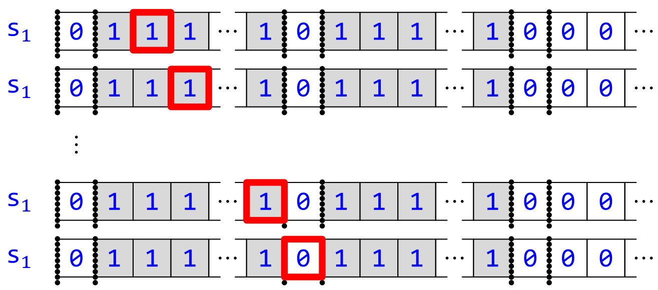
Majme teda blokovú konfiguráciu s páskou kódujúcou dvojicu $\langle x_1, x_2\rangle$:



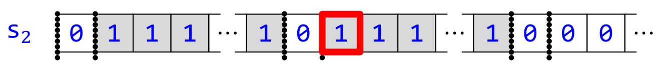
Najprv sa musíme presunúť na poslednú jednotku druhého bloku. Na prechod jednotkami prvého bloku stačí posun na susednú jednotku pomocou inštrukcie $s_0$00Rs_1:



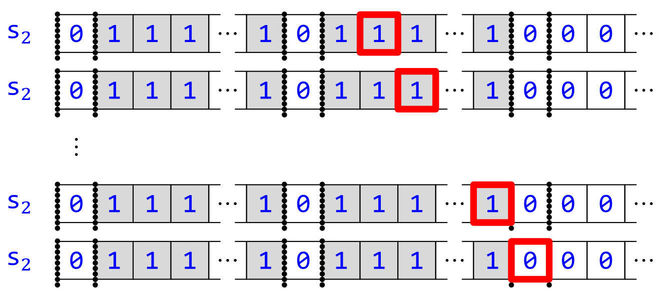
a niekoľkokrát použitá inštrukcia $s_1$11Rs_1:



Cez deliacu nulu prejdeme pomocou inštrukcie $s_1$00Rs_2:



Prechod cez druhý blok zabezpečí inštrukcia $s_2$11Rs_2:



Jedným krokom späť – pomocou inštrukcie $s_2\mathtt{00L}s_3$ – sa dostaneme na požadovanú poslednú jednotku druhého bloku:

s_3 0 1 ⋯ 1 1 1 0 1 ⋯ 1 1 $\boxed{1}$ 0 0 0 ⋯

Pomocou inštrukcie $s_3\mathtt{10L}s_4$ vymažeme jednotku pod hlavou a posunieme sa doľava:

s_4 0 1 ⋯ 1 1 1 0 1 ⋯ 1 $\boxed{1}$ 0 0 0 0 ⋯

Teraz musíme skontrolovať, či sme týmto vymazaním nespôsobili úplný zánik druhého bloku:

- Ak je písmeno hlavy $\mathtt{0}$, znamená to, že druhý blok sa minul (t. j. x_2 bolo 0) a sme na deliacej nule:

  s_4 0 1 ⋯ 1 1 1 $\boxed{0}$ 0 0 ⋯

  Ako sme už povedali, v takom prípade ešte treba vymazať jednu jednotku z prvého bloku, najjednoduchšie poslednú. Na tú sa presunieme pomocou inštrukcie $s_4\mathtt{00L}s_9$ (stavy s_5, s_6, s_7 a s_8 ešte budeme potrebovať):

  s_9 0 1 ⋯ 1 1 $\boxed{1}$ 0 0 0 ⋯

  A teraz samotné vymazanie pomocou inštrukcie $s_9\mathtt{10N}s_{10}$:

  s_{10} 0 1 ⋯ 1 1 $\boxed{0}$ 0 0 0 ⋯

  Na páske tak ostalo práve x_1 jednotiek, čo sme potrebovali.
- Ak je znak hlavy $\mathtt{1}$, znamená to, že druhý blok sa ešte neminul, a treba sa teda presunúť na prvú jednotku prvého bloku. Po vykonaní inštrukcie $s_4\mathtt{11L}s_5$ teda dostávame

  s_5 0 1 ⋯ 1 1 1 0 1 ⋯ 1 1 $\boxed{1}$ 0 0 0 0 ⋯

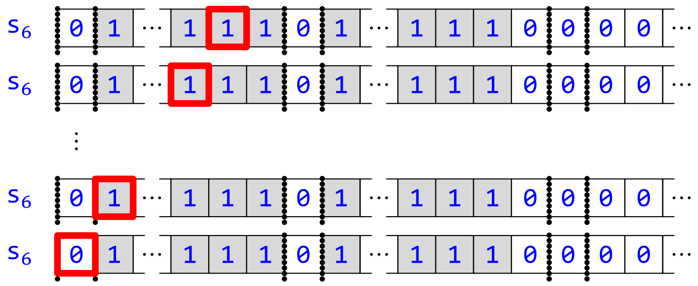
  Cez druhý blok prejdeme opakovaným vykonaním inštrukcie $s_5\mathtt{11L}s_5$:

  s_5 0 1 ⋯ 1 1 1 0 1 ⋯ 1 $\boxed{1}$ 1 0 0 0 0 ⋯
  s_5 0 1 ⋯ 1 1 1 0 1 ⋯ $\boxed{1}$ 1 1 0 0 0 0 ⋯
  ⋮
  s_5 0 1 ⋯ 1 1 1 0 $\boxed{1}$ ⋯ 1 1 1 0 0 0 0 ⋯
  s_5 0 1 ⋯ 1 1 1 $\boxed{0}$ 1 ⋯ 1 1 1 0 0 0 0 ⋯

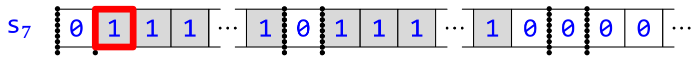
  cez deliacu nulu jednorazovo inštrukciou $s_5\mathtt{00L}s_6$:

  s_6 0 1 ⋯ 1 1 $\boxed{1}$ 0 1 ⋯ 1 1 1 0 0 0 0 ⋯

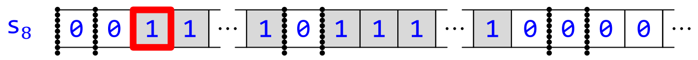
  a cez prvý blok niekoľkonásobným použitím inštrukcie $s_6\mathtt{11L}s_6$:



Inštrukciou $s_6 00Rs_7$ sa vrátime na prvú jednotku prvého bloku:

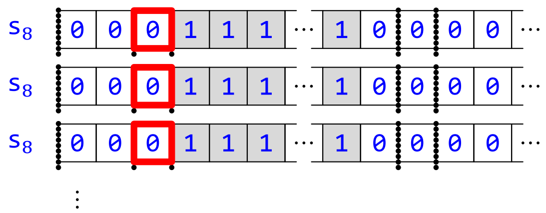


a vymažeme ju inštrukciou $s_7 10Rs_8$ (pozor, nie $s_7 10Rs_7$, to by sme stratili celý prvý blok!):

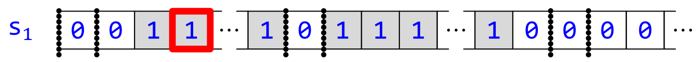


Teraz však musíme otestovať, či sme týmto vymazaním nespôsobili zánik (tentoraz prvého) bloku:

- Ak je teraz na mieste hlavy nula, prvý blok jednotiek sa práve minul, a vtedy, ako vieme, sa výpočet nemá skončiť. Tu nám pomôže napríklad inštrukcia $s_8 00Ns_8$, ktorej opakované vykonávanie sa už nikdy neskončí:



- Ak je však na mieste hlavy jednotka, prvý blok jednotiek sa ešte neminul. V takom prípade však stačí použiť inštrukciu $s_8 11Rs_1$:

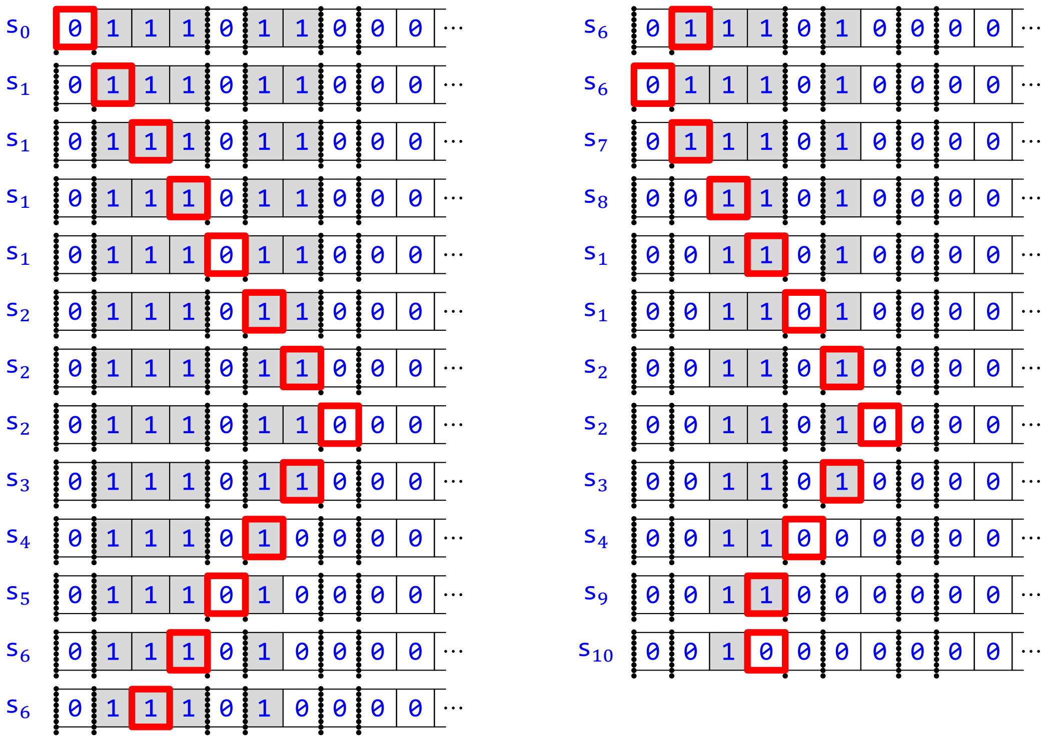


Tak sa totiž dostaneme do situácie, v ktorej sme už raz boli, jediným rozdielom je, že v oboch blokoch ubudlo po jednej jednotke. A celý cirkus sa môže začať nanovo.

„Vyzbieraním" všetkých použitých inštrukcií dostávame výsledný Turingov stroj

$$\{s_0 00Rs_1, s_1 00Rs_2, s_1 11Rs_1, s_2 00Ls_3, s_2 11Rs_2, s_3 10Ls_4, s_4 00Ls_9, s_4 11Ls_5,$$
$$s_5 00Ls_6, s_5 11Ls_5, s_6 00Rs_7, s_6 11Ls_6, s_7 10Rs_8, s_8 00Ns_8, s_8 11Rs_1, s_9 10Ns_{10}\}.$$

Jeho prácu ilustrujme na vstupe $\langle 2, 1\rangle$, očakávaný výstup by teda mal byť $\mathtt{Rozdiel}(2, 1)$ čiže 1:



A ešte jedna ukážka, tentoraz pre vstup ⟨1, 2⟩. Keďže hodnota `Rozdiel`(1, 2) nie je definovaná, výpočet sa nezastaví:

Aj pri týchto odkrokovaniach sme si mohli všimnúť, že napriek svojej extrémnej jednoduchosti sú Turingove stroje schopné simulovať ako vetvenie, tak i cyklus.

1.2 Formalizácia základných pojmov

V tejto stati budeme formalizovať všetky pojmy zo state predchádzajúcej. Začnime inštrukciami a programom Turingovho stroja:

D
- *Stavmi* nazývame všetky prirodzené čísla, ich množinu označíme $\mathtt{Stavy}$.
- *Písmenami* nazývame čísla 0 a 1, ich množinu označíme $\mathtt{Písmená}$.
- *Posunmi* nazývame čísla 0, 1 a 2, ich množinu označíme $\mathtt{Posuny}$.

P Budeme používať tieto sprehľadňujúce označenia:

- Pri stavoch namiesto i budeme často písať $\mathtt{s}_i$, farebne budeme v takom prípade zapisovať aj konkrétny index.
- Pri písmenách namiesto 0 a 1 budeme písať $\mathtt{0}$, resp. $\mathtt{1}$.
- Pri posunoch namiesto 0, 1 a 2 budeme písať (v tomto poradí) $\mathtt{L}$ („left“ – vľavo), $\mathtt{N}$ („nowhere“ – nikam) a $\mathtt{R}$ („right“ – vpravo).

D *Inštrukciou* nazývame každý prvok množiny

$$(\mathtt{Stavy} \times \mathtt{Písmená}) \times (\mathtt{Písmená} \times \mathtt{Posuny} \times \mathtt{Stavy}).$$

Túto množinu označíme $\mathtt{Inštrukcie}$.

I Typickou inštrukciou je napríklad $\langle\langle \mathtt{s}_3, \mathtt{1}\rangle, \langle \mathtt{0}, \mathtt{L}, \mathtt{s}_4\rangle\rangle$ (čo je len inak zapísané $\langle\langle 3, 1\rangle, \langle 0, 0, 4\rangle\rangle$).

P Vzhľadom na jednoznačnosť a snahu o čo najjednoduchší zápis budeme špicaté zátvorky a čiarky v zápise inštrukcie vynechávať.

I Predchádzajúcu inštrukciu $\langle\langle \mathtt{s}_3, \mathtt{1}\rangle, \langle \mathtt{0}, \mathtt{L}, \mathtt{s}_4\rangle\rangle$ teda budeme zapisovať $\mathtt{s}_3\mathtt{10L}\mathtt{s}_4$ (ako sme to už napokon robili v predošlej stati).

D Definujme nasledujúce funkcie z množiny $\mathtt{Inštrukcie}$:

- $\mathtt{StarýStav}$ je funkcia do množiny $\mathtt{Stavy}$ taká, že $\mathtt{StarýStav}(\langle\langle s, x\rangle, \langle y, m, t\rangle\rangle) = s$.
- $\mathtt{StaréPísmeno}$ je funkcia do množiny $\mathtt{Písmená}$ taká, že $\mathtt{StaréPísmeno}(\langle\langle s, x\rangle, \langle y, m, t\rangle\rangle) = x$.
- $\mathtt{NovéPísmeno}$ je funkcia do množiny $\mathtt{Písmená}$ taká, že $\mathtt{NovéPísmeno}(\langle\langle s, x\rangle, \langle y, m, t\rangle\rangle) = y$.
- $\mathtt{Posun}$ je funkcia do množiny $\mathtt{Posuny}$ taká, že $\mathtt{Posun}(\langle\langle s, x\rangle, \langle y, m, t\rangle\rangle) = m$.
- $\mathtt{NovýStav}$ je funkcia do množiny $\mathtt{Stavy}$ taká, že $\mathtt{NovýStav}(\langle\langle s, x\rangle, \langle y, m, t\rangle\rangle) = t$.

I Nech $I = \mathtt{s}_3\mathtt{10L}\mathtt{s}_4$. Potom platí:

- $\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{s}_3$ $(= 3)$.
- $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = \mathtt{1}$ $(= 1)$.
- $\mathtt{NovéPísmeno}(I) = \mathtt{0}$ $(= 0)$.
- $\mathtt{Posun}(I) = \mathtt{L}$ $(= 0)$.
- $\mathtt{NovýStav}(I) = \mathtt{s}_4$ $(= 4)$.

V $\boxed{1}$

$$\boxed{\text{Ak } I \text{ je inštrukcia, tak } I = \langle\langle \mathtt{StarýStav}(I), \mathtt{StaréPísmeno}(I)\rangle, \langle \mathtt{NovéPísmeno}(I), \mathtt{Posun}(I), \mathtt{NovýStav}(I)\rangle\rangle.}$$

Nech $I = \langle\langle s, x\rangle, \langle y, m, t\rangle\rangle$. Potom platí:

I

$= \langle\langle s, x\rangle, \langle y, m, t\rangle\rangle,$

$= \langle\langle \mathtt{StarýStav}(\langle\langle s, x\rangle, \langle y, m, t\rangle\rangle), \mathtt{StaréPísmeno}(\langle\langle s, x\rangle, \langle y, m, t\rangle\rangle)\rangle,$

$\langle \mathtt{NovéPísmeno}(\langle\langle s,x\rangle,\langle y,m,t\rangle\rangle), \mathtt{Posun}(\langle\langle s,x\rangle,\langle y,m,t\rangle\rangle), \mathtt{NovýStav}(\langle\langle s,x\rangle,\langle y,m,t\rangle\rangle)\rangle\rangle$
(podľa definícií StarýStav, StaréPísmeno, NovéPísmeno, Posun a NovýStav),
$= \langle\langle \mathtt{StarýStav}(I), \mathtt{StaréPísmeno}(I)\rangle, \langle \mathtt{NovéPísmeno}(I), \mathtt{Posun}(I), \mathtt{NovýStav}(I)\rangle\rangle$.

D Budeme hovoriť, že inštrukcie I^1 a I^2 sú *v konflikte*, ak sú rôzne, ale platí $\mathtt{StarýStav}(I^1) = \mathtt{StarýStav}(I^2)$ a $\mathtt{StaréPísmeno}(I^1) = \mathtt{StaréPísmeno}(I^2)$.

I Inštrukcie $\mathtt{s_3 10Ls_4}$ a $\mathtt{s_3 10Rs_3}$ sú v konflikte: sú rôzne, $\mathtt{StarýStav}(\mathtt{s_3 10Ls_4}) = \mathtt{StarýStav}(\mathtt{s_3 10Rs_3}) = \mathtt{s_3}$ a $\mathtt{StaréPísmeno}(\mathtt{s_3 10Ls_4}) = \mathtt{StaréPísmeno}(\mathtt{s_3 10Rs_3}) = \mathtt{1}$.

I Inštrukcie $\mathtt{s_3 10Ls_4}$ a $\mathtt{s_3 10Ls_4}$ nie sú v konflikte, lebo sú rovnaké.

I $\mathtt{s_3 10Ls_4}$ a $\mathtt{s_3 00Ls_4}$ nie sú v konflikte, lebo $\mathtt{StaréPísmeno}(\mathtt{s_3 10Ls_4}) = \mathtt{1}$, ale $\mathtt{StaréPísmeno}(\mathtt{s_3 00Ls_4}) = \mathtt{0}$.

D *Turingovým strojom* (alebo častejšie len *strojom*) budeme nazývať funkciu z konečnej podmnožiny množiny $\mathtt{Stavy} \times \mathtt{Písmená}$ do množiny $\mathtt{Písmená} \times \mathtt{Posuny} \times \mathtt{Stavy}$).
Množinu Turingových strojov označíme TuringoveStroje.

P Špeciálne $\emptyset$ je tiež Turingov stroj.

I Množina inštrukcií
$$\{\mathtt{s_1 11Rs_1}, \mathtt{s_0 10Rs_1}, \mathtt{s_3 10Ns_7}, \mathtt{s_2 11Rs_2}, \mathtt{s_1 00Rs_2}, \mathtt{s_2 00Ls_3}\}$$
je Turingov stroj. Ak ho označíme T, tak platí:

- $T(\langle \mathtt{s_0}, \mathtt{1}\rangle) = \langle \mathtt{0}, \mathtt{R}, \mathtt{s_1}\rangle$,
- $T(\langle \mathtt{s_1}, \mathtt{0}\rangle) = \langle \mathtt{0}, \mathtt{R}, \mathtt{s_2}\rangle$,
- $T(\langle \mathtt{s_1}, \mathtt{1}\rangle) = \langle \mathtt{1}, \mathtt{R}, \mathtt{s_1}\rangle$,
- $T(\langle \mathtt{s_2}, \mathtt{0}\rangle) = \langle \mathtt{0}, \mathtt{L}, \mathtt{s_3}\rangle$,
- $T(\langle \mathtt{s_2}, \mathtt{1}\rangle) = \langle \mathtt{1}, \mathtt{R}, \mathtt{s_2}\rangle$,
- $T(\langle \mathtt{s_3}, \mathtt{1}\rangle) = \langle \mathtt{0}, \mathtt{N}, \mathtt{s_7}\rangle$.

P Inštrukcie Turingovho stroja možno zoradiť lexikograficky (t. j. najprv podľa stavu na prvom a potom podľa písmena na druhom mieste), možno ho teda alternatívne (a ekvivalentne) považovať za ticu lexikograficky usporiadaných inštrukcií.

I Predchádzajúci Turingov stroj teda možno chápať ako túto (lexikograficky usporiadanú) ticu:
$$\langle \mathtt{s_0 10Rs_1}, \mathtt{s_1 00Rs_2}, \mathtt{s_1 11Rs_1}, \mathtt{s_2 00Ls_3}, \mathtt{s_2 11Rs_2}, \mathtt{s_3 10Ns_7}\rangle.$$

V $\boxed{2}$

Podmnožina Turingovho stroja je Turingov stroj.

Nech T je Turingov stroj a U je jeho podmnožina. Podľa definície Turingovho stroja je T funkcia z konečnej podmnožiny množiny $\mathtt{Stavy} \times \mathtt{Písmená}$ do množiny $\mathtt{Písmená} \times \mathtt{Posuny} \times \mathtt{Stavy}$), takže aj jej zúženie U je funkcia z konečnej podmnožiny množiny $\mathtt{Stavy} \times \mathtt{Písmená}$ do množiny $\mathtt{Písmená} \times \mathtt{Posuny} \times \mathtt{Stavy}$). To však podľa definície Turingovho stroja znamená, že U je Turingov stroj.

V $\boxed{3}$

Turingove stroje sú práve konečné množiny inštrukcií, z ktorých žiadne dve nie sú v konflikte.

Nech T je Turingov stroj. Podľa definície je to konečná podmnožina $(\mathtt{Stavy} \times \mathtt{Písmená}) \times (\mathtt{Písmená} \times \mathtt{Posuny} \times \mathtt{Stavy})$, ktorej prvky sú podľa definície inštrukcie.

Nech $I^1, I^2 \in T$ a platí $\texttt{StarýStav}(I^1) = \texttt{StarýStav}(I^2)$ a $\texttt{StaréPísmeno}(I^1) = \texttt{StaréPísmeno}(I^2)$. Potom platí:

I^1

$= \langle\langle \texttt{StarýStav}(I^1), \texttt{StaréPísmeno}(I^1)\rangle, \langle \texttt{NovéPísmeno}(I^1), \texttt{Posun}(I^1), \texttt{NovýStav}(I^1)\rangle\rangle$
(podľa vety **1**),

$= \langle\langle \texttt{StarýStav}(I^1), \texttt{StaréPísmeno}(I^1)\rangle, T(\langle \texttt{StarýStav}(I^1), \texttt{StaréPísmeno}(I^1)\rangle)\rangle$
(lebo $I^1 \in T$),

$= \langle\langle \texttt{StarýStav}(I^2), \texttt{StaréPísmeno}(I^2)\rangle, T(\langle \texttt{StarýStav}(I^2), \texttt{StaréPísmeno}(I^2)\rangle)\rangle$
(podľa predpokladu),

$= \langle\langle \texttt{StarýStav}(I^2), \texttt{StaréPísmeno}(I^2)\rangle, \langle \texttt{NovéPísmeno}(I^2), \texttt{Posun}(I^2), \texttt{NovýStav}(I^2)\rangle\rangle$
(lebo $I^2 \in T$),

$= I^2$
(podľa vety **1**).

Tieto inštrukcie teda podľa definície nie sú v konflikte.

I Množina inštrukcií

$$\{\texttt{s}_1\texttt{11Rs}_1, \texttt{s}_0\texttt{10Rs}_1, \texttt{s}_3\texttt{10Ns}_7, \texttt{s}_2\texttt{11Rs}_2, \texttt{s}_1\texttt{10Rs}_2, \texttt{s}_2\texttt{00Ls}_3\}$$

nie je Turingov stroj, lebo obsahuje inštrukcie $\texttt{s}_1\texttt{11Rs}_1$ a $\texttt{s}_1\texttt{10Rs}_2$, ktoré sú v konflikte.

D Definujme funkcie $\texttt{StaréStavy}$ a $\texttt{NovéStavy}$ z množiny $\texttt{TuringoveStroje}$ takto:

- $\texttt{StaréStavy}(T) = \texttt{StarýStav}[T]$.
- $\texttt{NovéStavy}(T) = \texttt{NovýStav}[T]$.

I Ak $T = \{\texttt{s}_0\texttt{11Ls}_1, \texttt{s}_1\texttt{01Ls}_2, \texttt{s}_1\texttt{10Ns}_4, \texttt{s}_5\texttt{10Ns}_1\}$, tak platí $\texttt{StaréStavy}(T) = \{\texttt{s}_0, \texttt{s}_1, \texttt{s}_5\}$ a $\texttt{NovéStavy}(T) = \{\texttt{s}_1, \texttt{s}_2, \texttt{s}_4\}$.

V $\boxed{4}$

Nech T je Turingov stroj.
- Ak $T = \emptyset$, tak $\texttt{StaréStavy}(T) = \texttt{NovéStavy}(T) = \emptyset$.
- Ak $T \neq \emptyset$, tak $\texttt{StaréStavy}(T) \neq \emptyset$ a $\texttt{NovéStavy}(T) \neq \emptyset$.

- - Podľa definície StaréStavy platí $\texttt{StaréStavy}(\emptyset) = \texttt{StarýStav}[\emptyset] = \emptyset$.
  - Podľa definície NovéStavy platí $\texttt{NovéStavy}(\emptyset) = \texttt{NovýStav}[\emptyset] = \emptyset$.
- Podľa vety **3** je T množina inštrukcií. Keďže je neprázdna, existuje v nej inštrukcia I.
  - Podľa definície StaréStavy platí $\texttt{StarýStav}(I) \in \texttt{StarýStav}[T] = \texttt{StaréStavy}(T)$.
  - Podľa definície NovéStavy platí $\texttt{NovýStav}(I) \in \texttt{NovýStav}[T] = \texttt{NovéStavy}(T)$.

V $\boxed{5}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $T_1, \dots, T_n$ sú Turingove stroje také, že pre rôzne i_1 a i_2 z $\{1, \dots, n\}$ sú množiny $\texttt{StaréStavy}(T_{i_1})$ a $\texttt{StaréStavy}(T_{i_2})$ disjunktné. Potom $\bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} T_i$ je Turingov stroj.

Pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ je podľa vety **3** T_i konečná množina inštrukcií, takže $\bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} T_i$ je konečná množina inštrukcií.

Nech sú dve z nich, I^1 a I^2, v konflikte. Pre žiadne i z $\{1, \dots, n\}$ podľa vety **3** ich T_i nemôže obsahovať naraz, takže existujú rôzne i^1 a i^2 z $\{1, \dots, n\}$ také, že I^1 patrí do T_{i^1} a I^2 do T_{i^2}. Podľa definície StaréStavy potom platí $\texttt{StarýStav}(I^1) \in \texttt{StarýStav}[T_{i^1}] = \texttt{StaréStavy}(T_{i^1})$ a opäť podľa definície StaréStavy platí $\texttt{StarýStav}(I^2) \in \texttt{StarýStav}[T_{i^2}] = \texttt{StaréStavy}(T_{i^2})$, takže podľa predpokladu máme $\texttt{StarýStav}(I^1) \neq \texttt{StarýStav}(I^2)$. To je však spor.

Podľa vety **3** je teda $\bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} T_i$ Turingov stroj.

D Definujme funkciu $\texttt{PoužitéStavy}$ z množiny $\texttt{TuringoveStroje}$ takto:
Ak T je Turingov stroj, tak

$$\texttt{PoužitéStavy}(T) = \texttt{StaréStavy}(T) \cup \texttt{NovéStavy}(T).$$

I Ak $T = \{\texttt{s}_0\texttt{11Ls}_1, \texttt{s}_1\texttt{01Ls}_2, \texttt{s}_1\texttt{10Ns}_4, \texttt{s}_5\texttt{10Ns}_1\}$, tak $\texttt{PoužitéStavy}(T) = \{\texttt{s}_0, \texttt{s}_1, \texttt{s}_2, \texttt{s}_4, \texttt{s}_5\}$.

V $\boxed{6}$

Nech T je Turingov stroj. Potom $T = \emptyset$ práve vtedy, keď $\texttt{PoužitéStavy}(T) = \emptyset$.

- Nech $T = \emptyset$.
  Potom platí:
  $\texttt{PoužitéStavy}(T)$
  $= \texttt{PoužitéStavy}(\emptyset)$,
  $= \texttt{StaréStavy}(\emptyset) \cup \texttt{NovéStavy}(\emptyset)$
  (podľa definície $\texttt{PoužitéStavy}$),
  $= \emptyset \cup \emptyset$
  (podľa vety **4**),
  $= \emptyset$.
- Nech $T \neq \emptyset$.
  Potom platí:
  $\texttt{PoužitéStavy}(T)$
  $= \texttt{StaréStavy}(T) \cup \texttt{NovéStavy}(T)$
  (podľa definície $\texttt{PoužitéStavy}$),
  $\neq \emptyset$
  (podľa vety **4**).

D Definujme funkciu $\texttt{HyperaktívneStavy}$ z množiny $\texttt{TuringoveStroje}$ takto:
Ak T je Turingov stroj, tak

$$\texttt{HyperaktívneStavy}(T) = \{s \in \texttt{Stavy} : (\exists I_0 \in T)(\texttt{StarýStav}(I_0) = s \land \texttt{StaréPísmeno}(I_0) = \texttt{0}) \land (\exists I_1 \in T)(\texttt{StarýStav}(I_1) = s \land \texttt{StaréPísmeno}(I_1) = \texttt{1})\}.$$

Prvky z tejto množiny nazveme *hyperaktívne stavy* Turingovho stroja T.

I Ak $T = \{\texttt{s}_0\texttt{11Ls}_1, \texttt{s}_1\texttt{01Ls}_2, \texttt{s}_1\texttt{10Ns}_4, \texttt{s}_5\texttt{00Ns}_1\}$, tak platí:

- $\texttt{s}_0 \notin \texttt{HyperaktívneStavy}(T)$, lebo v T neexistuje inštrukcia začínajúca sa na $\texttt{s}_0\texttt{0}$.
- $\texttt{s}_1 \in \texttt{HyperaktívneStavy}(T)$, lebo v T existuje ako inštrukcia začínajúca sa na $\texttt{s}_1\texttt{0}$, tak inštrukcia začínajúca sa na $\texttt{s}_1\texttt{1}$.
- $\texttt{s}_5 \notin \texttt{HyperaktívneStavy}(T)$, lebo v T neexistuje inštrukcia začínajúca sa na $\texttt{s}_5\texttt{1}$.
- Žiaden iný stav už nie je hyperaktívny, lebo v T neexistuje žiadna inštrukcia, ktorá by sa naň začínala.

Zhrnutím teda $\texttt{HyperaktívneStavy}(T) = \{\texttt{s}_1\}$.

V $\boxed{7}$

Nech T je Turingov stroj. Potom $\texttt{HyperaktívneStavy}(T) \subseteq \texttt{StaréStavy}(T)$.

$s \in \texttt{HyperaktívneStavy}(T)$
(predpoklad s cieľom $s \in \texttt{StaréStavy}(T)$),
$(\exists I_0 \in T)(\texttt{StarýStav}(I_0) = s \land \texttt{StaréPísmeno}(I_0) = \texttt{0}) \land$
$\land (\exists I_1 \in T)(\texttt{StarýStav}(I_1) = s \land \texttt{StaréPísmeno}(I_1) = \texttt{1})$
(podľa definície $\texttt{HyperaktívneStavy}$),

$(\exists I_0 \in T)(\mathtt{Star\acute{y}Stav}(I_0) = s \wedge \mathtt{Star\acute{e}P\acute{i}smeno}(I_0) = \mathtt{0})$
(vynechali sme jednu časť konjunkcie),
$(\exists I_0 \in T)\mathtt{Star\acute{y}Stav}(I_0) = s$
(vynechali sme jednu časť konjunkcie),
$s \in \mathtt{Star\acute{y}Stav}[T]$,
$s \in \mathtt{Star\acute{e}Stavy}(T)$
(podľa definície StaréStavy).

D Definujme funkciu PasívneStavy z množiny TuringoveStroje takto:
Ak T je Turingov stroj, tak

$$\mathtt{Pas\acute{i}vneStavy}(T) = \mathtt{Pou\check{z}it\acute{e}Stavy}(T) \setminus \mathtt{Star\acute{e}Stavy}(T).$$

Prvky z tejto množiny nazveme *pasívne stavy* Turingovho stroja T.

I Ak $T = \{\mathtt{s}_0\mathtt{11L}\mathtt{s}_1, \mathtt{s}_1\mathtt{01L}\mathtt{s}_2, \mathtt{s}_1\mathtt{10N}\mathtt{s}_4, \mathtt{s}_5\mathtt{00N}\mathtt{s}_1\}$, tak $\mathtt{Pas\acute{i}vneStavy}(T) = \{\mathtt{s}_2, \mathtt{s}_4\}$.

D Definujme funkciu Max z množiny konečných podmnožín množiny ℕ do množiny ℕ takto:

$$\mathtt{Max}(A) = \begin{cases} 0, & \text{ak } A = \emptyset, \\ \max(A) & \text{inak.} \end{cases}$$

V $\boxed{\mathbf{8}}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \ldots, A_n$ sú konečné podmnožiny ℕ. Potom $\mathtt{Max}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} A_i) = \mathtt{Max}(\{\mathtt{Max}(A_1), \ldots, \mathtt{Max}(A_n)\})$.

Nech $I = \{i \in \{1, \ldots, n\} : A_i \neq \emptyset\}$. Rozoberme tri prípady:

- Nech $n = 0$ (z čoho $I = \emptyset$).
  Potom platí:
  $\mathtt{Max}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} A_i)$
  $= \mathtt{Max}(\emptyset)$
  (lebo $n = 0$),
  $= \mathtt{Max}(\{\mathtt{Max}(A_1), \ldots, \mathtt{Max}(A_n)\})$
  (lebo $n = 0$).
- Nech $n > 0$ a $I = \emptyset$.
  Potom platí:
  $\mathtt{Max}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} A_i)$
  $= \mathtt{Max}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \emptyset)$
  (lebo $I = \emptyset$),
  $= \mathtt{Max}(\emptyset)$,
  $= 0$
  (podľa definície Max),
  $= \max(\{0\})$,
  $= \mathtt{Max}(\{0\})$
  (podľa definície Max),
  $= \mathtt{Max}(\{\mathtt{Max}(\emptyset)\})$
  (podľa definície Max),
  $= \mathtt{Max}(\{\mathtt{Max}(A_1), \ldots, \mathtt{Max}(A_n)\})$
  (lebo $I = \emptyset$).
- Nech $I \neq \emptyset$ (z čoho $n > 0$).
  Potom platí:
  $\mathtt{Max}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} A_i)$

$= \texttt{Max}(\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}\setminus I} A_i)$
(lebo $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$),
$= \texttt{Max}(\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}\setminus I} \emptyset)$
(podľa definície I),
$= \texttt{Max}(\bigcup_{i\in I} A_i \cup \emptyset)$,
$= \texttt{Max}(\bigcup_{i\in I} A_i)$,
$= \max(\bigcup_{i\in I} A_i)$
(podľa definície Max, keďže $\bigcup_{i\in I} A_i \neq \emptyset$),
$= \max(\{\max(A_i) : i \in I\})$,
$= \max(\{\max(A_i) : i \in I\} \cup \{0\})$
(lebo pre i z I platí $0 \leq \max(A_i)$),
$= \max(\{\texttt{Max}(A_i) : i \in I\} \cup \{\texttt{Max}(A_i) : i \in \{1,\ldots,n\} \setminus I\})$
(podľa definície Max),
$= \max(\{\texttt{Max}(A_1),\ldots,\texttt{Max}(A_n)\})$,
$= \texttt{Max}(\{\texttt{Max}(A_1),\ldots,\texttt{Max}(A_n)\})$
(podľa definície Max, keďže $n > 0$).

D Definujme funkciu MaximálnyStav (skrátene MS) z množiny TuringoveStroje do množiny Stavy takto:
Ak T je Turingov stroj, tak

$$\texttt{MaximálnyStav}(T) = \texttt{Max}(\texttt{PoužitéStavy}(T)).$$

I Ak $T = \{\mathtt{s}_0\mathtt{11Ls}_1, \mathtt{s}_1\mathtt{01Ls}_2, \mathtt{s}_1\mathtt{10Ns}_4, \mathtt{s}_5\mathtt{00Ns}_1\}$, tak $\texttt{MS}(T) = \texttt{Max}(\{\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_1, \mathtt{s}_2, \mathtt{s}_4, \mathtt{s}_5\}) = \max(\{0,1,2,4,5\}) = 5 = \mathtt{s}_5$.

V $\boxed{9}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i$ je Turingov stroj. Potom platí:
- $\texttt{StaréStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i) = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \texttt{StaréStavy}(T_i)$.
- $\texttt{NovéStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i) = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \texttt{NovéStavy}(T_i)$.
- $\texttt{PoužitéStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i) = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \texttt{PoužitéStavy}(T_i)$.
- $\texttt{PasívneStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i) \subseteq \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \texttt{PasívneStavy}(T_i)$.
- $\texttt{HyperaktívneStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i) \supseteq \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \texttt{HyperaktívneStavy}(T_i)$.
- Ak sú navyše pre každé rôzne i_1 a i_2 z $\{1,\ldots,n\}$ sú množiny $\texttt{StaréStavy}(T_{i_1})$ a $\texttt{StaréStavy}(T_{i_2})$ disjunktné, tak $\texttt{HyperaktívneStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i) = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \texttt{HyperaktívneStavy}(T_i)$.
- $\texttt{MS}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i) = \texttt{Max}\{\texttt{MS}(T_1),\ldots,\texttt{MS}(T_n)\}$.

Podľa vety **2** máme, že pre každé i z $\{1,\ldots,n\}$ je T_i Turingov stroj, všetky uvedené množiny teda existujú.

- $\texttt{StaréStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i)$
  $= \texttt{StarýStav}[\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i]$
  (podľa definície StaréStavy),
  $= \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \texttt{StarýStav}[T_i]$,
  $= \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \texttt{StaréStavy}(T_i)$
  (podľa definície StaréStavy).
- $\texttt{NovéStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i)$
  $= \texttt{NovýStav}[\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i]$
  (podľa definície NovéStavy),
  $= \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \texttt{NovýStav}[T_i]$,
  $= \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \texttt{NovéStavy}(T_i)$
  (podľa definície NovéStavy).
- $\texttt{PoužitéStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i)$,
  $= \texttt{StaréStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} T_i) \cup \texttt{NovéStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}})$

(podľa definície $\texttt{PoužitéStavy}$),
$= \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \texttt{StaréStavy}(T_i) \cup \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \texttt{NovéStavy}(T_i)$
(podľa už dokázaných častí),
$= \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}}(\texttt{StaréStavy}(T_i) \cup \texttt{NovéStavy}(T_i))$
$= \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \texttt{PoužitéStavy}(T_i)$
(podľa definície $\texttt{PoužitéStavy}$).

- $\texttt{PasívneStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i)$,
$= \texttt{PoužitéStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i) \setminus \texttt{StaréStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i)$
(podľa definície $\texttt{PasívneStavy}$),
$= \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \texttt{PoužitéStavy}(T_i) \setminus \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \texttt{StaréStavy}(T_i)$
(podľa už dokázaných častí),
$\subseteq \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}}(\texttt{PoužitéStavy}(T_i) \setminus \texttt{StaréStavy}(T_i))$
(lebo $\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} A_i \setminus \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} B_i \subseteq \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}}(A_i \setminus B_i)$),
$= \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \texttt{PasívneStavy}(T_i)$
(podľa definície $\texttt{PasívneStavy}$).

- Nech $\triangle$ v piatej časti vety znamená $\supseteq$ a v šiestej $=$. Potom platí:
$\texttt{HyperaktívneStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i)$,
$= \{s \in \texttt{Stavy}:$
$(\exists I_0 \in \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i)(\texttt{StarýStav}(I_0) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_0) = \texttt{0}) \wedge$
$(\exists I_1 \in \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i)(\texttt{StarýStav}(I_1) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_1) = \texttt{1})\}$
(podľa definície $\texttt{HyperaktívneStavy}$),
$= \{s \in \texttt{Stavy} : \exists I_0 \exists I_1 (I_0 \in \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i \wedge I_1 \in \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i \wedge$
$\wedge \texttt{StarýStav}(I_0) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_0) = \texttt{0} \wedge \texttt{StarýStav}(I_1) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_1) = \texttt{1})\}$,
$= \{s \in \texttt{Stavy} : \exists I_0 \exists I_1((\exists i_0 \in \{1,\dots,n\})(I_0 \in T_{i_0}) \wedge (\exists i_1 \in \{1,\dots,n\})(I_1 \in T_{i_1}) \wedge$
$\wedge \texttt{StarýStav}(I_0) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_0) = \texttt{0} \wedge \texttt{StarýStav}(I_1) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_1) = \texttt{1})\}$,
$= \{s \in \texttt{Stavy} : \exists I_0 \exists I_1((\exists i \in \{1,\dots,n\})(I_0 \in T_i \wedge I_1 \in T_i) \vee (\exists i_0, i_1 \in \{1,\dots,n\})(i_0 \neq i_1 \wedge I_0 \in T_{i_0} \wedge I_1 \in T_{i_1}) \wedge$
$\wedge \texttt{StarýStav}(I_0) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_0) = \texttt{0} \wedge \texttt{StarýStav}(I_1) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_1) = \texttt{1})\}$
(rozlíšili sme prípady $i_0 = i_1$ a $i_0 \neq i_1$),
$\triangle\ \{s \in \texttt{Stavy} : \exists I_0 \exists I_1((\exists i \in \{1,\dots,n\})(I_0 \in T_i \wedge I_1 \in T_i) \wedge$
$\wedge \texttt{StarýStav}(I_0) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_0) = \texttt{0} \wedge \texttt{StarýStav}(I_1) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_1) = \texttt{1})\}$
(v prípade piatej časti vety sme len vynechali časť disjunkcie a v prípade šiestej časti vynechaný prípad $i_0 \neq i_1$ nemôže nastať, lebo vtedy pre obe j z $\{0,1\}$ podľa definície $\texttt{StaréStavy}$ $s = \texttt{StarýStav}(I_j) \in \texttt{StarýStav}[T_{i_j}] = \texttt{StaréStavy}(T_{i_j})$, čo je však spor s predpokladom disjunktnosti týchto množín),
$= \{s \in \texttt{Stavy} : (\exists i \in \{1,\dots,n\})\exists I_0 \exists I_1 (I_0 \in T_i \wedge I_1 \in T_i \wedge$
$\wedge \texttt{StarýStav}(I_0) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_0) = \texttt{0} \wedge \texttt{StarýStav}(I_1) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_1) = \texttt{1})\}$,
$= \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}}\{s \in \texttt{Stavy} : \exists I_0 \exists I_1 (I_0 \in T_i \wedge I_1 \in T_i \wedge$
$\wedge \texttt{StarýStav}(I_0) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_0) = \texttt{0} \wedge \texttt{StarýStav}(I_1) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_1) = \texttt{1})\}$,
$= \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}}\{s \in \texttt{Stavy}:$
$(\exists I_0 \in T_i)(\texttt{StarýStav}(I_0) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_0) = \texttt{0}) \wedge$
$(\exists I_1 \in T_i)(\texttt{StarýStav}(I_1) = s \wedge \texttt{StaréPísmeno}(I_1) = \texttt{1})\}$,
$= \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \texttt{HyperaktívneStavy}(T_i)$
(podľa definície $\texttt{HyperaktívneStavy}$).

- $\texttt{MS}(\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i)$
$= \texttt{Max}(\texttt{PoužitéStavy}(\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i))$
(podľa definície $\texttt{MS}$),
$= \texttt{Max}(\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \texttt{PoužitéStavy}(T_i))$
(podľa už dokázanej časti),
$= \texttt{Max}\{\texttt{Max}(\texttt{PoužitéStavy}(T_1)),\dots,\texttt{Max}(\texttt{PoužitéStavy}(T_n))\}$
(podľa vety **8**),
$= \texttt{Max}\{\texttt{MS}(T_1),\dots,\texttt{MS}(T_n)\}$
(pre každé i z $\{1,\dots,n\}$ podľa definície $\texttt{MS}$).

P Ani v jednej z častí s inklúziami neplatí opačná inklúzia:

- Nech $T_1 = \{\mathtt{s_0 01Ls_1}\}$ a $T_2 = \{\mathtt{s_0 11Ls_2}\}$. Potom $T_1 \cup T_2 = \{\mathtt{s_0 01Ls_1}, \mathtt{s_0 11Ls_2}\}$, takže $\mathtt{HyperaktívneStavy}(T_1 \cup T_2) = \{\mathtt{s_0}\}$, avšak $\mathtt{HyperaktívneStavy}(T_1) \cup \mathtt{HyperaktívneStavy}(T_2) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.
- Nech $T_1 = \{\mathtt{s_0 01Ls_1}\}$ a $T_2 = \{\mathtt{s_1 11Ls_2}\}$. Potom $T_1 \cup T_2 = \{\mathtt{s_0 01Ls_1}, \mathtt{s_1 11Ls_2}\}$, takže $\mathtt{PasívneStavy}(T_1 \cup T_2) = \{\mathtt{s_2}\}$, avšak $\mathtt{PasívneStavy}(T_1) \cup \mathtt{PasívneStavy}(T_2) = \{\mathtt{s_1}\} \cup \{\mathtt{s_2}\} = \{\mathtt{s_1}, \mathtt{s_2}\}$.

V **10**

- $\mathtt{HyperaktívneStavy}(\emptyset) = \emptyset$.
- $\mathtt{PasívneStavy}(\emptyset) = \emptyset$.
- $\mathtt{MS}(\emptyset) = 0$.

- $\mathtt{HyperaktívneStavy}(\emptyset)$
  $\subseteq \mathtt{StaréStavy}(\emptyset)$
  (podľa vety **7**),
  $= \emptyset$
  (podľa vety **4**).
- $\mathtt{PasívneStavy}(\emptyset)$
  $= \mathtt{PoužitéStavy}(\emptyset) \setminus \mathtt{StaréStavy}(\emptyset)$
  (podľa definície $\mathtt{PasívneStavy}$),
  $\subseteq \mathtt{PoužitéStavy}(\emptyset)$,
  $= \emptyset$
  (podľa vety **6**).
- $\mathtt{MS}(\emptyset)$
  $= \mathtt{Max}(\mathtt{PoužitéStavy}(\emptyset))$
  (podľa definície $\mathtt{MS}$),
  $= \mathtt{Max}(\emptyset)$
  (podľa vety **6**),
  $= 0$
  (podľa definície $\mathtt{Max}$).

Teraz sa zameriame na konfiguráciu a jej položky:

D Pod *páskou* rozumieme (nekonečnú) postupnosť písmen obsahujúcu len konečne veľa písmen $\mathtt{1}$. Množinu všetkých pások označíme $\mathtt{Pásky}$.

I Páskou je napríklad funkcia p z $\mathbb{N}$ do $\mathtt{Písmená}$, pre ktorú platí:

$$p(i) = \begin{cases} \mathtt{1}, & \text{ak } i \in \{1,2,3,6,7,8,9,13,14,15\}, \\ \mathtt{0} & \text{inak.} \end{cases}$$

Jej obrázok je takýto:

0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

D Pod *prázdnou páskou* rozumieme (nekonečnú) postupnosť núl. Budeme ju zapisovať $\mathtt{0}{\to}$.

P Prázdna páska je tiež príkladom pásky (i keď trochu extrémnym). Jej obrázok je takýto:

0	0	0	⋯

D Pod *konfiguráciou* rozumieme usporiadanú trojicu $\langle s, h, p\rangle$, pričom platí:

- s je stav.

- $h \in \mathbb{N}$.
- p je páska.

Množinu všetkých konfigurácií označíme Konfigurácie.

I Konfiguráciou je napríklad trojica $\langle s_3, 4, p\rangle$, kde p je páska z predchádzajúceho príkladu. Túto konfiguráciu môžeme znázorniť nasledujúcim obrázkom:

s_3	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

D Definujme nasledujúce funkcie z množiny Konfigurácie:

- Stav je funkcia do množiny Stavy taká, že Stav$(\langle s, h, p\rangle) = s$.
- Hlava je funkcia do množiny $\mathbb{N}$ taká, že Hlava$(\langle s, h, p\rangle) = h$.
- Páska je funkcia do množiny Pásky taká, že Páska$(\langle s, h, p\rangle) = p$.

V **11**

Nech K je konfigurácia. Potom $K = \langle$Stav(K), Hlava(K), Páska$(K)\rangle$.

Nech $K = \langle s, h, p\rangle$. Potom platí:
K
$= \langle s, h, p\rangle$,
$= \langle$Stav$(\langle s, h, p\rangle)$, Hlava$(\langle s, h, p\rangle)$, Páska$(\langle s, h, p\rangle)\rangle$
(podľa definícií Stav, Hlava a Páska),
$= \langle$Stav(K), Hlava(K), Páska$(K)\rangle$.

I Ak K je konfigurácia z predchádzajúceho príkladu, tak platí:

- Stav$(K) = s_3$.
- Hlava$(K) = 4$.
- - (Páska(K))$(0) = 0$.
  - (Páska(K))$(1) = 1$.
  - (Páska(K))$(100) = 0$.

D Definujme funkciu ČítanéPísmeno z množiny Konfigurácie do množiny Písmená vzťahom

$$\text{ČítanéPísmeno}(K) = (\text{Páska}(K))(\text{Hlava}(K)).$$

P ČítanéPísmeno(K) je teda zarámčekované písmeno na obrázku konfigurácie K.

I Ak K je konfigurácia z predchádzajúceho príkladu, tak ČítanéPísmeno$(K) = 0$.

D Definujme funkciu KonfiguráciaSNulovýmStavom (skrátene KNS) z $\mathbb{N} \times$ Pásky do Konfigurácie vzťahom

$$\text{KonfiguráciaSNulovýmStavom}(h, p) = \langle s_0, h, p\rangle.$$

Každú takúto konfiguráciu budeme nazývať *konfigurácia s nulovým stavom*.

V **12**

Nech K je konfigurácia s nulovým stavom. Potom Stav$(K) = 0$.

Podľa definície konfigurácie s nulovým stavom existuje h z $\mathbb{N}$ a p z Pásky, že $K = \langle s_0, h, p\rangle$. Podľa definície Stav potom platí Stav$(K) = s_0 = 0$.

I Ak p je páska

0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

tak KNS$(4, p)$ je konfigurácia

s_0	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

Pripomeňme, že na to, aby sme mohli na danú konfiguráciu aplikovať danú inštrukciu, musia v prvom rade navzájom korešpondovať – starý stav inštrukcie sa musí zhodovať so stavom konfigurácie a staré písmeno inštrukcie musí byť hlavou aktuálne čítané písmeno pásky. Formálne tento vzťah definujeme takto:

D Hovoríme, že inštrukcia I *korešponduje* s konfiguráciou K, ak platia tieto podmienky:

- StarýStav(I) = Stav(K).
- StaréPísmeno(I) = ČítanéPísmeno(K).

I S konfiguráciou K

s_3	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

korešponduje napríklad inštrukcia $s_3$01Ls_5, pretože platia obe podmienky:

- StarýStav($s_3$01Ls_5) = s_3 = Stav(K).
- StaréPísmeno($s_3$01Ls_5) = 0 = (Páska(K))(4) = (Páska(K))(Hlava(K)) = ČítanéPísmeno(K).

Všimnime si však, že s touto konfiguráciou korešponduje i každá iná inštrukcia so začiatkom $s_3$0.

I S predchádzajúcou konfiguráciou však nekorešponduje inštrukcia $s_2$01Ls_5, lebo sa nezhodujú v stave, ani inštrukcia $s_3$11Ls_5, lebo sa nezhodujú v písmene.

V **13** (*o jednoznačnosti korešpondujúcej inštrukcie*)

Nech sú I^1 a I^2 inštrukcie z toho istého stroja korešpondujúce s tou istou konfiguráciou. Potom $I^1 = I^2$.

Nech K je predmetná konfigurácia. Potom platí:

- StarýStav(I^1)
  = Stav(K)
  (podľa definície korešpondencie),
  = StarýStav(I^2)
  (podľa definície korešpondencie).
- StaréPísmeno(I^1)
  = ČítanéPísmeno(K)
  (podľa definície korešpondencie),
  = StaréPísmeno(I^2)
  (podľa definície korešpondencie).

Ak by boli I^1 a I^2 rôzne, boli by podľa definície v konflikte, čo by však bol spor s vetou **3**. Preto $I^1 = I^2$.

V **14**

Nech T je stroj a K je konfigurácia. Potom ak Stav$(K) \in$ PasívneStavy(T), tak v T neexistuje inštrukcia korešpondujúca s K.

Nech I je inštrukcia z T, ktorá korešponduje s K. Potom platí:

$\texttt{Stav}(K) \in \texttt{PasívneStavy}(T)$
(predpoklad),
$\texttt{StarýStav}(I) \in \texttt{PasívneStavy}(T)$
(podľa definície korešpondencie),
$\texttt{StarýStav}(I) \in \texttt{PoužitéStavy}(T) \setminus \texttt{StaréStavy}(T)$
(podľa definície PasívneStavy),
$\texttt{StarýStav}(I) \notin \texttt{StaréStavy}(T)$,
$\texttt{StarýStav}(I) \notin \texttt{StarýStav}[T]$
(podľa definície StaréStavy),
$I \notin T$,
čo je spor.

Podmienka korešpondencie však nemusí postačovať na pokračovanie výpočtu, lebo môže nastať istý problém spôsobený tým, že páska má začiatok. Ak je totiž hlava na začiatku pásky, inštrukcia by jej nemala prikázať ísť vľavo:

D Hovoríme, že inštrukcia I je *aplikovateľná* na konfiguráciu K, ak platia tieto podmienky:

- I korešponduje s K.
- Neplatí naraz $\texttt{Hlava}(K) = 0$ a $\texttt{Posun}(I) = \texttt{L}$.

I Na predchádzajúcu konfiguráciu je aplikovateľná spomínaná inštrukcia $\texttt{s}_3\texttt{01Ls}_5$, pretože s ňou korešponduje, a navyše platí aj podmienka $\texttt{Hlava}(K) = 4 \neq 0$.

I Na konfiguráciu K

$\texttt{s}_6$	$\boxed{1}$	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	⋯

je aplikovateľná napríklad inštrukcia $\texttt{s}_6\texttt{10Rs}_5$, pretože síce platí $\texttt{Hlava}(K) = 0$, ale $\texttt{Posun}(\texttt{s}_6\texttt{10Rs}_5) = \texttt{R} \neq \texttt{L}$. Naproti tomu inštrukcia $\texttt{s}_6\texttt{10Ls}_5$ na ňu aplikovateľná nie je, hoci s ňou korešponduje – nie je totiž splnená druhá podmienka, keďže platí ako $\texttt{Hlava}(K) = 0$, tak $\texttt{Posun}(\texttt{s}_6\texttt{10Ls}_5) = \texttt{L}$.

V **15** (*o jednoznačnosti aplikovateľnej inštrukcie*)

Nech sú I^1 a I^2 inštrukcie z toho istého stroja aplikovateľné na tú istú konfiguráciu. Potom $I^1 = I^2$.

Nech K je predmetná konfigurácia. Pre obe j z $\{1, 2\}$ podľa definície aplikovateľnosti potom I^j korešponduje s K. Podľa vety **13** to však znamená, že $I^1 = I^2$.

Touto vetou sme si zabezpečili *determinovanosť* – z daného Turingovho stroja je možné na každú konfiguráciu aplikovať buď práve jednu inštrukciu (a vtedy ju naozaj aj aplikujeme), alebo žiadnu (vtedy sa výpočet končí).

Po aplikácii (samozrejme, aplikovateľnej) inštrukcie vznikne z pôvodnej konfigurácie nová, ktorá sa od nej bude spravidla mierne líšiť – možno sa zmenilo jedno políčko pásky, možno sa hlava posunula o jedno políčko a možno nastala zmena stavu.

D Hovoríme, že inštrukcia I *mení* konfiguráciu K na konfiguráciu L, a značíme $K \xrightarrow{I} L$, ak platia tieto podmienky:

- I je aplikovateľná na K.
- $\texttt{Stav}(L) = \texttt{NovýStav}(I)$.
- $\texttt{Hlava}(L) = \texttt{Hlava}(K) + \texttt{Posun}(I) - 1$.
- $$(\texttt{Páska}(L))(i) = \begin{cases} \texttt{NovéPísmeno}(I), & \text{ak } i = \texttt{Hlava}(K), \\ (\texttt{Páska}(K))(i) & \text{inak.} \end{cases}$$

I Inštrukcia $\texttt{s}_3\texttt{01Ls}_5$ mení konfiguráciu

s_3	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

na konfiguráciu

s_5	0	1	1	$\boxed{1}$	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

V súlade s inštrukciou sa zmenil obsah políčka pôvodne čítaného hlavou, nastal posun hlavy a zmenil sa i stav.

V **16** (*o determinovanosti kroku výpočtu*)

Nech sú I^1 a I^2 inštrukcie z toho istého stroja, nech K, L^1 a L^2 konfigurácie a nech $K \xrightarrow{I^1} L^1$ a $K \xrightarrow{I^2} L^2$. Potom $I^1 = I^2$ a $L^1 = L^2$.

Pre obe j z $\{1, 2\}$ podľa definície menenia sú ako I^1, tak I^2 aplikovateľné na tú istú konfiguráciu K, a keďže sú obe z toho istého stroja, podľa vety **15** platí $I^1 = I^2$. Potom platí:

- $\texttt{Stav}(L^1)$
  $= \texttt{NovýStav}(I^1)$
  (podľa definície menenia),
  $= \texttt{NovýStav}(I^2)$
  (lebo $I^1 = I^2$),
  $= \texttt{Stav}(L^2)$
  (podľa definície menenia).
- $\texttt{Hlava}(L^1)$
  $= \texttt{Hlava}(K) + \texttt{Posun}(I^1) - 1$
  (podľa definície menenia),
  $= \texttt{Hlava}(K) + \texttt{Posun}(I^2) - 1$
  (lebo $I^1 = I^2$),
  $= \texttt{Hlava}(L^2)$
  (podľa definície menenia).
- Rozoberme dva prípady:
  - Nech $i = \texttt{Hlava}(K)$.
    Potom platí:
    $(\texttt{Páska}(L^1))(i)$
    $= \texttt{NovéPísmeno}(I^1)$
    (podľa definície menenia, lebo $i = \texttt{Hlava}(K)$),
    $= \texttt{NovéPísmeno}(I^2)$
    (lebo $I^1 = I^2$),
    $= (\texttt{Páska}(L^2))(i)$
    (podľa definície menenia, lebo $i = \texttt{Hlava}(K)$).
  - Nech $i \neq \texttt{Hlava}(K)$.
    Potom platí:
    $(\texttt{Páska}(L^1))(i)$
    $= (\texttt{Páska}(K))(i)$
    (podľa definície menenia, lebo $i \neq \texttt{Hlava}(K)$),
    $= (\texttt{Páska}(L^2))(i)$
    (podľa definície menenia, lebo $i \neq \texttt{Hlava}(K)$).

  Zhrnutím teda $\texttt{Páska}(L^1) = \texttt{Páska}(L^2)$.

Z toho dostávame $L^1 = \langle \texttt{Stav}(L^1), \texttt{Hlava}(L^1), \texttt{Páska}(L^1) \rangle = \langle \texttt{Stav}(L^2), \texttt{Hlava}(L^2), \texttt{Páska}(L^2) \rangle = L^2$.

Prejdime k vzťahom konfigurácií a Turingových strojov:

D Definujme funkciu Krok z podmnožiny Konfigurácie × TuringoveStroje do množiny Konfigurácie takto:

$$\texttt{Krok}(K,T)\begin{cases} = L, & \text{ak v stroji } T \text{ existuje inštrukcia } I \text{ taká, že } K \xrightarrow{I} L,\\ \text{nie je definované} & \text{inak.}\end{cases}$$

P Korektnosť tejto definície zabezpečuje veta **16**.

I Ak $T = \{\texttt{s}_2\texttt{11Rs}_4, \texttt{s}_3\texttt{01Ls}_5, \texttt{s}_4\texttt{01Ns}_5\}$ a K je konfigurácia

$\texttt{s}_3$	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

tak $\texttt{Krok}(K,T) = L$, kde L je konfigurácia

$\texttt{s}_5$	0	1	1	$\boxed{1}$	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

ktorá vznikla po aplikovaní inštrukcie $\texttt{s}_3\texttt{01Ls}_5$.

V **17**

Nech T je Turingov stroj a K konfigurácia. Potom $\texttt{Krok}(K,T)$ existuje práve vtedy, keď existuje inštrukcia z T aplikovateľná na K.

→ Nech $\texttt{Krok}(K,T) = L$. Potom podľa definície Krok existuje v T inštrukcia I taká, že $K \xrightarrow{I} L$. Podľa definície menenia je I aplikovateľná na K.

← Podľa definície aplikovateľnosti neplatí naraz $\texttt{Hlava}(K) = 0$ a $\texttt{Posun}(I) = \texttt{L} = 0$, takže platí $\texttt{Hlava}(K) + \texttt{Posun}(I) \geq 1$. Môžeme teda definovať konfiguráciu L takto:

- $\texttt{Stav}(L) = \texttt{NovýStav}(I)$.
- $\texttt{Hlava}(L) = \texttt{Hlava}(K) + \texttt{Posun}(I) - 1$.
- $$(\texttt{Páska}(L))(i) = \begin{cases}\texttt{NovéPísmeno}(I), & \text{ak } i = \texttt{Hlava}(K),\\ (\texttt{Páska}(K))(i) & \text{inak.}\end{cases}$$

Keďže podľa predpokladu je I je aplikovateľná na K, podľa definície menenia platí $K \xrightarrow{I} L$. Potom podľa definície Krok platí $\texttt{Krok}(K,T) = L$, takže $\texttt{Krok}(K,T)$ existuje.

I V prechádzajúcom príklade hodnota $\texttt{Krok}(L,T)$ nie je definovaná, lebo v T neexistuje inštrukcia aplikovateľná na L.

V **18**

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i$ je Turingov stroj. Nech K a L sú konfigurácie. Potom $\texttt{Krok}(K, \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i) = L$ práve vtedy, keď existuje i z $\{1,\dots,n\}$, že $\texttt{Krok}(K,T_i) = L$.

$\texttt{Krok}(K, \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i) = L$,

akk existuje I z $\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} T_i$, že $K \xrightarrow{I} L$
(podľa definície Krok),

akk existuje I a existuje i z $\{1,\dots,n\}$, že I je z T_i a $K \xrightarrow{I} L$,

akk existuje i z $\{1,\dots,n\}$, že existuje I z T_i také, že $K \xrightarrow{I} L$,

akk existuje i z $\{1,\dots,n\}$, že $\texttt{Krok}(K,T_i) = L$
(podľa definície Krok).

V $\boxed{19}$

Nech T je Turingov stroj a K je konfigurácia. Potom ak existuje Krok(K,T), tak Stav$(K) \in$ StaréStavy(T).

Nech L označuje Krok(K,T). Potom postupne platí:

Krok$(K,T) = L$,

existuje I z T, že $K \xrightarrow{I} L$
  (podľa definície Krok),

existuje I z T, že I je aplikovateľná na K
  (podľa definície menenia),

existuje I z T, že I korešponduje s K
  (podľa definície aplikovateľnosti),

existuje I z T, že Stav$(K) =$ StarýStav(I)
  (podľa definície korešpondencie),

Stav$(K) \in$ StarýStav$[T]$,

Stav$(K) \in$ StaréStavy(T)
  (podľa definície StaréStavy).

Ako sme už naznačili, výpočet na Turingovom stroji môže dopadnúť dvoma spôsobmi – buď nastane konfigurácia, na ktorú už nemožno aplikovať žiadnu inštrukciu, a vtedy sa výpočet končí, alebo taká konfigurácia nenastane, a vtedy sa chod stroja nikdy nezastaví.

D *Konečným výpočtom* na Turingovom stroji T z konfigurácie K budeme nazývať konečnú postupnosť konfigurácií $((K_0, \dots, K_n))$, pre ktorú platí:

- $K_0 = K$.
- Ak $i < n$, tak $K_{i+1} =$ Krok(K_i, T).
- Hodnota Krok(K_n, T) nie je definovaná.

Konfiguráciu K_n potom nazveme *koncom* tohto výpočtu.

D *Nekonečným výpočtom* na Turingovom stroji T z konfigurácie K budeme nazývať nekonečnú postupnosť konfigurácií $(K_i : i \in \mathbb{N})$, pre ktorú platí:

- $K_0 = K$.
- Ak $i \in \mathbb{N}$, tak $K_{i+1} =$ Krok(K_i, T).

D *Výpočtom* na Turingovom stroji T z konfigurácie K budeme nazývať konečný alebo nekonečný výpočet na T z K.

I Nech $T = \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$, pričom platí:

- $I_1 =$ s$_0$00Rs$_1$.
- $I_2 =$ s$_1$10Rs$_2$.
- $I_3 =$ s$_2$11Rs$_2$.
- $I_4 =$ s$_2$00Ns$_3$.

Nech K je konfigurácia

s$_0$	$\boxed{0}$	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	⋯

Potom výpočet na Turingovom stroji T z počiatočnej konfigurácie K vyzerá takto:

K_0:	$\mathtt{s_0}$	$\boxed{0}$	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	⋯
$\xrightarrow{I_1} K_1$:	$\mathtt{s_1}$	0	$\boxed{1}$	1	1	1	0	1	1	1	0	0	⋯
$\xrightarrow{I_2} K_2$:	$\mathtt{s_2}$	0	0	$\boxed{1}$	1	1	0	1	1	1	0	0	⋯
$\xrightarrow{I_3} K_3$:	$\mathtt{s_2}$	0	0	1	$\boxed{1}$	1	0	1	1	1	0	0	⋯
$\xrightarrow{I_3} K_4$:	$\mathtt{s_2}$	0	0	1	1	$\boxed{1}$	0	1	1	1	0	0	⋯
$\xrightarrow{I_3} K_5$:	$\mathtt{s_2}$	0	0	1	1	1	$\boxed{0}$	1	1	1	0	0	⋯
$\xrightarrow{I_4} K_6$:	$\mathtt{s_3}$	0	0	1	1	1	$\boxed{0}$	1	1	1	0	0	⋯

Na konfiguráciu K_6 už nemožno aplikovať žiadnu inštrukciu z Turingovho stroja T, preto konečná postupnosť $(K_0, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6)$ je konečný výpočet na Turingovom stroji T z konfigurácie K a jeho koniec je K_6.

I Nech $T = \{I\}$, kde $I = \mathtt{s_1 00N s_1}$. Nech K je konfigurácia

$\mathtt{s_1}$	$\boxed{0}$	0	0	⋯

Keďže $K \xrightarrow{I} K$, stroj sa nikdy nezastaví, t. j. výpočet na T z K je nekonečný, a to $(K, K, K, \dots)$.
Naopak, pre konfiguráciu L

$\mathtt{s_1}$	$\boxed{1}$	0	0	⋯

je výpočet konečný, a to (L) (t. j. začiatočná konfigurácia je zároveň koncová), keďže jedinú inštrukciu I z T nemožno aplikovať na L.

V **20** (*o jednoznačnosti výpočtu*)

Nech T je Turingov stroj a K konfigurácia. Potom existuje práve jeden výpočet na stroji T z konfigurácie K.

Dokážeme dve sublemy:

1 Existuje aspoň jeden (konečný alebo nekonečný) výpočet.

Definujme indukciou postupnosť konfigurácií $(K_i : i \in \mathbb{N})$:

1 $K_0 = K$.

2 $$K_{i+1} = \begin{cases} \mathtt{Krok}(K_i, T), & \text{ak existuje inštrukcia z } T \text{ aplikovateľná na } K_i, \\ K & \text{inak.} \end{cases}$$

(Hodnota K v druhej vetve je úplne formálna, môže byť nahradená akoukoľvek inou konfiguráciou.)

Rozoberme dva prípady:

- Nech pre každé i z $\mathbb{N}$ existuje inštrukcia z T aplikovateľná na K_i.
  To však podľa definície nekonečného výpočtu znamená, že $(K_i : i \in \mathbb{N})$ je nekonečný výpočet na T z K.
- Nech n je najmenšie také prirodzené číslo, že neexistuje inštrukcia z T aplikovateľná na K_n.
  Podľa vety **17** potom neexistuje $\mathtt{Krok}(K_n, T)$. To však podľa definície konečného výpočtu znamená, že $((K_0, \dots, K_n))$ je konečný výpočet na T z K.

Podľa definície výpočtu teda existuje výpočet na T z K.

2 Neexistujú dva rôzne výpočty.

Vzhľadom na definíciu výpočtu rozoberme prípady:

- Nech $(K_i^1 : i \in \mathbb{N})$ a $(K_i^2 : i \in \mathbb{N})$ sú dva nekonečné výpočty na T z K.

2.1 $\boxed{\text{Ak } i \in \mathbb{N}, \text{ tak } K^1_i = K^2_i.}$

Dokážeme to matematickou indukciou:

1 K^1_0
$= K$
(podľa definície nekonečného výpočtu),
$= K^2_0$
(podľa definície nekonečného výpočtu).

2 Nech $i \in \mathbb{N}$. Potom platí:
K^1_{i+1}
$= \mathtt{Krok}(K^1_i, T)$
(podľa definície nekonečného výpočtu),
$= \mathtt{Krok}(K^2_i, T)$
(podľa indukčného predpokladu),
$= K^2_{i+1}$
(podľa definície nekonečného výpočtu).

Zo sublemy **2.1** už vyplýva, že $(K^1_i : i \in \mathbb{N}) = (K^2_i : i \in \mathbb{N})$.

- Nech nastáva ktorákoľvek z možností:
  - $(K^1_0, \dots, K^1_{n^1})$ je konečný výpočet na T z K a $(K^2_i : i \in \mathbb{N})$ je nekonečný výpočet na T z K.
  - $(K^1_0, \dots, K^1_{n^1})$ a $(K^2_0, \dots, K^2_{n^2})$ sú konečné výpočty na T z K, pričom (bez ujmy na všeobecnosti) $n^1 \leq n^2$.

2.2 $\boxed{\text{Ak } i \leq n^1, \text{ tak } K^1_i = K^2_i.}$

Dokážeme to matematickou indukciou pre každé i neprevyšujúce n^1:

1 K^1_0
$= K$
(podľa definície konečného výpočtu),
$= K^2_0$
(podľa definície konečného, resp. nekonečného výpočtu).

2 Nech $i < n^1$. Potom platí:
K^1_{i+1}
$= \mathtt{Krok}(K^1_i, T)$
(podľa definície konečného výpočtu),
$= \mathtt{Krok}(K^2_i, T)$
(podľa indukčného predpokladu),
$= K^2_{i+1}$
(podľa definície konečného, resp. nekonečného výpočtu).

Keďže $(K^1_0, \dots, K^1_{n^1})$ je konečný výpočet na T, podľa definície konečného výpočtu neexistuje $\mathtt{Krok}(K^1_{n^1}, T)$, a teda podľa sublemy **2.2** neexistuje ani $\mathtt{Krok}(K^2_{n^1}, T)$. Rozoberme tri prípady:

- Nech $(K^2_i : i \in \mathbb{N})$ je nekonečný výpočet na T z K.
  Potom však podľa definície nekonečného výpočtu $\mathtt{Krok}(K^2_{n^1}, T)$ existuje, čo je spor. Tento prípad teda nenastáva.
- Nech $(K^2_0, \dots, K^2_{n^2})$ je konečný výpočet na T z K, pričom $n^1 < n^2$.
  Potom však podľa definície konečného výpočtu $\mathtt{Krok}(K^2_{n^1}, T)$ existuje, čo je spor. Ani tento prípad teda nenastáva.
- Nech $(K^2_0, \dots, K^2_{n^2})$ je konečný výpočet na T z K, pričom $n^1 = n^2$.
  Potom však podľa sublemy **2.2** platí $(K^1_0, \dots, K^1_{n^1}) = (K^2_0, \dots, K^2_{n^2})$.

D Definujme funkciu `Koniec` z podmnožiny `Konfigurácie` × `TuringoveStroje` do množiny `Konfigurácie` takto:

$$\texttt{Koniec}(K,T)\begin{cases} = L, & \text{ak existuje konečný výpočet na } T \text{ z } K \text{ s koncom } L,\\ \text{nie je definované} & \text{inak.}\end{cases}$$

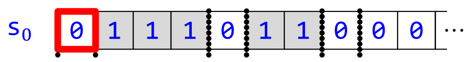
D Definujme funkciu `Rozsah` z podmnožiny `Konfigurácie` × `TuringoveStroje` do množiny ℕ takto:

$$\texttt{Rozsah}(K,T)\begin{cases} = \max\{\texttt{Hlava}(K_i) : i \in \{0,\dots,n\}\}, & \text{ak } ((K_0,\dots,K_n)) \text{ je konečný výpočet na } T \text{ z } K,\\ \text{nie je definované} & \text{inak.}\end{cases}$$

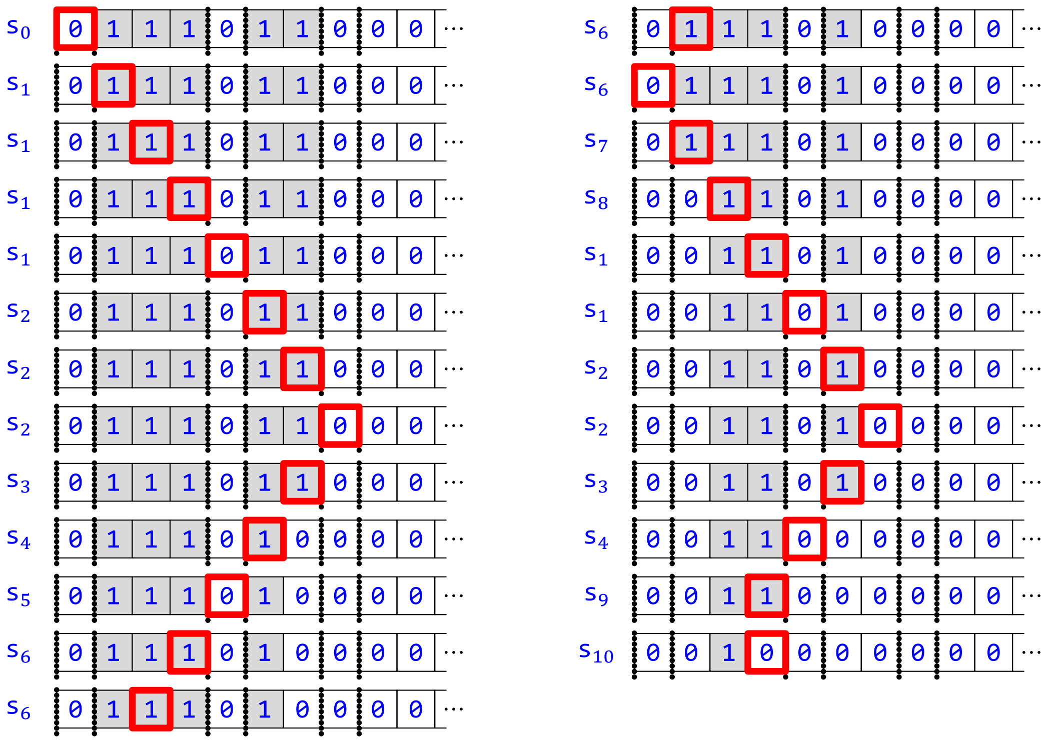
P Korektnosť oboch definícií zabezpečuje veta **20**.

P Obe hodnoty – `Koniec`(K,T) i `Rozsah`(K,T) – sú definované práve v prípade, že výpočet na T z K je konečný. Ak teda neexistuje `Koniec`(K,T), neexistuje ani `Rozsah`(K,T).

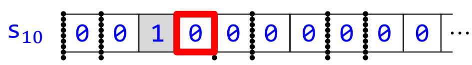
I Označme T nám už známy Turingov stroj $\{s_0 00 R s_1, s_1 00 R s_2, s_1 11 R s_1, s_2 00 L s_3, s_2 11 R s_2, s_3 10 L s_4, s_4 00 L s_9, s_4 11 L s_5, s_5 00 L s_6, s_5 11 L s_5, s_6 00 R s_7, s_6 11 L s_6, s_7 10 R s_8, s_8 00 N s_8, s_8 11 R s_1, s_9 10 N s_{10}\}$, ktorý počíta `Rozdiel`, a K nech je konfigurácia



Zopakujme, že konečný výpočet na T z K je



Potom `Koniec`(K,T) je konfigurácia



a `Rozsah`$(K,T) = \max\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 3\} = 7$.

P V prípade funkcie `Rozsah` by teoreticky malo zmysel definovať hodnotu aj v prípade takého nekonečného výpočtu, ktorého každá konfigurácia má hlavu nepresahujúcu toto číslo. Tak by sme vedeli odlíšiť výpočty, ktoré používajú celú pásku, od tých, ktoré sa zrejme zacyklia (keďže pracujú s konečne veľa páskami, stavmi i hlavami). Takéto odlíšenie však nebudeme potrebovať, zvolili sme preto jednoduchšiu verziu tejto funkcie.

V **21**

Nech T je stroj a K a L konfigurácie. Nech $\texttt{Koniec}(K, T) = L$. Potom neexistuje $\texttt{Krok}(L, T)$.

Podľa definície Koniec existuje konečný výpočet na T z K s koncom L, podľa vety **20** je jediný. Nech je to $((K_0, \dots, K_n))$. Podľa definície konečného výpočtu potom $L = K_n$ a hodnota $\texttt{Krok}(K_n, T)$ čiže $\texttt{Krok}(L, T)$ nie je definovaná.

V **22**

Nech T je stroj a K konfigurácia. Nech existuje $\texttt{Koniec}(K, T)$. Potom platí:

- $\texttt{Rozsah}(K, T) \geq \texttt{Hlava}(K)$.
- $\texttt{Rozsah}(K, T) \geq \texttt{Hlava}(\texttt{Koniec}(K, T))$.

Podľa definície Koniec existuje konečný výpočet na T z K s koncom $\texttt{Koniec}(K, T)$. Nech je to $((K_0, \dots, K_n))$. Podľa definície konečného výpočtu potom platí:

$\texttt{Rozsah}(K, T)$
$= \max\{\texttt{Hlava}(K_i) : i \in \{0, \dots, n\}\}$
(podľa definície Rozsah),
$\geq \max\{\texttt{Hlava}(K_0), \texttt{Hlava}(K_n)\}$,
$= \max\{\texttt{Hlava}(K), \texttt{Hlava}(\texttt{Koniec}(K, T))\}$
(lebo $K_0 = K$ a $K_n = \texttt{Koniec}(K, T)$, a to podľa definície konečného výpočtu).

Z toho už vyplývajú obe dokazované tvrdenia.

V **23**

Nech T je stroj a K konfigurácia. Nech (K) je konečný výpočet na T z K. Potom $\texttt{Rozsah}(K, T) = \texttt{Hlava}(K)$.

$\texttt{Rozsah}(K, T)$
$= \max\{\texttt{Hlava}(K)\}$
(podľa definície Rozsah),
$= \texttt{Hlava}(K)$.

V **24**

Nech K je konfigurácia. Potom platí:

- Výpočet na $\emptyset$ z K je (K).
- $\texttt{Koniec}(K, \emptyset) = K$.
- $\texttt{Rozsah}(K, \emptyset) = \texttt{Hlava}(K)$.

- Podľa definície Krok hodnota $\texttt{Krok}(K, \emptyset)$ nie je definovaná, takže podľa definície konečného výpočtu je (K) konečný výpočet na $\emptyset$ z K.
- Podľa už dokázanej časti a podľa definícií konečného výpočtu a Koniec platí $\texttt{Koniec}(K, \emptyset) = K$.
- Podľa už dokázanej časti a vety **23**.

Pripomeňme, že každý Turingov stroj vlastne počíta nejakú funkciu, ktorej vstupom je istý počet prirodzených čísel a výstupom jedno prirodzené číslo. Vstupy i výstup tejto funkcie sú zakódované na páske Turingovho stroja, a to *rôznym spôsobom*:

- Ak ide o n-árnu funkciu, jej n vstupov x_1, ..., x_n je reprezentovaných blokovou páskou kódujúcou ticu $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Hlava je pritom na nule pred prvým blokom a stav stroja je $\texttt{s}_0$.
- Pokiaľ ide o výstup, môžu nastať dve možnosti:

- V prípade, že po konečnom počte krokov výpočtu nastane konfigurácia, keď už nemožno aplikovať nijakú inštrukciu, a teda stroj *zastal*, hodnotou funkcie pre daný vstup je jednoducho počet písmen `1` na aktuálnej páske, a to bez ohľadu na ich rozmiestnenie. (Uvedomme si pritom, že tento počet je naozaj konečný, lebo taký bol (podľa predchádzajúceho bodu) i na začiatku a v každom kroku výpočtu, ktorých je konečne veľa, sa mohol zväčšiť najviac o 1.)
- Ak však možno aplikovať jednu z inštrukcií po každom kroku výpočtu, t. j. stroj *nikdy nezastane*, tak hodnota funkcie nie je pre daný vstup definovaná.

Opäť poďme všetky pojmy definovať formálne:

D Definujme funkciu `PočetJednotiek` z množiny `Pásky` do ℕ takto:
Ak p je páska, tak

$$\texttt{PočetJednotiek}(p) = |\{i \in \mathbb{N} : p(i) = \texttt{1}\}|.$$

I Ak p je páska

0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

tak `PočetJednotiek`$(p) = |\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15\}| = 10$.

P Všimnime si, že platí

$$\texttt{PočetJednotiek}(p) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p(i).$$

Do tohto súčtu totiž každá jednotka na páske prispeje svojou hodnotou 1, kým nuly ho neovplyvnia. Konečný počet jednotiek na páske pritom zabezpečí, že súčet naozaj existuje.

D Definujme funkciu `Výsledok` z podmnožiny množiny `Konfigurácie` × `TuringoveStroje` do ℕ takto:
Ak K je konfigurácia a T je Turingov stroj, tak

$$\texttt{Výsledok}(K,T)\begin{cases} = \texttt{PočetJednotiek}(\texttt{Páska}(\texttt{Koniec}(K,T))), & \text{ak existuje } \texttt{Koniec}(K,T), \\ \text{nie je definovaný} & \text{inak.}\end{cases}$$

I Videli sme, že výpočet na stroji T počítajúcom funkciu `Rozdiel` z konfigurácie K

`s0`	$\boxed{0}$	1	1	1	0	1	1	0	0	0	⋯

sa končil konfiguráciou

`s10`	0	0	1	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0	0	⋯

čo je teda `Koniec`(K,T). To znamená, že `Výsledok`$(K,T) =$ `PočetJednotiek`(`Páska`(`Koniec`(K,T))) $= 1$.

D *Slovom* budeme rozumieť konečnú postupnosť písmen.
Množinu všetkých slov označíme `Slová`.

P Namiesto $(a_1, \dots, a_n)$ budeme písať len $a_1 \cdots a_n$.

P `Dĺžka` je funkcia, ktorá každému slovu priradí počet jeho písmen. (Inými slovami, je to jeho definičný obor.)

P Slovo $a \cdots a$ dĺžky n budeme zapisovať v tvare a^n.

P Pripomeňme, že pod označením ε (tzv. *prázdne slovo*) sa ukrýva slovo dĺžky 0.

P *Konkatenácia* $\alpha\beta$ slov α a β, kde $\alpha = a_1 \cdots a_n$ a $\beta = b_1 \cdots b_m$, bude slovo $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$.

P Keďže konkatenácia slov je asociatívna, pri jej viacnásobnom použití netreba písať zátvorky.

P Ako vidieť, ak α a β sú slová, tak platí $\mathtt{Dĺžka}(\alpha\beta) = \mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Dĺžka}(\beta)$.

D Definujme funkciu $\mathtt{Blok}$ z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathtt{Slová}$ vzťahom

$$\mathtt{Blok}(x) = \mathtt{1}^{x+1}.$$

I
- $\mathtt{Blok}(3) = \mathtt{1111}$.
- $\mathtt{Blok}(4) = \mathtt{11111}$.
- $\mathtt{Blok}(0) = \mathtt{1}$.

D Definujme pre každé n z $\mathbb{N}$ funkciu $\mathtt{Bloky}^n$ indukciou:

1 $\mathtt{Bloky}^0() = \varepsilon$.

2 $\mathtt{Bloky}^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{0}\mathtt{Blok}(x_{n+1})$.

P Explicitne teda

$$\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n) = \mathtt{0}\mathtt{Blok}(x_1) \cdots \mathtt{0}\mathtt{Blok}(x_n).$$

I $\mathtt{Bloky}^3(2, 0, 3) = \mathtt{01110101111}$.

V $\boxed{25}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i + 2n.$$

Dokážeme to indukciou cez n z $\mathbb{N}$:

1 $\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^0())$
$= \mathtt{Dĺžka}(\varepsilon)$
(podľa definície $\mathtt{Bloky}^0$),
$= 0$,
$= \sum_{i=1}^{0} x_i + 2 \cdot 0$.

2 $\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}))$
$= \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{0}\mathtt{Blok}(x_{n+1}))$
(podľa definície $\mathtt{Bloky}^{n+1}$),
$= \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)) + \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{0}\mathtt{Blok}(x_{n+1}))$,
$= \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)) + \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{0}\mathtt{1}^{x_{n+1}+1})$
(podľa definície $\mathtt{Blok}$),
$= \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)) + x_{n+1} + 2$,
$= \sum_{i=1}^{n} x_i + 2n + x_{n+1} + 2$
(podľa indukčného predpokladu),
$= \sum_{i=1}^{n+1} x_i + 2(n + 1)$.

V $\boxed{26}$

Nech $n, m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ a $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{Bloky}^m(y_1, \dots, y_m) = \mathtt{Bloky}^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Dokážeme to indukciou cez m z $\mathbb{N}$:

1 $\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{Bloky}^0()$
$= \mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\varepsilon$
  (podľa definície $\mathtt{Bloky}^0$),
$= \mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)$,
$= \mathtt{Bloky}^{n+0}(x_1, \dots, x_n)$.

2 $\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{Bloky}^{m+1}(y_1, \dots, y_{m+1})$
$= \mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{Bloky}^m(y_1, \dots, y_m)\mathtt{0}\mathtt{Blok}(y_{m+1})$
  (podľa definície $\mathtt{Bloky}^{m+1}$),
$= \mathtt{Bloky}^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)\mathtt{0}\mathtt{Blok}(y_{m+1})$
  (podľa indukčného predpokladu),
$= \mathtt{Bloky}^{n+m+1}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m+1})$
  (podľa definície $\mathtt{Bloky}^{n+m+1}$).

D Ak α je slovo a p je postupnosť písmen, tak αp bude postupnosť písmen taká, že pre každé i z $\mathbb{N}$ platí

$$(\alpha p)(i) = \begin{cases} \alpha(i), & \text{ak } i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha), \\ p(i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha)) & \text{inak.} \end{cases}$$

I Ak α je slovo `110100` a p je páska z prvého riadku, tak αp je páska z druhého riadku:

p:							0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯
αp:	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

V $\boxed{27}$

Nech α je slovo a p^1 a p^2 sú postupnosti písmen. Nech $i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha)$. Potom

$$(\alpha p^1)(i) = (\alpha p^2)(i).$$

Platí:
$(\alpha p^1)(i)$
$= \alpha(i)$
  (podľa definície αp^1, lebo $i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha)$),
$= (\alpha p^2)(i)$
  (podľa definície αp^2, lebo $i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha)$),
$= (\alpha p^2)(i)$.

V $\boxed{28}$

Nech α a β sú slová a p je postupnosť písmen. Potom

$$\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p.$$

Rozoberme tri prípady:

- Nech $i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha)$.

  Potom platí:
  $(\alpha(\beta p))(i)$
  $= \alpha(i)$
    (podľa definície $\alpha(\beta p)$, lebo $i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha)$),
  $= (\alpha\beta)(i)$,

$= ((\alpha\beta)p)(i)$
(podľa definície $(\alpha\beta)p$, lebo $i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha) \leq \mathtt{Dĺžka}(\alpha\beta)$),
$= ((\alpha\beta)p)(i)$.

- Nech $\mathtt{Dĺžka}(\alpha) \leq i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Dĺžka}(\beta)$.
  Potom platí:
  $(\alpha(\beta p))(i)$
  $= (\beta p)(i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha))$
  (podľa definície $\alpha(\beta p)$, lebo $\mathtt{Dĺžka}(\alpha) \leq i$),
  $= \beta(i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha))$
  (podľa definície βp, lebo $i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha) < \mathtt{Dĺžka}(\beta)$),
  $= (\alpha\beta)(i)$,
  $= ((\alpha\beta)p)(i)$
  (podľa definície $(\alpha\beta)p$, lebo $i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Dĺžka}(\beta) = \mathtt{Dĺžka}(\alpha\beta)$).
- Nech $\mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Dĺžka}(\beta) \leq i$.
  Potom platí:
  $(\alpha(\beta p))(i)$
  $= (\beta p)(i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha))$
  (podľa definície $\alpha(\beta p)$, lebo $\mathtt{Dĺžka}(\alpha) \leq \mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Dĺžka}(\beta) \leq i$),
  $= p((i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha)) - \mathtt{Dĺžka}(\beta))$
  (podľa definície βp, lebo $\mathtt{Dĺžka}(\beta) \leq i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha)$),
  $= p(i - (\mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Dĺžka}(\beta)))$,
  $= p(i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha\beta))$,
  $= ((\alpha\beta)p)(i)$
  (podľa definície $(\alpha\beta)p$, lebo $\mathtt{Dĺžka}(\alpha\beta) = \mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Dĺžka}(\beta) \leq i$).

V $\boxed{29}$

Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom $\mathtt{0}^n\mathtt{0}{\rightarrow} = \mathtt{0}{\rightarrow}$.

Rozoberme dva prípady:

- Nech $i < n$.
  Potom platí:
  $(\mathtt{0}^n\mathtt{0}{\rightarrow})(i)$
  $= \mathtt{0}^n(i)$
  (podľa definície $\mathtt{0}^n\mathtt{0}{\rightarrow}$, lebo $i < n = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{0}^n)$),
  $= \mathtt{0}$,
  $= \mathtt{0}{\rightarrow}(i)$
  (podľa definície $\mathtt{0}{\rightarrow}$).
- Nech $n \leq i$.
  Potom platí:
  $(\mathtt{0}^n\mathtt{0}{\rightarrow})(i)$
  $= \mathtt{0}{\rightarrow}(i - \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{0}^n))$
  (podľa definície $\mathtt{0}^n\mathtt{0}{\rightarrow}$, lebo $i \geq n = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{0}^n)$),
  $= \mathtt{0}$
  (podľa definície $\mathtt{0}{\rightarrow}$),
  $= \mathtt{0}{\rightarrow}(i)$
  (podľa definície $\mathtt{0}{\rightarrow}$).

V $\boxed{30}$

Nech α je slovo a $n \in \mathbb{N}$. Potom $\alpha\mathtt{0}{\rightarrow} = \alpha\mathtt{0}^n\mathtt{0}{\rightarrow}$.

$\alpha\mathtt{0}{\rightarrow}$
$= \alpha(\mathtt{0}^n\mathtt{0}{\rightarrow})$
  (podľa vety **29**),
$= \alpha\mathtt{0}^n\mathtt{0}{\rightarrow}$
  (podľa vety **28**).

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkciu $\mathtt{BlokováPáska}^n$ (skrátene $\mathtt{BP}^n$) z množiny $\mathbb{N}^n$ do $\mathtt{Pásky}$ vzťahom

$$\mathtt{BlokováPáska}^n(x_1, \dots, x_n) = \mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{0}{\rightarrow}.$$

I Napríklad $\mathtt{BP}^3(2, 0, 3)$ je

0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	⋯

V **31**

Nech $n, m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ a $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{BP}^m(y_1, \dots, y_m) = \mathtt{BP}^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

$\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{BP}^m(y_1, \dots, y_m)$
$= \mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)(\mathtt{Bloky}^m(y_1, \dots, y_m)\mathtt{0}{\rightarrow})$
  (podľa definície $\mathtt{BP}^m$),
$= (\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{Bloky}^m(y_1, \dots, y_m))\mathtt{0}{\rightarrow}$
  (podľa vety **28**),
$= \mathtt{Bloky}^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)\mathtt{0}{\rightarrow}$
  (podľa vety **26**),
$= \mathtt{BP}^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$
  (podľa definície $\mathtt{BP}^{n+m}$).

V **32**

Nech $n \in \mathbb{N}$ a x_1, ..., $x_n \in \mathbb{N}$. Nech $j \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$(\mathtt{BP}^n(x_1, \dots, x_n))(j) = \begin{cases} \mathtt{0}, & \text{ak } j > \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)), \\ \mathtt{0}, & \text{ak existuje } i \text{ z } \{0, \dots, n\}, \text{ že } j = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^i(x_1, \dots, x_i)), \\ \mathtt{1} & \text{inak.} \end{cases}$$

Rozoberme prípady:

- Nech $j \geq \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n))$,
  Potom platí:
  $(\mathtt{BP}^n(x_1, \dots, x_n))(j)$
  $= (\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{0}{\rightarrow})(j)$
    (podľa definície $\mathtt{BP}^n$),
  $= \mathtt{0}{\rightarrow}(j - \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)))$
    (podľa definície $\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{0}{\rightarrow}$),
  $= \mathtt{0}$
    (podľa definície $\mathtt{0}{\rightarrow}$).
- Nech $j < \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n))$.
  Potom existuje i také, že $i \in \{0, \dots, n-1\}$ a $\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^i(x_1, \dots, x_i)) \leq j < \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^{i+1}(x_1, \dots, x_{i+1}))$.

  1 $\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^{i+1}(x_1, \dots, x_{i+1})) = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^i(x_1, \dots, x_i)) + x_{i+1} + 2.$

Postupne platí:

$\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^{i+1}(x_1, \dots, x_{i+1})) - \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^{i}(x_1, \dots, x_i))$

$= \left(\sum_{h=1}^{i+1} x_h + 2(i+1)\right) - \left(\sum_{h=1}^{i} x_h + 2i\right)$

(podľa viet **25** a opäť **25**),

$= x_{i+1} + 2.$

Z toho už vyplýva dokazované tvrdenie.

Podľa sublemy **1** dostávame, že existuje k také, že $0 \le k < x_{i+1} + 2$ a $j = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^{i}(x_1, \dots, x_i)) + k$.

2 $\boxed{(\mathtt{BP}^n(x_1, \dots, x_n))(j) = (\mathtt{0}\mathtt{1}^{x_{i+1}+1})(k).}$

Postupne platí:

$(\mathtt{BP}^n(x_1, \dots, x_n))(j)$

$= (\mathtt{BP}^n(x_1, \dots, x_n))(\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^{i}(x_1, \dots, x_i)) + k)$

$= (\mathtt{Bloky}^{i}(x_1, \dots, x_i)\mathtt{BP}^{n-i}(x_{i+1}, \dots, x_n))(\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^{i}(x_1, \dots, x_i)) + k)$

(podľa vety **31**),

$= (\mathtt{BP}^{n-i}(x_{i+1}, \dots, x_n))(k)$

(podľa definície $\mathtt{Bloky}^{i}(x_1, \dots, x_i)\mathtt{BP}^{n-i}(x_{i+1}, \dots, x_n)$),

$= (\mathtt{Bloky}^{1}(x_{i+1})\mathtt{BP}^{n-i-1}(x_{i+2}, \dots, x_n))(k)$

(podľa vety **31**),

$= ((\mathtt{Bloky}^{0}()\mathtt{0}\mathtt{Blok}(x_{i+1}))\mathtt{BP}^{n-i-1}(x_{i+2}, \dots, x_n))(k)$

(podľa definície $\mathtt{Bloky}^{1}$),

$= ((\varepsilon\mathtt{0}\mathtt{Blok}(x_{i+1}))\mathtt{BP}^{n-i-1}(x_{i+2}, \dots, x_n))(k)$

(podľa definície $\mathtt{Bloky}^{0}$),

$= ((\mathtt{0}\mathtt{Blok}(x_{i+1}))\mathtt{BP}^{n-i-1}(x_{i+2}, \dots, x_n))(k),$

$= ((\mathtt{0}\mathtt{1}^{x_{i+1}+1})\mathtt{BP}^{n-i-1}(x_{i+2}, \dots, x_n))(k)$

(podľa definície $\mathtt{Blok}$),

$= (\mathtt{0}\mathtt{1}^{x_{i+1}+1})(k)$

(podľa definície $(\mathtt{0}\mathtt{1}^{x_{i+1}+1})\mathtt{BP}^{n-i-1}(x_{i+2}, \dots, x_n)$).

Rozoberme dva prípady:

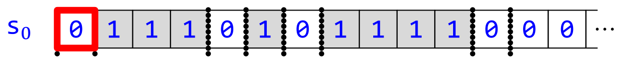
- Nech $j = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^{i}(x_1, \dots, x_i))$, t. j. $k = 0$.
  Potom platí:
  $(\mathtt{BP}^n(x_1, \dots, x_n))(j)$
  $= (\mathtt{0}\mathtt{1}^{x_{i+1}+1})(k)$
  (podľa sublemy **2**),
  $= (\mathtt{0}\mathtt{1}^{x_{i+1}+1})(0),$
  $= \mathtt{0}.$
- Nech $j > \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^{i}(x_1, \dots, x_i))$, t. j. $0 < k < x_{i+1} + 2$.
  Potom platí:
  $(\mathtt{BP}^n(x_1, \dots, x_n))(j)$
  $= (\mathtt{0}\mathtt{1}^{x_{i+1}+1})(k)$
  (podľa sublemy **2**),
  $= \mathtt{1}.$

D Nech $n \in \mathbb{N}$ a $i \in \{0, \dots, n\}$. Definujme funkciu $\mathtt{BlokováKonfigurácia}^{n}_{i}$ (skrátene $\mathtt{BK}^{n}_{i}$) z množiny $\mathbb{N}^n$ do množiny $\texttt{Konfigurácie}$ vzťahom

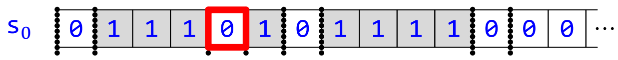
$$\texttt{BlokováKonfigurácia}_i^n(x_1, \dots, x_n) = \texttt{KNS}(\texttt{Dĺžka}(\texttt{Bloky}^i(x_1, \dots, x_i)), \texttt{BP}^n(x_1, \dots, x_n)).$$

P Ak $i \in \{1, \dots, n\}$, tak hlava je nastavená na nule po i. bloku.
Ak $i = 0$, tak hlava je nastavená na začiatku pásky.

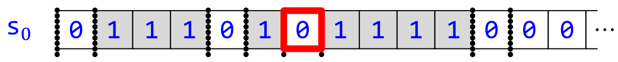
I $\texttt{BK}_0^3(2, 0, 3)$ je



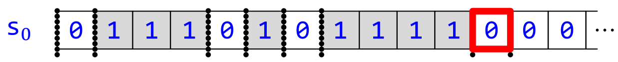
I $\texttt{BK}_1^3(2, 0, 3)$ je



I $\texttt{BK}_2^3(2, 0, 3)$ je



I $\texttt{BK}_3^3(2, 0, 3)$ je



V **33**

- $\texttt{BK}_0^0() = \texttt{KNS}(0, \texttt{0}{\to})$.
- Ak $x \in \mathbb{N}$, tak $\texttt{BK}_0^1(x) = \texttt{KNS}(0, \texttt{01}^{x+1}\texttt{0}{\to})$.
- Ak $x \in \mathbb{N}$, tak $\texttt{BK}_1^1(x) = \texttt{KNS}(x + 2, \texttt{01}^{x+1}\texttt{0}{\to})$.
- Ak $x, y \in \mathbb{N}$, tak $\texttt{BK}_0^2(x, y) = \texttt{KNS}(0, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}{\to})$.
- Ak $x, y \in \mathbb{N}$, tak $\texttt{BK}_1^2(x, y) = \texttt{KNS}(x + 2, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}{\to})$.

Najprv sublemy:

1 Ak $x \in \mathbb{N}$, tak $\texttt{Bloky}^1(x) = \texttt{01}^{x+1}$.

$\texttt{Bloky}^1(x)$
$= \texttt{Bloky}^0()\texttt{0}\texttt{Blok}(x)$
(podľa definície $\texttt{Bloky}^1$),
$= \varepsilon\texttt{0}\texttt{Blok}(x)$
(podľa definície $\texttt{Bloky}^0$),
$= \texttt{0}\texttt{Blok}(x)$,
$= \texttt{01}^{x+1}$
(podľa definície $\texttt{Blok}$).

2 $\texttt{BP}^0() = \texttt{0}{\to}$.

$\texttt{BP}^0()$
$= \texttt{Bloky}^0()\texttt{0}{\to}$
(podľa definície $\texttt{BP}^0$),
$= \varepsilon\texttt{0}{\to}$
(podľa definície $\texttt{Bloky}^0$),

$= \mathtt{0}{\mapsto}$
(podľa vety **29**).

3 Ak $x \in \mathbb{N}$, tak $\mathtt{BP}^1(x) = \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{0}{\mapsto}$.

$\mathtt{BP}^1(x)$
$= \mathtt{Bloky}^1(x)\mathtt{0}{\mapsto}$
(podľa definície $\mathtt{BP}^1$),
$= \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{0}{\mapsto}$
(podľa sublemy **1**).

4 Ak $x, y \in \mathbb{N}$, tak $\mathtt{BP}^2(x, y) = \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\mapsto}$.

$\mathtt{BP}^2(x, y)$
$= \mathtt{Bloky}^2(x, y)\mathtt{0}{\mapsto}$
(podľa definície $\mathtt{BP}^2$),
$= \mathtt{Bloky}^1(x)\mathtt{Bloky}^1(y)\mathtt{0}{\mapsto}$
(podľa vety **26**),
$= \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{Bloky}^1(y)\mathtt{0}{\mapsto}$
(podľa sublemy **1**),
$= \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\mapsto}$
(podľa sublemy **1**).

Teraz už môžeme dokázať naše tvrdenia:

- $\mathtt{BK}^0_0() = \mathtt{KNS}(0, \mathtt{0}{\mapsto})$ podľa definície $\mathtt{BK}^0_0$, vety **25** a sublemy **2**.
- $\mathtt{BK}^1_0(x) = \mathtt{KNS}(0, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{0}{\mapsto})$ podľa definície $\mathtt{BK}^1_0$, vety **25** a sublemy **3**.
- $\mathtt{BK}^1_1(x) = \mathtt{KNS}(x + 2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{0}{\mapsto})$ podľa definície $\mathtt{BK}^1_1$, vety **25** a sublemy **3**.
- $\mathtt{BK}^2_0(x, y) = \mathtt{KNS}(0, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\mapsto})$ podľa definície $\mathtt{BK}^2_0$, vety **25** a sublemy **4**.
- $\mathtt{BK}^2_1(x, y) = \mathtt{KNS}(x + 2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\mapsto})$ podľa definície $\mathtt{BK}^2_1$, vety **25** a sublemy **4**.

V **34**

Nech $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ a x_1, ..., $x_n \in \mathbb{N}$. Potom platí:
- $\mathtt{Stav}(\mathtt{BK}^n_i(x_1, \ldots, x_n)) = 0$.
- $\mathtt{Hlava}(\mathtt{BK}^n_i(x_1, \ldots, x_n)) = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^i(x_1, \ldots, x_i))$.
- $\mathtt{Páska}(\mathtt{BK}^n_i(x_1, \ldots, x_n)) = \mathtt{BP}^n(x_1, \ldots, x_n)$.

Platí:

$\mathtt{BK}^n_i(x_1, \ldots, x_n)$
$= \mathtt{KNS}(\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^i(x_1, \ldots, x_i)), \mathtt{BP}^n(x_1, \ldots, x_n))$
(podľa definície $\mathtt{BK}^n_i$),
$= \langle s_0, \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^i(x_1, \ldots, x_i)), \mathtt{BP}^n(x_1, \ldots, x_n)\rangle$
(podľa definície $\mathtt{KNS}$).

Preto podľa definícií $\mathtt{Stav}$, $\mathtt{Hlava}$ a $\mathtt{Páska}$ platí:

- $\mathtt{Stav}(\mathtt{BK}^n_i(x_1, \ldots, x_n)) = s_0 = 0$.
- $\mathtt{Hlava}(\mathtt{BK}^n_i(x_1, \ldots, x_n)) = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^i(x_1, \ldots, x_i))$.
- $\mathtt{Páska}(\mathtt{BK}^n_i(x_1, \ldots, x_n)) = \mathtt{BP}^n(x_1, \ldots, x_n)$.

D Definujme funkciu $\mathtt{KonfiguráciaSPosunutouPáskou}$ (skrátene $\mathtt{KPP}$) z množiny $\mathtt{Konfigurácie} \times \mathtt{Slová}$ do

množiny Konfigurácie takto:
Ak K je konfigurácia a α je slovo, tak KonfiguráciaSPosunutouPáskou(K, α) je konfigurácia L, pre ktorú platí:

- $\mathtt{Stav}(L) = \mathtt{Stav}(K)$.
- $\mathtt{Hlava}(L) = \mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Hlava}(K)$.
- $\mathtt{Páska}(L) = \alpha\mathtt{Páska}(K)$.

I Ak $\alpha = \mathtt{110100}$ a K je konfigurácia z prvého riadku, tak $\mathtt{KPP}(K, \alpha)$ je konfigurácia z druhého riadku:

K:	s_3	0	1	1	1	**0**	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

$\mathtt{KPP}(K, \alpha)$:	s_3	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	**0**	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

V **35**

Nech $n, m \in \mathbb{N}$ a $i \in \{1, \dots, m\}$. Nech $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ a $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{N}$. Potom

$$\mathtt{KPP}(\mathtt{BK}_i^m(y_1, \dots, y_m), \mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)) = \mathtt{BK}_{n+i}^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Podľa viet **11** a opäť **11** stačí overiť rovnosť príslušných zložiek oboch konfigurácií:

- $\mathtt{Stav}(\mathtt{KPP}(\mathtt{BK}_i^m(y_1, \dots, y_m), \mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)))$
  $= \mathtt{Stav}(\mathtt{BK}_i^m(y_1, \dots, y_m))$
  (podľa definície KPP),
  $= 0$
  (podľa vety **34**),
  $= \mathtt{Stav}(\mathtt{BK}_{n+i}^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$
  (podľa vety **34**).
- $\mathtt{Hlava}(\mathtt{KPP}(\mathtt{BK}_i^m(y_1, \dots, y_m), \mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)))$
  $= \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)) + \mathtt{Hlava}(\mathtt{BK}_i^m(y_1, \dots, y_m))$
  (podľa definície KPP),
  $= \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)) + \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^i(y_1, \dots, y_i))$
  (podľa vety **34**),
  $= \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{Bloky}^i(y_1, \dots, y_i))$,
  $= \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^{n+i}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_i))$
  (podľa vety **26**),
  $= \mathtt{Hlava}(\mathtt{BK}_{n+i}^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$
  (podľa vety **34**).
- $\mathtt{Páska}(\mathtt{KPP}(\mathtt{BK}_i^m(y_1, \dots, y_m), \mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)))$
  $= \mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{Páska}(\mathtt{BK}_i^m(y_1, \dots, y_m))$
  (podľa definície KPP),
  $= \mathtt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\mathtt{BP}^m(y_1, \dots, y_m)$
  (podľa vety **34**),
  $= \mathtt{BP}^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$
  (podľa vety **31**),
  $= \mathtt{Páska}(\mathtt{BK}_{n+i}^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$
  (podľa vety **34**).

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Definujme zobrazenie $\mathtt{NormalizovanáKonfigurácia}^n$ (skrátene $\mathtt{NK}^n$) z množiny $\mathbb{N}^n$ do množiny Konfigurácie vzťahom

$$\mathtt{NormalizovanáKonfigurácia}^n = \mathtt{BK}_0^n.$$

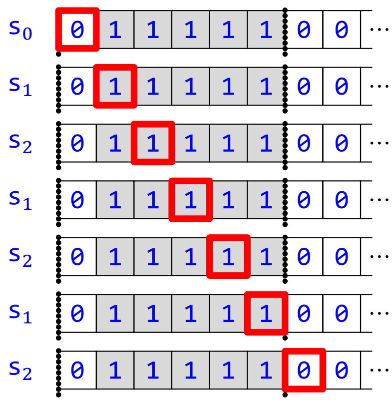
Ak $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$, tak konfiguráciu $\mathtt{NormalizovanáKonfigurácia}^n(x_1, \dots, x_n)$ budeme volať *normalizovaná*.

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Definujme zobrazenie $\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^n$ z množiny $\texttt{TuringoveStroje}$ tak, že ak T je Turingov stroj, tak $\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T)$ je funkcia z podmnožiny množiny $\mathbb{N}^n$ do množiny $\mathbb{N}$ definovaná vzťahom

$$(\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T))(x_1, \dots, x_n)$$
$$\begin{cases} = \texttt{Výsledok}(\texttt{NK}^n(x_1, \dots, x_n), T), & \text{ak je výpočet na } T \text{ z } \texttt{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \text{ konečný,} \\ \text{neexistuje} & \text{inak.} \end{cases}$$

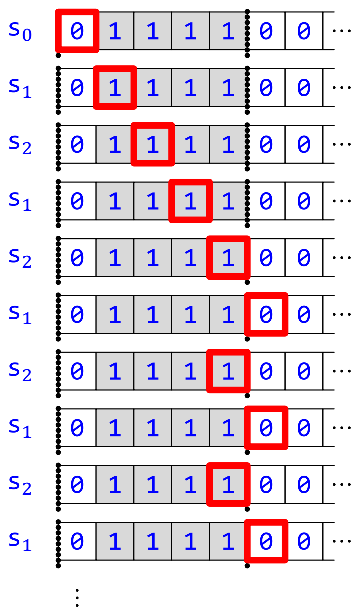
I Nech $T = \{\texttt{s}_0\texttt{00R}\texttt{s}_1, \texttt{s}_1\texttt{00L}\texttt{s}_2, \texttt{s}_1\texttt{11R}\texttt{s}_2, \texttt{s}_2\texttt{11R}\texttt{s}_1\}$. Zistime, akú funkciu $\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^1(T)$ stroj T počíta. Najprv vyskúšajme niekoľko príkladov a výsledky potom zovšeobecníme.

Začnime vstupom 4:



Ak je L koniec tohto výpočtu, tak $(\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^1(T))(4) = \texttt{PočetJednotiek}(\texttt{Páska}(L)) = 5$.

A teraz vstup 3:



Tentoraz sa výpočet neskončí, lebo nastalo zacyklenie (s periódou 2). To však znamená, že hodnota funkcie $\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^1(T)$ v čísle 3 nie je definovaná.

Pri oboch výpočtoch vidíme, že hlava prebiehala cez blok jednotiek a stavy $\texttt{s}_1$ a $\texttt{s}_2$ sa pravidelne po jednom striedali. Mohli nastať dve možnosti:

- Ak na prvej nule za týmto blokom bola v stave $\texttt{s}_2$, čo sa stane zrejme nielen pri našom vstupe 4, ale pri každom párnom čísle x, výpočet sa skončí. Keďže žiadna z našich inštrukcií nemení pásku, počet jednotiek na konci výpočtu je rovnaký ako na začiatku, a to $x+1$. Preto v tomto prípade $(\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^1(T))(x) = x + 1$.

- Ak však na prvej nule za týmto blokom bola v stave $\texttt{s}_1$, t. j. ak bol vstup x nepárny, výpočet sa zacyklí, čo znamená, že hodnota $(\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^1(T))(x)$ nie je definovaná.

Zhrnutím teda dostávame, že

$$(\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^1(T))(x) \begin{cases} = x+1, & \text{ak } x \text{ je párne,} \\ \text{nie je definované,} & \text{ak } x \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

D Hovoríme, že Turingov stroj T *počíta* funkciu f s n argumentmi, ak platí $\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T) = f$.

D Funkciu z podmnožiny $\mathbb{N}^n$ pre nejaké n z $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{N}$ nazývame *turingovská*, ak existuje Turingov stroj, ktorý ju počíta. Množinu všetkých turingovských funkcií označíme $\texttt{TuringovskéFunkcie}$.

I Predchádzajúci príklad ukázal, že unárna funkcia f definovaná

$$f(x) \begin{cases} = x+1, & \text{ak } x \text{ je párne,} \\ \text{nie je definované,} & \text{ak } x \text{ je nepárne,} \end{cases}$$

je turingovsky vypočítateľná.

I V stati **1** sme videli, že binárne funkcie $\texttt{Súčet}$ i $\texttt{Rozdiel}$ sú turingovsky vypočítateľné.

Otázka, ktoré funkcie sú turingovsky vypočítateľné, je centrálnym problémom tejto problematiky.

1.3 Rozklad výpočtu na etapy

V nejednom prípade možno výpočet na Turingovom stroji rozložiť na niekoľko po sebe idúcich etáp, pričom výstupná konfigurácia jednej etapy sa stáva vstupnou konfiguráciou ďalšej. V ideálnom prípade sa o každú etapu postará iba istá podmnožina inštrukcií nášho stroja, pričom tieto podskupiny sú disjunktné, a tvoria preto samostatné Turingove stroje. Preskúmajme najprv prípad, že sú dva. V ideálnom prípade sa tak výpočet skladá z dvoch nezávislých etáp, z ktorých každú zabezpečuje iný stroj. Výstupná konfigurácia prvej etapy je pritom vstupom pre druhú. Môže sa však, samozrejme, stať, že niektorá z etáp zlyhá. Máme teda takéto štyri rozumné možnosti:

- Ak je prvá etapa konečná, na jej konci možno aplikovať druhý stroj a druhá etapa je tiež konečná, tak aj celkový výpočet je konečný (samozrejme, iba v prípade, že na koniec druhej etapy nemožno aplikovať opäť prvý stroj). Túto situáciu rieši veta **1**.
- Ak je prvá etapa konečná, na jej konci možno aplikovať druhý stroj, ale druhá etapa nie je konečná, tak celkový výpočet je nekonečný. Tomuto prípadu sa venuje veta **2**.
- Ak je prvá etapa konečná, ale na jej konci nemožno aplikovať druhý stroj, tak sa celkový výpočet zhoduje s prvou etapou. O tomto prípade hovorí veta **3**.
- Ak je prvá etapa nekonečná, na druhú sa už vôbec nedostane. Celkový výpočet sa tak zhoduje s prvou etapou, je teda nekonečný. Tento prípad rozoberá veta **4**.

V $\boxed{\mathbf{1}}$

Nech T a U sú stroje také, že $T \cup U$ je stroj. Nech K, L a M sú konfigurácie také, že $L = \texttt{Koniec}(K,T)$, $M = \texttt{Koniec}(L,U)$ a neexistuje $\texttt{Krok}(M,T)$. Potom platí:
- $\texttt{Koniec}(K, T \cup U) = M$.
- $\texttt{Rozsah}(K, T \cup U) = \max\{\texttt{Rozsah}(K,T), \texttt{Rozsah}(L,U)\}$.

Keďže $\texttt{Koniec}(K,T) = L$, podľa definície Koniec existuje konečný výpočet na T z K s koncom L. Nech je to $((K_0, \dots, K_n))$. Keďže $\texttt{Koniec}(L,U) = M$, podľa definície Koniec existuje konečný výpočet na U z L s koncom M. Nech je to $(L_0, \dots, L_m)$. Podľa definície konečného výpočtu $K_n = L$ a opäť podľa definície konečného výpočtu $L_0 = L$ a $L_m = M$.

1 $\boxed{(K_0, \dots, K_{n-1}, L_0, \dots, L_m) \text{ je konečný výpočet na } T \cup U \text{ z } K.}$

Overíme podmienky definície konečného výpočtu:

- $K_0 = K$, a to podľa definície konečného výpočtu, lebo $((K_0, \dots, K_n))$ je konečný výpočet na T z K.
- Rozlíšime dva prípady:
  - Nech $i \in \{0, \dots, n-1\}$.
    Potom podľa definície konečného výpočtu $K_{i+1} = \texttt{Krok}(K_i, T)$, lebo $((K_0, \dots, K_n))$ je konečný výpočet na T z K. Podľa vety **2.18** potom $K_{i+1} = \texttt{Krok}(K_i, T \cup U)$.
    Špeciálne (v prípade $n > 0$) $L_0 = K_n = \texttt{Krok}(K_{n-1}, T \cup U)$.
  - Nech $i \in \{n, \dots, (n+m)-1\}$.
    Nech $j = i - n$, takže $j \in \{0, \dots, m-1\}$. Potom podľa definície konečného výpočtu $L_{j+1} = \texttt{Krok}(L_j, U)$, lebo $(L_0, \dots, L_m)$ je konečný výpočet na U z L. Podľa vety **2.18** potom $L_{j+1} = \texttt{Krok}(L_j, T \cup U)$.
- Z toho, že $(L_0, \dots, L_m)$ je konečný výpočet na U z L, podľa definície konečného výpočtu vyplýva, že neexistuje $\texttt{Krok}(L_m, U)$ čiže $\texttt{Krok}(M, U)$. Podľa predpokladu neexistuje ani $\texttt{Krok}(M,T)$, takže podľa vety **2.18** neexistuje ani $\texttt{Krok}(M, T \cup U)$.

Zo sublemy **1** potom dostávame:

- $\texttt{Koniec}(K, T \cup U) = L_m = M$ podľa definície Koniec.
- $\texttt{Rozsah}(K, T \cup U)$
  $= \max(\{\texttt{Hlava}(K_i) : i \in \{0, \dots, n-1\}\} \cup \{\texttt{Hlava}(L_j) : j \in \{0, \dots, m\}\})$
  (podľa definície Rozsah),

$= \max(\{\mathtt{Hlava}(K_i) : i \in \{0, \dots, n\}\} \cup \{\mathtt{Hlava}(L_j) : j \in \{0, \dots, m\}\})$
(konfigurácia K_n čiže L_0 je zarátaná dvakrát),
$= \max\{\max(\{\mathtt{Hlava}(K_i) : i \in \{0, \dots, n\}\}), \max(\{\mathtt{Hlava}(L_j) : j \in \{0, \dots, m\}\})\}$,
$= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, T), \mathtt{Rozsah}(L, U)\}$
(podľa definície Rozsah a opäť podľa definície Rozsah).

V **2**

Nech T a U sú stroje také, že $T \cup U$ je stroj. Nech K a L sú konfigurácie také, že $\mathtt{Koniec}(K, T) = L$, ale výpočet na U z L je nekonečný. Potom výpočet na $T \cup U$ z K je nekonečný.

Keďže $\mathtt{Koniec}(K, T) = L$, podľa definície Koniec existuje konečný výpočet na T z K s koncom L. Nech je to $((K_0, \dots, K_n))$. Z toho podľa definície konca konečného výpočtu platí $K_n = L$. Nech nekonečný výpočet na U z L je $(L_i : i \in \mathbb{N})$. Z toho podľa definície nekonečného výpočtu $L = L_0$.

1 $(K_0, \dots, K_{n-1}, L_0, L_1, \dots)$ je nekonečný výpočet na $T \cup U$ z K.

Overíme podmienky definície nekonečného výpočtu:

- $K_0 = K$, a to podľa definície konečného výpočtu, lebo $((K_0, \dots, K_n))$ je konečný výpočet na T z K.
- Rozlíšime dva prípady:
  - Nech $i \in \{0, \dots, n-1\}$ (v prípade $n > 0$).
    Potom $K_{i+1} = \mathtt{Krok}(K_i, T)$ podľa definície konečného výpočtu, lebo $((K_0, \dots, K_n))$ je konečný výpočet na T z K. Podľa vety **2.18** potom $K_{i+1} = \mathtt{Krok}(K_i, T \cup U)$. Špeciálne $L_0 = L = K_n = \mathtt{Krok}(K_{n-1}, T \cup U)$.
  - Nech $i \geq n$.
    Nech $j = i - n$, takže $j \in \mathbb{N}$. Potom podľa definície nekonečného výpočtu platí $L_{j+1} = \mathtt{Krok}(L_j, U)$, lebo $(L_j : j \in \mathbb{N})$ je nekonečný výpočet na U z L. Podľa vety **2.18** potom $L_{j+1} = \mathtt{Krok}(L_j, T \cup U)$.

Zo sublemy **1** už priamo vyplýva dokazované tvrdenie.

V **3**

Nech T a U sú stroje také, že $T \cup U$ je stroj. Nech K a L sú konfigurácie také, že $L = \mathtt{Koniec}(K, T)$ a neexistuje $\mathtt{Krok}(L, U)$. Potom platí:
- $\mathtt{Koniec}(K, T \cup U) = L$.
- $\mathtt{Rozsah}(K, T \cup U) = \mathtt{Rozsah}(K, T)$.

Keďže neexistuje $\mathtt{Krok}(L, U)$, podľa definície konečného výpočtu je (L) konečný výpočet na U z L, a teda podľa definície Koniec platí $L = \mathtt{Koniec}(L, U)$. Keďže $L = \mathtt{Koniec}(K, T)$, podľa vety **2.21** neexistuje $\mathtt{Krok}(L, T)$. Potom platí:

- $\mathtt{Koniec}(K, T \cup U) = L$ podľa vety **1**.
- $\mathtt{Rozsah}(K, T \cup U)$
  $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, T), \mathtt{Rozsah}(L, U)\}$
  (podľa vety **1**),
  $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, T), \mathtt{Hlava}(L)\}$
  (podľa vety **2.23**),
  $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, T), \mathtt{Hlava}(\mathtt{Koniec}(K, T))\}$,
  $= \mathtt{Rozsah}(K, T)$
  (podľa vety **2.22**).

V **4**

Nech T a U sú stroje také, že $T \cup U$ je stroj. Nech K je konfigurácia taká, že výpočet na T z K je nekonečný. Potom výpočet na $T \cup U$ z K je nekonečný.

Nech nekonečný výpočet na T z K je $(K_i : i \in \mathbb{N})$.

1 $(K_i : i \in \mathbb{N})$ je nekonečný výpočet na $T \cup U$ z K.

Overíme podmienky definície nekonečného výpočtu:

- $K_0 = K$, a to podľa definície nekonečného výpočtu, lebo $(K_i : i \in \mathbb{N})$ je nekonečný výpočet na T z K.
- Nech $i \in \mathbb{N}$. Potom $K_{i+1} = \mathtt{Krok}(K_i, T)$, a to podľa definície nekonečného výpočtu, lebo $(K_i : i \in \mathbb{N})$ je nekonečný výpočet na T z K. Podľa vety **2.18** potom $K_{i+1} = \mathtt{Krok}(K_i, T \cup U)$.

Zo sublemy **1** už priamo vyplýva dokazované tvrdenie.

1.4 Posúvanie stavov

Aby sme proces rozdelenia výpočtu na etapy mohli dostatočne kontrolovať, bolo by veľmi užitočné vedieť, v akých stavoch sa tieto etapy končia. Kvôli prehľadnosti tiež bude rozumné požadovať, aby stav začiatočnej konfigurácie výpočtu v príslušnej etape bol minimálny a stav koncovej maximálny možný. Jednotlivé etapy celkového výpočtu tak môžu na seba plynule nadväzovať. Napríklad prvá etapa môže používať stavy od s_0 (v začiatočnej konfigurácii) po s_5 (v koncovej konfigurácii), druhá potom povedzme od s_5 (v začiatočnej konfigurácii) po s_{13} (v koncovej konfigurácii), tretia od s_{13} po s_{16} a tak ďalej. To teda znamená, že staré stavy inštrukcií prvého stroja budú od s_0 po s_4, pri druhom to bude od s_5 po s_{12}, pri treťom od s_{13} po s_{15}. Stav s_5 bude (jediný) pasívny stav prvého stroja, a teda práve v ňom sa ukončí prvá etapa výpočtu. Zároveň to však bude stav začiatočnej konfigurácie druhej etapy. Podobne sa v stave s_{13} ukončí druhá etapa a začne sa tretia. Táto situácia silne pripomína štafetový beh – prvý „bežec“ „beží“ úsek s_0–s_5, pričom s_5 je „miesto“, kde odovzdáva „štafetový kolík“ druhému „bežcovi“. Ten si „odbehne“ svoj úsek s_5–s_{13}, pričom po dosiahnutí s_{13} hneď odovzdá „kolík“ tretiemu, ktorý „beží“ úsek s_{13}–s_{16}, a tak ďalej.

Toto prirovnanie nám okrem iného umožňuje takéto pozorovanie: Beh bežca, ktorý beží povedzme druhý úsek s_5–s_{13}, sa vo svojej podstate zhoduje s behom „toho istého“ bežca bežiaceho úsek s_0–s_8, jediná odlišnosť spočíva v inom označení stavov – každý bude jednoducho o 5 menší. Takže na to, aby sme poznali priebeh výpočtu na úseku s_5–s_{13} „naostro“, nám stačí poznať priebeh výpočtu na „tréningovom“ úseku s_0–s_8. Venujme sa preto chvíľu takémuto posúvaniu stavov:

Nech T je stroj $\{s_0\texttt{11R}s_0, s_0\texttt{00N}s_6, s_6\texttt{01L}s_7, s_7\texttt{10L}s_1\}$ a U stroj $\{s_7\texttt{11R}s_7, s_7\texttt{00N}s_{13}, s_{13}\texttt{01L}s_{14}, s_{14}\texttt{10L}s_8\}$, ktorý z neho vznikne zväčšením oboch stavov všetkých inštrukcií o 7. Štartovná konfigurácia K prvého stroja bude

s_0	0	1	$\boxed{1}$	1	0	0	1	0	0	⋯

pri druhom to bude L, ktorá vznikne z K zväčšením stavu tiež o 7:

s_7	0	1	$\boxed{1}$	1	0	0	1	0	0	⋯

Vľavo je výpočet na T z K, vpravo výpočet na U z L:

s_0	0	1	$\boxed{1}$	1	0	0	1	0	0	⋯
s_0	0	1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	⋯
s_0	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	0	0	⋯
s_6	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	0	0	⋯
s_7	0	1	1	$\boxed{1}$	1	0	1	0	0	⋯
s_1	0	1	$\boxed{1}$	0	1	0	1	0	0	⋯

s_7	0	1	$\boxed{1}$	1	0	0	1	0	0	⋯
s_7	0	1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	⋯
s_7	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	0	0	⋯
s_{13}	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	0	0	⋯
s_{14}	0	1	1	$\boxed{1}$	1	0	1	0	0	⋯
s_8	0	1	$\boxed{1}$	0	1	0	1	0	0	⋯

Ako vidíme, pokiaľ ide o hlavu a pásku, výpočty sa vôbec nelíšia. Jediným rozdielom sú stavy, ktoré sú pri druhom výpočte uniformne posunuté.

Dá sa očakávať, a toto očakávanie onedlho dokážeme, že tento jav nastane pri ľubovoľnom posune stavov.

D Definujme funkciu `InštrukciaSPosunutýmiStavmi` (skrátene `IPS`) z množiny `Inštrukcie` $\times \mathbb{N}$ do množiny `Inštrukcie` takto:

Ak I je inštrukcia a $k \in \mathbb{N}$, tak `InštrukciaSPosunutýmiStavmi`$(I, k) = J$, pričom platí:

- `StarýStav`$(J) = k +$ `StarýStav`(I).
- `StaréPísmeno`$(J) =$ `StaréPísmeno`(I).
- `NovéPísmeno`$(J) =$ `NovéPísmeno`(I).

- $\texttt{Posun}(J) = \texttt{Posun}(I)$.
- $\texttt{NovýStav}(J) = k + \texttt{NovýStav}(I)$.

I $\texttt{IPS}(\texttt{s}_3\texttt{10Ls}_4, 2) = \texttt{s}_5\texttt{10Ls}_6$.

V **1**

Nech I je inštrukcia. Potom $\texttt{IPS}(I, 0) = I$.

Podľa viet **2.1** a opäť **2.1** stačí overiť rovnosť príslušných zložiek oboch inštrukcií.

Podľa definície IPS platí:

- $\texttt{StarýStav}(\texttt{IPS}(I, 0)) = 0 + \texttt{StarýStav}(I) = \texttt{StarýStav}(I)$.
- $\texttt{StaréPísmeno}(\texttt{IPS}(I, 0)) = \texttt{StaréPísmeno}(I)$.
- $\texttt{NovéPísmeno}(\texttt{IPS}(I, 0)) = \texttt{NovéPísmeno}(I)$.
- $\texttt{Posun}(\texttt{IPS}(I, 0)) = \texttt{Posun}(I)$.
- $\texttt{NovýStav}(\texttt{IPS}(I, 0)) = 0 + \texttt{NovýStav}(I) = \texttt{NovýStav}(I)$.

V **2**

Nech I je inštrukcia a $k, l \in \mathbb{N}$. Potom

$$\texttt{IPS}(\texttt{IPS}(I, k), l) = \texttt{IPS}(I, l + k).$$

Podľa viet **2.1** a opäť **2.1** stačí overiť rovnosť príslušných zložiek oboch inštrukcií:

- Nech F je jedna z funkcií StarýStav alebo NovýStav. Potom platí:
  $F(\texttt{IPS}(\texttt{IPS}(I, k), l))$
  $= l + F(\texttt{IPS}(I, k)$
  (podľa definície IPS),
  $= l + (k + F(I))$
  (podľa definície IPS),
  $= (l + k) + F(I))$,
  $= F(\texttt{IPS}(I, l + k))$
  (podľa definície IPS).
- Nech F je ktorákoľvek z funkcií StaréPísmeno, NovéPísmeno a Posun. Potom platí:
  $F(\texttt{IPS}(\texttt{IPS}(I, k), l))$
  $= F(\texttt{IPS}(I, k)$
  (podľa definície IPS),
  $= F(I)$
  (podľa definície IPS),
  $= F(\texttt{IPS}(I, l + k))$
  (podľa definície IPS).

D Definujme funkciu StrojSPosunutýmiStavmi (skrátene SPS) z množiny TuringoveStroje $\times \mathbb{N}$ takto: Ak T je Turingov stroj a $k \in \mathbb{N}$, tak

$$\texttt{StrojSPosunutýmiStavmi}(T, k) = \{\texttt{IPS}(I, k) : I \in T\}.$$

I Ak $T = \{\texttt{s}_0\texttt{11Rs}_0, \texttt{s}_0\texttt{00Ns}_6, \texttt{s}_6\texttt{01Ls}_7, \texttt{s}_7\texttt{10Ls}_1\}$, tak $\texttt{SPS}(T, 7) = \{\texttt{s}_7\texttt{11Rs}_7, \texttt{s}_7\texttt{00Ns}_{13}, \texttt{s}_{13}\texttt{01Ls}_{14}, \texttt{s}_{14}\texttt{10Ls}_8\}$.

P Špeciálne $\texttt{SPS}(\emptyset, k) = \emptyset$ pre každé k z $\mathbb{N}$.

V **3**

Nech je T Turingov stroj a $k \in \mathbb{N}$. Potom $\texttt{SPS}(T, k)$ je Turingov stroj.

Podľa definície SPS je $\mathtt{SPS}(T, k)$ množina inštrukcií. Nech J^1 a J^2 sú inštrukcie z T také, že $\mathtt{StarýStav}(J^1) = \mathtt{StarýStav}(J^2)$ a $\mathtt{StaréPísmeno}(J^1) = \mathtt{StaréPísmeno}(J^2)$. Podľa definície SPS potom existujú inštrukcie I^1 a I^2 z T také, že $J^1 = \mathtt{IPS}(I^1, k)$ a $J^2 = \mathtt{IPS}(I^2, k)$. Potom však platí:

- $\mathtt{StarýStav}(I^1)$
  $= \mathtt{StarýStav}(\mathtt{IPS}(I^1, k)) - k$
  (podľa definície IPS),
  $= \mathtt{StarýStav}(J^1) - k$,
  $= \mathtt{StarýStav}(J^2) - k$
  (podľa definície konfliktnosti),
  $= \mathtt{StarýStav}(\mathtt{IPS}(I^2, k)) - k$,
  $= \mathtt{StarýStav}(I^2)$
  (podľa definície IPS).
- $\mathtt{StaréPísmeno}(I^1)$
  $= \mathtt{StaréPísmeno}(\mathtt{IPS}(I^1, k))$
  (podľa definície IPS),
  $= \mathtt{StaréPísmeno}(J^1)$,
  $= \mathtt{StaréPísmeno}(J^2)$
  (podľa definície konfliktnosti),
  $= \mathtt{StaréPísmeno}(\mathtt{IPS}(I^2, k))$,
  $= \mathtt{StaréPísmeno}(I^2)$
  (podľa definície IPS).

Podľa definície Turingovho stroja tak dostávame $I^1 = I^2$. Potom však $J^1 = \mathtt{IPS}(I^1, k) = \mathtt{IPS}(I^2, k) = J^2$. To však podľa definície Turingovho stroja znamená, že $\mathtt{SPS}(T, k)$ je Turingov stroj.

V **4**

Nech T je Turingov stroj. Potom $\mathtt{SPS}(T, 0) = T$.

$\mathtt{SPS}(T, 0)$
$= \{\mathtt{IPS}(I, 0) : I \in T\}$
(podľa definície SPS),
$= \{I : I \in T\}$
(podľa vety **1**),
$= T$.

V **5**

Nech T je Turingov stroj a $k, l \in \mathbb{N}$. Potom

$$\mathtt{SPS}(\mathtt{SPS}(T, k), l) = \mathtt{SPS}(T, l + k).$$

$H \in \mathtt{SPS}(\mathtt{SPS}(T, k), l)$,
akk existuje J, že $J \in \mathtt{SPS}(T, k)$ a $H = \mathtt{IPS}(J, l)$
(podľa definície SPS),
akk existujú J a I, že $I \in T$, $J = \mathtt{IPS}(I, k)$ a $H = \mathtt{IPS}(J, l)$
(podľa definície SPS),
akk existujú J a I, že $I \in T$, $J = \mathtt{IPS}(I, k)$ a $H = \mathtt{IPS}(\mathtt{IPS}(I, k), l)$
(lebo $J = \mathtt{IPS}(I, k)$),
akk existuje I, že $I \in T$, $H = \mathtt{IPS}(\mathtt{IPS}(I, k), l)$ a existuje J, že $J = \mathtt{IPS}(I, k)$,
akk existuje I, že $I \in T$ a $H = \mathtt{IPS}(\mathtt{IPS}(I, k), l)$
(vynechaná časť je triviálne pravdivá),
akk existuje I, že $I \in T$ a $H = \mathtt{IPS}(I, l + k)$
(podľa vety **2**),

akk $H \in \mathtt{SPS}(T, l + k)$
(podľa definície SPS).

V $\boxed{6}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} T_i$ je Turingov stroj. Nech $k \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathtt{SPS}\left(\bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} T_i, k\right) = \bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} \mathtt{SPS}(T_i, k).$$

$J \in \mathtt{SPS}(\bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} T_i, k)$,
akk existuje I, že $I \in \bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} T_i$ a $J = \mathtt{IPS}(I, k)$
(podľa definície SPS),
akk existuje I, že existuje i z $\{1, \dots, n\}$, že platí $I \in T_i$, a $J = \mathtt{IPS}(I, k)$,
akk existuje i z $\{1, \dots, n\}$, že existuje I z T_i, že $J = \mathtt{IPS}(I, k)$,
akk existuje i z $\{1, \dots, n\}$, že $J \in \mathtt{SPS}(T_i, k)$
(podľa definície SPS),
akk $J \in \bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} \mathtt{SPS}(T_i, k)$.

V $\boxed{7}$

Nech je T Turingov stroj a $k \in \mathbb{N}$. Potom platí:
- $\mathtt{StaréStavy}(\mathtt{SPS}(T, k)) = \{k + i : i \in \mathtt{StaréStavy}(T)\}$.
- $\mathtt{NovéStavy}(\mathtt{SPS}(T, k)) = \{k + i : i \in \mathtt{NovéStavy}(T)\}$.
- $\mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{SPS}(T, k)) = \{k + i : i \in \mathtt{PoužitéStavy}(T)\}$.
- $\mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathtt{SPS}(T, k)) = \{k + i : i \in \mathtt{HyperaktívneStavy}(T)\}$.
- $\mathtt{PasívneStavy}(\mathtt{SPS}(T, k)) = \{k + i : i \in \mathtt{PasívneStavy}(T)\}$.
- Ak $T \neq \emptyset$, tak $\mathtt{MS}(\mathtt{SPS}(T, k)) = k + \mathtt{MS}(T)$.

Podľa vety **3** je $\mathtt{SPS}(T, k)$ stroj, takže ľavé strany všetkých dokazovaných rovností sú definované.
Postupne dokážeme všetky časti vety:

- Nech nastáva ktorákoľvek z možností:
  - $F = \mathtt{StaréStavy}$ a $f = \mathtt{StarýStav}$.
  - $F = \mathtt{NovéStavy}$ a $f = \mathtt{NovýStav}$.

  Potom platí:

  $s \in F(\mathtt{SPS}(T, k))$,
  akk $s \in f[\mathtt{SPS}(T, k)]$
  (podľa definície StaréStavy, resp. NovéStavy),
  akk existuje J, že $J \in \mathtt{SPS}(T, k)$ a $s = f(J)$,
  akk existujú J a I, že $I \in T$, $J = \mathtt{IPS}(I, k)$ a $s = f(J)$
  (podľa definície SPS),
  akk existujú J a I, že $I \in T$, $J = \mathtt{IPS}(I, k)$ a $s = f(\mathtt{IPS}(I, k))$
  (lebo $J = \mathtt{IPS}(I, k)$),
  akk existuje I, že $I \in T$, $s = f(\mathtt{IPS}(I, k))$ a existuje J, že $J = \mathtt{IPS}(I, k)$,
  akk existuje I, že $I \in T$ a $s = f(\mathtt{IPS}(I, k))$
  (vynechaná časť je triviálne pravdivá),
  akk existuje I, že $I \in T$ a $s = k + f(I)$
  (podľa definície IPS),
  akk existuje I, že $I \in T$ a $s - k = f(I)$,
  akk $s - k \in f[T]$,
  akk $s - k \in F(T)$

(podľa definície StaréStavy, resp. NovéStavy),
akk $s \in \{k + i : i \in F(T)\}$.

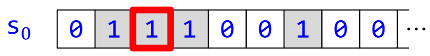
- PoužitéStavy(SPS(T, k))
  = StaréStavy(SPS(T, k)) ∪ NovéStavy(SPS(T, k))
  (podľa definície PoužitéStavy),
  = $\{k + i : i \in$ StaréStavy(T)$\}$ ∪ $\{k + i : i \in$ NovéStavy(T)$\}$
  (podľa už dokázaných častí tejto vety),
  = $\{k + i : i \in$ StaréStavy(T) ∪ NovéStavy(T)$\}$,
  = $\{k + i : i \in$ PoužitéStavy(T)$\}$
  (podľa definície PoužitéStavy).
- $s \in$ HyperaktívneStavy(SPS(T, k)),
  akk existujú J_0 a J_1, že $J_0 \in$ SPS(T, k), $J_1 \in$ SPS(T, k),
  StaréPísmeno(J_0) = 0, StaréPísmeno(J_1) = 1 a s = StarýStav(J_0) = StarýStav(J_1)
  (podľa definície HyperaktívneStavy),
  akk existujú J_0, J_1, I_0 a I_1, že $I_0 \in T$, $I_1 \in T$, J_0 = IPS(I_0, k), J_1 = IPS(I_1, k),
  StaréPísmeno(J_0) = 0, StaréPísmeno(J_1) = 1 a s = StarýStav(J_0) = StarýStav(J_1)
  (podľa definície SPS),
  akk existujú J_0, J_1, I_0 a I_1, že $I_0 \in T$, $I_1 \in T$, J_0 = IPS(I_0, k), J_1 = IPS(I_1, k),
  StaréPísmeno(IPS(I_0, k)) = 0, StaréPísmeno(IPS(I_1, k)) = 1
  a s = StarýStav(IPS(I_0, k)) = StarýStav(IPS(I_1, k))
  (lebo J_0 = IPS(I_0, k) a J_1 = IPS(I_1, k)),
  akk existujú I_0 a I_1, že $I_0 \in T$, $I_1 \in T$,
  StaréPísmeno(IPS(I_0, k)) = 0, StaréPísmeno(IPS(I_1, k)) = 1,
  s = StarýStav(IPS(I_0, k)) = StarýStav(IPS(I_1, k))
  a existujú J_0, J_1, že J_0 = IPS(I_0, k) a J_1 = IPS(I_1, k),
  akk existujú I_0 a I_1, že $I_0 \in T$, $I_1 \in T$,
  StaréPísmeno(IPS(I_0, k)) = 0, StaréPísmeno(IPS(I_1, k)) = 1
  a s = StarýStav(IPS(I_0, k)) = StarýStav(IPS(I_1, k))
  (vynechaná časť je triviálne pravdivá),
  akk existujú I_0 a I_1, že $I_0 \in T$, $I_1 \in T$,
  StaréPísmeno(I_0) = 0, StaréPísmeno(I_1) = 1 a $s = k +$ StarýStav(I_0) $= k +$ StarýStav(I_1)
  (podľa definícií IPS a opäť IPS),
  akk existujú I_0 a I_1, že $I_0 \in T$, $I_1 \in T$,
  StaréPísmeno(I_0) = 0, StaréPísmeno(I_1) = 1 a $s - k$ = StarýStav(I_0) = StarýStav(I_1),
  akk $s - k \in$ HyperaktívneStavy(T)
  (podľa definície HyperaktívneStavy),
  akk $s \in \{k + i : i \in$ HyperaktívneStavy(T)$\}$.
- PasívneStavy(SPS(T, k))
  = PoužitéStavy(SPS(T, k)) \ StaréStavy(SPS(T, k))
  (podľa definície PasívneStavy),
  = $\{k + i : i \in$ PoužitéStavy(T)$\}$ \ $\{k + i : i \in$ StaréStavy(T)$\}$
  (podľa už dokázaných častí),
  = $\{k + i : i \in$ PoužitéStavy(T) \ StaréStavy(T)$\}$,
  = $\{k + i : i \in$ PasívneStavy(T)$\}$
  (podľa definície PasívneStavy).
- MS(SPS(T, k))
  = Max(PoužitéStavy(SPS(T, k)))
  (podľa definície MS),
  = Max($\{k + i : i \in$ PoužitéStavy(T)$\}$)
  (podľa už dokázanej časti tejto vety),
  = max($\{k + i : i \in$ PoužitéStavy(T)$\}$)
  (podľa definíce Max, lebo podľa vety **2.6** je množina PoužitéStavy(T) neprázdna, keďže $T \neq \emptyset$, a teda aj $\{k + i : i \in$ PoužitéStavy(T)$\}$ je neprázdna),

$= k + \max(\{i : i \in \texttt{PoužitéStavy}(T)\})$,
$= k + \max(\texttt{PoužitéStavy}(T))$,
$= k + \texttt{Max}(\texttt{PoužitéStavy}(T))$
(podľa definíce Max, lebo podľa vety **2.6** je množina $\texttt{PoužitéStavy}(T)$ neprázdna, keďže $T \neq \emptyset$),
$= k + \texttt{MS}(T)$
(podľa definície MS).

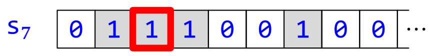
D Definujme funkciu KonfiguráciaSPosunutýmStavom (skrátene KPS) z množiny Konfigurácie $\times \mathbb{N}$ do množiny Konfigurácie takto:
Ak K je konfigurácia a $k \in \mathbb{N}$, tak $\texttt{KonfiguráciaSPosunutýmStavom}(K, k) = L$, pričom platí:

- $\texttt{Stav}(L) = k + \texttt{Stav}(K)$.
- $\texttt{Hlava}(L) = \texttt{Hlava}(K)$.
- $\texttt{Páska}(L) = \texttt{Páska}(K)$.

I Ak K je konfigurácia



tak $\texttt{KPS}(K, 7)$ je konfigurácia



V **8**

Nech K je konfigurácia s nulovým stavom a $k \in \mathbb{N}$. Potom $\texttt{Stav}(\texttt{KPS}(K, k)) = k$.

$\texttt{Stav}(\texttt{KPS}(K, k))$
$= k + \texttt{Stav}(K)$
(podľa definície KPS),
$= k + 0$
(podľa vety **2.12**),
$= k$.

V **9**

Nech K je konfigurácia. Potom $\texttt{KPS}(K, 0) = K$.

Podľa viet **2.11** a opäť **2.11** stačí overiť rovnosť príslušných zložiek oboch konfigurácií.

Podľa definície KPS platí:

- $\texttt{Stav}(\texttt{KPS}(K, 0)) = 0 + \texttt{Stav}(K) = \texttt{Stav}(K)$.
- $\texttt{Hlava}(\texttt{KPS}(K, 0)) = \texttt{Hlava}(K)$.
- $\texttt{Páska}(\texttt{KPS}(K, 0)) = \texttt{Páska}(K)$.

V **10**

Nech K^1 a K^2 sú konfigurácie a $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\texttt{KPS}(K^1, k) = \texttt{KPS}(K^2, k) \quad \text{práve vtedy, keď} \quad K^1 = K^2.$$

← Táto implikácia je zrejmá.
→ Podľa viet **2.11** a opäť **2.11** stačí overiť rovnosť príslušných zložiek oboch konfigurácií:

- $\texttt{Stav}(K^1)$
  $= \texttt{Stav}(\texttt{KPS}(K^1, k)) - k$
  (podľa definície KPS),

$= \mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(K^2, k)) - k$
(podľa predpokladu),
$= \mathtt{Stav}(K^2)$
(podľa definície KPS).

- Nech F je jedna z funkcií Hlava alebo Páska. Potom platí:
  $F(K^1)$
  $= F(\mathtt{KPS}(K^1, k))$
  (podľa definície KPS),
  $= F(\mathtt{KPS}(K^2, k))$
  (podľa predpokladu),
  $= F(K^2)$
  (podľa definície KPS).

V **11**

Nech K je konfigurácia a $k, l \in \mathbb{N}$. Potom

$$\mathtt{KPS}(\mathtt{KPS}(K, k), l) = \mathtt{KPS}(K, l + k).$$

Podľa viet **2.11** a opäť **2.11** stačí overiť rovnosť príslušných zložiek oboch konfigurácií:

- $\mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(\mathtt{KPS}(K, k), l))$
  $= l + \mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(K, k))$
  (podľa definície KPS),
  $= l + (k + \mathtt{Stav}(K))$
  (podľa definície KPS),
  $= (l + k) + \mathtt{Stav}(K)$,
  $= \mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(K, l + k))$
  (podľa definície KPS).
- Ak F je ktorákoľvek z funkcií Hlava a Páska, tak platí:
  $F(\mathtt{KPS}(\mathtt{KPS}(K, k), l))$
  $= F(\mathtt{KPS}(K, k))$
  (podľa definície KPS),
  $= F(K)$
  (podľa definície KPS),
  $= F(\mathtt{KPS}(K, l + k))$
  (podľa definície KPS).

V **12**

Nech I je inštrukcia, K je konfigurácia a $k \in \mathbb{N}$. Potom I korešponduje s K, práve keď $\mathtt{IPS}(I, k)$ korešponduje s $\mathtt{KPS}(K, k)$.

Overíme dokonca viac – ekvivalenciu oboch príslušných častí definícií korešpondencie I s K a korešpondencie $\mathtt{IPS}(I, k)$ s $\mathtt{KPS}(K, k)$:

- $\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{Stav}(K)$,
  akk $k + \mathtt{StarýStav}(I) = k + \mathtt{Stav}(K)$,
  akk $k + \mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(K, k))$
  (podľa definície KPS),
  akk $\mathtt{StarýStav}(\mathtt{IPS}(I, k)) = \mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(K, k))$
  (podľa definície IPS).
- $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = \mathtt{ČítanéPísmeno}(K)$,
  akk $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = (\mathtt{Páska}(K))(\mathtt{Hlava}(K))$

(podľa definície ČítanéPísmeno),
akk $\texttt{StaréPísmeno}(I) = (\texttt{Páska}(\texttt{KPS}(K,k)))(\texttt{Hlava}(K))$
(podľa definície KPS),
akk $\texttt{StaréPísmeno}(I) = (\texttt{Páska}(\texttt{KPS}(K,k)))(\texttt{Hlava}(\texttt{KPS}(K,k)))$
(podľa definície KPS),
akk $\texttt{StaréPísmeno}(I) = \texttt{ČítanéPísmeno}(\texttt{KPS}(K,k))$
(podľa definície ČítanéPísmeno),
akk $\texttt{StaréPísmeno}(\texttt{IPS}(I,k)) = \texttt{ČítanéPísmeno}(\texttt{KPS}(K,k))$
(podľa definície IPS).

Z toho už vyplýva dokazovaná ekvivalencia.

V $\boxed{13}$

Nech I je inštrukcia, K je konfigurácia a $k \in \mathbb{N}$. Potom I je aplikovateľná na K, práve keď je $\texttt{IPS}(I,k)$ aplikovateľná na $\texttt{KPS}(K,k)$.

Overíme dokonca viac – ekvivalenciu oboch príslušných častí definícií aplikovateľnosti I na K a aplikovateľnosti $\texttt{IPS}(I,k)$ na $\texttt{KPS}(K,k)$:

- Ekvivalencia korešpondencie I s K a korešpondencie $\texttt{IPS}(I,k)$ s $\texttt{KPS}(K,k)$ je tvrdením vety **12**.
- Neplatí naraz $\texttt{Hlava}(K) = 0$ a $\texttt{Posun}(I) = \texttt{L}$,
  akk neplatí naraz $\texttt{Hlava}(\texttt{KPS}(K,k)) = 0$ a $\texttt{Posun}(I) = \texttt{L}$
  (podľa definície KPS),
  akk neplatí naraz $\texttt{Hlava}(\texttt{KPS}(K,k)) = 0$ a $\texttt{Posun}(\texttt{IPS}(I,k)) = \texttt{L}$
  (podľa definície IPS).

Z toho už vyplýva dokazovaná ekvivalencia.

V $\boxed{14}$

Nech I je inštrukcia, K a L sú konfigurácie a $k \in \mathbb{N}$. Potom $K \xrightarrow{I} L$, práve keď $\texttt{KPS}(K,k) \xrightarrow{\texttt{IPS}(I,k)} \texttt{KPS}(L,k)$.

Overíme dokonca viac – ekvivalenciu všetkých príslušných častí definície menenia K na L prostredníctvom I a definície menenia $\texttt{KPS}(K,k)$ na $\texttt{KPS}(L,k)$ prostredníctvom $\texttt{IPS}(I,k)$:

- Podľa vety **13** platí, že I aplikovateľná na K, práve keď je $\texttt{IPS}(I,k)$ aplikovateľná na $\texttt{KPS}(K,k)$.
- $\texttt{Stav}(L) = \texttt{NovýStav}(I)$,
  akk $k + \texttt{Stav}(L) = k + \texttt{NovýStav}(I)$,
  akk $\texttt{Stav}(\texttt{KPS}(L,k)) = k + \texttt{NovýStav}(I)$
  (podľa definície KPS),
  akk $\texttt{Stav}(\texttt{KPS}(L,k)) = \texttt{NovýStav}(\texttt{IPS}(I,k))$
  (podľa definície IPS).
- $\texttt{Hlava}(L) = \texttt{Hlava}(K) + \texttt{Posun}(I) - 1$,
  akk $\texttt{Hlava}(\texttt{KPS}(L,k)) = \texttt{Hlava}(K) + \texttt{Posun}(I) - 1$
  (podľa definície KPS),
  akk $\texttt{Hlava}(\texttt{KPS}(L,k)) = \texttt{Hlava}(\texttt{KPS}(K,k)) + \texttt{Posun}(I) - 1$
  (podľa definície KPS),
  akk $\texttt{Hlava}(\texttt{KPS}(L,k)) = \texttt{Hlava}(\texttt{KPS}(K,k)) + \texttt{Posun}(\texttt{IPS}(I,k)) - 1$
  (podľa definície IPS).
- $(\texttt{Páska}(L))(i) = \texttt{NovéPísmeno}(I)$, ak $i = \texttt{Hlava}(K)$,
  a $(\texttt{Páska}(L))(i) = (\texttt{Páska}(K))(i)$ inak,
  akk $(\texttt{Páska}(\texttt{KPS}(L,k)))(i) = \texttt{NovéPísmeno}(I)$, ak $i = \texttt{Hlava}(K)$,
  a $(\texttt{Páska}(\texttt{KPS}(L,k)))(i) = (\texttt{Páska}(K))(i)$ inak
  (podľa definície KPS),
  akk $(\texttt{Páska}(\texttt{KPS}(L,k)))(i) = \texttt{NovéPísmeno}(I)$, ak $i = \texttt{Hlava}(\texttt{KPS}(K,k))$,

a $(\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(L,k)))(i) = (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(K,k)))(i)$ inak
(podľa definície KPS),
akk $(\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(L,k)))(i) = \mathtt{NovéPísmeno}(\mathtt{IPS}(I,k))$, ak $i = \mathtt{Hlava}(\mathtt{KPS}(K,k))$,
a $(\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(L,k)))(i) = (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(K,k)))(i)$ inak
(podľa definície IPS).

V $\boxed{\mathbf{15}}$

Nech K je konfigurácia a $k \in \mathbb{N}$. Nech $\mathtt{Stav}(K) \geq k$. Potom existuje konfigurácia L taká, že $K = \mathtt{KPS}(L,k)$.

Nech $L = \langle \mathtt{Stav}(K) - k, \mathtt{Hlava}(K), \mathtt{Páska}(K) \rangle$. Ukážeme, že konfigurácie $\mathtt{KPS}(L,k)$ a K sa zhodujú vo všetkých troch zložkách, z čoho podľa viet **2.11** a opäť **2.11** vyplynie ich rovnosť. Podľa definície KPS a vety **2.11** platí:

- $\mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(L,k)) = k + \mathtt{Stav}(L) = \mathtt{Stav}(K)$.
- $\mathtt{Hlava}(\mathtt{KPS}(L,k)) = \mathtt{Hlava}(L) = \mathtt{Hlava}(K)$.
- $\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(L,k)) = \mathtt{Páska}(L) = \mathtt{Páska}(K)$.

V $\boxed{\mathbf{16}}$

Nech T je stroj, K konfigurácia a $k \in \mathbb{N}$.
- Nech L je konfigurácia. Potom $\mathtt{KPS}(L,k) = \mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K,k), \mathtt{SPS}(T,k))$ práve vtedy, keď $L = \mathtt{Krok}(K,T)$.
- $\mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K,k), \mathtt{SPS}(T,k))$ existuje práve vtedy, keď existuje $\mathtt{Krok}(K,T)$.

- $\mathtt{KPS}(L,k) = \mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K,k), \mathtt{SPS}(T,k))$,
  akk existuje J z $\mathtt{SPS}(T,k)$, že $\mathtt{KPS}(K,k) \xrightarrow{J} \mathtt{KPS}(L,k)$
  (podľa definície Krok),
  akk existuje I z T, že $\mathtt{KPS}(K,k) \xrightarrow{\mathtt{IPS}(I,k)} \mathtt{KPS}(L,k)$
  (podľa definície SPS),
  akk existuje I z T, že $K \xrightarrow{I} L$
  (podľa vety **14**),
  akk $L = \mathtt{Krok}(K,T)$
  (podľa definície Krok).
- ← Nech $\mathtt{Krok}(K,T)$ je definované, označme túto konfiguráciu L. Podľa už dokázanej časti z toho máme, že $\mathtt{KPS}(L,k) = \mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K,k), \mathtt{SPS}(T,k))$, takže $\mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K,k), \mathtt{SPS}(T,k))$ existuje.

  → Nech $\mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K,k), \mathtt{SPS}(T,k))$ je definované, označme túto konfiguráciu M. Podľa definície Krok existuje inštrukcia J z $\mathtt{SPS}(T,k)$, že $\mathtt{KPS}(K,k) \xrightarrow{J} M$. Podľa definície SPS potom existuje inštrukcia I z T, že $J = \mathtt{IPS}(I,k)$.

  1 $\boxed{\mathtt{Stav}(M) \geq k.}$

  $\mathtt{Stav}(M)$
  $= \mathtt{NovýStav}(J)$
  (podľa definície menenia),
  $= \mathtt{NovýStav}(\mathtt{IPS}(I,k))$,
  $= k + \mathtt{NovýStav}(I)$
  (podľa definície IPS),
  $\geq k$.

  Podľa sublemy **1** a vety **15** potom existuje konfigurácia L, že $\mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K,k), \mathtt{SPS}(T,k)) = M = \mathtt{KPS}(L,k)$. Podľa už dokázanej časti z toho máme, že $L = \mathtt{Krok}(K,T)$, takže $\mathtt{Krok}(K,T)$ existuje.

V $\boxed{17}$

Nech T je Turingov stroj, K konfigurácia a $k \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- Ak $((K_0, \dots, K_n))$ je konečná postupnosť konfigurácií, tak $(\mathtt{KPS}(K_0, k), \dots, \mathtt{KPS}(K_n, k))$ je konečný výpočet na $\mathtt{SPS}(T, k)$ z $\mathtt{KPS}(K, k)$, práve keď $((K_0, \dots, K_n))$ je konečný výpočet na T z K.
- Ak $(K_i : i \in \mathbb{N})$ je postupnosť konfigurácií, tak $(\mathtt{KPS}(K_i, k) : i \in \mathbb{N})$ je nekonečný výpočet na $\mathtt{SPS}(T, k)$ z $\mathtt{KPS}(K, k)$, práve keď $(K_i : i \in \mathbb{N})$ je nekonečný výpočet na T z K.

- Overíme ekvivalencie všetkých príslušných častí definícií konečného výpočtu a opäť konečného výpočtu:
  - Podľa vety **10** platí $\mathtt{KPS}(K, k) = \mathtt{KPS}(K_0, k)$ práve vtedy, keď $K = K_0$.
  - Ak $i < n$, tak podľa vety **16** platí $\mathtt{KPS}(K_{i+1}, k) = \mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K_i, k), \mathtt{SPS}(T, k))$ práve vtedy, keď $K_{i+1} = \mathtt{Krok}(K_i, T)$.
  - Podľa vety **16** nie je $\mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K_n, k), \mathtt{SPS}(T, k))$ definované, práve keď nie je definované $\mathtt{Krok}(K_n, T)$.
- Overíme ekvivalencie oboch príslušných častí definícií nekonečného výpočtu a opäť nekonečného výpočtu:
  - Podľa vety **10** platí $\mathtt{KPS}(K, k) = \mathtt{KPS}(K_0, k)$ práve vtedy, keď $K = K_0$.
  - Ak $i \in \mathbb{N}$, tak podľa vety **16** platí $\mathtt{KPS}(K_{i+1}, k) = \mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K_i, k), \mathtt{SPS}(T, k))$ práve vtedy, keď $K_{i+1} = \mathtt{Krok}(K_i, T)$.

V $\boxed{18}$

Nech T je Turingov stroj, K konfigurácia a $k \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- Ak je výpočet na T z K konečný, tak platí:
  - $\mathtt{Koniec}(\mathtt{KPS}(K, k), \mathtt{SPS}(T, k)) = \mathtt{KPS}(\mathtt{Koniec}(K, T), k)$.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KPS}(K, k), \mathtt{SPS}(T, k)) = \mathtt{Rozsah}(K, T)$.
- Ak je výpočet na T z K nekonečný, tak je výpočet na $\mathtt{SPS}(T, k)$ z $\mathtt{KPS}(K, k)$ nekonečný.

- Nech konečný výpočet na T z K je $((K_0, \dots, K_n))$. Podľa vety **17** je potom $(\mathtt{KPS}(K_0, k), \dots, \mathtt{KPS}(K_n, k))$ konečný výpočet na $\mathtt{SPS}(T, k)$ z $\mathtt{KPS}(K, k)$. Potom platí:
  - $\mathtt{Koniec}(\mathtt{KPS}(K, k), \mathtt{SPS}(T, k))$

    $= \mathtt{KPS}(K_n, k)$
    (podľa definície $\mathtt{Koniec}$),

    $= \mathtt{KPS}(\mathtt{Koniec}(K, T), k)$
    (podľa definície $\mathtt{Koniec}$).
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KPS}(K, k), \mathtt{SPS}(T, k))$

    $= \max(\{\mathtt{Hlava}(\mathtt{KPS}(K_i, k)) : i \in \{0, \dots, n\}\})$
    (podľa definície $\mathtt{Rozsah}$),

    $= \max(\{\mathtt{Hlava}(K_i) : i \in \{0, \dots, n\}\})$
    (podľa definície $\mathtt{KPS}$),

    $= \mathtt{Rozsah}(K, T)$
    (podľa definície $\mathtt{Rozsah}$).
- Nech nekonečný výpočet na T z K je $(K_i : i \in \mathbb{N})$. Potom podľa vety **17** je $(\mathtt{KPS}(K_i, k) : i \in \mathbb{N})$ nekonečný výpočet na $\mathtt{SPS}(T, k)$ z $\mathtt{KPS}(K, k)$.

1.5 Úplné a poloúplné stroje

Vráťme sa k našim úvahám o rozdelení výpočtu na etapy. Podľa predchádzajúcich výsledkov teda stačí o každej takejto etape predpokladať, že sa začína konfiguráciou s nulovým stavom, skutočná časť výpočtu potom vznikne správnym posunom stavov. Turingov stroj realizujúci celý výpočet tak môžeme chápať ako isté zloženie strojov, ktoré sa postarali o jednotlivé etapy výpočtu. Budeme preto pracovať s takými strojmi, že ich minimálny stav bude s_0, reálne použité stroje budú potom ich posunutím do vhodného stavu.

Zároveň budeme od našich strojov požadovať, aby sa na nich všetky konečné výpočty (samozrejme, z vhodných konfigurácií) skončili v očakávanom stave. Takéto stroje môžeme skonštruovať veľmi jednoducho – stačí predsa „hyperaktivizovať" všetky stavy okrem tých, v ktorých sa majú výpočty skončiť (známej problematickej situácii na začiatku pásky, ktorá by tento princíp mohla spochybniť, sa pritom budeme vyhýbať).

Budú nás zaujímať dve špeciálne triedy takýchto strojov:

- Ak má stroj jediný možný koncový stav, je zrejmé, že každý konečný výpočet (samozrejme, až na horeuvedenú výnimku) sa skončí práve v tomto stave.

  Potom však presne vieme, ako posunúť stavy stroja, ktorý by sa mal postarať o pokračovanie výpočtu. Takto môžeme simulovať *zložený príkaz*.
- Ak má stroj dva možné koncové stavy, v podstate testuje nejakú vlastnosť. Podľa toho, v ktorom z týchto dvoch stavov sa výpočet skončí, odpoveď bude buď „áno", alebo „nie".

  Na takýto stroj môžeme podobným (i keď technicky komplikovanejším) spôsobom napojiť ďalší stroj, ktorý bude použitý vtedy, ak náš testovací stroj odpovedal pozitívne. Takýmto spôsobom teda môžeme simulovať *podmienečné vykonávanie príkazu*.

D Stroj T nazveme *úplný*, ak platí jedna z podmienok:

- $T = \emptyset$.
- Naraz platí:
  - $\mathtt{MS}(T) \geq 1$.
  - $\mathtt{HyperaktívneStavy}(T) = \{0, \dots, \mathtt{MS}(T) - 1\}$.
  - $\mathtt{PasívneStavy}(T) = \{\mathtt{MS}(T)\}$.

Množinu úplných strojov označíme ÚplnéStroje.

I Stroj $\{s_0\mathtt{01R}s_1, s_0\mathtt{11L}s_1, s_1\mathtt{01L}s_2, s_1\mathtt{10N}s_4, s_2\mathtt{01R}s_2, s_2\mathtt{10L}s_4, s_3\mathtt{01R}s_3, s_3\mathtt{10L}s_3\}$ je úplný, pretože jeho maximálny použitý stav s_4 je pasívny a všetky menšie stavy sú hyperaktívne.

I Stroj $\{s_0\mathtt{11L}s_1, s_1\mathtt{01L}s_2, s_1\mathtt{10N}s_4, s_5\mathtt{10N}s_1\}$ nie je úplný, lebo napríklad jeho maximálny použitý stav s_5 nie je pasívny.

I Stroj $\{s_0\mathtt{01L}s_2, s_0\mathtt{10N}s_5, s_2\mathtt{01R}s_2, s_2\mathtt{10L}s_4, s_3\mathtt{01R}s_0, s_3\mathtt{11L}s_0, s_4\mathtt{00R}s_5, s_4\mathtt{10N}s_0\}$ nie je úplný, lebo v ňom nie je použitý stav s_1.

D Stroj S nazveme *poloúplný*, ak preň platia tieto podmienky:

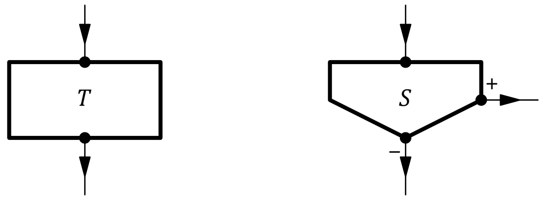
- $\mathtt{MS}(S) \geq 2$.
- $\mathtt{HyperaktívneStavy}(S) = \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) - 2\}$.
- $\mathtt{PasívneStavy}(S) = \{\mathtt{MS}(S) - 1, \mathtt{MS}(S)\}$.

Stav $\mathtt{MS}(S) - 1$ nazývame *kladný stav* stroja S a stav $\mathtt{MS}(S)$ *záporný stav* stroja S. Množinu poloúplných strojov označíme PoloúplnéStroje.

I Stroj $\{s_0\mathtt{01R}s_1, s_0\mathtt{11L}s_1, s_1\mathtt{01L}s_2, s_1\mathtt{10N}s_5, s_2\mathtt{01R}s_2, s_2\mathtt{10L}s_4, s_3\mathtt{00R}s_5, s_3\mathtt{10N}s_0\}$ je poloúplný, pretože jeho maximálny použitý stav s_5 je pasívny, aj stav s_4 o 1 menší je pasívny a všetky menšie stavy sú hyperaktívne.

I Stroj $\{\mathtt{s}_0\mathtt{01Rs}_1, \mathtt{s}_0\mathtt{11Ls}_1, \mathtt{s}_1\mathtt{01Ls}_2, \mathtt{s}_1\mathtt{10Ns}_6, \mathtt{s}_2\mathtt{01Rs}_2, \mathtt{s}_2\mathtt{10Ls}_4, \mathtt{s}_3\mathtt{00Rs}_5, \mathtt{s}_3\mathtt{10Ns}_6\}$ nie je poloúplný, lebo jeho maximálny použitý stav je $\mathtt{s}_6$, ale stav $\mathtt{s}_4$ nie je hyperaktívny.

P Výpočty na týchto dvoch typoch strojov, presnejšie na ich posunutiach, budeme znázorňovať i graficky:



Vľavo je znázornený výpočet na (vhodne posunutom) úplnom Turingovom stroji T. Horná šípka symbolizuje vstupný stav (o ktorý treba stroj posunúť), dolná (rovnako posunutý) výstupný stav.

Obrázok vpravo znamená výpočet na (prípadne posunutom) poloúplnom Turingovom stroji S. Aj tu horná šípka značí vstupný stav. Zvyšné dve šípky sú výstupné, + označuje, prirodzene, pozitívny a − negatívny koncový stav výpočtu.

V **1**

Nech T je úplný alebo poloúplný stroj. Potom platí:

- StaréStavy(T) = HyperaktívneStavy(T).
- PoužitéStavy(T) = HyperaktívneStavy(T) ∪ PasívneStavy(T).
- Ak $T \neq \emptyset$, tak PoužitéStavy(T) $= \{0, \dots,$ MS(T)$\}$.

- ⊇ Podľa vety **2.7**.

  ⊆ Rozoberme dva prípady:

  - $T = \emptyset$.

    Potom platí:

    StaréStavy(T)

    = StaréStavy($\emptyset$),

    = StarýStav[$\emptyset$]
      (podľa definície StaréStavy),

    = $\emptyset$,

    ⊆ HyperaktívneStavy(T).

  - $T \neq \emptyset$.

    Nech nastáva jedna z možností:

    - T je úplný stroj a $q = 1$.
    - T je poloúplný stroj a $q = 2$.

    Potom platí:

    StaréStavy(T)

    = (StaréStavy(T) ∪ PoužitéStavy(T)) \ (PoužitéStavy(T) \ StaréStavy(T))
      (lebo $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$),

    = (StaréStavy(T) ∪ PoužitéStavy(T)) \ PasívneStavy(T)
      (podľa definície PasívneStavy),

    = PoužitéStavy(T) \ PasívneStavy(T)
      (lebo podľa definície PoužitéStavy platí StaréStavy(T) ⊆ PoužitéStavy(T)),

    ⊆ $\{0, \dots,$ MS(T)$\}$ \ PasívneStavy(T)
      (podľa definícií MS a Max),

    = $\{0, \dots,$ MS(T)$\}$ \ $\{$MS(T), MS(T) $+ 1 - q\}$

(podľa definície úplného, resp. poloúplného stroja),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(T) - q\}$,
$= \mathtt{HyperaktívneStavy}(T)$
(podľa definície úplného, resp. poloúplného stroja).

- $\mathtt{HyperaktívneStavy}(T) \cup \mathtt{PasívneStavy}(T)$
  $= \mathtt{StaréStavy}(T) \cup \mathtt{PasívneStavy}(T)$
  (podľa už dokázanej časti),
  $= \mathtt{StaréStavy}(T) \cup (\mathtt{PoužitéStavy}(T) \setminus \mathtt{StaréStavy}(T))$
  (podľa definície PasívneStavy),
  $= \mathtt{StaréStavy}(T) \cup \mathtt{PoužitéStavy}(T)$
  (lebo $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$),
  $= \mathtt{PoužitéStavy}(T)$
  (lebo podľa definície PoužitéStavy platí $\mathtt{StaréStavy}(T) \subseteq \mathtt{PoužitéStavy}(T)$).
- Nech nastáva jedna z možností:
  - T je úplný stroj a $q = 1$.
  - T je poloúplný stroj a $q = 2$.

  Potom platí:
  $\{0, \dots, \mathtt{MS}(T)\}$
  $= \{0, \dots, \mathtt{MS}(T) - q\} \cup \{\mathtt{MS}(T) - q, \mathtt{MS}(T) - 1\}$,
  $= \mathtt{HyperaktívneStavy}(T) \cup \mathtt{PasívneStavy}(T)$
  (podľa definície úplného, resp. poloúplného stroja),
  $= \mathtt{PoužitéStavy}(T)$
  (podľa už dokázanej časti).

V $\boxed{2}$

Nech T je úplný alebo poloúplný stroj. Nech K je konfigurácia taká, že $\mathtt{Stav}(K) \notin \mathtt{HyperaktívneStavy}(T)$. Potom neexistuje $\mathtt{Krok}(K, T)$.

Ak existuje $\mathtt{Krok}(K, T)$, tak podľa vety **2.19** platí $\mathtt{Stav}(K) \in \mathtt{StaréStavy}(T)$. Podľa vety **1** potom $\mathtt{Stav}(K) \in \mathtt{HyperaktívneStavy}(T)$.

D Nech T je stroj a K konfigurácia. Konečný výpočet na T z K nazveme *zaseknutý*, ak v T existuje inštrukcia korešpondujúca s konfiguráciou $\mathtt{Koniec}(K, T)$, ktorá však na ňu nie je aplikovateľná.

D Nech T je úplný Turingov stroj a K a L sú konfigurácie s nulovým stavom. Potom zápis $K \xrightarrow{T} L$ bude znamenať $\mathtt{Koniec}(K, T) = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(T))$.

I Nech T je úplný Turingov stroj $\{s_0 01Rs_1, s_0 11Rs_0, s_1 00Ns_2, s_1 10Ns_2\}$ a K je konfigurácia s nulovým stavom

s_0	0	0	$\boxed{1}$	1	0	1	1	0	0	⋯

Výpočet na T z K je potom

s_0	0	0	$\boxed{1}$	1	0	1	1	0	0	⋯
s_0	0	0	1	$\boxed{1}$	0	1	1	0	0	⋯
s_0	0	0	1	1	$\boxed{0}$	1	1	0	0	⋯
s_1	0	0	1	1	1	$\boxed{1}$	1	0	0	⋯
s_2	0	0	1	1	1	$\boxed{0}$	1	0	0	⋯

Ak budeme ignorovať stav poslednej konfigurácie $\mathtt{Koniec}(K, T)$, dostávame konfiguráciu s nulovým stavom L

s_0	0	0	1	1	1	$\boxed{0}$	1	0	0	⋯

Potom platí $\mathtt{Koniec}(K, T) = \mathtt{KPS}(L, 2) = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(T))$, čiže $K \overset{T}{\dashrightarrow} L$.

V $\boxed{\mathbf{3}}$

Nech T je úplný stroj a K a L sú konfigurácie s nulovým stavom. Nech $K \overset{T}{\dashrightarrow} L$. Potom výpočet na T z K nie je zaseknutý.

Rozoberme dva prípady:

- Nech $T = \emptyset$.

  Potom v T neexistuje inštrukcia korešpondujúca s $\mathtt{Koniec}(K, T)$, takže konečný výpočet na T z K podľa definície nie je zaseknutý.
- Nech $T \neq \emptyset$.

  Potom platí:

  $\mathtt{Stav}(\mathtt{Koniec}(K, T))$
  $= \mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(T)))$
    (podľa definície $\overset{T}{\dashrightarrow}$),
  $= \mathtt{MS}(T)$
    (podľa vety **4.8**),
  $\in \mathtt{PasívneStavy}(T)$
    (podľa definície úplného stroja).

  Z toho podľa vety **2.14** dostávame, že v T neexistuje inštrukcia korešpondujúca s $\mathtt{Koniec}(K, T)$, takže konečný výpočet na T z K podľa definície nie je zaseknutý.

V $\boxed{\mathbf{4}}$

Nech K je konfigurácia s nulovým stavom. Potom $K \overset{\emptyset}{\dashrightarrow} K$.

Platí:

$\mathtt{Koniec}(K, \emptyset)$
$= K$
  (podľa vety **2.24**),
$= \mathtt{KPS}(K, 0)$
  (podľa definície $\mathtt{KPS}$),
$= \mathtt{KPS}(K, \mathtt{Max}(\emptyset))$
  (podľa definície $\mathtt{Max}$),
$= \mathtt{KPS}(K, \mathtt{Max}(\mathtt{PoužitéStavy}(\emptyset)))$
  (podľa vety **2.6**),
$= \mathtt{KPS}(K, \mathtt{MS}(\emptyset))$
  (podľa definície $\mathtt{MS}$).

Podľa definície $\overset{\emptyset}{\dashrightarrow}$ už dostávame dokazované tvrdenie.

Veľmi podobne je to s poloúplným strojom, tu však máme dve možnosti:

D Nech S je poloúplný stroj a K a L sú konfigurácie s nulovým stavom.

- Označenie $K \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$ znamená, že $\mathtt{Koniec}(K, S) = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S) - 1)$.
- Označenie $K \overset{S}{\underset{-}{\dashrightarrow}} L$ znamená, že $\mathtt{Koniec}(K, S) = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S))$.

I Nech S je polOúplný Turingov stroj $\{\texttt{s}_0\texttt{01Rs}_1, \texttt{s}_0\texttt{11Rs}_0, \texttt{s}_1\texttt{00Ns}_2, \texttt{s}_1\texttt{10Ns}_3\}$.

- Nech K je konfigurácia s nulovým stavom

$$\texttt{s}_0\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \boxed{\texttt{1}}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$

  Výpočet na S z K je potom

$$\texttt{s}_0\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \boxed{\texttt{1}}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$
$$\texttt{s}_0\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \boxed{\texttt{1}}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$
$$\texttt{s}_0\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \boxed{\texttt{0}}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$
$$\texttt{s}_1\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \boxed{\texttt{1}}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$
$$\texttt{s}_3\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \boxed{\texttt{0}}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$

  Ak ignorujeme stav poslednej konfigurácie $\texttt{Koniec}(K,S)$, dostávame konfiguráciu s nulovým stavom L

$$\texttt{s}_0\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \boxed{\texttt{0}}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$

  Potom platí $\texttt{Koniec}(K,S) = \texttt{KPS}(L,3) = \texttt{KPS}(L,\texttt{MS}(S))$, čiže $K \xrightarrow[=]{S} L$.

- Nech K je konfigurácia s nulovým stavom

$$\texttt{s}_0\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \boxed{\texttt{1}}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$

  Výpočet na S z K je potom

$$\texttt{s}_0\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \boxed{\texttt{1}}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$
$$\texttt{s}_0\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \boxed{\texttt{1}}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$
$$\texttt{s}_0\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \boxed{\texttt{0}}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$
$$\texttt{s}_1\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \boxed{\texttt{0}}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$
$$\texttt{s}_2\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \boxed{\texttt{0}}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$

  Ak ignorujeme stav poslednej konfigurácie $\texttt{Koniec}(K,S)$, dostávame konfiguráciu s nulovým stavom L

$$\texttt{s}_0\quad \texttt{0}\ \texttt{0}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \texttt{1}\ \boxed{\texttt{0}}\ \texttt{1}\ \texttt{0}\ \texttt{0}\ \cdots$$

  Potom platí $\texttt{Koniec}(K,S) = \texttt{KPS}(L,2) = \texttt{KPS}(L,\texttt{MS}(S)-1)$, čiže $K \xrightarrow[+]{S} L$.

V $\boxed{5}$

> Nech S je polOúplný stroj a K a L sú konfigurácie s nulovým stavom. Nech $K \xrightarrow[+]{S} L$ alebo $K \xrightarrow[=]{S} L$. Potom výpočet na S z K nie je zaseknutý.

Platí:

$\texttt{Stav}(\texttt{Koniec}(K,S))$

$\in \{\texttt{Stav}(\texttt{KPS}(L,\texttt{MS}(S)-1)), \texttt{Stav}(\texttt{KPS}(L,\texttt{MS}(S)))\}$
 (podľa definície $\xrightarrow[+]{S}$, resp. $\xrightarrow[=]{S}$),

$= \{\texttt{MS}(S)-1, \texttt{MS}(S)\}$
 (podľa viet **4.8** a opäť **4.8**),

$= \texttt{PasívneStavy}(S)$
 (podľa definície polOúplného stroja).

Z toho podľa vety **2.14** dostávame, že v S neexistuje inštrukcia korešpondujúca s $\mathtt{Koniec}(K,S)$, takže konečný výpočet na S z K podľa definície nie je zaseknutý.

Budeme teda pracovať (až na malé výnimky) iba s úplnými a poloúplnými Turingovými strojmi. Otázkou ostáva, ako dva stroje skombinovať do tretieho tak, aby mal výpočet na ňom dve etapy – tam, kde sa skončí výpočet podľa prvého stroja, naň okamžite nadviaže výpočet podľa stroja druhého. Potrebujeme teda všetky inštrukcie z oboch strojov, avšak zreteľne nemôže ísť vo všeobecnosti o ich zjednotenie, lebo sa môže ľahko stať, že niektoré dve (pôvodne každá z iného stroja) budú v konflikte. Ako sme však už naznačili, tomuto problému sa ľahko vyhneme – stačí všetky stavy v inštrukciách druhého stroja zväčšiť tak, aby najmenší stav nebol $\mathtt{s}_0$, ale práve maximálny stav použitý v prvom stroji. Koncový stav jedného stroja sa tak stane počiatočným stavom druhého (už posunutého) stroja.

D Definujme funkciu $\circ$ (čítame *zloženie strojov*) z množiny $\mathtt{ÚplnéStroje} \times \mathtt{TuringoveStroje}$ vzťahom

$$T \circ U = T \cup \mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T)).$$

I Ak

$$T = \{\mathtt{s_0 01R s_1}, \mathtt{s_0 11L s_1}, \mathtt{s_1 01L s_2}, \mathtt{s_1 10N s_4}, \mathtt{s_2 01R s_2}, \mathtt{s_2 10L s_3}, \mathtt{s_3 00R s_4}, \mathtt{s_3 10N s_1}\}$$

a

$$U = \{\mathtt{s_0 01N s_1}, \mathtt{s_0 11L s_1}, \mathtt{s_1 01R s_1}, \mathtt{s_1 11R s_2}\},$$

tak platí $\mathtt{MS}(T) = \mathtt{s}_4 = 4$, a teda máme

$$T \circ U =$$

$$= \{\mathtt{s_0 01R s_1}, \mathtt{s_0 11L s_1}, \mathtt{s_1 01L s_2}, \mathtt{s_1 10N s_4}, \mathtt{s_2 01R s_2}, \mathtt{s_2 10L s_3}, \mathtt{s_3 00R s_4}, \mathtt{s_3 10N s_1}\} \cup$$

$$\cup \{\mathtt{s_4 01N s_5}, \mathtt{s_4 11L s_5}, \mathtt{s_5 01R s_5}, \mathtt{s_5 11R s_6}\}.$$

V $\boxed{6}$

Nech T je úplný Turingov stroj a U je Turingov stroj. Potom $T \circ U$ je Turingov stroj.

1 $\mathtt{StaréStavy}(T) \cap \mathtt{StaréStavy}(\mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T))) = \emptyset$.

Tvrdenie dokážeme sporom:

$s \in \mathtt{StaréStavy}(T) \cap \mathtt{StaréStavy}(\mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T)))$
(predpoklad s cieľom získať spor),
$s \in \mathtt{StaréStavy}(T)$ a $s \in \mathtt{StaréStavy}(\mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T)))$,
$s \in \mathtt{HyperaktívneStavy}(T)$ a $s \in \mathtt{StaréStavy}(\mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T)))$
(podľa vety **1**),
$s \leq \mathtt{MS}(T) - 1$ a $s \in \mathtt{StaréStavy}(\mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T)))$
(podľa definície úplného stroja (prípad $T = \emptyset$ nenastáva, lebo vtedy je $s \in \mathtt{StaréStavy}(T)$ v spore s vetou **2.4**)),
$s \leq \mathtt{MS}(T) - 1$ a $s \in \{\mathtt{MS}(T) + i : i \in \mathtt{StaréStavy}(U)\}$
(podľa vety **4.7**),
$s \leq \mathtt{MS}(T) - 1$ a $s \geq \mathtt{MS}(T)$,
čo je spor.

Podľa sublemy **1** a vety **2.5** je teda $T \cup \mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T))$ Turingov stroj, čiže podľa definície $\circ$ je $T \circ U$ je Turingov stroj.

V $\boxed{7}$

- Ak T je Turingov stroj, tak $\emptyset \circ T = T$.
- Ak T je úplný Turingov stroj, tak $T \circ \emptyset = T$.

- $\emptyset \circ T$

$= \emptyset \cup \mathsf{SPS}(T, \mathsf{MS}(\emptyset))$
(podľa definície $\circ$),
$= \mathsf{SPS}(T, \mathsf{MS}(\emptyset))$,
$= \mathsf{SPS}(T, 0)$
(podľa vety **2.10**),
$= T$
(podľa vety **4.4**).

- $T \circ \emptyset$
$= T \cup \mathsf{SPS}(\emptyset, \mathsf{MS}(T))$
(podľa definície $\circ$),
$= T \cup \emptyset$
(podľa definície SPS),
$= T$.

V **8**

Nech T je úplný Turingov stroj a U je Turingov stroj. Potom

$$\mathsf{MS}(T \circ U) = \mathsf{MS}(T) + \mathsf{MS}(U).$$

$\mathsf{MS}(T \circ U)$
$= \mathsf{MS}(T \cup \mathsf{SPS}(U, \mathsf{MS}(T)))$
(podľa definície $\circ$),
$= \mathsf{Max}\{\mathsf{MS}(T), \mathsf{MS}(\mathsf{SPS}(U, \mathsf{MS}(T)))\}$
(podľa vety **2.9**),
$= \mathsf{Max}\{\mathsf{MS}(T), \mathsf{MS}(T) + \mathsf{MS}(U)\}$
(podľa vety **4.7**),
$= \mathsf{MS}(T) + \mathsf{MS}(U)$
(lebo $\mathsf{MS}(T) \leq \mathsf{MS}(T) + \mathsf{MS}(U)$).

V **9**

Nech T je úplný Turingov stroj. Potom platí:
- Ak U je úplný Turingov stroj, tak aj $T \circ U$ je úplný Turingov stroj.
- Ak U je polоúplný Turingov stroj, tak aj $T \circ U$ je polоúplný Turingov stroj.

Rozlíšme dva prípady:

- Nech $T = \emptyset$.
  Potom podľa vety **7** platí $T \circ U = U$, takže obe tvrdenia platia triviálne.
- Nech $T \neq \emptyset$.
  Nech nastáva jedna z možností:
  - U je úplný stroj a $q = 1$.
  - U je polоúplný stroj a $q = 2$.

  Potom podľa vety **6** je $T \circ U$ Turingov stroj. Overíme jeho úplnosť, resp. polоúplnosť:
  - $\mathsf{MS}(T \circ U)$
    $= \mathsf{MS}(T) + \mathsf{MS}(U)$
    (podľa vety **8**),
    $\geq \mathsf{MS}(U)$,
    $\geq q$
    (podľa definície úplnosti, resp. polоúplnosti).
  - Rozlíšime prípady:
    - Nech $s < \mathsf{MS}(T)$.

Podľa definície úplného stroja potom $s \in \mathtt{HyperaktívneStavy}(T)$, takže podľa vety **2.9** a definície $\circ$ platí $s \in \mathtt{HyperaktívneStavy}(T \cup \mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T))) = \mathtt{HyperaktívneStavy}(T \circ U)$.

- Nech $\mathtt{MS}(T) \leq s \leq \mathtt{MS}(T \circ U) - q$,

  Potom podľa vety **8** platí $\mathtt{MS}(T) \leq s \leq \mathtt{MS}(T) + \mathtt{MS}(U) - q$, čiže $0 \leq s - \mathtt{MS}(T) \leq \mathtt{MS}(U) - q$. Podľa definície úplnosti, resp. polоúplnosti potom máme, že $s - \mathtt{MS}(T) \in \mathtt{HyperaktívneStavy}(U)$, teda podľa vety **4.7** platí $s \in \mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T)))$. Podľa vety **2.9** a podľa definície $\circ$ potom dostávame $s \in \mathtt{HyperaktívneStavy}(T \cup \mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T))) = \mathtt{HyperaktívneStavy}(T \circ U)$.
- Nech $\mathtt{MS}(T \circ U) - q < s \leq \mathtt{MS}(T \circ U)$.

  Potom podľa vety **8** platí $\mathtt{MS}(T) + \mathtt{MS}(U) - q < s \leq \mathtt{MS}(T) + \mathtt{MS}(U)$, čiže $\mathtt{MS}(U) - q < s - \mathtt{MS}(T) \leq \mathtt{MS}(U)$. Podľa definície úplnosti, resp. polоúplnosti potom máme, že $s - \mathtt{MS}(T) \in \mathtt{PasívneStavy}(U)$, teda podľa vety **4.7** platí $s \in \mathtt{PasívneStavy}(\mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T)))$. Podľa definície PasívneStavy máme $s \notin \mathtt{StaréStavy}(\mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T)))$ a $s \in \mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T)))$, z čoho podľa vety **2.9** a podľa definície $\circ$ dostávame $s \in \mathtt{PoužitéStavy}(T \cup \mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T))) = \mathtt{PoužitéStavy}(T \circ U)$. Keďže platí $s > \mathtt{MS}(T) + \mathtt{MS}(U) - q \geq \mathtt{MS}(T)$, podľa definície MS máme $s \notin \mathtt{PoužitéStavy}(T)$. Z toho podľa definície PoužitéStavy platí $s \notin \mathtt{StaréStavy}(T)$. Podľa vety **2.9** a podľa definície $\circ$ potom dostávame $s \notin \mathtt{StaréStavy}(T \cup \mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T))) = \mathtt{StaréStavy}(T \circ U)$. Podľa definície PasívneStavy teda platí $s \in \mathtt{PasívneStavy}(T \circ U)$.

V $\boxed{\textbf{10}}$ *(o výpočte na zložení strojov)*

Nech T je úplný Turingov stroj a U je Turingov stroj. Nech K je konfigurácia s nulovým stavom.

- Nech $K \xrightarrow{T} L$ a existuje $\mathtt{Koniec}(L, U)$. Potom platí:
  - $\mathtt{Koniec}(K, T \circ U) = \mathtt{KPS}(\mathtt{Koniec}(L, U), \mathtt{MS}(T))$.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, T \circ U) = \max\{\mathtt{Rozsah}(K, T), \mathtt{Rozsah}(L, U)\}$.
- Nech $K \xrightarrow{T} L$, ale výpočet na U z L je nekonečný. Potom výpočet na $T \circ U$ z K je nekonečný.
- Nech výpočet na T z K je nekonečný. Potom výpočet na $T \circ U$ z K je nekonečný.

- Nech $M = \mathtt{Koniec}(L, U)$, $M' = \mathtt{KPS}(M, \mathtt{MS}(T))$, $L' = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(T))$ a $U' = \mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T))$.

  1 $\boxed{L' = \mathtt{Koniec}(K, T).}$

  L'

  $= \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(T))$,

  $= \mathtt{Koniec}(K, T)$
  (podľa definície $K \xrightarrow{T} L$).

  2 $\boxed{M' = \mathtt{Koniec}(L', U').}$

  M'

  $= \mathtt{KPS}(M, \mathtt{MS}(T))$,

  $= \mathtt{KPS}(\mathtt{Koniec}(L, U), \mathtt{MS}(T))$,

  $= \mathtt{Koniec}(\mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(T)), \mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T)))$
  (podľa vety **4.18**),

  $= \mathtt{Koniec}(L', U')$.

  3 $\boxed{\text{Neexistuje } \mathtt{Krok}(M', T).}$

  Podľa definície KPS platí $\mathtt{Stav}(M') = \mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(M, \mathtt{MS}(T))) = \mathtt{MS}(T) + \mathtt{Stav}(M) \geq \mathtt{MS}(T)$, takže podľa definície úplného stroja $\mathtt{Stav}(M') \notin \mathtt{HyperaktívneStavy}(T)$. Z toho podľa vety **2** dostávame, že neexistuje $\mathtt{Krok}(M', T)$.

  Potom platí:

- $\texttt{Koniec}(K, T \circ U)$
  $= \texttt{Koniec}(K, T \cup \texttt{SPS}(U, \texttt{MS}(T)))$
  (podľa definície $\circ$),
  $= \texttt{Koniec}(K, T \cup U')$,
  $= M'$
  (podľa vety **3.1**, ktorej podmienky sú podľa sublem **1**, **2** a **3** splnené),
  $= \texttt{KPS}(M, \texttt{MS}(T))$,
  $= \texttt{KPS}(\texttt{Koniec}(L, U), \texttt{MS}(T))$.
- $\texttt{Rozsah}(K, T \circ U)$
  $= \texttt{Rozsah}(K, T \cup \texttt{SPS}(U, \texttt{MS}(T)))$
  (podľa definície $\circ$),
  $= \texttt{Rozsah}(K, T \cup U')$,
  $= \max\{\texttt{Rozsah}(K, T), \texttt{Rozsah}(L', U')\}$
  (podľa vety **3.1**, ktorej podmienky sú podľa sublem **1**, **2** a **3** splnené),
  $= \max\{\texttt{Rozsah}(K, T), \texttt{Rozsah}(\texttt{KPS}(L, \texttt{MS}(T)), \texttt{SPS}(U, \texttt{MS}(T)))\}$,
  $= \max\{\texttt{Rozsah}(K, T), \texttt{Rozsah}(L, U)\}$
  (podľa vety **4.18**).

- Postupne platí:
  výpočet na U z L je nekonečný
  (predpoklad),
  výpočet na $\texttt{SPS}(U, \texttt{MS}(T))$ z $\texttt{KPS}(L, \texttt{MS}(T))$ je nekonečný
  (podľa vety **4.18**),
  výpočet na $T \cup \texttt{SPS}(U, \texttt{MS}(T))$ z K je nekonečný
  (podľa vety **3.2**, keďže platí $\texttt{Koniec}(K, T) = \texttt{KPS}(L, \texttt{MS}(T))$, a to podľa definície $K \xrightarrow{T} L$),
  výpočet na $T \circ U$ z K je nekonečný
  (podľa definície $\circ$).
- Postupne platí:
  výpočet na T z K je nekonečný
  (predpoklad),
  výpočet na $T \cup \texttt{SPS}(U, \texttt{MS}(T))$ z K je nekonečný
  (podľa vety **3.4**, pričom $T \cup \texttt{SPS}(U, \texttt{MS}(T))$ je stroj, lebo je to $T \circ U$, a to podľa definície $\circ$),
  výpočet na $T \circ U$ z K je nekonečný
  (podľa definície $\circ$).

V **11** (*asociativita skladania*)

Ak T a U sú úplné Turingove stroje a V je Turingov stroj, tak platí

$$(T \circ U) \circ V = T \circ (U \circ V).$$

Najprv si uvedomme, že aj zápis na ľavej strane je korektný: $T \circ U$ je úplný stroj, a to podľa vety **9**, lebo T aj U sú úplné.

Rozoberme dva prípady:

- Nech $T = \emptyset$.
  Potom platí:
  $(T \circ U) \circ V$
  $= (\emptyset \circ U) \circ V$,
  $= U \circ V$
  (podľa vety **7**),
  $= \emptyset \circ (U \circ V)$

(podľa vety **7**),
$= T \circ (U \circ V)$.

- Nech $T \neq \emptyset$.

  Potom platí:

  $(T \circ U) \circ V$
  $= (T \circ U) \cup \mathtt{SPS}(V, \mathtt{MS}(T \circ U))$
  (podľa definície $\circ$),
  $= (T \circ U) \cup \mathtt{SPS}(V, \mathtt{MS}(T) + \mathtt{MS}(U))$
  (podľa vety **8**),
  $= (T \circ U) \cup \mathtt{SPS}(\mathtt{SPS}(V, \mathtt{MS}(U)), \mathtt{MS}(T))$
  (podľa vety **4.5**),
  $= (T \cup \mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T))) \cup \mathtt{SPS}(\mathtt{SPS}(V, \mathtt{MS}(U)), \mathtt{MS}(T))$
  (podľa definície $\circ$),
  $= T \cup (\mathtt{SPS}(U, \mathtt{MS}(T)) \cup \mathtt{SPS}(\mathtt{SPS}(V, \mathtt{MS}(U)), \mathtt{MS}(T)))$,
  $= T \cup (\mathtt{SPS}(U \cup \mathtt{SPS}(V, \mathtt{MS}(U))), \mathtt{MS}(T))$
  (podľa vety **4.6**),
  $= T \cup (\mathtt{SPS}(U \circ V, \mathtt{MS}(T))$
  (podľa definície $\circ$),
  $= T \circ (U \circ V)$
  (podľa definície $\circ$).

D Pre každé n z $\mathbb{N}$ definujme funkciu $\mathtt{Sekvencia}^n$ z $\mathtt{ÚplnéStroje}^n$ do $\mathtt{ÚplnéStroje}$ indukciou:

1 $\mathtt{Sekvencia}^0() = \emptyset$.

2 Ak $n \in \mathbb{N}$, tak $\mathtt{Sekvencia}^{n+1}(T_1, \dots, T_{n+1}) = \mathtt{Sekvencia}^n(T_1, \dots, T_n) \circ T_{n+1}$.

P Ak $n \in \mathbb{N}^+$ a pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ je T_i úplný stroj, tak

$$\mathtt{Sekvencia}^n(T_1, \dots, T_n) = T_1 \circ \dots \circ T_n.$$

V **12**

Nech $m, n \in \mathbb{N}$ a pre každé i z $\{1, \dots, m+n\}$ je T_i úplný stroj, Potom

$$\mathtt{Sekvencia}^{m+n}(T_1, \dots, T_{m+n}) = \mathtt{Sekvencia}^m(T_1, \dots, T_m) \circ \mathtt{Sekvencia}^n(T_{m+1}, \dots, T_{m+n}).$$

Dokážeme to indukciou pre n z $\mathbb{N}$:

1 $\mathtt{Sekvencia}^{m+0}(T_1, \dots, T_{m+0})$
$= \mathtt{Sekvencia}^m(T_1, \dots, T_m)$,
$= \mathtt{Sekvencia}^m(T_1, \dots, T_m) \circ \emptyset$
(podľa vety **7**),
$= \mathtt{Sekvencia}^m(T_1, \dots, T_m) \circ \mathtt{Sekvencia}^0()$
(podľa definície $\mathtt{Sekvencia}^0$).

2 $\mathtt{Sekvencia}^{m+n+1}(T_1, \dots, T_{m+n+1})$
$= \mathtt{Sekvencia}^{m+n}(T_1, \dots, T_{m+n}) \circ T_{m+n+1}$
(podľa definície $\mathtt{Sekvencia}^{m+n+1}$),
$= (\mathtt{Sekvencia}^m(T_1, \dots, T_m) \circ \mathtt{Sekvencia}^n(T_{m+1}, \dots, T_{m+n})) \circ T_{m+n+1}$
(podľa indukčného predpokladu),
$= \mathtt{Sekvencia}^m(T_1, \dots, T_m) \circ (\mathtt{Sekvencia}^n(T_{m+1}, \dots, T_{m+n}) \circ T_{m+n+1})$
(podľa vety **11**),
$= \mathtt{Sekvencia}^m(T_1, \dots, T_m) \circ \mathtt{Sekvencia}^{n+1}(T_{m+1}, \dots, T_{m+n+1})$
(podľa definície $\mathtt{Sekvencia}^{n+1}$).

V $\boxed{13}$ (*o výpočte na sekvencii úplných strojov*)

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $T_1, \ldots, T_n$ sú úplné Turingove stroje. Nech $U = \texttt{Sekvencia}^n(T_1, \ldots, T_n)$.

- Nech pre každé i z $\{1, \ldots, n\}$ platí $K_{i-1} \xrightarrow{T_i} K_i$. Potom platí:
  - $K_0 \xrightarrow{U} K_n$.
  - $$\texttt{Rozsah}(K_0, U) = \begin{cases} \texttt{Hlava}(K_0), & \text{ak } n = 0, \\ \max\{\texttt{Rozsah}(K_{i-1}, T_i) : i \in \{1, \ldots, n\}\} & \text{inak.} \end{cases}$$
- Nech m z $\{1, \ldots, n\}$ je také, že pre každé $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ platí $K_{i-1} \xrightarrow{T_i} K_i$, ale výpočet na T_m z K_{m-1} je nekonečný. Potom výpočet na U z K_0 je nekonečný.

- Najprv sublema:

1 Nech T a S sú úplné stroje a K, L a M sú konfigurácie s nulovým stavom. Nech $K \xrightarrow{T} L$ a $L \xrightarrow{S} M$. Potom $K \xrightarrow{T \circ S} M$.

Platí:

$\texttt{Koniec}(K, T \circ S)$

$= \texttt{KPS}(\texttt{Koniec}(L, S), \texttt{MS}(T))$
  (podľa vety **10**, lebo podľa definície $L \xrightarrow{S} M$ existuje $\texttt{Koniec}(L, S)$),

$= \texttt{KPS}(\texttt{KPS}(M, \texttt{MS}(S)), \texttt{MS}(T))$
  (podľa definície $L \xrightarrow{S} M$),

$= \texttt{KPS}(M, \texttt{MS}(T) + \texttt{MS}(S))$
  (podľa vety **4.5**),

$= \texttt{KPS}(M, \texttt{MS}(T \circ S))$
  (podľa vety **8**),

t. j. podľa definície $\xrightarrow{T \circ S}$ platí $K \xrightarrow{T \circ S} M$.

Nech pre každé j z $\{0, \ldots, n\}$ platí $U_j = \texttt{Sekvencia}^j(T_1, \ldots, T_j)$. Podľa definície $\texttt{Sekvencia}^j$ je U_j úplný stroj. Navyše platí $U = U_n$.

2 Pre každé j z $\{0, \ldots, n-1\}$ platí $U_{j+1} = U_j \circ T_{j+1}$.

U_{j+1}

$= \texttt{Sekvencia}^{j+1}(T_1, \ldots, T_{j+1})$
  (podľa definície U_{j+1}),

$= \texttt{Sekvencia}^j(T_1, \ldots, T_j) \circ T_{j+1}$
  (podľa definície $\texttt{Sekvencia}^{j+1}$),

$= U_j \circ T_{j+1}$
  (podľa definície U_j).

3 Pre každé j z $\{0, \ldots, n\}$ platí:
- $K_0 \xrightarrow{U_j} K_j$.
- $$\texttt{Rozsah}(K_0, U_j) = \begin{cases} \texttt{Hlava}(K_0), & \text{ak } j = 0, \\ \max\{\texttt{Rozsah}(K_{i-1}, T_i) : i \in \{1, \ldots, j\}\} & \text{inak.} \end{cases}$$

Dokážeme to indukciou:

1 Podľa definície $\texttt{Sekvencia}^0$ platí $U_0 = \emptyset$. Potom platí:

- Podľa vety **4** platí $K_0 \xrightarrow{\emptyset} K_0$, t. j. $K_0 \xrightarrow{U_0} K_0$.
- Podľa vety **2.24** platí $\texttt{Rozsah}(K_0, U_0) = \texttt{Rozsah}(K_0, \emptyset) = \texttt{Hlava}(K_0)$.

2 Nech $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Potom platí:

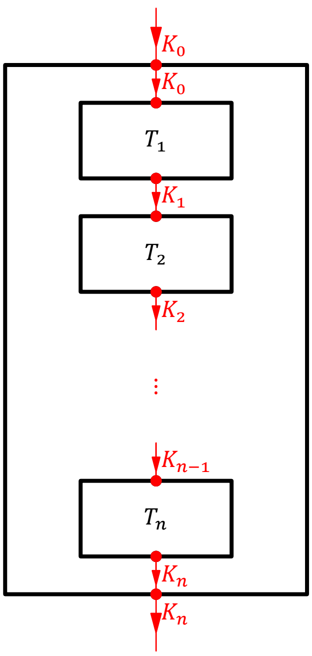
- Podľa indukčného predpokladu $K_0 \xrightarrow{U_j} K_j$ a podľa predpokladu vety $K_j \xrightarrow{T_{j+1}} K_{j+1}$. Podľa sublemy **1** teda platí $K_0 \xrightarrow{U_j \circ T_{j+1}} K_{j+1}$, t. j. podľa sublemy **2** $K_0 \xrightarrow{U_{j+1}} K_{j+1}$.
- $\mathtt{Rozsah}(K_0, U_{j+1})$
  $= \mathtt{Rozsah}(K_0, U_j \circ T_{j+1})$
  (podľa sublemy **2**),
  $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K_0, U_j), \mathtt{Rozsah}(K_j, T_{j+1})\}$
  (podľa vety **10**, ktorej podmienka $K_0 \xrightarrow{U_j} K_j$ platí podľa už dokázanej časti a podmienka existencie $\mathtt{Koniec}(K_j, T_{j+1})$ je splnená podľa definície $\xrightarrow{T_{j+1}}$, lebo podľa predpokladu vety $K_j \xrightarrow{T_{j+1}} K_{j+1}$),
  $= \max\{\max(\{\mathtt{Hlava}(K_0)\} \cup \{\mathtt{Rozsah}(K_{i-1}, T_i) : i \in \{1, \dots, j\}\}), \mathtt{Rozsah}(K_j, T_{j+1})\}$
  (podľa indukčného predpokladu, lebo ak $j = 0$, tak $\{\mathtt{Rozsah}(K_{i-1}, T_i) : i \in \{1, \dots, j\}\} = \emptyset$, a ak $j > 0$, tak podľa vety **2.22** platí $\mathtt{Hlava}(K_0) \leq \mathtt{Rozsah}(K_0, T_1)$),
  $= \max\{\max(\{\mathtt{Hlava}(K_0)\} \cup \{\mathtt{Rozsah}(K_{i-1}, T_i) : i \in \{1, \dots, j+1\}\})\}$
  $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K_{i-1}, T_i) : i \in \{1, \dots, j+1\}\}$
  (lebo podľa vety **2.22** platí $\mathtt{Hlava}(K_0) \leq \mathtt{Rozsah}(K_0, T_1)$).

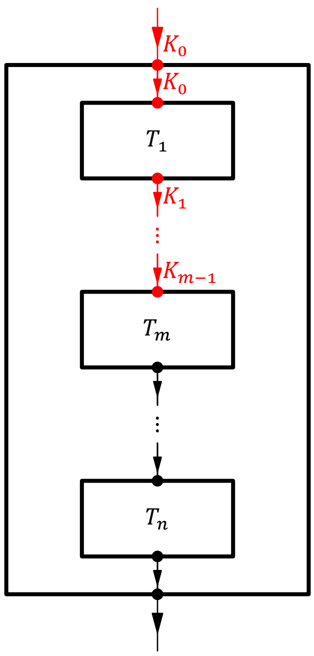
Prvé tvrdenie vety je potom špeciálnym prípadom sublemy **3**, keď $j = n$.

- Nech $V = \mathtt{Sekvencia}^{m-1}(T_1, \dots, T_{m-1})$ a $W = \mathtt{Sekvencia}^{n-m}(T_{m+1}, \dots, T_n)$. Potom podľa podľa definícií $\circ$ a $\mathtt{Sekvencia}^m$ platí $V \circ T_m = \mathtt{Sekvencia}^m(T_1, \dots, T_m)$ a podľa vety **12** $V \circ T_m \circ W = \mathtt{Sekvencia}^n(T_1, \dots, T_n) = U$.

  Podľa už dokázanej časti platí $K_0 \xrightarrow{V} K_{m-1}$. Keďže výpočet na T_m z K_{m-1} je nekonečný, podľa vety **10** je výpočet na $V \circ T_m$ z K_0 nekonečný, a potom opäť podľa vety **10** je výpočet na $V \circ T_m \circ W$ čiže U z K_0 nekonečný.

P Graficky môžeme tieto viacetapové výpočty vyjadriť nasledujúcimi obrázkami. Prvý znamená bezproblémový prechod celej sekvencie, kým druhý „uviaznutie“ v jednej z etáp.





V $\boxed{\textbf{14}}$ (*o výpočte na zložení s poloúplným strojom*)

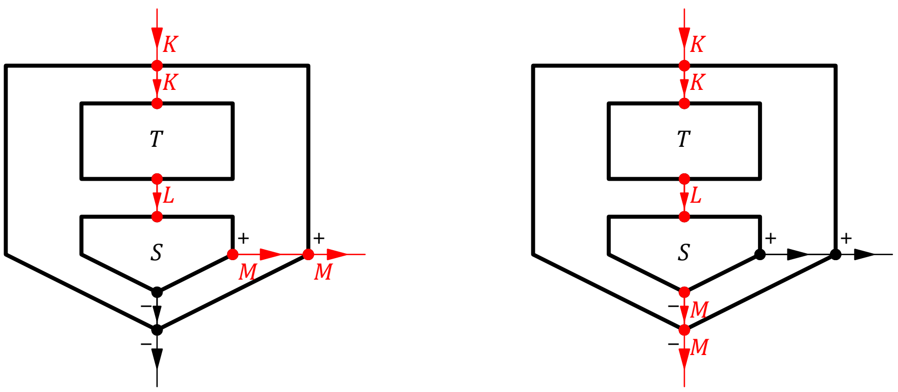
Nech T je úplný Turingov stroj a S je poloúplný Turingov stroj. Nech K je konfigurácia s nulovým stavom.

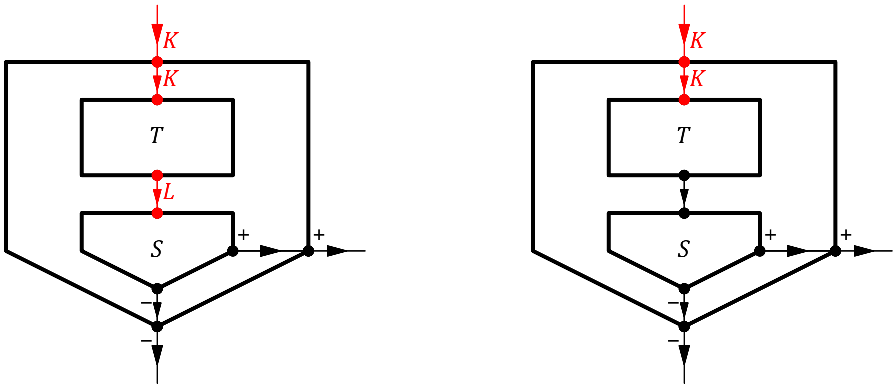
- Nech $K \overset{T}{\dashrightarrow} L$ a $L \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} M$. Potom platí:
  - $K \overset{T\circ S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} M$.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, T \circ S) = \max\{\mathtt{Rozsah}(K, T), \mathtt{Rozsah}(L, S)\}$.
- Nech $K \overset{T}{\dashrightarrow} L$ a $L \overset{S}{\underset{-}{\dashrightarrow}} M$. Potom platí:
  - $K \overset{T\circ S}{\underset{-}{\dashrightarrow}} M$.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, T \circ S) = \max\{\mathtt{Rozsah}(K, T), \mathtt{Rozsah}(L, S)\}$.
- Nech $K \overset{T}{\dashrightarrow} L$, ale výpočet na S z L je nekonečný. Potom výpočet na $T \circ S$ z K je nekonečný.
- Nech výpočet na T z K je nekonečný. Potom výpočet na $T \circ S$ z K je nekonečný.

- Najprv dokážeme prvé dve tvrdenia. Nech v prvom prípade $q = 0$ a v druhom $q = 1$. Potom platí:
  - $\mathtt{Koniec}(K, T \circ S)$
    $= \mathtt{KPS}(\mathtt{Koniec}(L, S), \mathtt{MS}(T))$
    (podľa vety **10**, lebo podľa definície $\overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$, resp. $\overset{S}{\underset{-}{\dashrightarrow}}$ vyplýva, že existuje $\mathtt{Koniec}(L, S)$),
    $= \mathtt{KPS}(\mathtt{KPS}(M, \mathtt{MS}(S) - q), \mathtt{MS}(T))$
    (podľa definície $\overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$, resp. $\overset{S}{\underset{-}{\dashrightarrow}}$),
    $= \mathtt{KPS}(M, \mathtt{MS}(T) + (\mathtt{MS}(S) - q))$
    (podľa vety **4.11**),
    $= \mathtt{KPS}(M, (\mathtt{MS}(T) + \mathtt{MS}(S)) - q)$
    (lebo $\mathtt{MS}(S) \geq 2 \geq q$),
    $= \mathtt{KPS}(M, \mathtt{MS}(T \circ S) - q)$
    (podľa vety **8**),

    t. j. v prvom prípade podľa definície $\overset{T\circ S}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$ platí $K \overset{T\circ S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} M$ a v druhom podľa definície $\overset{T\circ S}{\underset{-}{\dashrightarrow}}$ platí $K \overset{T\circ S}{\underset{-}{\dashrightarrow}} M$.
  - Druhé časti oboch tvrdení sú zopakovaním tvrdenia vety **10**.
- Zvyšné dve tvrdenia vety sú zopakovaním tvrdení vety **10**.

P Všetky štyri prípady môžeme vyjadriť i graficky. V prvom riadku je vľavo prechod cez pozitívny stav, vpravo cez negatívny. V druhom riadku sú znázornené zlyhania – vľavo v druhej etape a vpravo už v prvej.





Pri polóúplnom stroji bude situácia komplikovanejšia, treba tu nadviazať iba na pozitívny pasívny stav. Musíme to však urobiť tak, aby po napojení pokračujúceho stroja nevznikol konflikt ich inštrukcií. Budeme ich preto musieť umelo poposúvať:

D Nech $a, b_0, b_1 \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1 \in$ $\texttt{Písmená}$ a $m_0, m_1 \in$ $\texttt{Posuny}$. Potom Turingov stroj

$$\{\mathtt{s}_a\mathtt{0}x_0m_0\mathtt{s}_{b_0}, \mathtt{s}_a\mathtt{1}x_1m_1\mathtt{s}_{b_1}\}$$

označujeme $\texttt{ElementárnyStroj}_{a;x_0,m_0,b_0;x_1,m_1,b_1}$.

I $\texttt{ElementárnyStroj}_{5;\mathtt{1},\mathtt{N},2;\mathtt{0},\mathtt{L},4} = \{\mathtt{s}_5\mathtt{01N}\mathtt{s}_2, \mathtt{s}_5\mathtt{10L}\mathtt{s}_4\}$.

V $\boxed{15}$

Nech $T = \texttt{ElementárnyStroj}_{a;x_0,m_0,b_0;x_1,m_1,b_1}$. Potom platí:
- $\texttt{StaréStavy}(T) = \{a\}$.
- $\texttt{NovéStavy}(T) = \{b_0, b_1\}$.
- $\texttt{PoužitéStavy}(T) = \{a, b_0, b_1\}$.
- $\texttt{MS}(T) = \max\{a, b_0, b_1\}$.
- $\texttt{HyperaktívneStavy}(T) = \{a\}$.
- $\texttt{PasívneStavy}(T) = \{b_0, b_1\} \setminus \{a\}$.
- Ak $a = 0$ a $\max\{b_0, b_1\} = 1$, tak stroj T je úplný.
- Ak $a = 0$ a $\{b_0, b_1\} = \{1, 2\}$, tak stroj T je polóúplný.

- $\texttt{StaréStavy}(T)$
  $= \texttt{StarýStav}[T]$
  (podľa definície $\texttt{StaréStavy}$),
  $= \texttt{StarýStav}[\{\mathtt{s}_a\mathtt{0}x_0m_0\mathtt{s}_{b_0}, \mathtt{s}_a\mathtt{1}x_1m_1\mathtt{s}_{b_1}\}]$
  (podľa definície $\texttt{ElementárnyStroj}_{a;x_0,m_0,b_0;x_1,m_1,b_1}$),
  $= \{\texttt{StarýStav}(\mathtt{s}_a\mathtt{0}x_0m_0\mathtt{s}_{b_0}), \texttt{StarýStav}(\mathtt{s}_a\mathtt{1}x_1m_1\mathtt{s}_{b_1})\}$,
  $= \{\mathtt{s}_a\}$
  (podľa definícií $\texttt{StarýStav}$ a opäť $\texttt{StarýStav}$),
  $= \{a\}$.
- $\texttt{NovéStavy}(T)$
  $= \texttt{NovýStav}[T]$
  (podľa definície $\texttt{NovýStav}$),
  $= \texttt{NovýStav}[\{\mathtt{s}_a\mathtt{0}x_0m_0\mathtt{s}_{b_0}, \mathtt{s}_a\mathtt{1}x_1m_1\mathtt{s}_{b_1}\}]$ podľa definície $\texttt{ElementárnyStroj}_{a;x_0,m_0,b_0;x_1,m_1,b_1}$,
  $= \{\texttt{NovýStav}(\mathtt{s}_a\mathtt{0}x_0m_0\mathtt{s}_{b_0}), \texttt{NovýStav}(\mathtt{s}_a\mathtt{1}x_1m_1\mathtt{s}_{b_1})\}$,
  $= \{\mathtt{s}_{b_0}, \mathtt{s}_{b_1}\}$
  (podľa definícií $\texttt{NovýStav}$ a opäť $\texttt{NovýStav}$),

$= \{b_0, b_1\}$.

- $\mathtt{Použit\acute{e}Stavy}(T)$
  $= \mathtt{Star\acute{e}Stavy}(T) \cup \mathtt{Nov\acute{e}Stavy}(T)$
  (podľa definície PoužitéStavy),
  $= \{a\} \cup \{b_0, b_1\}$
  (podľa už dokázaných častí),
  $= \{a, b_0, b_1\}$.
- $\mathtt{MS}(T)$
  $= \mathtt{Max}(\mathtt{Použit\acute{e}Stavy}(T))$
  (podľa definície MS),
  $= \mathtt{Max}(\{a, b_0, b_1\})$
  (podľa už dokázanej časti),
  $= \max(\{a, b_0, b_1\})$
  (podľa definície Max).
- $\subseteq$ Platí:

  $\mathtt{Hyperakt\acute{i}vneStavy}(T)$

  $\subseteq \mathtt{Star\acute{e}Stavy}(T)$
  (podľa vety **2.7**),

  $= \{a\}$
  (podľa už dokázanej časti).

  $\supseteq$ Platí:

  - $\mathtt{Star\acute{y}Stav}(\mathtt{s}_a\mathtt{0}x_0 m_0 \mathtt{s}_{b_0}) = \mathtt{s}_a = a$ podľa definície StarýStav.
  - $\mathtt{Star\acute{e}P\acute{i}smeno}(\mathtt{s}_a\mathtt{0}x_0 m_0 \mathtt{s}_{b_0}) = \mathtt{0}$ podľa definície StaréPísmeno.
  - $\mathtt{Star\acute{y}Stav}(\mathtt{s}_a\mathtt{1}x_1 m_1 \mathtt{s}_{b_1}) = \mathtt{s}_a = a$ podľa definície StarýStav.
  - $\mathtt{Star\acute{e}P\acute{i}smeno}(\mathtt{s}_a\mathtt{1}x_1 m_1 \mathtt{s}_{b_1}) = \mathtt{1}$ podľa definície StaréPísmeno.

  Z toho podľa definície HyperaktívneStavy platí $a \in \mathtt{Hyperakt\acute{i}vneStavy}(T)$.
- $\mathtt{Pas\acute{i}vneStavy}(T)$
  $= \mathtt{Použit\acute{e}Stavy}(T) \setminus \mathtt{Star\acute{e}Stavy}(T)$
  (podľa definície PasívneStavy),
  $= \{b_0, b_1\} \setminus \{a\}$
  (podľa už dokázaných častí).
- Nech $a = 0$ a $\max\{b_0, b_1\} = 1$. Potom podľa už dokázaných častí platí:
  - $\mathtt{MS}(T) = \max\{0, 1\} = 1$.
  - $\mathtt{Hyperakt\acute{i}vneStavy}(T) = \{0\}$.
  - $\mathtt{Pas\acute{i}vneStavy}(T) = \{0, 1\} \setminus \{0\} = \{1\}$.

  To podľa definície úplného stroja znamená, že T je úplný.
- Nech $a = 0$ a $\{b_0, b_1\} = \{1, 2\}$. Potom podľa už dokázaných častí platí:
  - $\mathtt{MS}(T) = \max\{0, 1, 2\} = 2$.
  - $\mathtt{Hyperakt\acute{i}vneStavy}(T) = \{0\}$.
  - $\mathtt{Pas\acute{i}vneStavy}(T) = \{0, 1, 2\} \setminus \{0\} = \{1, 2\}$.

  To podľa definície poloúplného stroja znamená, že T je poloúplný.

D Nech $a, b \in \mathtt{Stavy}$, pričom $a \neq b$. Definujme Turingov stroj $\mathtt{Zame\check{n}Stav}_{a,b}$ ako $\mathtt{Element\acute{a}rnyStroj}_{a;\mathtt{0},\mathtt{N},b;\mathtt{1},\mathtt{N},b}$.

P Podľa definície $\mathtt{Element\acute{a}rnyStroj}_{a;\mathtt{0},\mathtt{N},b;\mathtt{1},\mathtt{N},b}$ teda platí $\mathtt{Zame\check{n}Stav}_{a,b} = \{\mathtt{s}_a\mathtt{00Ns}_b, \mathtt{s}_a\mathtt{11Ns}_b\}$.

I $\mathtt{Zame\check{n}Stav}_{5,2} = \{\mathtt{s}_5\mathtt{00Ns}_2, \mathtt{s}_5\mathtt{11Ns}_2\}$.

P Stroj $\mathtt{ZameňStav}_{a,b}$ vo všobecnosti nie je úplný (jedinou skôr náhodnou výnimkou je $\mathtt{ZameňStav}_{0,1}$).

I Na stroji $\mathtt{ZameňStav}_{5,2}$ vyzerá výpočet z konfigurácie

$\mathtt{s}_5$	0	1	1	0	1	1	1	0	**1**	1	1	1	0	0	⋯

takto:

$\mathtt{s}_5$	0	1	1	0	1	1	1	0	**1**	1	1	1	0	0	⋯
$\mathtt{s}_2$	0	1	1	0	1	1	1	0	**1**	1	1	1	0	0	⋯

Výsledná konfigurácia sa teda od pôvodnej líši len stavom.

V **16**

Nech $a, b \in \mathbb{N}$, pričom $a \neq b$. Potom platí:

- $\mathtt{StaréStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{a,b}) = \mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{a,b}) = \{a\}$.
- $\mathtt{NovéStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{a,b}) = \mathtt{PasívneStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{a,b}) = \{b\}$.
- $\mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{a,b}) = \{a, b\}$.
- $\mathtt{MS}(\mathtt{ZameňStav}_{a,b}) = \max\{a, b\}$.

Podľa definície $\mathtt{ZameňStav}_{a,b}$ je to špeciálny prípad vety **15**.

V **17**

Nech $a, b \in \mathbb{N}$, pričom $a \neq b$. Nech $h \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathtt{Pásky}$. Potom platí:

- $\mathtt{Koniec}(\langle a, h, p\rangle, \mathtt{ZameňStav}_{a,b}) = \mathtt{Krok}(\langle a, h, p\rangle, \mathtt{ZameňStav}_{a,b}) = \langle b, h, p\rangle$.
- $\mathtt{Rozsah}(\langle a, h, p\rangle, \mathtt{ZameňStav}_{a,b}) = h$.

Nech $K = \langle a, h, p\rangle$ a $L = \langle b, h, p\rangle$. Nech $\mathtt{ČítanéPísmeno}(K) = x$ a nech $I = \mathtt{s}_a x x \mathtt{N} \mathtt{s}_b$. Potom podľa definície $\mathtt{ZameňStav}_{a,b}$ platí $I \in \mathtt{ZameňStav}_{a,b}$.

1 I je aplikovateľná na K.

Podľa definície $\mathtt{StaréPísmeno}$ a predpokladu platí $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = x = \mathtt{ČítanéPísmeno}(K)$, podľa definície $\mathtt{StarýStav}$ platí $\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{s}_a = a$ a podľa definície $\mathtt{Stav}$ platí $\mathtt{Stav}(K) = \mathtt{s}_a = a$, takže podľa definície korešpondencie I korešponduje s K. A keďže podľa definície $\mathtt{Posun}$ platí $\mathtt{Posun}(I) = \mathtt{N} \neq \mathtt{L}$, podľa definície aplikovateľnosti je I aplikovateľná na K.

2 I mení K na L.

- $\mathtt{Stav}(L)$

  $= b$
  (podľa definície $\mathtt{Stav}$),

  $= \mathtt{s}_b$

  $= \mathtt{NovýStav}(I)$
  (podľa definície $\mathtt{NovýStav}$).

- $\mathtt{Hlava}(L)$

  $= h$
  (podľa definície $\mathtt{Hlava}$),

  $= h + 1 - 1$,

  $= h + \mathtt{N} - 1$,

$= h + \mathtt{Posun}(I) - 1$
(podľa definície Posun),

$= \mathtt{Hlava}(K) + \mathtt{Posun}(I) - 1$
(podľa definície Hlava).

- - $(\mathtt{Páska}(L))(\mathtt{Hlava}(K))$

  $= p(\mathtt{Hlava}(K))$
  (podľa definície Páska),

  $= (\mathtt{Páska}(K))(\mathtt{Hlava}(K))$
  (podľa definície Páska),

  $= \mathtt{ČítanéPísmeno}(K)$
  (podľa definície ČítanéPísmeno),

  $= x,$

  $= \mathtt{NovéPísmeno}(I)$
  (podľa definície NovéPísmeno).

  - Nech $i \neq \mathtt{Hlava}(K)$. Potom platí:

  $(\mathtt{Páska}(L))(i)$

  $= p(i)$
  (podľa definície Páska),

  $= (\mathtt{Páska}(K))(i)$
  (podľa definície Páska).

To spolu so sublemou **1** a definíciou menenia znamená, že I mení K na L.

3 Neexistuje $\mathtt{Krok}(L, \mathtt{ZameňStav}_{a,b})$.

Platí:

$\mathtt{Stav}(L)$
$= b$
(podľa definície Stav),
$\notin \{a\}$
(lebo $a \neq b$),
$= \mathtt{StaréStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{a,b})$
(podľa vety **16**).

Podľa vety **2.19** teda neexistuje $\mathtt{Krok}(L, \mathtt{ZameňStav}_{a,b})$.

4 (K, L) je konečný výpočet na $\mathtt{ZameňStav}_{a,b}$.

Podľa definície konečného výpočtu a sublem **1**, **2** a **3**.

Potom platí:

- $\mathtt{Koniec}(\langle a, h, p\rangle, \mathtt{ZameňStav}_{a,b})$
  $= \mathtt{Koniec}(K, \mathtt{ZameňStav}_{a,b}),$
  $= L$
  (podľa sublemy **4** a definície Koniec),
  $= \langle b, h, p\rangle.$
- $\mathtt{Rozsah}(\langle a, h, p\rangle, \mathtt{ZameňStav}_{a,b})$
  $= \max\{\mathtt{Hlava}(K), \mathtt{Hlava}(L)\}$
  (podľa definície Rozsah a sublemy **4**),
  $= \max\{h, h\}$
  (podľa definícií Hlava a opäť Hlava),
  $= h.$

V **18**

Nech $a, b \in \texttt{Stavy}$, pričom $a \neq b$. Nech K je konfigurácia s nulovým stavom. Potom platí:

- $\texttt{Koniec}(\texttt{KPS}(K, a), \texttt{ZameňStav}_{a,b}) = \texttt{Krok}(\texttt{KPS}(K, a), \texttt{ZameňStav}_{a,b}) = \texttt{KPS}(K, b)$.
- $\texttt{Rozsah}(\texttt{KPS}(K, a), \texttt{ZameňStav}_{a,b}) = \texttt{Hlava}(K)$.

Nech $h = \texttt{Hlava}(K)$ a $p = \texttt{Páska}(K)$. Podľa vety **4.8** a definície KPS potom pre obe s z $\{a, b\}$ platí:

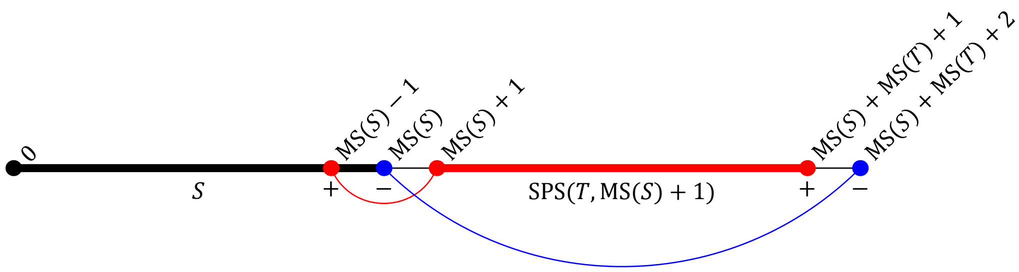
- $\texttt{Stav}(\texttt{KPS}(K, s)) = s$.
- $\texttt{Hlava}(\texttt{KPS}(K, s)) = h$.
- $\texttt{Páska}(\texttt{KPS}(K, s)) = p$.

Podľa vety **2.11** preto platí $\texttt{KPS}(K, s) = \langle s, h, p \rangle$. Tvrdenie vety už potom vyplýva z vety **17**.

D Definujme zobrazenie $\circledcirc$ (čítame *polozloženie strojov*) z množiny $\texttt{PoloúplnéStroje} \times \texttt{ÚplnéStroje}$ takto: Nech S je poloúplný stroj a T je úplný stroj. Potom $S \circledcirc T$ je zjednotenie týchto štyroch Turingových strojov:

- S,
- $\texttt{ZameňStav}_{\texttt{MS}(S)-1,\texttt{MS}(S)+1}$,
- $\texttt{ZameňStav}_{\texttt{MS}(S),\texttt{MS}(S)+\texttt{MS}(T)+2}$,
- $\texttt{SPS}(T, \texttt{MS}(S) + 1)$.

P Stroj $S \circledcirc T$ možno znázorniť takýmto obrázkom:



Na (diskrétnej) číselnej osi vidíme množiny stavov používaných jednotlivými zúčastnenými strojmi. Množina stavov stroja S je znázornená čiernou úsečkou a množina stavov príslušne posunutého stroja T červenou. Červený a modrý oblúk symbolizujú prácu zvyšných dvoch strojov, ktorých úlohy sú len zmeniť stavy tak, aby výpočty na strojoch S a posunutom T na seba nadväzovali a aby výsledný stroj bol poloúplný, a to včítanie korešpondencie kladnosti či zápornosti jeho koncových stavov so znamienkami koncových stavov stroja S.

I Nech platí:

- $S = \{\texttt{s}_0\texttt{01Rs}_1, \texttt{s}_0\texttt{11Rs}_1, \texttt{s}_1\texttt{01Ns}_2, \texttt{s}_1\texttt{10Ls}_3\}$.
- $T = \{\texttt{s}_0\texttt{01Ns}_2, \texttt{s}_0\texttt{11Rs}_1, \texttt{s}_1\texttt{01Rs}_2, \texttt{s}_1\texttt{10Ls}_0\}$.

(Všimnime si, že S je naozaj poloúplný a T úplný.) Potom $\texttt{MS}(S) = 3$ a $\texttt{MS}(T) = 2$, stroj $S \circledcirc T$ teda obsahuje tieto inštrukcie:

S:	$\texttt{s}_0\texttt{01Rs}_1, \texttt{s}_0\texttt{11Rs}_1, \texttt{s}_1\texttt{01Ns}_2, \texttt{s}_1\texttt{10Ls}_3$
$\texttt{ZameňStav}_{2,4}$:	$\texttt{s}_2\texttt{00Ns}_4, \texttt{s}_2\texttt{11Ns}_4$
$\texttt{ZameňStav}_{3,7}$:	$\texttt{s}_3\texttt{00Ns}_7, \texttt{s}_3\texttt{11Ns}_7$
$\texttt{SPS}(T, 4)$:	$\texttt{s}_4\texttt{01Ns}_6, \texttt{s}_4\texttt{11Rs}_5, \texttt{s}_5\texttt{01Rs}_6, \texttt{s}_5\texttt{10Ls}_4$

V **19**

Nech S je poloúplný stroj a T úplný stroj. Potom platí:

- $S \circledcirc T$ je poloúplný stroj.
- $\texttt{MS}(S \circledcirc T) = \texttt{MS}(S) + \texttt{MS}(T) + 2$.

Dokážeme sériu sublem:

1
- $\mathtt{StaréStavy}(S) = \{0, \dots, \mathsf{MS}(S) - 2\}$.
- $\mathtt{StaréStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathsf{MS}(S)-1, \mathsf{MS}(S)+1}) = \{\mathsf{MS}(S) - 1\}$.
- $\mathtt{StaréStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathsf{MS}(S), \mathsf{MS}(S)+\mathsf{MS}(T)+2}) = \{\mathsf{MS}(S)\}$.
- $\mathtt{StaréStavy}(\mathsf{SPS}(T, \mathsf{MS}(S) + 1)) = \{\mathsf{MS}(S) + 1, \dots, \mathsf{MS}(S) + \mathsf{MS}(T)\}$.

- $\mathtt{StaréStavy}(S)$

  $= \mathtt{HyperaktívneStavy}(S)$
  (podľa vety **1**),

  $= \{0, \dots, \mathsf{MS}(S) - 2\}$
  (podľa definície polоúplného stroja).

- Dokazované tvrdenie platí podľa vety **16**.
- Dokazované tvrdenie platí podľa vety **16**.
- $\mathtt{StaréStavy}(\mathsf{SPS}(T, \mathsf{MS}(S) + 1))$

  $= \{(\mathsf{MS}(S) + 1) + s : s \in \mathtt{StaréStavy}(T)\}$
  (podľa vety **4.7**),

  $= \{(\mathsf{MS}(S) + 1) + s : s \in \mathtt{HyperaktívneStavy}(T)\}$
  (podľa vety **1**),

  $= \{(\mathsf{MS}(S) + 1) + s : s \in \{0, \dots, \mathsf{MS}(T) - 1\}\}$
  (podľa definície úplného stroja),

  $= \{\mathsf{MS}(S) + 1, \dots, \mathsf{MS}(S) + \mathsf{MS}(T)\}$.

2 $S \circledcirc T$ je Turingov stroj.

Podľa sublemy **1**, vety **2.5** a definície $\circledcirc$.

3 $\mathtt{StaréStavy}(S \circledcirc T) = \{0, \dots, \mathsf{MS}(S) + \mathsf{MS}(T)\}$.

$\mathtt{StaréStavy}(S \circledcirc T)$
$= \mathtt{StaréStavy}(S) \cup$
$\cup\, \mathtt{StaréStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathsf{MS}(S)-1, \mathsf{MS}(S)+1}) \cup$
$\cup\, \mathtt{StaréStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathsf{MS}(S), \mathsf{MS}(S)+\mathsf{MS}(T)+2}) \cup$
$\cup\, \mathtt{StaréStavy}(\mathsf{SPS}(T, \mathsf{MS}(S) + 1))$
(podľa vety **2.9**),
$= \{0, \dots, \mathsf{MS}(S) - 2\} \cup \{\mathsf{MS}(S) - 1\} \cup \{\mathsf{MS}(S)\} \cup \{\mathsf{MS}(S) + 1, \dots, \mathsf{MS}(S) + \mathsf{MS}(T)\}$
(podľa sublemy **1**),
$= \{0, \dots, \mathsf{MS}(S) + \mathsf{MS}(T)\}$.

4 $\mathtt{HyperaktívneStavy}(S \circledcirc T) = \{0, \dots, \mathsf{MS}(S) + \mathsf{MS}(T)\}$.

$\mathtt{HyperaktívneStavy}(S \circledcirc T)$
$= \mathtt{HyperaktívneStavy}(S) \cup$
$\cup\, \mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathsf{MS}(S)-1, \mathsf{MS}(S)+1}) \cup$
$\cup\, \mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathsf{MS}(S), \mathsf{MS}(S)+\mathsf{MS}(T)+2}) \cup$
$\cup\, \mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathsf{SPS}(T, \mathsf{MS}(S) + 1))$
(podľa definície $\circledcirc$ a vety **2.9**, ktorej podmienka je splnená podľa sublemy **1**),
$= \mathtt{HyperaktívneStavy}(S) \cup \{\mathsf{MS}(S) - 1\} \cup \{\mathsf{MS}(S)\} \cup \mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathsf{SPS}(T, \mathsf{MS}(S) + 1))$
(podľa vety **16** a opäť podľa vety **16**),
$= \{0, \dots, \mathsf{MS}(S) - 2\} \cup \{\mathsf{MS}(S) - 1\} \cup \{\mathsf{MS}(S)\} \cup \mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathsf{SPS}(T, \mathsf{MS}(S) + 1))$
(podľa definície polоúplného stroja),
$= \{0, \dots, \mathsf{MS}(S)\} \cup \mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathsf{SPS}(T, \mathsf{MS}(S) + 1))$,
$= \{0, \dots, \mathsf{MS}(S)\} \cup \{(\mathsf{MS}(S) + 1) + s : s \in \mathtt{HyperaktívneStavy}(T)\}$

(podľa vety **4.7**),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)\} \cup \{(\mathtt{MS}(S)+1)+s : s \in \{0, \dots, \mathtt{MS}(T)-1\}\}$
(podľa definície úplného stroja, a to i v prípade $T = \emptyset$, lebo vtedy $\mathtt{HyperaktívneStavy}(T) = \emptyset$ a $\mathtt{MS}(T) = 0$, a to podľa vety **2.10**),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)\} \cup \{\mathtt{MS}(S)+1, \dots, \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)\}$,
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)\}$.

5 $\boxed{\mathtt{PoužitéStavy}(S \circledcirc T) = \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2\}.}$

$\mathtt{PoužitéStavy}(S \circledcirc T)$
$= \mathtt{PoužitéStavy}(S) \cup$
$\cup\, \mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S)-1, \mathtt{MS}(S)+1}) \cup$
$\cup\, \mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S), \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2}) \cup$
$\cup\, \mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{SPS}(T, \mathtt{MS}(S)+1))$
(podľa definície $\circledcirc$ a vety **2.9**),
$= \mathtt{PoužitéStavy}(S) \cup \{\mathtt{MS}(S)-1, \mathtt{MS}(S)+1\} \cup \{\mathtt{MS}(S), \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2\} \cup$
$\cup\, \mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{SPS}(T, \mathtt{MS}(S)+1))$
(podľa vety **16** a opäť podľa vety **16**),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)\} \cup \{\mathtt{MS}(S)-1, \mathtt{MS}(S)+1\} \cup \{\mathtt{MS}(S), \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2\} \cup$
$\cup\, \mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{SPS}(T, \mathtt{MS}(S)+1))$
(podľa vety **1**),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)+1\} \cup \mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{SPS}(T, \mathtt{MS}(S)+1)) \cup \{\mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2\}$,
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)+1\} \cup \{(\mathtt{MS}(S)+1)+s : s \in \mathtt{PoužitéStavy}(T)\} \cup \{\mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2\}$
(podľa vety **4.7**),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2\}$
(druhá množina je v prípade $T = \emptyset$ prázdna, lebo podľa vety **2.6** platí $\mathtt{PoužitéStavy}(T) = \emptyset$ a podľa vety **2.10** platí $\mathtt{MS}(T) = 0$, a v prípade $T \neq \emptyset$ je $\{\mathtt{MS}(S)+1, \dots, \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+1\}$, a to podľa vety **1**).

6 $\boxed{\mathtt{MS}(S \circledcirc T) = \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2.}$

$\mathtt{MS}(S \circledcirc T)$
$= \mathtt{Max}(\mathtt{PoužitéStavy}(S \circledcirc T))$
(podľa definície $\mathtt{MS}$),
$= \mathtt{Max}(\{0, \dots, \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2\})$
(podľa sublemy **5**),
$= \max(\{0, \dots, \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2\})$
(podľa definície $\mathtt{Max}$),
$= \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2$.

7 $\boxed{\mathtt{PasívneStavy}(S \circledcirc T) = \{\mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+1, \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2\}.}$

$\mathtt{PasívneStavy}(S \circledcirc T)$
$= \mathtt{PoužitéStavy}(S \circledcirc T) \setminus \mathtt{StaréStavy}(S \circledcirc T)$
(podľa definície $\mathtt{PasívneStavy}$),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2\} \setminus \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)\}$
(podľa sublem **5** a **3**),
$= \{\mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+1, \mathtt{MS}(S)+\mathtt{MS}(T)+2\}$.

Teraz už môžeme dokázať obe časti vety:

- Zo sublemy **6** vyplýva, že $\mathtt{MS}(S \circledcirc T) \geq 2$. Spolu so sublemami **6**, **4** a **7** podľa definície poloúplného stroja už dostávame, že $S \circledcirc T$ je poloúplný stroj.
- Druhé tvrdenie vety je sublema **6**.

V $\boxed{\mathbf{20}}$ (*o výpočte na polozložení strojov*)

Nech S je poloúplný stroj a T úplný stroj. Nech K je konfigurácia s nulovým stavom.

- Nech $K \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$ a $L \overset{T}{\dashrightarrow} M$. Potom platí:
  - $K \overset{S \circledcirc T}{\underset{+}{\dashrightarrow}} M$.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, S \circledcirc T) = \max\{\mathtt{Rozsah}(K,S), \mathtt{Rozsah}(L,T)\}$.
- Nech $K \overset{S}{\underset{-}{\dashrightarrow}} L$. Potom platí:
  - $K \overset{S \circledcirc T}{\underset{-}{\dashrightarrow}} L$.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, S \circledcirc T) = \mathtt{Rozsah}(K,S)$.
- Nech $K \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$, ale výpočet na T z L je nekonečný. Potom výpočet na $S \circledcirc T$ z K je nekonečný.
- Nech výpočet na S z K je nekonečný. Potom výpočet na $S \circledcirc T$ z K je nekonečný.

- Keďže podľa definície $\circledcirc$ platí $S \subseteq S \circledcirc T$, a teda $S \cap (S \circledcirc T) = S \circledcirc T$, štvrtá časť vety vyplýva z vety **3.4**.
- Rozoberme prvú a tretiu časť:

  Nech $U = \mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S)-1, \mathtt{MS}(S)+1}$ a $V = \mathtt{SPS}(T, \mathtt{MS}(S)+1)$. Keďže podľa definície $\circledcirc$ platí $S \cup U \subseteq S \cup U \cup V \subseteq S \circledcirc T$, podľa viet **2.2** a opäť **2.2** sú aj $S \cup U$ a $S \cup U \cup V$ Turingove stroje.

  Nech $L' = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S)-1)$ a $L'' = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S)+1)$. Keďže L je konfigurácia s nulovým stavom, podľa vety **4.8** platí $\mathtt{Stav}(L') = \mathtt{MS}(S) - 1$ a opäť podľa vety **4.8** platí $\mathtt{Stav}(L'') = \mathtt{MS}(S) + 1$.

  1 $\boxed{\mathtt{Koniec}(K,S) = L'.}$

  Keďže $K \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$, podľa definície $\overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$ platí $\mathtt{Koniec}(K,S) = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S)-1) = L'$.

  2
  - $\mathtt{Koniec}(K, S \cup U) = L''$.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, S \cup U) = \mathtt{Rozsah}(K,S)$.

  Ukážeme, že sú splnené podmienky vety **3.1**:

  - $\mathtt{Koniec}(K,S) = L'$ platí podľa sublemy **1**.
  - Podľa definícií $\mathtt{KPS}$ a opäť $\mathtt{KPS}$ potom platí:
    - $\mathtt{Hlava}(L') = \mathtt{Hlava}(L) = \mathtt{Hlava}(L'')$.
    - $\mathtt{Páska}(L') = \mathtt{Páska}(L) = \mathtt{Páska}(L'')$.

    Podľa vety **18** teda platí $\mathtt{Koniec}(L', U) = L''$.
  - Podľa definície poloúplného stroja platí $\mathtt{Stav}(L'') = \mathtt{MS}(S) + 1 \notin \mathtt{HyperaktívneStavy}(S)$, podľa vety **2** preto neexistuje $\mathtt{Krok}(L'', S)$.

  Potom platí:

  - $\mathtt{Koniec}(K, S \cup U) = L''$ podľa vety **3.1**.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, S \cup U)$

    $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K,S), \mathtt{Rozsah}(L', U)\}$
    (podľa vety **3.1**),

    $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K,S), \mathtt{Hlava}(L)\}$
    (podľa vety **18**),

    $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K,S), \mathtt{Hlava}(L')\}$
    (podľa definície $\mathtt{KPS}$),

    $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K,S), \mathtt{Hlava}(\mathtt{Koniec}(K,S))\}$
    (podľa sublemy **1**),

    $= \mathtt{Rozsah}(K,S)$
    (podľa vety **2.22**).

Teraz už oba prípady odlíšime:

- Nech $L \xrightarrow{T} M$.

  Nech $M'' = \mathtt{KPS}(M, \mathtt{MS}(S \circledcirc T) - 1)$. Keďže M je podľa definície $\xrightarrow{T}$ konfigurácia s nulovým stavom, podľa vety **4.8** platí $\mathtt{Stav}(M'') = \mathtt{MS}(S \circledcirc T) - 1$.

  3 | Neexistuje $\mathtt{Krok}(M'', S \circledcirc T)$.

  Podľa vety **19** a definície polоúplného stroja $\mathtt{Stav}(M'') = \mathtt{MS}(S \circledcirc T) - 1 \notin \mathtt{HyperaktívneStavy}(S \circledcirc T)$, podľa vety **2** preto neexistuje $\mathtt{Krok}(M'', S \circledcirc T)$.

  4 | Neexistuje $\mathtt{Krok}(M'', S \cup U)$.

  Keďže podľa definície $\circledcirc$ platí $S \cup U \subseteq S \circledcirc T$, a teda $(S \cup U) \cup (S \circledcirc T) = S \circledcirc T$, podľa sublemy **3** a vety **2.18** neexistuje ani $\mathtt{Krok}(M'', S \cup U)$.

  5 |
  - $\mathtt{Koniec}(K, S \cup U \cup V) = M''$.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, S \cup U \cup V) = \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Rozsah}(L, T)\}$.

  Ukážeme, že sú splnené podmienky vety **3.1**:

  - $\mathtt{Koniec}(K, S \cup U) = L''$ platí podľa sublemy **2**.
  - Postupne platí:

    $\mathtt{Koniec}(L'', V)$

    $= \mathtt{Koniec}(\mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S) + 1), \mathtt{SPS}(T, \mathtt{MS}(S) + 1)),$

    $= \mathtt{KPS}(\mathtt{Koniec}(L, T), \mathtt{MS}(S) + 1)$
    (podľa vety **4.18**),

    $= \mathtt{KPS}(\mathtt{KPS}(M, \mathtt{MS}(T)), \mathtt{MS}(S) + 1)$
    (podľa definície $\xrightarrow{T}$, lebo podľa predpokladu $L \xrightarrow{T} M$),

    $= \mathtt{KPS}(M, (\mathtt{MS}(S) + 1) + \mathtt{MS}(T))$
    (podľa vety **4.11**),

    $= \mathtt{KPS}(M, (\mathtt{MS}(S) + \mathtt{MS}(T)) + 1),$

    $= \mathtt{KPS}(M, \mathtt{MS}(S \circledcirc T) - 1)$
    (podľa vety **19**),

    $= M''.$
  - $\mathtt{Krok}(M'', S \cup U)$ neexistuje podľa sublemy **4**.

  Potom platí:

  - $\mathtt{Koniec}(K, S \cup U \cup V) = M''$ podľa vety **3.1**.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, S \cup U \cup V)$

    $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S \cup U), \mathtt{Rozsah}(L'', V)\}$
    (podľa vety **3.1**),

    $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Rozsah}(L'', V)\}$
    (podľa sublemy **2**),

    $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Rozsah}(\mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S) + 1), \mathtt{SPS}(T, \mathtt{MS}(S) + 1))\},$

    $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Rozsah}(L, T)\}$
    (podľa vety **4.18**).

  Potom platí:

  - $\mathtt{Koniec}(K, S \circledcirc T)$

    $= \mathtt{Koniec}(K, (S \cup U \cup V) \cup (S \circledcirc T))$
    (lebo podľa definície $\circledcirc$ platí $S \cup U \cup V \subseteq S \circledcirc T$),

$= M''$
(podľa vety **3.3**, ktorej podmienky sú splnené podľa sublem **5** a **3**),
$= \mathtt{KPS}(M, \mathtt{MS}(S \circledcirc T) - 1)$.

Podľa definície $\overset{S \circledcirc T}{\dashrightarrow}_{+}$ to znamená $K \overset{S \circledcirc T}{\dashrightarrow}_{+} M$.

- $\mathtt{Rozsah}(K, S \circledcirc T)$

  $= \mathtt{Rozsah}(K, (S \cup U \cup V) \cup (S \circledcirc T))$
  (lebo podľa definície $\circledcirc$ platí $S \cup U \cup V \subseteq S \circledcirc T$),
  $= \mathtt{Rozsah}(K, S \cup U \cup V)$
  (podľa vety **3.3**, ktorej podmienky sú splnené podľa sublem **5** a **3**),
  $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Rozsah}(L, T)\}$
  (podľa sublemy **5**).

- Nech je výpočet na T z L je nekonečný.

  6 | Výpočet na $S \cup U \cup V$ z K je nekonečný. |

  Keďže výpočet na T z L je nekonečný, podľa vety **4.18** je výpočet na $\mathtt{SPS}(T, \mathtt{MS}(S)+1)$ z $\mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S)+1)$ čiže na V z L'' nekonečný. Potom podľa vety **3.2** a sublemy **2** je výpočet na $S \cup U \cup V$ z K nekonečný.

  Keďže podľa definície $\circledcirc$ platí $S \cup U \cup V \subseteq S \circledcirc T$, a teda $(S \cup U \cup V) \cup (S \circledcirc T) = S \circledcirc T$, podľa vety **3.4** a sublemy **6** je výpočet na $S \circledcirc T$ z K nekonečný.

- Rozoberme druhú časť:

  Nech $W = \mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S), \mathtt{MS}(S) + \mathtt{MS}(T) + 2}$. Keďže podľa definície $\circledcirc$ platí $S \cup W \subseteq S \circledcirc T$, podľa vety **2.2** je aj $S \cup W$ stroj. Nech $L' = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S))$ a $L'' = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S) + \mathtt{MS}(T) + 2)$. Keďže L je konfigurácia s nulovým stavom, podľa vety **4.8** a definície L' platí $\mathtt{Stav}(L') = \mathtt{MS}(S)$ a opäť podľa vety **4.8** a definície L'' platí $\mathtt{Stav}(L'') = \mathtt{MS}(S) + \mathtt{MS}(T) + 2$.

  7 | $\mathtt{Koniec}(K, S) = L'$. |

  Keďže $K \overset{S}{\dashrightarrow} L$, podľa definície $\overset{S}{\dashrightarrow}$ platí $\mathtt{Koniec}(K, S) = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S)) = L'$.

  8 |
  - $\mathtt{Koniec}(K, S \cup W) = L''$.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, S \cup W) = \mathtt{Rozsah}(K, S)$. |

  Ukážeme, že sú splnené podmienky vety **3.1**:

  - $\mathtt{Koniec}(K, S) = L'$ platí podľa sublemy **7**.
  - Podľa definícií KPS a opäť KPS platí:
    - $\mathtt{Hlava}(L') = \mathtt{Hlava}(L) = \mathtt{Hlava}(L'')$.
    - $\mathtt{Páska}(L') = \mathtt{Páska}(L) = \mathtt{Páska}(L'')$.

    Podľa vety **18** teda platí $\mathtt{Koniec}(L', W) = L''$.
  - Podľa definície poloúplného stroja platí $\mathtt{Stav}(L'') = \mathtt{MS}(S) + \mathtt{MS}(T) + 2 \notin \mathtt{HyperaktívneStavy}(S)$, preto podľa vety **2** neexistuje $\mathtt{Krok}(L'', S)$.

  Potom platí:

  - $\mathtt{Koniec}(K, S \cup W) = L''$ podľa vety **3.1**.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, S \cup W)$

    $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Rozsah}(L', W)\}$
    (podľa vety **3.1**),
    $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Hlava}(L)\}$
    (podľa vety **18**),
    $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Hlava}(L')\}$

(podľa definície KPS),

$= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Hlava}(\mathtt{Koniec}(K, S))\}$
(podľa sublemy **7**),

$= \mathtt{Rozsah}(K, S)$
(podľa vety **2.22**).

9 $\boxed{\text{Neexistuje } \mathtt{Krok}(L'', S \circledcirc T).}$

Podľa vety **19** a definície polooúplného stroja $\mathtt{Stav}(L'') = \mathtt{MS}(S) + \mathtt{MS}(T) + 2 \notin \mathtt{HyperaktívneStavy}(S \circledcirc T)$. Podľa vety **2** preto neexistuje $\mathtt{Krok}(L'', S \circledcirc T)$.

Potom platí:

- $\mathtt{Koniec}(K, S \circledcirc T)$

  $= \mathtt{Koniec}(K, (S \cup W) \cup (S \circledcirc T))$
  (lebo podľa definície $\circledcirc$ platí $S \cup W \subseteq S \circledcirc T$),

  $= L''$
  (podľa vety **3.3**, ktorej podmienky sú splnené podľa sublem **8** a **9**),

  $= \mathtt{KPS}(M, \mathtt{MS}(S \circledcirc T))$.

  Podľa definície $\overset{S \circledcirc T}{\dashrightarrow}$ to znamená $K \overset{S \circledcirc T}{\dashrightarrow} M$.

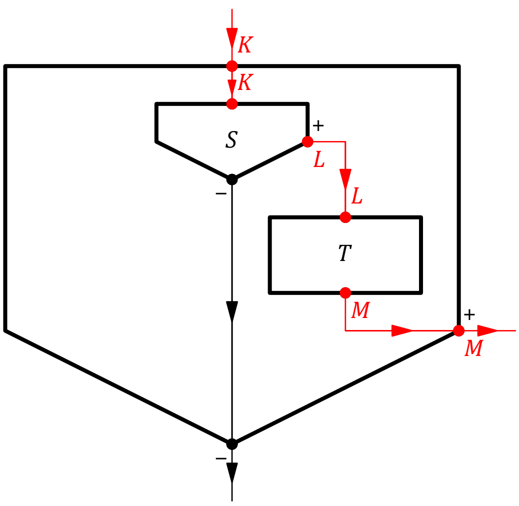
- $\mathtt{Rozsah}(K, S \circledcirc T)$

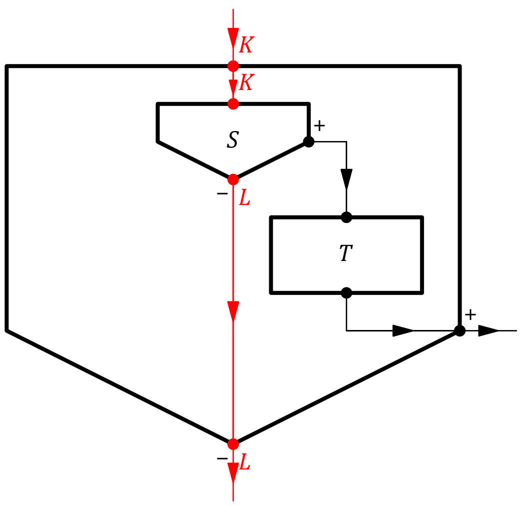
  $= \mathtt{Rozsah}(K, (S \cup W) \cup (S \circledcirc T))$
  (lebo podľa definície $\circledcirc$ platí $S \cup W \subseteq S \circledcirc T$),

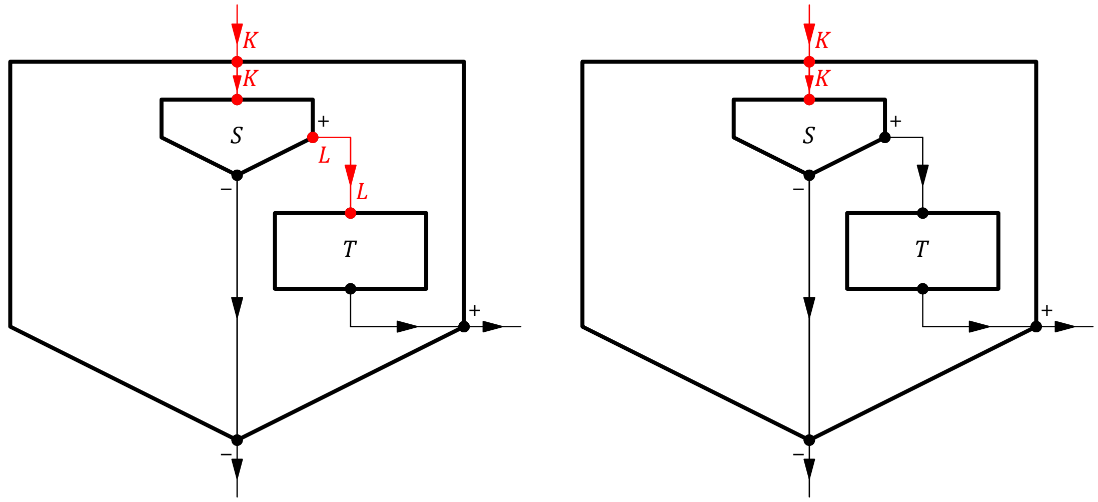
  $= \mathtt{Rozsah}(K, S \cup W)$
  (podľa vety **3.3**, ktorej podmienky sú splnené podľa sublem **8** a **9**),

  $= \mathtt{Rozsah}(K, S)$
  (podľa sublemy **8**).

P Aj tu všetky štyri prípady vyjadríme graficky. V prvom riadku je vľavo prechod cez pozitívny stav, vpravo cez negatívny. V druhom riadku sú znázornené zlyhania – vľavo v druhej etape a vpravo už v prvej.







Niekedy sa môže hodiť zmena optiky, keď sa na pozitívny stav začneme dívať ako na negatívny a naopak. Inými slovami, dôjde k „prepólovaniu“.

D Definujme zobrazenie $\texttt{Prepólovanie}$ množiny $\texttt{PoloúplnéStroje}$ vzťahom

$$\texttt{Prepólovanie}(S) = S \cup \texttt{ZameňStav}_{\texttt{MS}(S)-1,\texttt{MS}(S)+1}.$$

V **21**

Nech S je poloúplný stroj. Potom aj $\texttt{Prepólovanie}(S)$ je poloúplný stroj.

Najprv sublemy:

1
- $\texttt{StaréStavy}(S) = \texttt{HyperaktívneStavy}(S) = \{0, \dots, \texttt{MS}(S) - 2\}$.
- $\texttt{StaréStavy}(\texttt{ZameňStav}_{\texttt{MS}(S)-1,\texttt{MS}(S)+1}) = \{\texttt{MS}(S) - 1\}$.

- Tvrdenie platí podľa vety **1** a definície poloúplného stroja.
- Tvrdenie platí podľa vety **16**.

2 $\texttt{Prepólovanie}(S)$ je Turingov stroj.

Tvrdenie platí podľa vety podľa definície $\texttt{Prepólovanie}$, sublemy **1** a vety **2.5**.

3 $\texttt{StaréStavy}(\texttt{Prepólovanie}(S)) = \{0, \dots, \texttt{MS}(S) - 1\}$.

$\texttt{StaréStavy}(\texttt{Prepólovanie}(S))$
$= \texttt{StaréStavy}(S) \cup \texttt{StaréStavy}(\texttt{ZameňStav}_{\texttt{MS}(S)-1,\texttt{MS}(S)+1})$
(podľa definície $\texttt{Prepólovanie}$, sublemy **2** a vety **2.9**),
$= \{0, \dots, \texttt{MS}(S) - 2\} \cup \{\texttt{MS}(S) - 1\}$
(podľa sublemy **1**),
$= \{0, \dots, \texttt{MS}(S) - 1\}$.

4 $\texttt{HyperaktívneStavy}(\texttt{Prepólovanie}(S)) = \{0, \dots, \texttt{MS}(S) - 1\}$.

$\texttt{HyperaktívneStavy}(\texttt{Prepólovanie}(S))$
$= \texttt{HyperaktívneStavy}(S) \cup \texttt{HyperaktívneStavy}(\texttt{ZameňStav}_{\texttt{MS}(S)-1,\texttt{MS}(S)+1})$
(podľa definície $\texttt{Prepólovanie}$, sublemy **2**, vety **2.9** a sublemy **1**),
$= \texttt{HyperaktívneStavy}(S) \cup \{\texttt{MS}(S) - 1\}$
(podľa vety **16**),
$= \{0, \dots, \texttt{MS}(S) - 2\} \cup \{\texttt{MS}(S) - 1\}$
(podľa definície poloúplného stroja),

$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) - 1\}$.

5 $\boxed{\mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{Prepólovanie}(S)) = \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) + 1\}.}$

$\mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{Prepólovanie}(S))$
$= \mathtt{PoužitéStavy}(S) \cup \mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S)-1, \mathtt{MS}(S)+1})$
(podľa definície Prepólovanie, sublemy **2** a vety **2.9**),
$= \mathtt{PoužitéStavy}(S) \cup \{\mathtt{MS}(S) - 1, \mathtt{MS}(S) + 1\}$
(podľa vety **16**),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)\} \cup \{\mathtt{MS}(S) - 1, \mathtt{MS}(S) + 1\}$
(podľa vety **1**, kedže $S \neq \emptyset$, a to podľa vety **2.10**, lebo podľa definície poloúplného stroja platí $\mathtt{MS}(S) \geq 2 > 0$),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) + 1\}$.

6 $\boxed{\mathtt{MS}(\mathtt{Prepólovanie}(S)) = \mathtt{MS}(S) + 1.}$

$\mathtt{MS}(\mathtt{Prepólovanie}(S))$
$= \mathtt{Max}(\mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{Prepólovanie}(S)))$
(podľa definície MS a sublemy **2**),
$= \mathtt{Max}(\{0, \dots, \mathtt{MS}(S) + 1\})$
(podľa sublemy **5**),
$= \max(\{0, \dots, \mathtt{MS}(S) + 1\})$
(podľa definície Max),
$= \mathtt{MS}(S) + 1$.

7 $\boxed{\mathtt{PasívneStavy}(\mathtt{Prepólovanie}(S)) = \{\mathtt{MS}(S), \mathtt{MS}(S) + 1\}.}$

$\mathtt{PasívneStavy}(\mathtt{Prepólovanie}(S))$
$= \mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{Prepólovanie}(S)) \setminus \mathtt{StaréStavy}(\mathtt{Prepólovanie}(S))$
(podľa definície PasívneStavy a sublemy **2**),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) + 1\} \setminus \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) - 1\}$
(podľa sublem **5** a **3**),
$= \{\mathtt{MS}(S), \mathtt{MS}(S) + 1\}$.

Podľa definície poloúplného stroja $\mathtt{MS}(S) \geq 2$, takže podľa sublemy **6** máme tiež $\mathtt{MS}(\mathtt{Prepólovanie}(S)) \geq 2$. Zvyšné dve podmienky definície poloúplného stroja sú v sublemách **2**, **4** a **7**. Stroj $\mathtt{Prepólovanie}(S)$ je teda naozaj poloúplný.

V **22** (*o výpočte na prepólovaní poloúplného stroja*)

Nech S je poloúplný stroj. Nech $R = \mathtt{Prepólovanie}(S)$. Nech K je konfigurácia s nulovým stavom.

- Nech $K \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$. Potom platí:
  - $K \overset{R}{\underset{-}{\dashrightarrow}} L$.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, R) = \mathtt{Rozsah}(K, S)$.
- Nech $K \overset{S}{\underset{-}{\dashrightarrow}} L$. Potom platí:
  - $K \overset{R}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$.
  - $\mathtt{Rozsah}(K, R) = \mathtt{Rozsah}(K, S)$.
- Nech výpočet na S z K je nekonečný. Potom výpočet na R z K je nekonečný.

Nech $T = \mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S)-1, \mathtt{MS}(S)+1}$.

- Nech $L' = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S) - 1)$ a $L'' = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S) + 1)$. Podľa definície $\overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$ je L konfigurácia s nulovým stavom a platí $\mathtt{Koniec}(K, S) = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S) - 1) = L'$. Podľa vety **18** platí $\mathtt{Koniec}(L', T) = L''$. Podľa vety **4.8** a definície poloúplného stroja platí $\mathtt{Stav}(L'') = \mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S) + 1)) = \mathtt{MS}(S) + 1 \notin \mathtt{HyperaktívneStavy}(S)$, takže podľa vety **2** neexistuje $\mathtt{Krok}(L'', S)$. Potom platí:

- $\mathtt{Koniec}(K, R)$

  $= \mathtt{Koniec}(K, S \cup T)$
  (podľa definície $\mathtt{Prepólovanie}$),

  $= L''$
  (podľa vety **3.1**),

  $= \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S) + 1)$,

  $= \mathtt{KPS}(L, \max\{\mathtt{MS}(S), \mathtt{MS}(S) + 1\})$,

  $= \mathtt{KPS}(L, \mathtt{Max}\{\mathtt{MS}(S), \mathtt{MS}(S) + 1\})$
  (podľa definície $\mathtt{Max}$),

  $= \mathtt{KPS}(L, \mathtt{Max}\{\mathtt{MS}(S), \mathtt{MS}(T)\})$
  (podľa vety **16**),

  $= \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S \cup T))$
  (podľa vety **2.9**),

  $= \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(R))$
  (podľa definície $\mathtt{Prepólovanie}$).

  To podľa definície $\overset{R}{\dashrightarrow}$ znamená, že $K \overset{R}{\dashrightarrow} L$.

- $\mathtt{Rozsah}(K, R)$

  $= \mathtt{Rozsah}(K, S \cup T)$
  (podľa definície $\mathtt{Prepólovanie}$),

  $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Rozsah}(L', T)\}$
  (podľa vety **3.1**),

  $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Hlava}(L)\}$
  (podľa vety **18**),

  $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Hlava}(L')\}$
  (podľa definície $\mathtt{KPS}$),

  $= \max\{\mathtt{Rozsah}(K, S), \mathtt{Hlava}(\mathtt{Koniec}(K, S))\}$
  (podľa sublemy **1**),

  $= \mathtt{Rozsah}(K, S)$
  (podľa vety **2.22**).

- Nech $L' = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S))$. Podľa definície $\overset{S}{\dashrightarrow}$ je L konfigurácia s nulovým stavom a platí $\mathtt{Koniec}(K, S) = \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S)) = L'$. Podľa viet **4.8** a **16** platí $\mathtt{Stav}(L') = \mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S))) = \mathtt{MS}(S) \notin \{\mathtt{MS}(S) - 1\} = \mathtt{HyperaktívneStavy}(T)$, takže podľa vety **2** neexistuje $\mathtt{Krok}(L', T)$. Potom platí:

  - $\mathtt{Koniec}(K, R)$

    $= \mathtt{Koniec}(K, S \cup T)$
    (podľa definície $\mathtt{Prepólovanie}$),

    $= L'$
    (podľa vety **3.3**),

    $= \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S))$,

    $= \mathtt{KPS}(L, \max\{\mathtt{MS}(S), \mathtt{MS}(S) + 1\} - 1)$,

    $= \mathtt{KPS}(L, \mathtt{Max}\{\mathtt{MS}(S), \mathtt{MS}(S) + 1\} - 1)$
    (podľa definície $\mathtt{Max}$),

    $= \mathtt{KPS}(L, \mathtt{Max}\{\mathtt{MS}(S), \mathtt{MS}(T)\} - 1)$
    (podľa vety **16**),

    $= \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(S \cup T) - 1)$
    (podľa vety **2.9**),

    $= \mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(R) - 1)$

(podľa definície Prepólovanie).

To znamená, že $K \overset{R}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$.

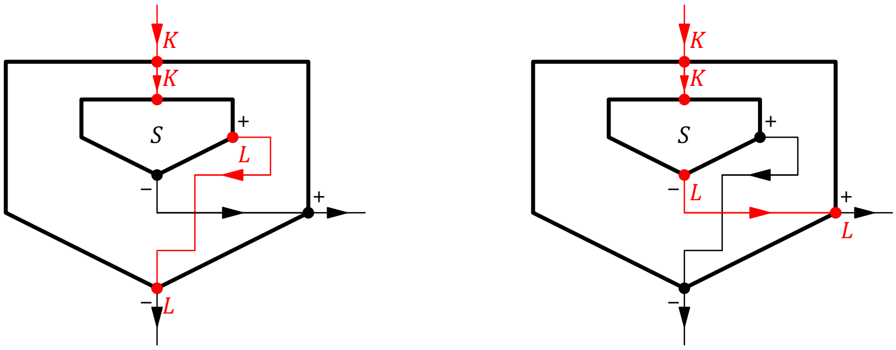
- Rozsah(K,R)

  $=$ Rozsah$(K,S \cup T)$
  (podľa definície Prepólovanie),

  $=$ Rozsah(K,S)
  (podľa vety **3.3**).

- Keďže podľa definície Prepólovanie platí $S \cup T = R$, je to dôsledok vety **3.4**.

P Konečné výpočty na stroji Prepólovanie(S) vyzerajú takto: V prvom riadku vľavo môžeme pozorovať zmenu pozitívneho stavu na negatívny, vpravo naopak.



D Definujme zobrazenie Dvojvetvenie z množiny PoloúplnéStroje $\times$ ÚplnéStroje $\times$ ÚplnéStroje do množiny PoloúplnéStroje vzťahom

$$\text{Dvojvetvenie}(S,T^+,T^-) = \text{Prepólovanie}(\text{Prepólovanie}(S \circledcirc T^+) \circledcirc T^-).$$

V $\boxed{\mathbf{23}}$ (*o výpočte na dvojvetvení*)

> Nech S je poloúplný stroj a T^+ a T^- sú úplné stroje. Nech $R =$ Dvojvetvenie(S,T^+,T^-).
>
> - Nech $K \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$ a $L \overset{T^+}{\dashrightarrow} M$. Potom platí:
>   - $K \overset{R}{\underset{+}{\dashrightarrow}} M$.
>   - Rozsah$(K,R) = \max\{$Rozsah(K,S), Rozsah$(L,T^+)\}$.
> - Nech $K \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$, ale výpočet na T^+ z L je nekonečný. Potom výpočet na R z K je nekonečný.
> - Nech $K \overset{S}{\underset{-}{\dashrightarrow}} L$ a $L \overset{T^-}{\dashrightarrow} M$. Potom platí:
>   - $K \overset{R}{\underset{-}{\dashrightarrow}} M$.
>   - Rozsah$(K,R) = \max\{$Rozsah(K,S), Rozsah$(L,T^-)\}$.
> - Nech $K \overset{S}{\underset{-}{\dashrightarrow}} L$, ale výpočet na T^- z L je nekonečný. Potom výpočet na R z K je nekonečný.
> - Nech K je konfigurácia s nulovým stavom a nech výpočet na S z K je nekonečný. Potom výpočet na R z K je nekonečný.

- - $K \overset{S \circledcirc T^+}{\underset{+}{\dashrightarrow}} M$
    (podľa vety **20**),

    $K \overset{\text{Prepólovanie}(S \circledcirc T^+)}{\underset{-}{\dashrightarrow}} M$
    (podľa vety **22**),

    $K \overset{\text{Prepólovanie}(S \circledcirc T^+) \circledcirc T^-}{\underset{-}{\dashrightarrow}} M$
    (podľa vety **20**),

    $K \overset{\text{Prepólovanie}(\text{Prepólovanie}(S \circledcirc T^+) \circledcirc T^-)}{\underset{+}{\dashrightarrow}} M$

    (podľa vety **22**),

  $K \overset{R}{\underset{+}{\dashrightarrow}} M$
    (podľa definície Dvojvetvenie).

- Rozsah(K, R)

  $=$ Rozsah$(K,$ Prepólovanie(Prepólovanie$(S \circledcirc T^{+}) \circledcirc T^{-}))$
    (podľa definície Dvojvetvenie),

  $=$ Rozsah$(K,$ Prepólovanie$(S \circledcirc T^{+}) \circledcirc T^{-})$
    (podľa vety **22**, lebo, ako sme ukázali, $K \overset{\text{Prepólovanie}(S \circledcirc T^{+}) \circledcirc T^{-}}{\underset{-}{\dashrightarrow}} M$),

  $=$ Rozsah$(K,$ Prepólovanie$(S \circledcirc T^{+}))$
    (podľa vety **20**, lebo, ako sme ukázali, $K \overset{\text{Prepólovanie}(S \circledcirc T^{+})}{\underset{-}{\dashrightarrow}} M$),

  $=$ Rozsah$(K, S \circledcirc T^{+})$
    (podľa vety **22**, lebo, ako sme ukázali, $K \overset{S \circledcirc T^{+}}{\underset{+}{\dashrightarrow}} M$),

  $=$ max{Rozsah(K, S), Rozsah(L, T^{+})}
    (podľa vety **20**).

- Postupne platí:

  výpočet na T^{+} z L je nekonečný
    (podľa predpokladu),
  výpočet na $S \circledcirc T^{+}$ z K je nekonečný
    (podľa vety **20**),
  výpočet na Prepólovanie$(S \circledcirc T^{+})$ z K je nekonečný
    (podľa vety **22**),
  výpočet na Prepólovanie$(S \circledcirc T^{+}) \circledcirc T^{-}$ z K je nekonečný
    (podľa vety **20**),
  výpočet na Prepólovanie(Prepólovanie$(S \circledcirc T^{+}) \circledcirc T^{-})$ z K je nekonečný
    (podľa vety **22**),
  výpočet na R z K je nekonečný
    (podľa definície Dvojvetvenie).

- - $K \overset{S \circledcirc T^{+}}{\underset{-}{\dashrightarrow}} L$
      (podľa vety **20**),

    $K \overset{\text{Prepólovanie}(S \circledcirc T^{+})}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$
      (podľa vety **22**),

    $K \overset{\text{Prepólovanie}(S \circledcirc T^{+}) \circledcirc T^{-}}{\underset{+}{\dashrightarrow}} M$
      (podľa vety **20**),

    $K \overset{\text{Prepólovanie}(\text{Prepólovanie}(S \circledcirc T^{+}) \circledcirc T^{-})}{\underset{-}{\dashrightarrow}} M$
      (podľa vety **22**),

    $K \overset{R}{\underset{-}{\dashrightarrow}} M$
      (podľa definície Dvojvetvenie).

  - Rozsah(K, R)

    $=$ Rozsah$(K,$ Prepólovanie(Prepólovanie$(S \circledcirc T^{+}) \circledcirc T^{-}))$
      (podľa definície Dvojvetvenie),

    $=$ Rozsah$(K,$ Prepólovanie$(S \circledcirc T^{+}) \circledcirc T^{-})$
      (podľa vety **22**, lebo, ako sme ukázali, $K \overset{\text{Prepólovanie}(S \circledcirc T^{+}) \circledcirc T^{-}}{\underset{+}{\dashrightarrow}} M$),

    $=$ max{Rozsah$(K,$ Prepólovanie$(S \circledcirc T^{+}))$, Rozsah(L, T^{-})}
      (podľa vety **20**, lebo, ako sme ukázali, $K \overset{\text{Prepólovanie}(S \circledcirc T^{+})}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$),

    $=$ max{Rozsah$(K, S \circledcirc T^{+})$, Rozsah$(L, T^{-})$}
      (podľa vety **22**, lebo, ako sme ukázali, $K \overset{S \circledcirc T^{+}}{\underset{-}{\dashrightarrow}} L$),

    $=$ max{Rozsah(K, S), Rozsah(L, T^{-})}

(podľa vety **20**).

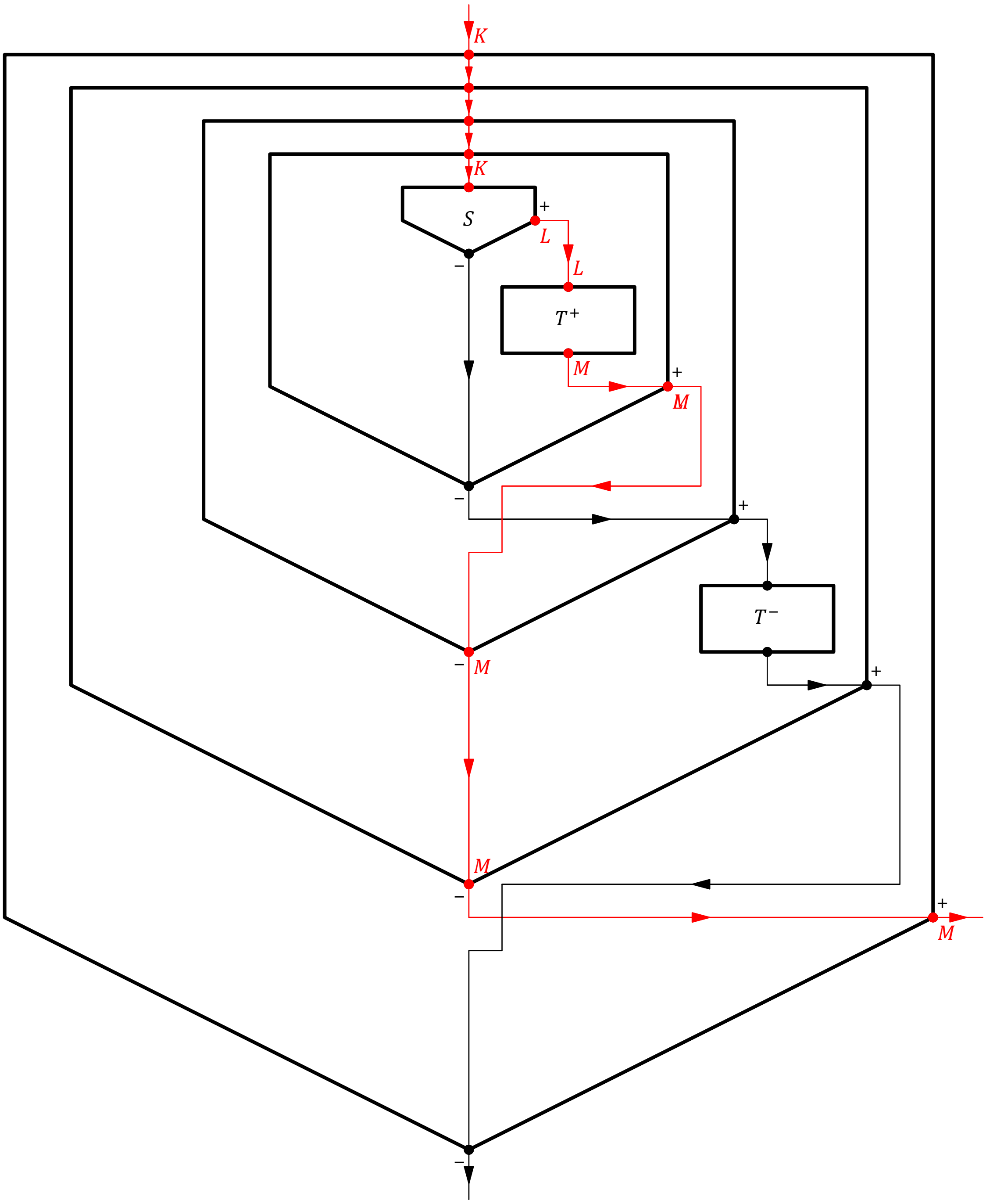
- Postupne platí:

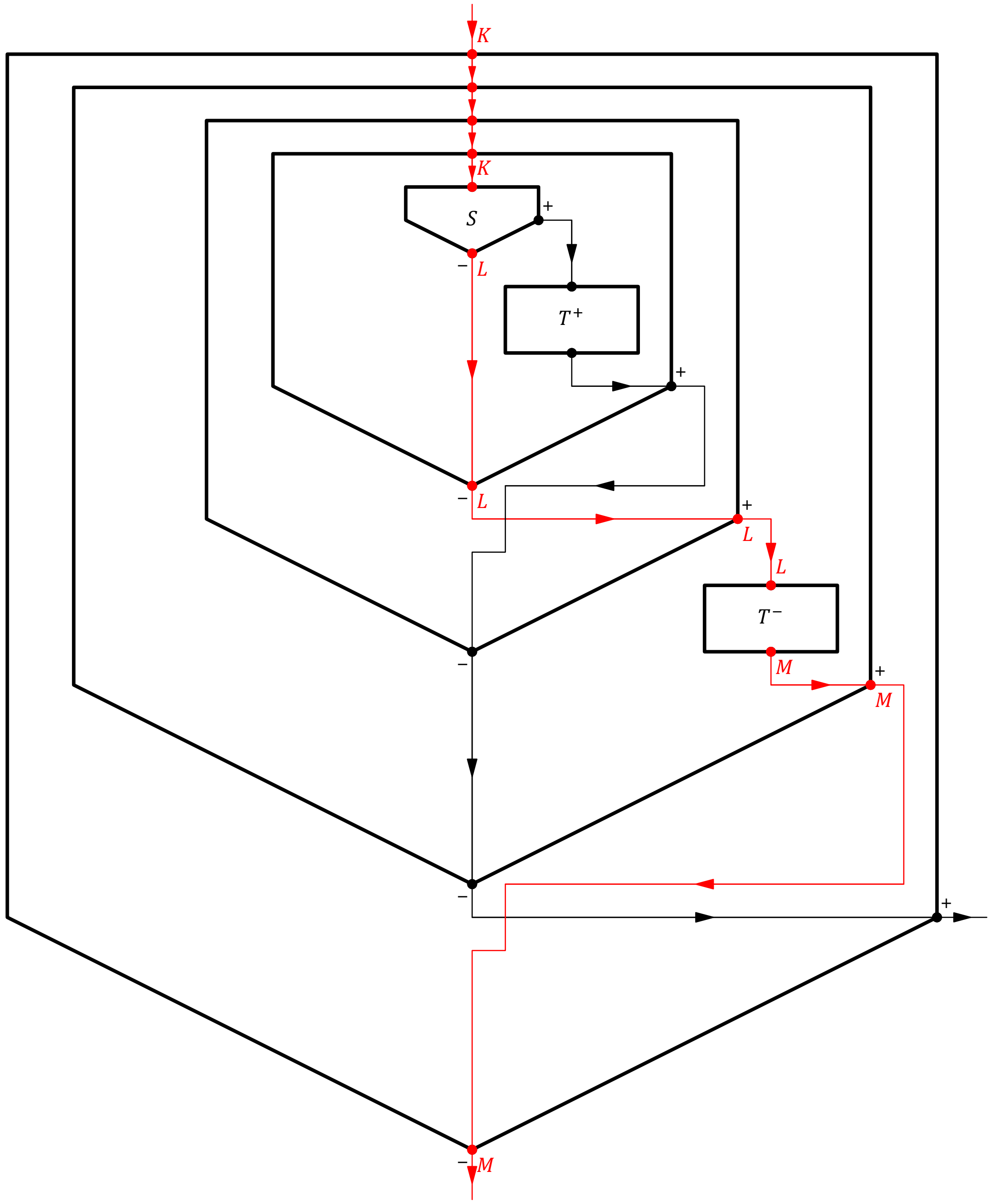
  výpočet na T^- z L je nekonečný
  (podľa predpokladu),
  výpočet na Prepólovanie$(S \odot T^+) \odot T^-$ z K je nekonečný
  (podľa vety **20**),
  výpočet na Prepólovanie(Prepólovanie$(S \odot T^+) \odot T^-$) z K je nekonečný
  (podľa vety **22**),
  výpočet na R z K je nekonečný
  (podľa definície Dvojvetvenie).

- Postupne platí:

  výpočet na S z K je nekonečný
  (podľa predpokladu),
  výpočet na $S \odot T^+$ z K je nekonečný
  (podľa vety **20**),
  výpočet na Prepólovanie$(S \odot T^+)$ z K je nekonečný
  (podľa vety **22**),
  výpočet na Prepólovanie$(S \odot T^+) \odot T^-$ z K je nekonečný
  (podľa vety **20**),
  výpočet na Prepólovanie(Prepólovanie$(S \odot T^+) \odot T^-$) z K je nekonečný
  (podľa vety **22**),
  výpočet na R z K je nekonečný
  (podľa definície Dvojvetvenie).

P Takto vyzerajú konečné výpočty na stroji Dvojvetvenie(S, T^+, T^-) v grafickej podobe – na prvom obrázku vidíme priebeh kladnej vetvy, na druhom obrázku vetvy zápornej:


K
K
S
+
L
L
−
T⁺
M
+
M
−
+
T⁻
−
M
+
M
−
+
M
−



Stroj simulujúci vetvenie môžeme ľahko upraviť tak, aby simuloval cyklus – stačí koniec kladnej vetvy prepojiť so začiatkom:

D Definujme zobrazenie `Cyklus` množiny `PoloúplnéStroje` vzťahom

$$\texttt{Cyklus}(S) = S \cup \texttt{ZameňStav}_{\texttt{MS}(S)-1,0}.$$

V $\boxed{\textbf{24}}$

Nech S je poloúplný stroj. Potom platí:

- `Cyklus`(S) je neprázdny úplný stroj.
- `MS`(`Cyklus`(S)) = `MS`(S).

Dokážeme sériu sublem:

1
- $\mathtt{StaréStavy}(S) = \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) - 2\}$.
- $\mathtt{StaréStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S)-1,0}) = \{\mathtt{MS}(S) - 1\}$.

- $\mathtt{StaréStavy}(S)$

  $= \mathtt{HyperaktívneStavy}(S)$
  (podľa vety **1**),

  $= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) - 2\}$
  (podľa definície poloúplného stroja).
- Dokazované tvrdenie platí podľa vety **16**.

2 $\mathtt{Cyklus}(S)$ je stroj.

Dokazované tvrdenie platí podľa sublemy **1**, vety **2.5** a definície $\mathtt{Cyklus}$.

3 $\mathtt{StaréStavy}(\mathtt{Cyklus}(S)) = \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) - 1\}$.

$\mathtt{StaréStavy}(\mathtt{Cyklus}(S))$
$= \mathtt{StaréStavy}(S) \cup \mathtt{StaréStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S)-1,0})$
(podľa definície $\mathtt{Cyklus}$, sublemy **2** a vety **2.9**),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) - 2\} \cup \{\mathtt{MS}(S) - 1\}$
(podľa sublemy **1**),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) - 1\}$.

4 $\mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathtt{Cyklus}(S)) = \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) - 1\}$.

$\mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathtt{Cyklus}(S))$
$= \mathtt{HyperaktívneStavy}(S) \cup \mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S)-1,0})$
(podľa definície $\mathtt{Cyklus}$, sublemy **2** a vety **2.9**, ktorej podmienka je splnená podľa sublemy **1**),
$= \mathtt{HyperaktívneStavy}(S) \cup \{\mathtt{MS}(S) - 1\}$
(podľa vety **16**),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) - 2\} \cup \{\mathtt{MS}(S) - 1\}$
(podľa definície poloúplného stroja),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) - 1\}$.

5 $\mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{Cyklus}(S)) = \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)\}$.

$\mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{Cyklus}(S))$
$= \mathtt{PoužitéStavy}(S) \cup \mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S)-1,0})$
(podľa definície $\mathtt{Cyklus}$, sublemy **2** a vety **2.9**, ktorej podmienka je splnená podľa sublemy **1**),
$= \mathtt{PoužitéStavy}(S) \cup \{\mathtt{MS}(S) - 1, 0\}$
(podľa vety **16**),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)\} \cup \{\mathtt{MS}(S) - 1, 0\}$
(podľa vety **1**, keďže $S \neq \emptyset$, a to podľa vety **2.10**, lebo podľa definície poloúplného stroja platí $\mathtt{MS}(S) \geq 2 > 0$),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)\}$.

6 $\mathtt{MS}(\mathtt{Cyklus}(S)) = \mathtt{MS}(S)$.

$\mathtt{MS}(\mathtt{Cyklus}(S))$
$= \mathtt{Max}(\mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{Cyklus}(S)))$
(podľa sublemy **2** a definície $\mathtt{MS}$),
$= \mathtt{Max}(\{0, \dots, \mathtt{MS}(S)\})$
(podľa sublemy **5**),
$= \max(\{0, \dots, \mathtt{MS}(S)\})$

(podľa definície Max),
$= \mathtt{MS}(S)$.

7 $\boxed{\mathtt{PasívneStavy}(\mathtt{Cyklus}(S)) = \{\mathtt{MS}(S)\}.}$

$\mathtt{PasívneStavy}(\mathtt{Cyklus}(S))$
$= \mathtt{PoužitéStavy}(\mathtt{Cyklus}(S)) \setminus \mathtt{StaréStavy}(\mathtt{Cyklus}(S))$
(podľa sublemy **2** a definície PasívneStavy),
$= \{0, \dots, \mathtt{MS}(S)\} \setminus \{0, \dots, \mathtt{MS}(S) - 1\}$
(podľa sublem **5** a **3**),
$= \{\mathtt{MS}(S)\}$.

Potom platí:

- Podľa definície polóúplného stroja $\mathtt{MS}(S) \geq 2$, takže podľa sublemy **6** máme $\mathtt{MS}(\mathtt{Cyklus}(S)) \geq 1$. Zvyšné dve podmienky definície úplného stroja sú v sublemách **2**, **4** a **7**. Stroj $\mathtt{Cyklus}(S)$ je teda naozaj úplný a podľa vety **2.10** aj neprázdny.
- Je to tvrdenie sublemy **6**.

V $\boxed{25}$ (*o výpočte na stroji simulujúcom cyklus*)

Nech S je polóúplný stroj a nech $R = \mathtt{Cyklus}(S)$.

- Nech pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ platí $K^i \xrightarrow[+]{S} K^{i+1}$.
  - Nech $K^n \xrightarrow[-]{S} K^{n+1}$. Potom platí:
    - $K^0 \xrightarrow[-]{R} K^{n+1}$.
    - $\mathtt{Rozsah}(K^0, R) = \max\{\mathtt{Rozsah}(K^i, S) : i \in \{0, \dots, n\}\}$.
  - Nech výpočet na S z K^n je nekonečný. Potom výpočet na R z K^0 je nekonečný.
- Nech pre každé i z $\mathbb{N}$ platí $K^i \xrightarrow[+]{S} K^{i+1}$. Potom výpočet na R z K^0 je nekonečný.

Rozoberme najprv dva prípady:

- Nech i je také, že $K^i \xrightarrow[+]{S} K^{i+1}$ alebo $K^i \xrightarrow[-]{S} K^{i+1}$.

  V prvom prípade nech $q = 1$ a v druhom $q = 0$.

  Podľa definície $\xrightarrow[+]{S}$, resp. $\xrightarrow[-]{S}$ platí $\mathtt{Koniec}(K^i, S) = \mathtt{KPS}(K^{i+1}, \mathtt{MS}(S) - q)$, podľa definície Koniec potom existuje konečný výpočet na S z K^i s koncom $\mathtt{KPS}(K^{i+1}, \mathtt{MS}(S) - q)$. Nech je to $(M_0^i, \dots, M_{m^i}^i)$. Podľa definície konečného výpočtu potom $M_0^i = K^i$ a $M_{m^i}^i = \mathtt{KPS}(K^{i+1}, \mathtt{MS}(S) - q)$.

  1 $\boxed{\text{Ak } j < m^i, \text{ tak } \mathtt{Krok}(M_j^i, R) = M_{j+1}^i.}$

  Keďže $(M_0^i, \dots, M_{m^i}^i)$ je konečný výpočet na S, podľa definície konečného výpočtu platí $\mathtt{Krok}(M_j^i, S) = M_{j+1}^i$, a keďže podľa definície Cyklus platí $S \subseteq R$, a teda $S \cup R = R$, podľa vety **2.18** platí aj $\mathtt{Krok}(M_j^i, R) = M_{j+1}^i$.

  2 $\boxed{\mathtt{Krok}(M_{m^i}^i, R) = M_0^{i+1}.}$

  $\mathtt{Krok}(M_{m^i}^i, \mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S)-1,0})$
  $= \mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K^{i+1}, \mathtt{MS}(S) - 1), \mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S)-1,0})$,
  $= \mathtt{KPS}(K^{i+1}, 0)$
  (podľa vety **18**),
  $= K^{i+1}$
  (podľa vety **4.9**),
  $= M_0^{i+1}$.

  Keďže podľa definície Cyklus platí $\mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S)-1,0} \subseteq R$, a teda $\mathtt{ZameňStav}_{\mathtt{MS}(S)-1,0} \cup R = R$, podľa vety **2.18** máme $\texttt{Krok}(M^i_{m^i}, R) = M^{i+1}_0$.

- Nech i je také, že existuje nekonečný výpočet na S z K^i.
  Nech je to $(M^i_j : j \in \mathbb{N})$. Podľa definície nekonečného výpočtu potom $M^i_0 = K^i$.

3 Ak $j \in \mathbb{N}$, tak $\texttt{Krok}(M^i_j, R) = M^i_{j+1}$.

Keďže $(M^i_q : q \in \mathbb{N})$ je nekonečný výpočet na S, podľa definície nekonečného výpočtu platí $\texttt{Krok}(M^i_j, S) = M^i_{j+1}$, a keďže podľa definície $\texttt{Cyklus}$ platí $S \subseteq R$, a teda $S \cup R = R$, podľa vety **2.18** platí aj $\texttt{Krok}(M^i_j, R) = M^i_{j+1}$.

Teraz sa už môžeme venovať jednotlivým prípadom vety:

- Nech pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ platí $K^i \overset{S}{\dashrightarrow}_{+} K^{i+1}$ a nech $K^n \overset{S}{\dashrightarrow}_{-} K^{n+1}$.

4 $(M^0_0, \dots, M^0_{m^0}, \dots, M^n_0, \dots, M^n_{m^n})$ je konečný výpočet na R z K^0.

Rozoberme prípady hodnôt i a j:

- Nech $i \le n$ a $j < m^i$.
  Podľa sublemy **1** potom $\texttt{Krok}(M^i_j, R) = M^i_{j+1}$.
- Nech $i < n$ a $j = m^i$.
  Podľa sublemy **2** potom $\texttt{Krok}(M^i_{m^i}, R) = M^{i+1}_0$.
- Nech $i = n$ a $j = m^n$.
  Potom platí:
  $\texttt{Stav}(M^i_j)$
  $= \texttt{Stav}(M^n_{m^n})$,
  $= \texttt{Stav}(\texttt{KPS}(K^{n+1}, \texttt{MS}(S)))$,
  $= \texttt{MS}(S)$
  (podľa vety **4.8**),
  $= \texttt{MS}(R)$
  (podľa vety **24**).
  $\notin \texttt{HyperaktívneStavy}(R)$
  (podľa vety **24** a definície úplného stroja).
  Z toho už podľa vety **2** dostávame, že neexistuje $\texttt{Krok}(M^i_j, R)$ čiže $\texttt{Krok}(M^n_{m^n}, R)$.

Potom platí:

- Platí:
  $\texttt{Koniec}(K^0, R)$
  $= M^n_{m^n}$
  (podľa sublemy **4** a definície $\texttt{Koniec}$),
  $= \texttt{KPS}(K^{n+1}, \texttt{MS}(S))$,
  $= \texttt{KPS}(K^{n+1}, \texttt{MS}(R))$
  (podľa vety **24**),
  čiže podľa definície $\overset{R}{\dashrightarrow}$ platí $K^0 \overset{R}{\dashrightarrow} K^{n+1}$.
- $\texttt{Rozsah}(K^0, R)$
  $= \max(\{\texttt{Hlava}(M^i_j) : i \in \{0, \dots, n\} \wedge j \in \{0, \dots, m^i\}\}$
  (podľa sublemy **4** a definície $\texttt{Rozsah}$),
  $= \max(\{\max(\{\texttt{Hlava}(M^i_j) : j \in \{0, \dots, m^i\}\}) : i \in \{0, \dots, n\}\})$,
  $= \max(\{\texttt{Rozsah}(K^i, S) : i \in \{0, \dots, n\}\})$
  (pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ podľa definície $\texttt{Rozsah}$).

- Nech pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ platí $K^i \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} K^{i+1}$ a nech výpočet na S z K^n je nekonečný.

5 $\boxed{(M_0^0, \dots, M_{m^0}^0, \dots, M_0^{n-1}, \dots, M_{m^{n-1}}^{n-1}, M_0^n, M_1^n, \dots) \text{ je nekonečný výpočet na } R \text{ z } K^0.}$

  Rozoberme prípady hodnôt i a j:

  - Nech $i < n$ a $j < m^i$.
    Podľa sublemy **1** potom $\mathtt{Krok}(M_j^i, R) = M_{j+1}^i$.
  - Nech $i < n$ a $j = m^i$.
    Podľa sublemy **2** potom $\mathtt{Krok}(M_{m^i}^i, R) = M_0^{i+1}$.
  - Nech $i = n$ a $j \in \mathbb{N}$.
    Podľa sublemy **3** potom $\mathtt{Krok}(M_j^i, R) = M_{j+1}^i$.

  Zo sublemy **5** už dostávame požadované tvrdenie.

- Nech pre každé i z $\mathbb{N}$ platí $K^i \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} K^{i+1}$.

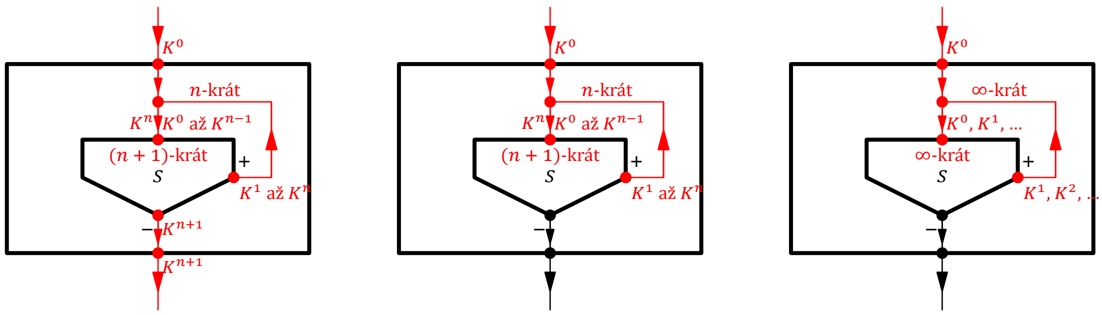
6 $\boxed{(M_0^0, \dots, M_{m^0}^0, M_0^1, \dots, M_{m^1}^1, \dots) \text{ je nekonečný výpočet na } R \text{ z } K^0.}$

  Nech $i \in \mathbb{N}$. Rozoberme prípady hodnôt j:

  - Nech $j < m^i$.
    Podľa sublemy **1** potom $\mathtt{Krok}(M_j^i, R) = M_{j+1}^i$.
  - Nech $j = m^i$.
    Podľa sublemy **2** potom $\mathtt{Krok}(M_{m^i}^i, R) = M_0^{i+1}$.

  Zo sublemy **6** už dostávame požadované tvrdenie.

P Výpočty na stroji $\mathtt{Cyklus}(S)$ teda vyzerajú takto:



V prvom prípade po n-násobnom vykonaní cyklu strojom S po pozitívnej vetve napokon prejdeme na negatívnu a výpočet sa ukončí. V druhom sa po n-násobnom vykonaní pozitívnej vetvy v ďalšom cykle výpočet na stroji S neskončí, a tak sa neukončí ani celkový výpočet. A napokon v treťom prípade sa pozitívna vetva opakuje do nekonečna, a preto sa k negatívnej nikdy nedostaneme.

Kombináciou predchádzajúcich viet získame prehľad o správaní zúplnenia polozloženia v prípade, že poloúplný stroj má testovací charakter, t. j. po výpočte na ňom sa, prirodzene, upraví stav (či už na pozitívny, alebo negatívny), ale páska i hlava ostanú bezo zmeny. Ide tak vlastne o cyklus typu „while“.

V $\boxed{\mathbf{26}}$ *(o výpočte na stroji simulujúcom cyklus typu „while“)*

Nech S je poloúplný stroj, T je úplný stroj a $R = \texttt{Cyklus}(S \odot T)$.

- Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ platí $K^i \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} K^i$ a $K^i \overset{T}{\dashrightarrow} K^{i+1}$.
  - Nech $K^n \overset{S}{\underset{-}{\dashrightarrow}} K^n$. Potom platí:
    - $K^0 \overset{R}{\dashrightarrow} K^n$.
    - $\texttt{Rozsah}(K^0, R) = \max\{\max\{\texttt{Rozsah}(K^i, S) : i \in \{0, \dots, n\}\}, \texttt{Max}\{\texttt{Rozsah}(K^i, T) : i \in \{0, \dots, n-1\}\}\}$.
  - Nech $K^n \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} K^n$, ale výpočet na T z K^n je nekonečný. Potom výpočet na R z K^0 je nekonečný.
- Nech pre každé i z $\mathbb{N}$ platí $K^i \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} K^i$ a $K^i \overset{T}{\dashrightarrow} K^{i+1}$. Potom výpočet na R z K^0 je nekonečný.

- Rozoberme oba prípady:
  - Nech $K^n \overset{S}{\underset{-}{\dashrightarrow}} K^n$.

    Podľa predpokladov a vety **20** potom platí:
    - $K^n \overset{S \odot T}{\underset{-}{\dashrightarrow}} K^n$.
    - $\texttt{Rozsah}(K^n, S \odot T) = \texttt{Rozsah}(K^n, S)$.

    Navyše podľa predpokladov a vety **20** pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ platí:
    - $K^i \overset{S \odot T}{\underset{+}{\dashrightarrow}} K^{i+1}$.
    - $\texttt{Rozsah}(K^i, S \odot T) = \max\{\texttt{Rozsah}(K^i, S), \texttt{Rozsah}(K^i, T)\}$.

    Potom platí:
    - $K^0 \overset{R}{\dashrightarrow} K^n$ podľa vety **25**.
    - $\texttt{Rozsah}(K^0, R)$

      $= \max\{\texttt{Rozsah}(K^i, S \odot T) : i \in \{0, \dots, n\}\}$
      (podľa vety **25**),

      $= \max\{\texttt{Max}(\{\texttt{Rozsah}(K^i, S \odot T) : i \in \{0, \dots, n-1\}\}), \texttt{Rozsah}(K^n, S \odot T)\}$
      (podľa definície $\texttt{Max}$, a to i v prípade $n = 0$),

      $= \max\{\texttt{Max}\{\max\{\texttt{Rozsah}(K^i, S), \texttt{Rozsah}(K^i, T)\} : i \in \{0, \dots, n-1\}\}, \texttt{Rozsah}(K^n, S)\}$
      (podľa vety **20**),

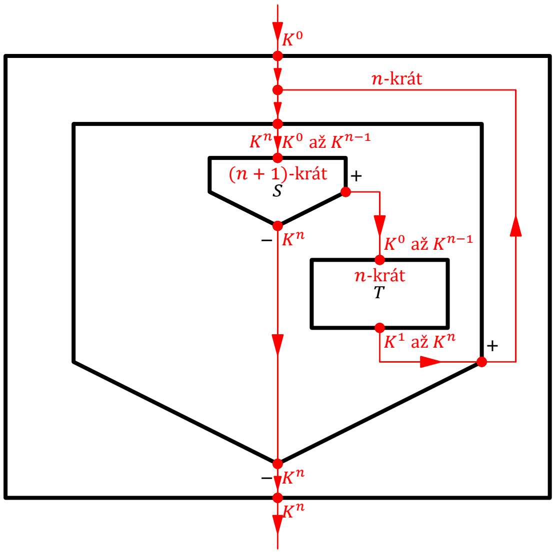
      $= \max\{\max\{\texttt{Rozsah}(K^i, S) : i \in \{0, \dots, n\}\}, \texttt{Max}\{\texttt{Rozsah}(K^i, T) : i \in \{0, \dots, n-1\}\}\}$
      (podľa definície $\texttt{Max}$, a to i v prípade $n = 0$).
  - Nech $K^n \overset{S}{\underset{+}{\dashrightarrow}} K^n$, ale výpočet na T z K^n je nekonečný.

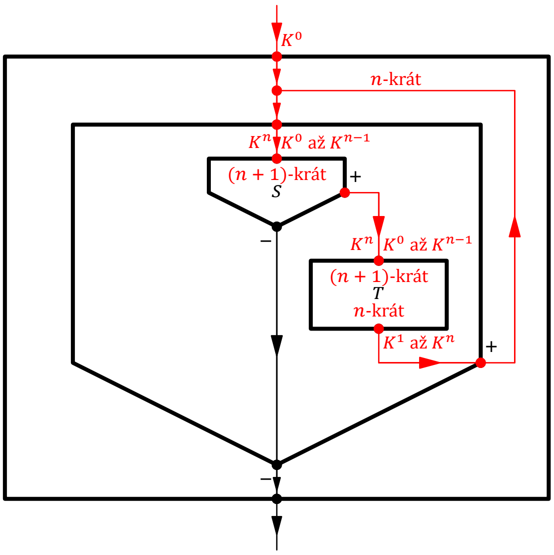
    Potom podľa vety **20** je výpočet na $S \odot T$ z K^n nekonečný. Podľa predpokladov a vety **20** pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ platí $K^i \overset{S \odot T}{\underset{+}{\dashrightarrow}} K^{i+1}$, takže podľa vety **25** je výpočet na R z K^0 nekonečný.
- Podľa predpokladov a vety **20** pre každé i z $\mathbb{N}$ platí $K^i \overset{S \odot T}{\underset{+}{\dashrightarrow}} K^{i+1}$. Podľa vety **25** je však potom výpočet na R z K^0 nekonečný.

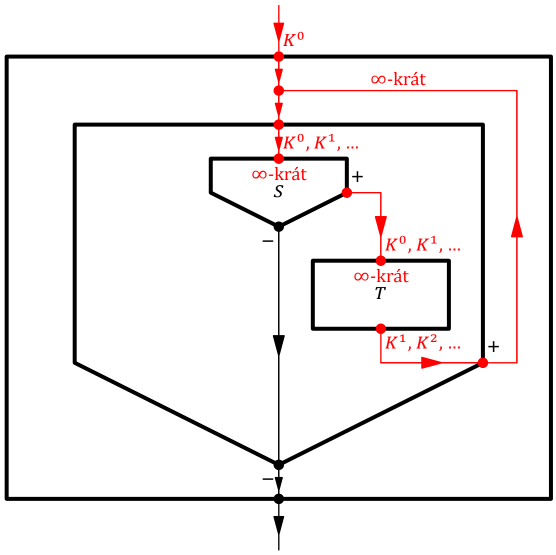
P Výpočty z predchádzajúcej vety môžeme znázorniť nasledujúcimi obrázkami.

Prvý popisuje situáciu, keď cyklus prebehne úspešne n-krát, ale nasledujúci test už dopadne negatívne, takže vyskočením z cyklu sa výpočet úspešne uzavrie.

Vo zvyšných dvoch situáciách sa však neskončí: Kým v druhej uviazne pri nekonečnom vykonávaní niektorej iterácie, v tretej je dôvodom nekonečné množstvo iterácií.


K^0
n-krát
K^n
K^0 až K^{n-1}
$(n + 1)$-krát
S
+
−
K^n
K^0 až K^{n-1}
n-krát
T
K^1 až K^n
+
−
K^n
K^n


K^0
n-krát
K^n
K^0 až K^{n-1}
$(n + 1)$-krát
S
+
−
K^n
K^0 až K^{n-1}
$(n + 1)$-krát
T
n-krát
K^1 až K^n
+
−


K^0
∞-krát
$K^0, K^1, \ldots$
∞-krát
S
+
−
$K^0, K^1, \ldots$
∞-krát
T
$K^1, K^2, \ldots$
+
−

1.6 Úpravy konfigurácie

Uvedomme si, že kým my vnímame priebeh výpočtu globálne, lebo máme prehľad vlastne o celej páske, Turingov stroj dokáže čítať len jedno políčko, pričom nepozná ani len jeho polohu. To však znamená, že ak ho „oklameme“ tým, že smerom doľava „predĺžime“ jeho pásku, nezaseknutý výpočet bude prebiehať v podstate rovnako, pretože hlava sa na políčka na našom predĺžení pásky vôbec nedostane. Všimnime si, že výpočet z takto upravenej konfigurácie sa od výpočtu z pôvodnej príliš nelíši – je iba o toto predĺženie posunutý.

Ešte raz zdôraznime, že toto pozorovanie platí iba pre nezaseknuté výpočty. V opačnom prípade by totiž výpočet z upravenej konfigurácie (na rozdiel od pôvodnej) nekontrolovateľne pokračoval v oblasti predsunutého slova.

I Nech $T = \{s_0 00Rs_1, s_1 11Rs_2, s_1 00Ls_2, s_2 11Rs_1\}$, $\alpha = 110$ a K je konfigurácia

s_0	$\boxed{0}$	1	1	1	1	1	0	0	⋯

Vľavo je pôvodný výpočet na T z K, vpravo výpočet na T z upravenej konfigurácie KPP(K, α):

s_0	$\boxed{0}$	1	1	1	1	1	0	0	⋯
s_1	0	$\boxed{1}$	1	1	1	1	0	0	⋯
s_2	0	1	$\boxed{1}$	1	1	1	0	0	⋯
s_1	0	1	1	$\boxed{1}$	1	1	0	0	⋯
s_2	0	1	1	1	$\boxed{1}$	1	0	0	⋯
s_1	0	1	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	⋯
s_2	0	1	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	⋯

s_0	1	1	0	$\boxed{0}$	1	1	1	1	1	0	0	⋯
s_1	1	1	0	0	$\boxed{1}$	1	1	1	1	0	0	⋯
s_2	1	1	0	0	1	$\boxed{1}$	1	1	1	0	0	⋯
s_1	1	1	0	0	1	1	$\boxed{1}$	1	1	0	0	⋯
s_2	1	1	0	0	1	1	1	$\boxed{1}$	1	0	0	⋯
s_1	1	1	0	0	1	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	⋯
s_2	1	1	0	0	1	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	⋯

Tu si teda jednotlivé kroky oboch výpočtov úplne zodpovedajú a výpočty majú rovnakú dĺžku.

I Vezmime ten istý stroj T i slovo α, ale vstupná konfigurácia K nech je

s_0	$\boxed{0}$	1	1	1	1	0	0	⋯

Tentoraz výpočty na T z K a z KPP(K, α) vyzerajú takto:

s_0	$\boxed{0}$	1	1	1	1	0	0	⋯
s_1	0	$\boxed{1}$	1	1	1	0	0	⋯
s_2	0	1	$\boxed{1}$	1	1	0	0	⋯
s_1	0	1	1	$\boxed{1}$	1	0	0	⋯
s_2	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	⋯
s_1	0	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	⋯
s_2	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	⋯
s_1	0	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	⋯
s_2	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	⋯
	⋮							

s_0	1	1	0	$\boxed{0}$	1	1	1	1	0	0	⋯
s_1	1	1	0	0	$\boxed{1}$	1	1	1	0	0	⋯
s_2	1	1	0	0	1	$\boxed{1}$	1	1	0	0	⋯
s_1	1	1	0	0	1	1	$\boxed{1}$	1	0	0	⋯
s_2	1	1	0	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	⋯
s_1	1	1	0	0	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	⋯
s_2	1	1	0	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	⋯
s_1	1	1	0	0	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	⋯
s_2	1	1	0	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	⋯
	⋮										

Aj tu si kroky oboch výpočtov navzájom zodpovedajú, ale tie sú tentoraz oba nekonečné.

I Nech $T = \{\texttt{s}_0\texttt{00L}\texttt{s}_1, \texttt{s}_1\texttt{01N}\texttt{s}_1, \texttt{s}_1\texttt{11N}\texttt{s}_1\}$, $\alpha = \texttt{110}$ a K je konfigurácia

$\texttt{s}_0$	$\boxed{\texttt{0}}$	1	1	1	1	0	0	⋯

Výpočty na T z K a z $\texttt{KPP}(K, \alpha)$ sú takéto:

$\texttt{s}_0$	$\boxed{\texttt{0}}$	1	1	1	1	0	0	⋯

$\texttt{s}_0$	1	1	0	$\boxed{\texttt{0}}$	1	1	1	1	0	0	⋯
$\texttt{s}_1$	1	1	$\boxed{\texttt{0}}$	0	1	1	1	1	0	0	⋯
$\texttt{s}_1$	1	1	$\boxed{\texttt{1}}$	0	1	1	1	1	0	0	⋯
$\texttt{s}_1$	1	1	$\boxed{\texttt{1}}$	0	1	1	1	1	0	0	⋯
$\texttt{s}_1$	1	1	$\boxed{\texttt{1}}$	0	1	1	1	1	0	0	⋯

⋮

Druhý výpočet na rozdiel od prvého pokračuje (dokonca je nekonečný), zasahuje však do časti pásky, kde je uložené slovo α (a navyše ho zmení). Táto nekorešpondencia je spôsobená práve tým, že pôvodný výpočet je zaseknutý.

Tieto pozorovania zachytíme aj formálne:

V $\boxed{\mathbf{1}}$

Nech I je inštrukcia, α slovo a K konfigurácia. Potom I korešponduje s K práve vtedy, keď korešponduje s $\texttt{KPP}(K, \alpha)$.

Overíme vzájomnú ekvivalenciu oboch dvojíc podmienok definícií korešpondencie I s K a korešpondencie I s $\texttt{KPP}(K, \alpha)$:

- Podľa definície KPP platí $\texttt{Stav}(\texttt{KPP}(K, \alpha)) = \texttt{Stav}(K)$, a teda podmienka $\texttt{StarýStav}(I) = \texttt{Stav}(\texttt{KPP}(K, \alpha))$ je ekvivalentná s podmienkou $\texttt{StarýStav}(I) = \texttt{Stav}(K)$.
- Platí:

  $\texttt{ČítanéPísmeno}(K)$
  $= (\texttt{Páska}(K))(\texttt{Hlava}(K))$
  (podľa definície ČítanéPísmeno),
  $= (\alpha\texttt{Páska}(K))(\texttt{Dĺžka}(\alpha) + \texttt{Hlava}(K))$
  (podľa definície $\alpha\texttt{Páska}(K)$),
  $= (\texttt{Páska}(\texttt{KPP}(K, \alpha)))(\texttt{Hlava}(\texttt{KPP}(K, \alpha)))$
  (podľa definície KPP),
  $= \texttt{ČítanéPísmeno}(\texttt{KPP}(K, \alpha))$
  (podľa definície ČítanéPísmeno).

  Podmienky $\texttt{StaréPísmeno}(I) = \texttt{ČítanéPísmeno}(\texttt{KPP}(K, \alpha))$ a $\texttt{StaréPísmeno}(I) = \texttt{ČítanéPísmeno}(K)$ sú teda ekvivalentné.

V $\boxed{\mathbf{2}}$

Nech I je inštrukcia, α slovo a K konfigurácia. Potom I je aplikovateľná na K práve vtedy, keď je aplikovateľná na $\texttt{KPP}(K, \alpha)$ a zároveň neplatí naraz $\texttt{Hlava}(K) = 0$ aj $\texttt{Posun}(I) = \texttt{L}$.

→ Dokážeme obe podmienky definície aplikovateľnosti I na $\texttt{KPP}(K, \alpha)$:

- Z korešpondencie I s K podľa vety **1** vyplýva korešpondencia I s $\texttt{KPP}(K, \alpha)$.

- Nech $\texttt{Hlava}(\texttt{KPP}(K, \alpha)) = 0$, t. j. podľa definície KPP platí $\texttt{Dĺžka}(\alpha) + \texttt{Hlava}(K) = 0$. Z toho $\texttt{Hlava}(K) = 0$, takže podľa predpokladu a definície aplikovateľnosti máme $\texttt{Posun}(I) \neq \texttt{L}$.

$\leftarrow$ Dokážeme obe podmienky definície aplikovateľnosti I na K:

- Z korešpondencie I s $\texttt{KPP}(K, \alpha)$ podľa vety **1** vyplýva korešpondencia I s K.
- To, že neplatí naraz $\texttt{Hlava}(K) = 0$ aj $\texttt{Posun}(I) = \texttt{L}$, je priamo predpoklad.

V $\boxed{3}$

Nech T je Turingov stroj, α je slovo a K je konfigurácia. Potom z existencie $\texttt{Krok}(K, T)$ vyplýva existencia $\texttt{Krok}(\texttt{KPP}(K, \alpha), T)$ a

$$\texttt{Krok}(\texttt{KPP}(K, \alpha), T) = \texttt{KPP}(\texttt{Krok}(K, T), \alpha).$$

Nech $M = \texttt{Krok}(K, T)$. Podľa definície Krok existuje inštrukcia I z T, že $K \xrightarrow{I} M$. Nech $L = \texttt{KPP}(K, \alpha)$ a $N = \texttt{KPP}(M, \alpha)$. Ukážeme, že potom platia aj podmienky definície $L \xrightarrow{I} N$, z čoho už podľa definície Krok vyplynie $\texttt{Krok}(L, T) = N$, t. j. $\texttt{Krok}(\texttt{KPP}(K, \alpha), T) = \texttt{KPP}(M, \alpha) = \texttt{KPP}(\texttt{Krok}(K, T), \alpha)$:

- Keďže I je aplikovateľná na K, podľa vety **2** je aplikovateľná aj na L.
- $\texttt{Stav}(N)$
  $= \texttt{Stav}(\texttt{KPP}(M, \alpha))$,
  $= \texttt{Stav}(M)$
  (podľa definície KPP),
  $= \texttt{NovýStav}(I)$
  (podľa definície $K \xrightarrow{I} M$).
- $\texttt{Hlava}(N)$
  $= \texttt{Hlava}(\texttt{KPP}(M, \alpha))$,
  $= \texttt{Dĺžka}(\alpha) + \texttt{Hlava}(M)$
  (podľa definície KPP),
  $= \texttt{Dĺžka}(\alpha) + (\texttt{Hlava}(K) + \texttt{Posun}(I) - 1)$
  (podľa definície $K \xrightarrow{I} M$),
  $= (\texttt{Dĺžka}(\alpha) + \texttt{Hlava}(K)) + \texttt{Posun}(I) - 1$
  (lebo $\texttt{Hlava}(K) + \texttt{Posun}(I) \geq 1$, keďže podľa definície aplikovateľnosti neplatí naraz $\texttt{Hlava}(K) = 0$ a $\texttt{Posun}(I) = \texttt{L} = 0$),
  $= \texttt{Hlava}(\texttt{KPP}(K, \alpha)) + \texttt{Posun}(I) - 1$
  (podľa definície KPP),
  $= \texttt{Hlava}(L) + \texttt{Posun}(I) - 1$.
- Rozoberme tri prípady:
  - Nech $i = \texttt{Hlava}(L)$.
    Potom platí:
    $(\texttt{Páska}(N))(i)$
    $= (\texttt{Páska}(N))(\texttt{Hlava}(L))$,
    $= (\texttt{Páska}(\texttt{KPP}(M, \alpha)))(\texttt{Hlava}(\texttt{KPP}(K, \alpha)))$,
    $= (\texttt{Páska}(\texttt{KPP}(M, \alpha)))(\texttt{Dĺžka}(\alpha) + \texttt{Hlava}(K))$
    (podľa definície KPP),
    $= (\alpha\texttt{Páska}(M))(\texttt{Dĺžka}(\alpha) + \texttt{Hlava}(K))$
    (podľa definície KPP),
    $= (\texttt{Páska}(M))(\texttt{Hlava}(K))$
    (podľa definície $\alpha\texttt{Páska}(M)$),
    $= \texttt{NovéPísmeno}(I)$
    (podľa definície $K \xrightarrow{I} M$).

- Nech $i \neq \mathtt{Hlava}(L)$ a $i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha)$.
  Potom platí:
  $(\mathtt{Páska}(N))(i)$
  $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPP}(M, \alpha)))(i)$,
  $= (\alpha\mathtt{Páska}(M))(i)$
  (podľa definície KPP),
  $= \alpha(i)$
  (podľa definície $\alpha\mathtt{Páska}(M)$, lebo $i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha)$),
  $= (\alpha\mathtt{Páska}(K))(i)$
  (podľa definície $\alpha\mathtt{Páska}(K)$, lebo $i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha)$),
  $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPP}(K, \alpha)))(i)$
  (podľa definície KPP),
  $= (\mathtt{Páska}(L))(i)$.
- Nech $i \neq \mathtt{Hlava}(L)$ a $i \geq \mathtt{Dĺžka}(\alpha)$.
  Potom platí:
  $(\mathtt{Páska}(N))(i)$
  $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPP}(M, \alpha)))(i)$,
  $= (\alpha\mathtt{Páska}(M))(i)$
  (podľa definície KPP),
  $= (\mathtt{Páska}(M))(i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha))$
  (podľa definície $\alpha\mathtt{Páska}(M)$),
  $= (\mathtt{Páska}(K))(i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha))$
  (podľa definície $K \xrightarrow{I} M$, lebo $i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha) \neq \mathtt{Hlava}(K)$, keďže podľa definície KPP platí $i \neq \mathtt{Hlava}(L)$ $= \mathtt{Hlava}(\mathtt{KPP}(K, \alpha)) = \mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Hlava}(K)$),
  $= (\alpha\mathtt{Páska}(K))(i)$
  (podľa definície $\alpha\mathtt{Páska}(K)$),
  $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPP}(K, \alpha)))(i)$
  (podľa definície KPP),
  $= (\mathtt{Páska}(L))(i)$.

V $\boxed{4}$

Nech T je Turingov stroj a K je konfigurácia taká, že existuje nezaseknutý konečný výpočet na T z K. Nech α je slovo. Potom platí:
- $\mathtt{Koniec}(\mathtt{KPP}(K, \alpha), T) = \mathtt{KPP}(\mathtt{Koniec}(K, T), \alpha)$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KPP}(K, \alpha), T) = \mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Rozsah}(K, T)$.

Nech $((K_0, \dots, K_n))$ je nezaseknutý konečný výpočet na T z K.

1 $(\mathtt{KPP}(K_0, \alpha), \dots, \mathtt{KPP}(K_n, \alpha))$ je konečný výpočet na T z $\mathtt{KPP}(K, \alpha)$.

Overíme podmienky definície konečného výpočtu:

- Keďže podľa definície konečného výpočtu platí $K_0 = K$, platí aj $\mathtt{KPP}(K_0, \alpha) = \mathtt{KPP}(K, \alpha)$.
- Nech $i < n$. Keďže podľa definície konečného výpočtu $\mathtt{Krok}(K_i, T) = K_{i+1}$, platí aj $\mathtt{KPP}(\mathtt{Krok}(K_i, T), \alpha) = \mathtt{KPP}(K_{i+1}, \alpha)$. Podľa vety **3** potom $\mathtt{Krok}(\mathtt{KPP}(K_i, \alpha), T) = \mathtt{KPP}(\mathtt{Krok}(K_i, T), \alpha) = \mathtt{KPP}(K_{i+1}, \alpha)$.
- Nech I je inštrukcia z T aplikovateľná na $\mathtt{KPP}(K_n, \alpha)$. Podľa definície aplikovateľnosti potom I korešponduje s $\mathtt{KPP}(K_n, \alpha)$, a teda podľa vety **1** aj s K_n čiže (podľa definície Koniec) s $\mathtt{Koniec}(K, T)$. To však znamená, že konečný výpočet $(K_0, \dots, K_n)$, je podľa definície zaseknutý čo je spor s predpokladom.

Potom platí:

- $\mathtt{Koniec}(\mathtt{KPP}(K, \alpha), T)$
  $= \mathtt{KPP}(K_n, \alpha)$
  (podľa definície Koniec a sublemy **1**),
  $= \mathtt{KPP}(\mathtt{Koniec}(K, T), \alpha)$
  (podľa definície Koniec).
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KPP}(K, \alpha), T)$
  $= \max(\{\mathtt{Hlava}(\mathtt{KPP}(K_i, \alpha)) : i \in \{0, \dots, n\}\})$
  (podľa definície Rozsah a sublemy **1**),
  $= \max(\{\mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Hlava}(K_i) : i \in \{0, \dots, n\}\})$
  (podľa definície KPP),
  $= \mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \max(\{\mathtt{Hlava}(K_i) : i \in \{0, \dots, n\}\})$,
  $= \mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Rozsah}(K, T)$
  (podľa definície Rozsah).

V **5**

Nech T je Turingov stroj, α slovo a K je konfigurácia. Nech výpočet na T z K je nekonečný. Potom výpočet na T z $\mathtt{KPP}(K, \alpha)$ je nekonečný.

Nech nekonečný výpočet na T z K je $(K_i : i \in \mathbb{N})$.

1 $(\mathtt{KPP}(K_i, \alpha) : i \in \mathbb{N})$ je nekonečný výpočet na T z $\mathtt{KPP}(K, \alpha)$.

Overíme podmienky definície nekonečného výpočtu:

- Keďže podľa definície nekonečného výpočtu platí $K_0 = K$, platí aj $\mathtt{KPP}(K_0, \alpha) = \mathtt{KPP}(K, \alpha)$.
- Nech $i \in \mathbb{N}$. Keďže podľa definície nekonečného výpočtu $\mathtt{Krok}(K_i, T) = K_{i+1}$, platí $\mathtt{KPP}(\mathtt{Krok}(K_i, T), \alpha) = \mathtt{KPP}(K_{i+1}, \alpha)$. Podľa vety **3** potom $\mathtt{Krok}(\mathtt{KPP}(K_i, \alpha), T) = \mathtt{KPP}(\mathtt{Krok}(K_i, T), \alpha) = \mathtt{KPP}(K_{i+1}, \alpha)$.

Zo sublemy **1** už priamo vyplýva dokazované tvrdenie.

Ešte si všimnime komutativitu predsunutia slova a posunutia stavu:

V **6**

Nech K je konfigurácia, $k \in \mathbb{N}$ a α je slovo. Potom platí

$$\mathtt{KPP}(\mathtt{KPS}(K, k), \alpha) = \mathtt{KPS}(\mathtt{KPP}(K, \alpha), k).$$

Podľa viet **2.11** a opäť **2.11** stačí overiť rovnosť zodpovedajúcich zložiek oboch konfigurácií:

- $\mathtt{Stav}(\mathtt{KPP}(\mathtt{KPS}(K, k), \alpha))$
  $= \mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(K, k))$
  (podľa definície KPP),
  $= k + \mathtt{Stav}(K)$
  (podľa definície KPS),
  $= k + \mathtt{Stav}(\mathtt{KPP}(K, \alpha))$
  (podľa definície KPP),
  $= \mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(\mathtt{KPP}(K, \alpha), k))$
  (podľa definície KPS).
- $\mathtt{Hlava}(\mathtt{KPP}(\mathtt{KPS}(K, k), \alpha))$
  $= \mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Hlava}(\mathtt{KPS}(K, k))$
  (podľa definície KPP),
  $= \mathtt{Dĺžka}(\alpha) + \mathtt{Hlava}(K)$
  (podľa definície KPS),

$= \mathtt{Hlava}(\mathtt{KPP}(K, \alpha))$
(podľa definície KPP),
$= \mathtt{Hlava}(\mathtt{KPS}(\mathtt{KPP}(K, \alpha), k))$
(podľa definície KPS).

- Rozoberieme oba prípady:
  - Nech $i < \mathtt{Dĺžka}(\alpha)$.
    Potom platí:
    $(\mathtt{Páska}(\mathtt{KPP}(\mathtt{KPS}(K, k), \alpha)))(i)$
    $= (\alpha\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(K, k)))(i)$
    (podľa definície KPP),
    $= \alpha(i)$
    (podľa definície $\alpha\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(K, k))$),
    $= (\alpha\mathtt{Páska}(K))(i)$
    (podľa definície $\alpha\mathtt{Páska}(K)$),
    $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPP}(K, \alpha)))(i)$
    (podľa definície KPP),
    $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(\mathtt{KPP}(K, \alpha), k)))(i)$
    (podľa definície KPS).
  - Nech $i \geq \mathtt{Dĺžka}(\alpha)$.
    Potom platí:
    $(\mathtt{Páska}(\mathtt{KPP}(\mathtt{KPS}(K, k), \alpha)))(i)$
    $= (\alpha\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(K, k)))(i)$
    (podľa definície KPP),
    $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(K, k)))(i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha))$
    (podľa definície $\alpha\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(K, k))$),
    $= (\mathtt{Páska}(K))(i - \mathtt{Dĺžka}(\alpha))$
    (podľa definície KPS),
    $= (\alpha\mathtt{Páska}(K))(i)$
    (podľa definície $\alpha\mathtt{Páska}(K)$),
    $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPP}(K, \alpha)))(i)$
    (podľa definície KPP),
    $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(\mathtt{KPP}(K, \alpha), k)))(i)$
    (podľa definície KPS).

V $\boxed{7}$

Nech T je Turingov stroj α je slovo a K a L sú konfigurácie s nulovým stavom. Potom platí:

- Ak T je úplný a $K \overset{T}{\dashrightarrow} L$, tak $\mathtt{KPP}(K, \alpha) \overset{T}{\dashrightarrow} \mathtt{KPP}(L, \alpha)$.
- Ak T je polоúplný a $K \overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$, tak $\mathtt{KPP}(K, \alpha) \overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}} \mathtt{KPP}(L, \alpha)$.
- Ak T je polоúplný a $K \overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}} L$, tak $\mathtt{KPP}(K, \alpha) \overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}} \mathtt{KPP}(L, \alpha)$.

Nech nastáva jedna z možností:

- T je úplný, $\rightsquigarrow$ je $\overset{T}{\dashrightarrow}$ a $q = 0$.
- T je polоúplný, $\rightsquigarrow$ je $\overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$ a $q = 1$.
- T je polоúplný, $\rightsquigarrow$ je $\overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}}$ a $q = 0$.

Potom postupne platí:
$\mathtt{Koniec}(\mathtt{KPP}(K, \alpha), T) = \mathtt{KPP}(\mathtt{Koniec}(K, T), \alpha)$

(podľa viet **4** a **5.3**, resp. **5.5**),

$\mathtt{Koniec}(\mathtt{KPP}(K,\alpha),T) = \mathtt{KPS}(\mathtt{KPS}(L,\mathtt{MS}(T)-q),\alpha)$

(podľa definície $\overset{T}{\dashrightarrow}$, resp. definície $\overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$, resp. definície $\overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}}$),

$\mathtt{Koniec}(\mathtt{KPP}(K,\alpha),T) = \mathtt{KPS}(\mathtt{KPP}(L,\alpha),\mathtt{MS}(T)-q)$

(podľa vety **6**),

$\mathtt{KPP}(K,\alpha) \rightsquigarrow \mathtt{KPP}(L,\alpha)$

(podľa definície $\overset{T}{\dashrightarrow}$, resp. definície $\overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$, resp. definície $\overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}}$).

Všimli sme si už, že predsunuté slovo nemá na výpočet prakticky žiaden vplyv (ak si odmyslíme posúvanie indexov políčok), dôležitá je len tá časť pásky, kde sa počas výpočtu hlava aspoň raz vyskytne. Ľahko preto uveriť, že keď môžeme pridávať (ale vlastne aj vymieňať) nedotknutý začiatok pásky, môžeme tak urobiť i s jej (hlavou nedotknutým) „koncom“ – od istého dostatočne vzdialeného miesta môžeme jednoducho zvyšok pásky bez vplyvu na pohyb hlavy vymeniť.

D Definujme zobrazenie $\mathtt{KonfiguráciaSVymenenýmChvostom}$ (skrátene $\mathtt{KVCh}$) z $\mathtt{Konfigurácie} \times \mathtt{Pásky} \times \mathbb{N}$ do množiny $\mathtt{Konfigurácie}$ takto:

Nech K je konfigurácia, p páska a $m \in \mathbb{N}$. Potom $\mathtt{KonfiguráciaSVymenenýmChvostom}(K,p,m)$ je konfigurácia L, pre ktorú platí:

- $\mathtt{Stav}(L) = \mathtt{Stav}(K)$.
- $\mathtt{Hlava}(L) = \mathtt{Hlava}(K)$.
- $$(\mathtt{Páska}(L))(i) = \begin{cases}(\mathtt{Páska}(K))(i), & \text{ak } i < m,\\ p(i) & \text{inak.}\end{cases}$$

I Nech K je konfigurácia z prvého riadku, a p je páska z druhého riadku. Potom konfigurácia $\mathtt{KVCh}(K,p,5)$ je v treťom riadku:

K:	s_7	0	1	1	**1**	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	…
p:		1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	…
$\mathtt{KVCh}(K,p,5)$:	s_7	0	1	1	**1**	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	…

I Nech T je Turingov stroj $\{s_7 10 R s_6, s_6 01 L s_9, s_9 00 L s_3\}$ a K je konfigurácia a p páska z predošlého príkladu. Potom výpočet na T z K je takýto:

s_7	0	1	1	**1**	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	…
s_6	0	1	1	0	**0**	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	…
s_9	0	1	1	**0**	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	…
s_3	0	1	**1**	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	…

kým výpočet na T z $\mathtt{KVCh}(K,p,5)$ vyzerá takto:

s_7	0	1	1	**1**	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	…
s_6	0	1	1	0	**0**	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	…
s_9	0	1	1	**0**	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	…
s_3	0	1	**1**	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	…

Ako vidieť, tieto výpočty si navzájom zodpovedajú, vymenený chvost pásky za spoločnou hodnotou ich rozsahov na nich nemá žiaden vplyv – keď poznáme jeden, poznáme automaticky aj druhý.

Avšak pri výpočte na T z KVCh$(K, p, 4)$ to neplatí – vzájomnú korešpondenciu pokazilo prekročenie hranice výmeny chvosta. Tu je výpočet pred výmenou:

s_7	0	1	1	**1**	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯
s_6	0	1	1	0	**0**	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯
s_9	0	1	1	**0**	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯
s_3	0	1	**1**	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	⋯

A tu po výmene:

s_7	0	1	1	**1**	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	⋯
s_6	0	1	1	0	**1**	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	⋯

Aj tu môžeme pojmy formalizovať:

V 8

Nech K je konfigurácia, $m \in \mathbb{N}$ a p^1 a p^2 sú pásky také, že ak $i \geq m$, tak platí $p^1(i) = p^2(i)$. Potom KVCh$(K, p^1, m) =$ KVCh(K, p^2, m).

Podľa viet **2.11** a opäť **2.11** stačí overiť rovnosť príslušných zložiek oboch konfigurácií:

- Stav(KVCh(K, p^1, m))
  $=$ Stav(K)
  (podľa definície KVCh),
  $=$ Stav(KVCh(K, p^2, m))
  (podľa definície KVCh).
- Hlava(KVCh(K, p^1, m))
  $=$ Hlava(K)
  (podľa definície KVCh),
  $=$ Hlava(KVCh(K, p^2, m))
  (podľa definície KVCh).
- Rozlíšme prípady:
  - Nech $i < m$.
    Potom platí:
    (Páska(KVCh(K, p^1, m)))(i)
    $=$ (Páska(K))(i)
    (podľa definície KVCh),
    $=$ (Páska(KVCh(K, p^2, m)))(i)
    (podľa definície KVCh).
  - Nech $i \geq m$.
    Potom platí:
    (Páska(KVCh(K, p^1, m)))(i)
    $= p^1(i)$
    (podľa definície KVCh),

$= p^2(i)$
(podľa prepokladu),
$= (\texttt{Páska}(\texttt{KVCh}(K, p^2, m)))(i)$
(podľa definície KVCh).

V $\boxed{9}$

> Nech I je inštrukcia, K konfigurácia, p páska a $m > \texttt{Hlava}(K)$. Potom I korešponduje s K práve vtedy, keď korešponduje s $\texttt{KVCh}(K, p, m)$.

Nech $L = \texttt{KVCh}(K, p, m)$. Overíme ekvivalentnosť jednotlivých podmienok definície korešpondencie I s K a definície korešpondencie I s L.

- Podmienky $\texttt{StarýStav}(I) = \texttt{Stav}(L)$ a $\texttt{StarýStav}(I) = \texttt{Stav}(K)$ sú totožné, lebo podľa definície KVCh platí $\texttt{Stav}(L) = \texttt{Stav}(K)$.
- Podmienky $\texttt{StaréPísmeno}(I) = \texttt{ČítanéPísmeno}(L)$ a $\texttt{StaréPísmeno}(I) = \texttt{ČítanéPísmeno}(K)$ sú totožné, lebo platí:
  $\texttt{ČítanéPísmeno}(L)$
  $= (\texttt{Páska}(L))(\texttt{Hlava}(L))$
  (podľa definície ČítanéPísmeno),
  $= (\texttt{Páska}(L))(\texttt{Hlava}(K))$
  (podľa definície KVCh),
  $= (\texttt{Páska}(K))(\texttt{Hlava}(K))$
  (podľa definície KVCh, lebo $\texttt{Hlava}(K) < m$),
  $= \texttt{ČítanéPísmeno}(K)$
  (podľa definície ČítanéPísmeno).

V $\boxed{10}$

> Nech I je inštrukcia, K konfigurácia, p páska a $m > \texttt{Hlava}(K)$. Potom I je aplikovateľná na K práve vtedy, keď je aplikovateľná na $\texttt{KVCh}(K, p, m)$.

Overíme ekvivalentnosť jednotlivých podmienok definície aplikovateľnosti I na K a definície aplikovateľnosti I na $\texttt{KVCh}(K, p, m)$:

- Podľa vety **9** I korešponduje s K práve vtedy, keď korešponduje s $\texttt{KVCh}(K, p, m)$.
- Podmienka, že naraz neplatí $\texttt{Hlava}(\texttt{KVCh}(K, p, m)) = 0$ aj $\texttt{Posun}(I) = \texttt{L}$, je totožná s podmienkou, že naraz neplatí $\texttt{Hlava}(K) = 0$ aj $\texttt{Posun}(I) = \texttt{L}$, lebo podľa definície KVCh platí $\texttt{Hlava}(\texttt{KVCh}(K, p, m)) = \texttt{Hlava}(K)$.

V $\boxed{11}$

> Nech T je stroj, K konfigurácia, p páska a $m > \texttt{Hlava}(K)$. Potom ak existuje $\texttt{Krok}(K, T)$, tak existuje aj $\texttt{Krok}(\texttt{KVCh}(K, p, m), T)$ a
> $$\texttt{Krok}(\texttt{KVCh}(K, p, m), T) = \texttt{KVCh}(\texttt{Krok}(K, T), p, m).$$

Nech $M = \texttt{Krok}(K, T)$. Podľa definície Krok existuje inštrukcia I z T, že $K \xrightarrow{I} M$. Nech $L = \texttt{KVCh}(K, p, m)$ a $N = \texttt{KVCh}(M, p, m)$. Ukážeme, že potom platia aj podmienky definície $L \xrightarrow{I} N$, z čoho už podľa definície Krok vyplynie, že platí $\texttt{Krok}(L, T) = N$, čiže $\texttt{Krok}(\texttt{KVCh}(K, p, m), T) = \texttt{KVCh}(M, p, m) = \texttt{KVCh}(\texttt{Krok}(K, T), p, m)$:

- Keďže I je aplikovateľná na K, podľa vety **10** je aplikovateľná aj na L.
- $\texttt{Stav}(N)$
  $= \texttt{Stav}(\texttt{KVCh}(M, p, m))$,
  $= \texttt{Stav}(M)$
  (podľa definície KVCh),
  $= \texttt{NovýStav}(I)$

(podľa definície $K \xrightarrow{I} M$).

- $\texttt{Hlava}(N)$
  $= \texttt{Hlava}(\texttt{KVCh}(M, p, m))$,
  $= \texttt{Hlava}(M)$
  (podľa definície KVCh),
  $= \texttt{Hlava}(K) + \texttt{Posun}(I) - 1$
  (podľa definície $K \xrightarrow{I} M$),
  $= \texttt{Hlava}(\texttt{KVCh}(K, p, m)) + \texttt{Posun}(I) - 1$
  (podľa definície KVCh),
  $= \texttt{Hlava}(L) + \texttt{Posun}(I) - 1$.
- Rozoberme tri prípady:
  - Nech $i = \texttt{Hlava}(L)$.
    Potom platí:
    $(\texttt{Páska}(N))(i)$
    $= (\texttt{Páska}(N))(\texttt{Hlava}(L))$,
    $= (\texttt{Páska}(\texttt{KVCh}(M, p, m)))(\texttt{Hlava}(L))$,
    $= (\texttt{Páska}(M))(\texttt{Hlava}(L))$
    (podľa definície KVCh, keďže podľa definície KVCh platí $\texttt{Hlava}(L) = \texttt{Hlava}(K) < m$),
    $= (\texttt{Páska}(M))(\texttt{Hlava}(\texttt{KVCh}(K, p, m)))$,
    $= (\texttt{Páska}(M))(\texttt{Hlava}(K))$
    (podľa definície KVCh),
    $= \texttt{NovéPísmeno}(I)$
    (podľa definície $K \xrightarrow{I} M$).
  - Nech $i \neq \texttt{Hlava}(L)$ a $i < m$.
    Potom platí:
    $(\texttt{Páska}(N))(i)$
    $= (\texttt{Páska}(\texttt{KVCh}(M, p, m)))(i)$,
    $= (\texttt{Páska}(M))(i)$
    (podľa definície KVCh, keďže $i < m$),
    $= (\texttt{Páska}(K))(i)$
    (podľa definície $K \xrightarrow{I} M$, keďže podľa definície KVCh platí $i \neq \texttt{Hlava}(L) = \texttt{Hlava}(K)$),
    $= (\texttt{Páska}(\texttt{KVCh}(K, p, m)))(i)$
    (podľa definície KVCh, keďže $i < m$).
    $= (\texttt{Páska}(L))(i)$.
  - Nech $i \neq \texttt{Hlava}(L)$ a $i \geq m$.
    Potom platí:
    $(\texttt{Páska}(N))(i)$
    $= (\texttt{Páska}(\texttt{KVCh}(M, p, m)))(i)$,
    $= p(i)$
    (podľa definície KVCh, keďže $i \geq m$),
    $= (\texttt{Páska}(\texttt{KVCh}(K, p, m)))(i)$
    (podľa definície KVCh, keďže $i \geq m$),
    $= (\texttt{Páska}(L))(i)$.

V $\boxed{\textbf{12}}$

Nech T je stroj, K konfigurácia, p páska a $m > \texttt{Rozsah}(K, T)$. Nech existuje $\texttt{Koniec}(K, T)$. Potom platí:

- $\texttt{Koniec}(\texttt{KVCh}(K, p, m), T) = \texttt{KVCh}(\texttt{Koniec}(K, T), p, m)$.
- $\texttt{Rozsah}(\texttt{KVCh}(K, p, m), T) = \texttt{Rozsah}(K, T)$.

Keďže existuje $\texttt{Koniec}(K, T)$, podľa definície Koniec existuje konečný výpočet na T z K. Nech je to $((K_0, \dots, K_n))$.

1 $(\texttt{KVCh}(K_0, p, m), \dots, \texttt{KVCh}(K_n, p, m))$ je konečný výpočet na T z $\texttt{KVCh}(K, p, m)$.

Overíme všetky podmienky definície konečného výpočtu:

- Keďže podľa definície konečného výpočtu platí $K_0 = K$, platí aj $\texttt{KVCh}(K_0, p, m) = \texttt{KVCh}(K, p, m)$.
- Nech $i < n$. Keďže podľa definície konečného výpočtu platí $\texttt{Krok}(K_i, T) = K_{i+1}$, platí aj $\texttt{KVCh}(\texttt{Krok}(K_i, T), p, m) = \texttt{KVCh}(K_{i+1}, p, m)$. Podľa vety **11** potom $\texttt{Krok}(\texttt{KVCh}(K_i, p, m), T) = \texttt{KVCh}(\texttt{Krok}(K_i, T), p, m) = \texttt{KVCh}(K_{i+1}, p, m)$.
- Nech I je inštrukcia z T aplikovateľná na $\texttt{KVCh}(K_n, p, m)$. Keďže podľa predpokladu a definície Rozsah platí $m > \texttt{Rozsah}(K, T) \geq \texttt{Hlava}(K_n)$, podľa vety **10** je I aplikovateľná aj na K_n, čo je podľa definície konečného výpočtu spor s tým, že $((K_0, \dots, K_n))$ je konečný výpočet na T z K.

Podľa sublemy **1** potom platí:

- $\texttt{Koniec}(\texttt{KVCh}(K, p, m), T)$
  $= \texttt{KVCh}(K_n, p, m)$
  (podľa definície Koniec a sublemy **1**),
  $= \texttt{KVCh}(\texttt{Koniec}(K, T), p, m)$
  (podľa definície Koniec).
- $\texttt{Rozsah}(\texttt{KVCh}(K, p, m), T)$
  $= \max(\{\texttt{Hlava}(\texttt{KVCh}(K_i, p, m)) : i \in \{0, \dots, n\}\})$
  (podľa definície Rozsah a sublemy **1**),
  $= \max(\{\texttt{Hlava}(K_i) : i \in \{0, \dots, n\}\})$
  (pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ podľa definície KVCh),
  $= \texttt{Rozsah}(K, T)$
  (podľa definície Rozsah).

Podobne ako pri predchádzajúcej modifikácii, aj tu si všimnime jej zameniteľnosť s posúvaním stavov:

V $\boxed{\textbf{13}}$

Nech K je konfigurácia, $k \in \mathbb{N}$, p je páska a $m \in \mathbb{N}$. Potom

$$\texttt{KVCh}(\texttt{KPS}(K, k), p, m) = \texttt{KPS}(\texttt{KVCh}(K, p, m), k).$$

Podľa viet **2.11** a opäť **2.11** stačí overiť rovnosť zodpovedajúcich zložiek oboch konfigurácií:

- $\texttt{Stav}(\texttt{KVCh}(\texttt{KPS}(K, k), p, m))$
  $= \texttt{Stav}(\texttt{KPS}(K, k))$
  (podľa definície KVCh),
  $= k + \texttt{Stav}(K)$
  (podľa definície KPS),
  $= k + \texttt{Stav}(\texttt{KVCh}(K, p, m))$
  (podľa definície KVCh),
  $= \texttt{Stav}(\texttt{KPS}(\texttt{KVCh}(K, p, m), k))$
  (podľa definície KPS).
- $\texttt{Hlava}(\texttt{KVCh}(\texttt{KPS}(K, k), p, m))$
  $= \texttt{Hlava}(\texttt{KPS}(K, k))$

(podľa definície $\mathtt{KVCh}$),
$= \mathtt{Hlava}(K)$
(podľa definície $\mathtt{KPS}$),
$= \mathtt{Hlava}(\mathtt{KVCh}(K, p, m))$
(podľa definície $\mathtt{KVCh}$),
$= \mathtt{Hlava}(\mathtt{KPS}(\mathtt{KVCh}(K, p, m), k))$
(podľa definície $\mathtt{KPS}$).

- Rozoberieme dva prípady:
  - Nech $i < m$.
    Potom platí:
    $(\mathtt{Páska}(\mathtt{KVCh}(\mathtt{KPS}(K, k), p, m)))(i)$
    $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(K, k)))(i)$
    (podľa definície $\mathtt{KVCh}$),
    $= (\mathtt{Páska}(K))(i)$
    (podľa definície $\mathtt{KPS}$),
    $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KVCh}(K, p, m)))(i)$
    (podľa definície $\mathtt{KVCh}$),
    $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(\mathtt{KVCh}(K, p, m), k)))(i)$
    (podľa definície $\mathtt{KPS}$).
  - Nech $i \geq m$.
    Potom platí:
    $(\mathtt{Páska}(\mathtt{KVCh}(\mathtt{KPS}(K, k), p, m)))(i)$
    $= p(i)$
    (podľa definície $\mathtt{KVCh}$),
    $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KVCh}(K, p, m)))(i)$
    (podľa definície $\mathtt{KVCh}$),
    $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(\mathtt{KVCh}(K, p, m), k)))(i)$
    (podľa definície $\mathtt{KPS}$).

V **14**

Nech T je Turingov stroj, K a L sú konfigurácie s nulovým stavom, p páska a $m > \mathtt{Rozsah}(K, T)$. Potom platí:

- Ak T je úplný a $K \overset{T}{\dashrightarrow} L$, tak $\mathtt{KVCh}(K, p, m) \overset{T}{\dashrightarrow} \mathtt{KVCh}(L, p, m)$.
- Ak T je poloúplný a $K \overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}} L$, tak $\mathtt{KVCh}(K, p, m) \overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}} \mathtt{KVCh}(L, p, m)$.
- Ak T je poloúplný a $K \overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}} L$, tak $\mathtt{KVCh}(K, p, m) \overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}} \mathtt{KVCh}(L, p, m)$.

Nech nastáva jedna z možností:

- T je úplný, $\rightsquigarrow$ je $\overset{T}{\dashrightarrow}$ a $q = 0$.
- T je poloúplný, $\rightsquigarrow$ je $\overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$ a $q = 1$.
- T je poloúplný, $\rightsquigarrow$ je $\overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}}$ a $q = 0$.

Potom postupne platí:

$\mathtt{Koniec}(\mathtt{KVCh}(K, p, m), T) = \mathtt{KVCh}(\mathtt{Koniec}(K, T), p, m)$
(podľa vety **12**),
$\mathtt{Koniec}(\mathtt{KVCh}(K, p, m), T) = \mathtt{KVCh}(\mathtt{KPS}(L, \mathtt{MS}(T) - q), p, m)$
(podľa definície $\overset{T}{\dashrightarrow}$, resp. definície $\overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$, resp. definície $\overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}}$),
$\mathtt{Koniec}(\mathtt{KVCh}(K, p, m), T) = \mathtt{KPS}(\mathtt{KVCh}(L, p, m), \mathtt{MS}(T) - q)$
(podľa vety **13**),
$\mathtt{KVCh}(K, p, m) \rightsquigarrow \mathtt{KVCh}(L, p, m)$

(podľa definície $\overset{T}{\dashrightarrow}$, resp. definície $\underset{+}{\overset{T}{\dashrightarrow}}$ resp. definície $\underset{-}{\overset{T}{\dashrightarrow}}$).

Stať ukončíme užitočnými vlastnosťami blokových pások a konfigurácií. Je to istá analógia vety **2.35** v kontexte oboch rozoberaných modifikácií.

V $\boxed{\mathbf{15}}$

Nech $k, l \in \mathbb{N}$, pričom $k \leq l$, a $x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{N}$. Nech $i \in \{1, \ldots, k\}$. Nech $m \leq \texttt{Dĺžka}(\texttt{Bloky}^k(x_1, \ldots, x_k)) + 1$. Potom platí

$$\texttt{KVCh}(\texttt{BK}_i^k(x_1, \ldots, x_k), \texttt{BP}^l(x_1, \ldots, x_l), m) = \texttt{BK}_i^l(x_1, \ldots, x_l).$$

Podľa viet **2.11** a opäť **2.11** stačí overiť rovnosť zodpovedajúcich zložiek oboch konfigurácií:

- $\texttt{Stav}(\texttt{KVCh}(\texttt{BK}_i^k(x_1, \ldots, x_k), \texttt{BP}^l(x_1, \ldots, x_l), m))$
  $= \texttt{Stav}(\texttt{BK}_i^k(x_1, \ldots, x_k))$
  (podľa definície $\texttt{KVCh}$),
  $= 0$
  (podľa vety **2.34**),
  $= \texttt{Stav}(\texttt{BK}_i^l(x_1, \ldots, x_l))$
  (podľa vety **2.34**).
- $\texttt{Hlava}(\texttt{KVCh}(\texttt{BK}_i^k(x_1, \ldots, x_k), \texttt{BP}^l(x_1, \ldots, x_l), m))$
  $= \texttt{Hlava}(\texttt{BK}_i^k(x_1, \ldots, x_k))$
  (podľa definície $\texttt{KVCh}$),
  $= \texttt{Dĺžka}(\texttt{Bloky}^i(x_1, \ldots, x_i))$
  (podľa vety **2.34**),
  $= \texttt{Hlava}(\texttt{BK}_i^l(x_1, \ldots, x_l))$
  (podľa vety **2.34**).
- Rozlíšime prípady:
  - Nech $j < m$ a $j < \texttt{Dĺžka}(\texttt{Bloky}^k(x_1, \ldots, x_k))$.
    Potom platí:
    $(\texttt{Páska}(\texttt{KVCh}(\texttt{BK}_i^k(x_1, \ldots, x_k), \texttt{BP}^l(x_1, \ldots, x_l), m)))(j)$
    $= (\texttt{Páska}(\texttt{BK}_i^k(x_1, \ldots, x_k)))(j)$
    (podľa definície $\texttt{KVCh}$, lebo $j < m$),
    $= (\texttt{BP}^k(x_1, \ldots, x_k))(j)$
    (podľa vety **2.34**),
    $= (\texttt{Bloky}^k(x_1, \ldots, x_k)\mathtt{0}{\to})(j)$
    (podľa definície $\texttt{BP}^k$),
    $= (\texttt{Bloky}^k(x_1, \ldots, x_k)\texttt{BP}^{l-k}(x_{k+1}, \ldots, x_l))(j)$
    (podľa vety **2.27**, keďže $k \leq l$ a $j < \texttt{Dĺžka}(\texttt{Bloky}^k(x_1, \ldots, x_k))$),
    $= (\texttt{BP}^l(x_1, \ldots, x_l))(j)$
    (podľa vety **2.31**),
    $= (\texttt{Páska}(\texttt{BK}_i^l(x_1, \ldots, x_l))(j)$
    (podľa vety **2.34**).
  - Nech $j < m$ a $j = \texttt{Dĺžka}(\texttt{Bloky}^k(x_1, \ldots, x_k))$.
    Potom platí:
    $(\texttt{Páska}(\texttt{KVCh}(\texttt{BK}_i^k(x_1, \ldots, x_k), \texttt{BP}^l(x_1, \ldots, x_l), m)))(j)$
    $= (\texttt{Páska}(\texttt{BK}_i^k(x_1, \ldots, x_k)))(j)$
    (podľa definície $\texttt{KVCh}$, lebo $j < m$),

$= (\mathtt{BP}^k(x_1, \dots, x_k))(j)$
(podľa vety **2.34**),

$= (\mathtt{BP}^k(x_1, \dots, x_k))(\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^k(x_1, \dots, x_k)))$,

$= \mathtt{0}$
(podľa vety **2.32**),

$= (\mathtt{BP}^l(x_1, \dots, x_l))(\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^k(x_1, \dots, x_k)))$
(podľa vety **2.32**),

$= (\mathtt{BP}^l(x_1, \dots, x_l))(j)$,

$= (\mathtt{Páska}(\mathtt{BK}_i^l(x_1, \dots, x_l))(j)$
(podľa vety **2.34**).

- Nech $j \geq m$.
  Potom platí:
  $(\mathtt{Páska}(\mathtt{KVCh}(\mathtt{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k), \mathtt{BP}^l(x_1, \dots, x_l), m)))(j)$
  $= (\mathtt{BP}^l(x_1, \dots, x_l))(j)$
  (podľa definície KVCh, lebo $j \geq m$),

  $= (\mathtt{Páska}(\mathtt{BK}_i^l(x_1, \dots, x_l))(j)$
  (podľa vety **2.34**).

I Ak $K = \mathtt{BK}_1^3(2,1,0)$, $p = \mathtt{BP}^4(2,1,0,3)$ a $m \leq \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^3(2,1,0)) + 1 = 9 + 1 = 10$, tak $\mathtt{KVCh}(K, p, m) = \mathtt{BK}_1^4(2,1,0,3)$:

												‖							
K:	$\mathtt{s}_0$	0	1	1	1	$\boxed{0}$	1	1	0	1	0	‖	0	0	0	0	0	0	⋯
p:		0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	‖	1	1	1	1	0	0	⋯
$\mathtt{KVCh}(K, p, 10)$:	$\mathtt{s}_0$	0	1	1	1	$\boxed{0}$	1	1	0	1	0	‖	1	1	1	1	0	0	⋯

I Ak však pri tých istých K a p platí $m \geq 11$, tak $\mathtt{KVCh}(K, p, m) \neq \mathtt{BK}_1^4(2,1,0,3)$:

													‖						
K:	$\mathtt{s}_0$	0	1	1	1	$\boxed{0}$	1	1	0	1	0	0	‖	0	0	0	0	0	⋯
p:		0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	‖	1	1	1	0	0	⋯
$\mathtt{KVCh}(K, p, 11)$:	$\mathtt{s}_0$	0	1	1	1	$\boxed{0}$	1	1	0	1	0	0	‖	1	1	1	0	0	⋯

V $\boxed{16}$

Nech $k, l \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ a $y_1, \dots, y_l \in \mathbb{N}$. Nech $i \in \{0, \dots, k\}$ a $j \in \{0, \dots, l\}$. Nech $n \in \mathbb{N}$ a a_1, ..., $a_n \in \mathbb{N}$. Nech T je Turingov stroj.

- Ak T je úplný a $\mathtt{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k) \overset{T}{\dashrightarrow} \mathtt{BK}_j^l(y_1, \dots, y_l)$, tak
$$\mathtt{BK}_{n+i}^{n+k}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k) \overset{T}{\dashrightarrow} \mathtt{BK}_{n+j}^{n+l}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l).$$
- Ak T je poloúplný a $\mathtt{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k) \overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}} \mathtt{BK}_j^l(y_1, \dots, y_l)$, tak
$$\mathtt{BK}_{n+i}^{n+k}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k) \overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}} \mathtt{BK}_{n+j}^{n+l}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l).$$
- Ak T je poloúplný a $\mathtt{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k) \overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}} \mathtt{BK}_j^l(y_1, \dots, y_l)$, tak
$$\mathtt{BK}_{n+i}^{n+k}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k) \overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}} \mathtt{BK}_{n+j}^{n+l}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l).$$

Nech nastáva jedna z možností:

- T je úplný a $\rightsquigarrow$ je $\overset{T}{\dashrightarrow}$.
- T je poloúplný a $\rightsquigarrow$ je $\overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$.
- T je poloúplný a $\rightsquigarrow$ je $\overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}}$.

Potom postupne platí:

$\mathtt{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k) \rightsquigarrow \mathtt{BK}_j^l(y_1, \dots, y_l)$
 (podľa predpokladu),

$\mathtt{KPP}(\mathtt{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k), \mathtt{Bloky}^n(a_1, \dots, a_n)) \rightsquigarrow \mathtt{KPP}(\mathtt{BK}_j^l(y_1, \dots, y_l), \mathtt{Bloky}^n(a_1, \dots, a_n))$
 (podľa vety **7**),

$\mathtt{BK}_{n+i}^{n+k}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k) \rightsquigarrow \mathtt{BK}_{n+j}^{n+l}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l)$
 (podľa vety **2.35** a opäť podľa vety **2.35**).

V $\boxed{17}$

Nech $k, l \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ a $y_1, \dots, y_l \in \mathbb{N}$. Nech $i \in \{0, \dots, k\}$ a $j \in \{0, \dots, l\}$. Nech $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ a $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{N}$. Nech $d = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^k(x_1, \dots, x_k)) = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^l(y_1, \dots, y_l))$. Nech T je Turingov stroj taký, že platí $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k), T) \le d$.

- Ak T je úplný a $\mathtt{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k) \overset{T}{\dashrightarrow} \mathtt{BK}_j^l(y_1, \dots, y_l)$, tak
$$\mathtt{BK}_{n+i}^{n+k+m}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m) \overset{T}{\dashrightarrow} \mathtt{BK}_{n+j}^{n+l+m}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m).$$
- Ak T je poloúplný a $\mathtt{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k) \overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}} \mathtt{BK}_j^l(y_1, \dots, y_l)$, tak
$$\mathtt{BK}_{n+i}^{n+k+m}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m) \overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}} \mathtt{BK}_{n+j}^{n+l+m}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m).$$
- Ak T je poloúplný a $\mathtt{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k) \overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}} \mathtt{BK}_j^l(y_1, \dots, y_l)$, tak
$$\mathtt{BK}_{n+i}^{n+k+m}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m) \overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}} \mathtt{BK}_{n+j}^{n+l+m}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m).$$

Nech nastáva jedna z možností:

- T je úplný a $\rightsquigarrow$ je $\overset{T}{\dashrightarrow}$.
- T je poloúplný a $\rightsquigarrow$ je $\overset{T}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$.
- T je poloúplný a $\rightsquigarrow$ je $\overset{T}{\underset{-}{\dashrightarrow}}$.

Nech $p = \mathsf{BP}^{k+m}(x_1, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m)$ a $q = \mathsf{BP}^{l+m}(y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m)$.

1 Ak $h \geq d$, tak $p(h) = q(h)$.

$p(h)$
$= (\mathsf{BP}^{k+m}(x_1, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m))(h)$,
$= (\mathtt{Bloky}^k(x_1, \dots, x_k)\mathsf{BP}^m(b_1, \dots, b_m))(h)$
(podľa vety **2.31**),
$= (\mathsf{BP}^m(b_1, \dots, b_m))(h - \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^k(x_1, \dots, x_k)))$
(podľa definície $\mathtt{Bloky}^k(x_1, \dots, x_k)\mathsf{BP}^m(b_1, \dots, b_m)$, lebo $h \geq d = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^k(x_1, \dots, x_k))$),
$= (\mathsf{BP}^m(b_1, \dots, b_m))(h - d)$,
$= (\mathsf{BP}^m(b_1, \dots, b_m))(h - \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^l(y_1, \dots, y_l)))$,
$= (\mathtt{Bloky}^l(y_1, \dots, y_l)\mathsf{BP}^m(b_1, \dots, b_m))(h)$
(podľa definície $\mathtt{Bloky}^l(y_1, \dots, y_l)\mathsf{BP}^m(b_1, \dots, b_m)$, lebo $h \geq d = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^l(y_1, \dots, y_l))$),
$= (\mathsf{BP}^{l+m}(y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m))(h)$
(podľa vety **2.31**),
$= q(h)$.

Potom postupne platí:

$\mathsf{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k) \rightsquigarrow \mathsf{BK}_j^l(y_1, \dots, y_l)$
(podľa predpokladu),

$\mathtt{KVCh}(\mathsf{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k), p, d+1) \rightsquigarrow \mathtt{KVCh}(\mathsf{BK}_j^l(y_1, \dots, y_l), p, d+1)$
(podľa vety **14**, keďže podľa predpokladu $\mathtt{Rozsah}(\mathsf{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k), T) \leq d < d+1$),

$\mathtt{KVCh}(\mathsf{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k), p, d+1) \rightsquigarrow \mathtt{KVCh}(\mathsf{BK}_j^l(y_1, \dots, y_l), q, d+1)$
(podľa sublemy **1** a vety **8**),

$\mathtt{KVCh}(\mathsf{BK}_i^k(x_1, \dots, x_k), \mathsf{BP}^{k+m}(x_1, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m), d+1)$
$\rightsquigarrow \mathtt{KVCh}(\mathsf{BK}_j^l(y_1, \dots, y_l), \mathsf{BP}^{l+m}(y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m), d+1)$,

$\mathsf{BK}_i^{k+m}(x_1, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m) \rightsquigarrow \mathsf{BK}_j^{l+m}(y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m)$
(podľa viet **15** a opäť **15**, lebo $\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^k(x_1, \dots, x_k)) + 1 = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^l(y_1, \dots, y_l)) + 1 = d + 1$),

$\mathsf{BK}_{n+i}^{n+k+m}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m) \rightsquigarrow \mathsf{BK}_{n+j}^{n+l+m}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m)$
(podľa vety **16**).

1.7 Atomické Turingove stroje

Keď sme už takto teoreticky vyzbrojení, môžeme skonštruovať niekoľko *atomických* Turingových strojov, z ktorých potom budeme vyššie uvedeným skladaním budovať stroje zložitejšie:

D Nech $x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Označme $\mathtt{ZmeňPísmeno}_x$ stroj $\mathtt{ElementárnyStroj}_{0;x,\mathtt{N},1;x,\mathtt{N},1}$.

P Podľa definície $\mathtt{ElementárnyStroj}_{0;x,\mathtt{N},1;x,\mathtt{N},1}$ platí

$$\mathtt{ZmeňPísmeno}_x = \{\mathtt{s}_0\mathtt{0}x\mathtt{N}\mathtt{s}_1, \mathtt{s}_0\mathtt{1}x\mathtt{N}\mathtt{s}_1\}.$$

P
- $\mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{0} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{00N}\mathtt{s}_1, \mathtt{s}_0\mathtt{10N}\mathtt{s}_1\}$.
- $\mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{1} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{01N}\mathtt{s}_1, \mathtt{s}_0\mathtt{11N}\mathtt{s}_1\}$.

V $\boxed{1}$

Nech $x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Potom platí:
- $\mathtt{ZmeňPísmeno}_x$ je úplný.
- $\mathtt{MS}(\mathtt{ZmeňPísmeno}_x) = 1$.

Dokazované tvrdenie platí podľa definície $\mathtt{ZmeňPísmeno}_x$ a podľa vety **5.15**.

I Na stroji $\mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{1}$ vyzerá výpočet z konfigurácie

$\mathtt{s}_0$	0	1	1	1	**[0]**	0	1	1	0	0	⋯

takto:

$\mathtt{s}_0$	0	1	1	1	**[0]**	0	1	1	0	0	⋯
$\mathtt{s}_1$	0	1	1	1	**[1]**	0	1	1	0	0	⋯

I Na stroji $\mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{0}$ vyzerá výpočet z konfigurácie

$\mathtt{s}_0$	0	1	1	1	**[0]**	0	1	1	0	0	⋯

takto:

$\mathtt{s}_0$	0	1	1	1	**[0]**	0	1	1	0	0	⋯
$\mathtt{s}_1$	0	1	1	1	**[0]**	0	1	1	0	0	⋯

P Po ukončení (vždy jednokrokového) výpočtu na stroji $\mathtt{ZmeňPísmeno}_x$ je teda v aktuálnom políčku hlavy písmeno x, a to bez ohľadu na to, čo v ňom bolo predtým.

V $\boxed{2}$

Nech $x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ a $h \in \mathbb{N}$. Nech $p, q \in \mathtt{Pásky}$, pričom platí:
- $q(h) = x$.
- Ak $i \neq h$, tak $p(i) = q(i)$.

Potom platí:
- $\mathtt{KNS}(h, p) \overset{\mathtt{ZmeňPísmeno}_x}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(h, q)$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(h, p), \mathtt{ZmeňPísmeno}_x) = h$.

Nech $K = \langle \mathtt{s}_0, h, p\rangle$ a $L = \langle \mathtt{s}_1, h, q\rangle$. Nech $\mathtt{ČítanéPísmeno}(K) = y$ a nech $I = \mathtt{s}_0 yx\mathtt{N}\mathtt{s}_1$. Podľa definície $\mathtt{ZmeňPísmeno}_x$ a definície $\mathtt{ElementárnyStroj}_{0;x,\mathtt{N},1;x,\mathtt{N},1}$ platí $I \in \mathtt{ZmeňPísmeno}_x$.

1 I je aplikovateľná na K.

Podľa definície StarýStav platí $\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{s}_0$, podľa definície Stav platí $\mathtt{Stav}(K) = \mathtt{s}_0$ a podľa definície StaréPísmeno a predpokladu platí $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = y = \mathtt{ČítanéPísmeno}(K)$, takže podľa definície korešpondencie I korešponduje s K. A keďže podľa definície Posun platí $\mathtt{Posun}(I) = \mathtt{N} \neq \mathtt{L}$, podľa definície aplikovateľnosti je I aplikovateľná na K.

2 I mení K na L.

- $\mathtt{Stav}(L)$

  $= \mathtt{s}_1$
  (podľa definície Stav),

  $= \mathtt{NovýStav}(I)$
  (podľa definície NovýStav).

- $\mathtt{Hlava}(L)$

  $= h$
  (podľa definície Hlava),

  $= h + 1 - 1,$

  $= h + \mathtt{N} - 1,$

  $= h + \mathtt{Posun}(I) - 1$
  (podľa definície Posun),

  $= \mathtt{Hlava}(K) + \mathtt{Posun}(I) - 1$
  (podľa definície Hlava).

- - Nech $i = \mathtt{Hlava}(K)$.

    Potom platí:

    $(\mathtt{Páska}(L))(i)$

    $= (\mathtt{Páska}(L))(\mathtt{Hlava}(K)),$

    $= (\mathtt{Páska}(L))(h)$
    (podľa definície Hlava),

    $= q(h)$
    (podľa definície Páska),

    $= x,$

    $= \mathtt{NovéPísmeno}(I)$
    (podľa definície NovéPísmeno).

  - Nech $i \neq \mathtt{Hlava}(K)$.

    Potom platí:

    $(\mathtt{Páska}(L))(i)$

    $= q(i)$
    (podľa definície Páska),

    $= p(i)$
    (podľa predpokladu, lebo podľa definície Hlava platí $i \neq \mathtt{Hlava}(K) = h$),

    $= (\mathtt{Páska}(K))(i)$
    (podľa definície Páska).

To spolu so sublemou **1** podľa definície menenia znamená, že I mení K na L.

3 $\mathtt{Krok}(K, \mathtt{ZmeňPísmeno}_x) = L$.

Dokazované tvrdenie platí podľa definície $\mathtt{Krok}$ a sublemy **2**.

4 Neexistuje $\mathtt{Krok}(L, \mathtt{ZmeňPísmeno}_x)$.

Platí:

$\mathtt{Stav}(L)$
$= \mathtt{s}_1$
(podľa definície $\mathtt{Stav}$),
$= 1$,
$\notin \{0\}$,
$= \mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathtt{ZmeňPísmeno}_x)$
(podľa vety **1** a definície úplného stroja).

Podľa viet **1** a **5.2** teda neexistuje $\mathtt{Krok}(L, \mathtt{ZmeňPísmeno}_x)$.

5 (K, L) je konečný výpočet na $\mathtt{ZmeňPísmeno}_x$ z K.

Dokazované tvrdenie platí podľa definície konečného výpočtu a sublem **3** a **4**.

Potom platí:

- $\mathtt{Koniec}(\mathtt{KNS}(h, p), \mathtt{ZmeňPísmeno}_x)$
  $= \mathtt{Koniec}(\langle \mathtt{s}_0, h, p\rangle, \mathtt{ZmeňPísmeno}_x)$
  (podľa definície $\mathtt{KNS}$),
  $= \mathtt{Koniec}(K, \mathtt{ZmeňPísmeno}_x)$,
  $= L$
  (podľa sublemy **5** a definície $\mathtt{Koniec}$),
  $= \langle \mathtt{s}_1, h, q\rangle$,
  $= \langle 1, h, q\rangle$,
  $= \mathtt{KPS}(\langle 0, h, q\rangle, 1)$
  (podľa definície $\mathtt{KPS}$ a podľa definície $\mathtt{Stav}$),
  $= \mathtt{KPS}(\langle \mathtt{s}_0, h, q\rangle, 1)$,
  $= \mathtt{KPS}(\mathtt{KNS}(h, q), 1)$
  (podľa definície $\mathtt{KNS}$),
  $= \mathtt{KPS}(\mathtt{KNS}(h, q), \mathtt{MS}(\mathtt{ZmeňPísmeno}_x))$
  (podľa vety **1**).

  Z toho už podľa definície $\overset{\mathtt{ZmeňPísmeno}_x}{\dashrightarrow}$ dostávame $\mathtt{KNS}(h, p) \overset{\mathtt{ZmeňPísmeno}_x}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(h, q)$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(h, p), \mathtt{ZmeňPísmeno}_x)$
  $= \mathtt{Rozsah}(\langle \mathtt{s}_0, h, p\rangle, \mathtt{ZmeňPísmeno}_x)$
  (podľa definície $\mathtt{KNS}$),
  $= \mathtt{Rozsah}(K, \mathtt{ZmeňPísmeno}_x)$,
  $= \max\{\mathtt{Hlava}(K), \mathtt{Hlava}(L)\}$
  (podľa sublemy **5** a definície $\mathtt{Rozsah}$),
  $= \max\{h, h\}$
  (podľa definícií $\mathtt{Hlava}$ a opäť $\mathtt{Hlava}$),
  $= h$.

D Nech $m \in \{\mathtt{L}, \mathtt{R}\}$. Označme $\mathtt{PosuňSa}_m$ stroj $\mathtt{ElementárnyStroj}_{0;\mathtt{0},m,1;\mathtt{1},m,1}$.

P Podľa definície $\mathtt{ElementárnyStroj}_{0;\mathtt{0},m,1;\mathtt{1},m,1}$ platí

$$\mathtt{PosuňSa}_m = \{\mathtt{s}_0\mathtt{00}m\mathtt{s}_1, \mathtt{s}_0\mathtt{11}m\mathtt{s}_1\}.$$

P
- $\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{00R}\mathtt{s}_1, \mathtt{s}_0\mathtt{11R}\mathtt{s}_1\}$.
- $\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{00L}\mathtt{s}_1, \mathtt{s}_0\mathtt{11L}\mathtt{s}_1\}$.

V $\boxed{3}$

Nech $m \in \{\mathtt{L}, \mathtt{R}\}$. Potom platí:
- $\mathtt{PosuňSa}_m$ je úplný.
- $\mathtt{MS}(\mathtt{PosuňSa}_m) = 1$.

Dokazované tvrdenie platí podľa definície $\mathtt{PosuňSa}_m$ a podľa vety **5.15**.

I Na stroji $\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}$ vyzerá výpočet z konfigurácie

s_0	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	1	0	0	⋯

takto:

s_0	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	1	0	0	⋯
s_1	0	1	1	1	0	$\boxed{0}$	1	1	0	0	⋯

I Na stroji $\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}$ vyzerá výpočet z konfigurácie

s_0	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	1	0	0	⋯

takto:

s_0	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	1	0	0	⋯
s_1	0	1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	1	0	0	⋯

P Po ukončení výpočtu, ktorý má (až na prípad, keď $m = \mathtt{L}$ a hlava je na začiatku pásky) vždy jediný krok, sa teda hlava posunie o jedno políčko v zmysle posunu m, páska sa však vôbec nezmení.

V $\boxed{4}$

Nech $m \in \{\mathtt{L}, \mathtt{R}\}$ a $h, a, b \in \mathbb{N}$, pričom nastáva jeden z prípadov:
- $m = \mathtt{R}$, $a = h$ a $b = h + 1$.
- $m = \mathtt{L}$, $a = h + 1$ a $b = h$.

Nech $p \in \mathtt{Pásky}$. Potom platí:
- $\mathtt{KNS}(a, p) \xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_m} \mathtt{KNS}(b, p)$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(a, p), \mathtt{PosuňSa}_m) = h + 1$.

Nech $K = \langle s_0, a, p\rangle$ a $L = \langle s_1, b, p\rangle$. Nech $\mathtt{ČítanéPísmeno}(K) = x$ a nech $I = s_0 x x m s_1$. Podľa definície $\mathtt{PosuňSa}_m$ (a teda definície $\mathtt{ElementárnyStroj}_{0;0,m,1;1,m,1}$) platí $I \in \mathtt{PosuňSa}_m$.

1 $\boxed{I \text{ je aplikovateľná na } K.}$

Podľa definície $\mathtt{StarýStav}$ platí $\mathtt{StarýStav}(I) = s_0$, podľa definície $\mathtt{Stav}$ platí $\mathtt{Stav}(K) = s_0$ a podľa definície $\mathtt{StaréPísmeno}$ a predpokladu platí $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = x = \mathtt{ČítanéPísmeno}(K)$, takže podľa definície korešpondencie I korešponduje s K. A keďže podľa definície $\mathtt{Posun}$ platí $\mathtt{Posun}(I) = m$ a podľa definície $\mathtt{Hlava}$ platí $\mathtt{Hlava}(K) = a$ (teda podľa predpokladu ani v jednom prípade neplatí naraz $\mathtt{Hlava}(K) = 0$ a $\mathtt{Posun}(I) = \mathtt{L}$), podľa definície aplikovateľnosti je I aplikovateľná na K.

2 $\boxed{I \text{ mení } K \text{ na } L.}$

- $\mathtt{Stav}(L)$

$= \mathtt{s}_1$
(podľa definície Stav),

$=$ NovýStav(I)
(podľa definície NovýStav).

- Hlava(L)

  $= b$
  (podľa definície Hlava),

  $= a + m - 1$
  (a to ako v prípade $m = \mathtt{R} = 2$, $a = h$ a $b = h + 1$, tak v prípade $m = \mathtt{L} = 0$, $a = h + 1$ a $b = h$),

  $= a +$ Posun$(I) - 1$
  (podľa definície Posun),

  $=$ Hlava$(K) +$ Posun$(I) - 1$
  (podľa definície Hlava).

- - Nech $i =$ Hlava(K).

    Potom platí:

    (Páska$(L))(i)$

    $=$ (Páska$(L))($Hlava$(K))$,

    $= p($Hlava$(K))$
    (podľa definície Páska),

    $=$ (Páska$(K))($Hlava$(K))$
    (podľa definície Páska),

    $=$ ČítanéPísmeno(K)
    (podľa definície ČítanéPísmeno),

    $= x$,

    $=$ NovéPísmeno(I)
    (podľa definície NovéPísmeno).

  - Nech $i \neq$ Hlava(K).

    Potom platí:

    (Páska$(L))(i)$

    $= p(i)$
    (podľa definície Páska),

    $=$ (Páska$(K))(i)$
    (podľa definície Páska).

To spolu so sublemou **1** podľa definície menenia znamená, že I mení K na L.

3 Krok$(K,$ PosuňSa$_m) = L$.

Dokazované tvrdenie platí podľa definície Krok a sublemy **2**.

4 Neexistuje Krok$(L,$ PosuňSa$_m)$.

Platí:

Stav(L)
$= \mathtt{s}_1$
(podľa definície Stav),
$= 1$,
$\notin \{0\}$,
$=$ HyperaktívneStavy(PosuňSa$_m$)
(podľa vety **3** a definície úplného stroja).

Podľa viet **3** a **5.2** teda neexistuje $\mathtt{Krok}(L, \mathtt{PosuňSa}_m)$.

5 (K, L) je konečný výpočet na $\mathtt{PosuňSa}_m$ z K.

Dokazované tvrdenie platí podľa definície konečného výpočtu a sublem **3** a **4**.

Potom platí:

- $\mathtt{Koniec}(\mathtt{KNS}(a,p), \mathtt{PosuňSa}_m)$
  $= \mathtt{Koniec}(\langle \mathtt{s}_0, a, p\rangle, \mathtt{PosuňSa}_m)$
  (podľa definície KNS),
  $= \mathtt{Koniec}(K, \mathtt{PosuňSa}_m)$,
  $= L$
  (podľa sublemy **5** a definície Koniec),
  $= \langle \mathtt{s}_1, b, p\rangle$,
  $= \langle 1, b, p\rangle$,
  $= \mathtt{KPS}(\langle 0, b, p\rangle, 1)$
  (podľa definície KPS a podľa definícií Stav a opäť Stav),
  $= \mathtt{KPS}(\langle \mathtt{s}_0, b, p\rangle, 1)$,
  $= \mathtt{KPS}(\mathtt{KNS}(b,p), 1)$
  (podľa definície KNS),
  $= \mathtt{KPS}(\mathtt{KNS}(b,p), \mathtt{MS}(\mathtt{PosuňSa}_m))$
  (podľa vety **3**).

  Z toho už podľa definície $\xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_m}$ dostávame $\mathtt{KNS}(a,p) \xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_m} \mathtt{KNS}(b,p)$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(a,p), \mathtt{PosuňSa}_m)$
  $= \mathtt{Rozsah}(\langle \mathtt{s}_0, a, p\rangle, \mathtt{PosuňSa}_m)$
  (podľa definície KNS),
  $= \mathtt{Rozsah}(K, \mathtt{PosuňSa}_m)$,
  $= \max\{\mathtt{Hlava}(K), \mathtt{Hlava}(L)\}$
  (podľa sublemy **5** a definície Rozsah),
  $= \max\{a, b\}$
  (podľa definícií Hlava a opäť Hlava),
  $= \max\{h, h+1\}$,
  $= h + 1$.

V **5**

Nech $h \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathtt{Pásky}$. Potom platí:

- $\mathtt{KNS}(h,p) \xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_{\mathtt{R}}} \mathtt{KNS}(h+1,p)$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(h,p), \mathtt{PosuňSa}_{\mathtt{R}}) = h + 1$.

Dokazované tvrdenie je špeciálnym prípadom vety **4**.

V **6**

Nech $h \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathtt{Pásky}$. Potom platí:

- $\mathtt{KNS}(h+1,p) \xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_{\mathtt{L}}} \mathtt{KNS}(h,p)$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(h+1,p), \mathtt{PosuňSa}_{\mathtt{L}}) = h + 1$.

Dokazované tvrdenie je špeciálnym prípadom vety **4**.

D Nech $m \in \{\mathtt{L}, \mathtt{R}\}$ a $x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Nech T je stroj taký, že platí:

- Ak $x = \mathtt{0}$, tak $T = \mathtt{ElementárnyStroj}_{0;y,m,0;\mathtt{1},\mathtt{N},1}$.
- Ak $x = \mathtt{1}$, tak $T = \mathtt{ElementárnyStroj}_{0;\mathtt{0},\mathtt{N},1;y,m,0}$.

Potom stroj T označíme $\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}$.

P Podľa definícií $\mathtt{ElementárnyStroj}_{0;y,m,0;1,\mathtt{N},1}$ či $\mathtt{ElementárnyStroj}_{0;\mathtt{0},\mathtt{N},1;y,m,0}$ platí

$$\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y} = \{\mathtt{s}_0 xym\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_0 zz\mathtt{N}\mathtt{s}_1\},$$

kde z je také, že $\{x, z\} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.

P Do úvahy teda prichádza týchto osem strojov:

- $\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},\mathtt{0},\mathtt{0}} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{00R}\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_0\mathtt{11N}\mathtt{s}_1\}$,
- $\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},\mathtt{0},\mathtt{0}} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{00L}\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_0\mathtt{11N}\mathtt{s}_1\}$,
- $\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},\mathtt{0},\mathtt{1}} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{01R}\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_0\mathtt{11N}\mathtt{s}_1\}$,
- $\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},\mathtt{0},\mathtt{1}} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{01L}\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_0\mathtt{11N}\mathtt{s}_1\}$,
- $\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},\mathtt{1},\mathtt{0}} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{10R}\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_0\mathtt{00N}\mathtt{s}_1\}$,
- $\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},\mathtt{1},\mathtt{0}} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{10L}\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_0\mathtt{00N}\mathtt{s}_1\}$,
- $\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},\mathtt{1},\mathtt{1}} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{11R}\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_0\mathtt{00N}\mathtt{s}_1\}$,
- $\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},\mathtt{1},\mathtt{1}} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{11L}\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_0\mathtt{00N}\mathtt{s}_1\}$.

V $\boxed{7}$

Nech $m \in \{\mathtt{L}, \mathtt{R}\}$ a $x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Potom platí:
- $\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}$ je úplný.
- $\mathtt{MS}(\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}) = 1$.

V prvom prípade z definície $\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}$ je to špeciálny prípad vety **5.15** a v druhom tiež špeciálny prípad vety **5.15**.

I Na stroji $\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},\mathtt{1},\mathtt{1}}$ vyzerá výpočet z konfigurácie

$\mathtt{s}_0$	0	$\boxed{1}$	1	1	0	0	1	1	0	0	⋯

takto:

$\mathtt{s}_0$	0	$\boxed{1}$	1	1	0	0	1	1	0	0	⋯
$\mathtt{s}_0$	0	1	$\boxed{1}$	1	0	0	1	1	0	0	⋯
$\mathtt{s}_0$	0	1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	1	0	0	⋯
$\mathtt{s}_0$	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	1	0	0	⋯
$\mathtt{s}_1$	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1	1	0	0	⋯

Páska sa tu vôbec nezmenila, ale hlava sa premiestnila na koniec bloku jednotiek.

I Na stroji $\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},\mathtt{1},\mathtt{0}}$ vyzerá výpočet z konfigurácie

$\mathtt{s}_0$	0	1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	1	0	0	⋯

takto:

s_0	0	1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	1	0	0	⋯
s_0	0	1	$\boxed{1}$	0	0	0	1	1	0	0	⋯
s_0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	1	1	0	0	⋯
s_0	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0	1	1	0	0	⋯
s_1	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0	1	1	0	0	⋯

Aj tu sa hlava premiestnila na najbližšiu nulu, avšak smerom doľava. Navyše po sebe nechala spúšť – všetky navštívené jednotky zmenila na nuly.

P Po ukončení výpočtu sa hlava posunie o niekoľko políčok v zmysle posunu m a zastaví sa na najbližšom políčku s iným písmenom než x. Podľa platnosti vzťahu $x = y$ sa pritom písmená prechádzanej časti pásky buď nezmenia, alebo zmenia.

V $\boxed{\mathbf{8}}$

Nech $m \in \{\mathtt{L}, \mathtt{R}\}$ a $h, k, a, b \in \mathbb{N}$, pričom nastáva jeden z prípadov:

- $m = \mathtt{R}$, $a = h$ a $b = h + k$.
- $m = \mathtt{L}$, $a = h + k$ a $b = h$.

Nech $\{x, z\} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ a $y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Nech $p, q \in \mathtt{Pásky}$, pričom platí:

- $p(a) = x$ a $q(a) = y$.
- Ak $h < j < h + k$, tak $p(j) = x$ a $q(j) = y$.
- $p(b) = q(b) = z$.
- Ak $j < h$, alebo $h + k < j$, tak $p(j) = q(j)$.

Potom platí:

- $\mathtt{KNS}(a, p) \xrightarrow{\mathtt{PrejdiPísmená}}_{m,x,y} \mathtt{KNS}(b, q)$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(a, p), \mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}) = h + k$.

Nech $c_0, \dots, c_k \in \mathbb{N}$, pričom platí:

- Ak $m = \mathtt{R}$, tak pre každé i z $\{0, \dots, k\}$ platí $c_i = h + i$.
- Ak $m = \mathtt{L}$, tak pre každé i z $\{0, \dots, k\}$ platí $c_i = h + k - i$.

V oboch prípadoch teda $c_0 = a$ a $c_k = b$.

Nech pre každé i z $\{0, \dots, k\}$ je r_i páska taká, že platí

$$r_i(j) = \begin{cases} y, & \text{ak } j \in \{c_0, \dots, c_{i-1}\}, \\ x, & \text{ak } j \in \{c_i, \dots, c_{k-1}\}, \\ z, & \text{ak } j = c_k, \\ p(j) & \text{inak.} \end{cases}$$

Všimnime si, že $r_0 = p$ a $r_k = q$.

Pre i z $\{0, \dots, k\}$ označme K_i konfiguráciu $\langle \mathtt{s}_0, c_i, r_i \rangle$, L konfiguráciu $\langle \mathtt{s}_1, c_k, q \rangle$. Nech $I = \mathtt{s}_0 xym\mathtt{s}_0$ a $J = \mathtt{s}_0 zz\mathtt{N}\mathtt{s}_1$. Podľa definície $\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}$ potom platí $I, J \in \mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}$.

1 Ak $i < k$, tak I je aplikovateľná na K_i.

Podľa definície $\mathtt{StarýStav}$ platí $\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{s}_0$, podľa definície $\mathtt{Stav}$ platí $\mathtt{Stav}(K_i) = \mathtt{s}_0$, podľa definície $\mathtt{StaréPísmeno}$ platí $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = x$ a podľa definícií $\mathtt{ČítanéPísmeno}$, $\mathtt{Páska}$ a $\mathtt{Hlava}$ platí $\mathtt{ČítanéPísmeno}(K_i) = (\mathtt{Páska}(K_i))(\mathtt{Hlava}(K_i)) = r_i(c_i) = x$, takže podľa definície korešpondencie I korešponduje s K_i. A keďže podľa definície $\mathtt{Hlava}$ platí $\mathtt{Hlava}(K_i) = c_i$, podľa definície $\mathtt{Posun}$ platí $\mathtt{Posun}(I) = m$ a podľa predpokladu z $m = \mathtt{L}$ vyplýva $c_i = h + k - i > h \geq 0$, neplatí naraz $\mathtt{Hlava}(K_i) = 0$ a $\mathtt{Posun}(I) = \mathtt{L}$, takže podľa definície aplikovateľnosti je I aplikovateľná na K_i.

2 Ak $i < k$, tak I mení K_i na K_{i+1}.

- $\mathtt{Stav}(K_{i+1})$

  $= \mathtt{s}_0$
  (podľa definície $\mathtt{Stav}$),

  $= \mathtt{NovýStav}(I)$
  (podľa definície $\mathtt{NovýStav}$).

- $\mathtt{Hlava}(K_{i+1})$

  $= c_{i+1}$
  (podľa definície $\mathtt{Hlava}$),

  $= c_i + m - 1$
  (a to ako v prípade $m = \mathtt{R} = 2$, $c_i = h + i$ a $c_{i+1} = h + i + 1$, tak v prípade $m = \mathtt{L} = 0$, $c_i = h + k - i$ a $c_{i+1} = h + k - (i + 1) = h + k - i - 1$),

  $= c_i + \mathtt{Posun}(I) - 1$
  (podľa definície $\mathtt{Posun}$),

  $= \mathtt{Hlava}(K_i) + \mathtt{Posun}(I) - 1$
  (podľa definície $\mathtt{Hlava}$).

- - Nech $j = \mathtt{Hlava}(K_i)$.
    Potom platí:

    $(\mathtt{Páska}(K_{i+1}))(\mathtt{Hlava}(K_i))$

    $= r_{i+1}(\mathtt{Hlava}(K_i))$
    (podľa definície $\mathtt{Páska}$),

    $= r_{i+1}(c_i)$
    (podľa definície $\mathtt{Hlava}$),

    $= y$
    (podľa definície r_{i+1}),

    $= \mathtt{NovéPísmeno}(I)$
    (podľa definície $\mathtt{NovéPísmeno}$).

  - Nech $j \neq \mathtt{Hlava}(K_i)$.
    Podľa definície $\mathtt{Hlava}$ teda platí $j \neq c_i$. Rozoberme prípady:

    - Nech $j \in \{c_0, \dots, c_{i-1}\}$.
      Potom platí:

      $(\mathtt{Páska}(K_{i+1}))(j)$

      $= r_{i+1}(j)$
      (podľa definície $\mathtt{Páska}$),

      $= y$
      (podľa definície r_{i+1}),

      $= r_i(j)$
      (podľa definície r_i),

      $= (\mathtt{Páska}(K_i))(j)$
      (podľa definície $\mathtt{Páska}$).

    - Nech $j \in \{c_{i+1}, \dots, c_{k-1}\}$.
      Potom platí:

      $(\mathtt{Páska}(K_{i+1}))(j)$

      $= r_{i+1}(j)$
      (podľa definície $\mathtt{Páska}$),

      $= x$
      (podľa definície r_{i+1}),

$= r_i(j)$
(podľa definície r_i),

$= (\mathtt{Páska}(K_i))(j)$
(podľa definície Páska).

- Nech $j = c_k$.
  Potom platí:
  $(\mathtt{Páska}(K_{i+1}))(j)$
  $= r_{i+1}(j)$
  (podľa definície Páska),
  $= z$
  (podľa definície r_{i+1}),
  $= r_i(j)$
  (podľa definície r_i),
  $= (\mathtt{Páska}(K_i))(j)$
  (podľa definície Páska).
- Nech $j \notin \{c_0, \dots, c_k\}$.
  Potom platí:
  $(\mathtt{Páska}(K_{i+1}))(j)$
  $= r_{i+1}(j)$
  (podľa definície Páska),
  $= p(j)$
  (podľa definície r_{i+1}),
  $= r_i(j)$
  (podľa definície r_i),
  $= (\mathtt{Páska}(K_i))(j)$
  (podľa definície Páska).

Zhrnutím dostávame, že pre každé j rôzne od $\mathtt{Hlava}(K_i)$ platí $(\mathtt{Páska}(K_{i+1}))(j) = (\mathtt{Páska}(K_i))(j)$.

To spolu so sublemou **1** podľa definície menenia znamená, že I mení K_i na K_{i+1}.

3 Ak $i < k$, tak $\mathtt{Krok}(K_i, \mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}) = K_{i+1}$.

Dokazované tvrdenie platí podľa definície Krok a sublemy **2**.

4 J je aplikovateľná na K_k.

Podľa definície StarýStav platí $\mathtt{StarýStav}(J) = \mathtt{s}_0$, podľa definície Stav platí $\mathtt{Stav}(K_k) = \mathtt{s}_0$, podľa definície StaréPísmeno platí $\mathtt{StaréPísmeno}(J) = z$ a podľa definícií ČítanéPísmeno, Páska a Hlava platí $\mathtt{ČítanéPísmeno}(K_k) = (\mathtt{Páska}(K_k))(\mathtt{Hlava}(K_k)) = r_k(c_k) = z$, takže podľa definície korešpondencie J korešponduje s K_k. A keďže podľa definície Posun platí $\mathtt{Posun}(J) = \mathtt{N} \neq \mathtt{L}$, podľa definície aplikovateľnosti je J aplikovateľná na K_k.

5 J mení K_k na L.

- $\mathtt{Stav}(L)$
  $= \mathtt{s}_1$
  (podľa definície Stav),
  $= \mathtt{NovýStav}(J)$
  (podľa definície NovýStav).
- $\mathtt{Hlava}(L)$
  $= c_k$

(podľa definície Hlava),

$= c_k + 1 - 1$,

$= c_k + \mathtt{N} - 1$,

$= c_k + \mathtt{Posun}(J) - 1$
(podľa definície Posun),

$= \mathtt{Hlava}(K_k) + \mathtt{Posun}(J) - 1$
(podľa definície Hlava).

- • Nech $j = \mathtt{Hlava}(K_k)$.

  $(\mathtt{Páska}(L))(j)$

  $= (\mathtt{Páska}(L))(\mathtt{Hlava}(K_k))$,

  $= q(\mathtt{Hlava}(K_k))$
  (podľa definície Páska),

  $= q(c_k)$
  (podľa definície Hlava),

  $= z$
  (podľa predpokladu),

  $= \mathtt{NovéPísmeno}(J)$
  (podľa definície NovéPísmeno).

- Nech $j \neq \mathtt{Hlava}(K_k)$.

  Potom platí:

  $(\mathtt{Páska}(L))(j)$

  $= q(j)$
  (podľa definície Páska),

  $= r_k(j)$,

  $= (\mathtt{Páska}(K_k))(j)$
  (podľa definície Páska).

To spolu so sublemou **4** podľa definície menenia znamená, že J mení K_k na L.

6 $\mathtt{Krok}(K_k, \mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}) = L$.

Dokazované tvrdenie platí podľa definície Krok a sublemy **5**.

7 Neexistuje $\mathtt{Krok}(L, \mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y})$.

Platí:

$\mathtt{Stav}(L)$

$= \mathtt{s}_1$
(podľa definície Stav),

$= 1$,

$\notin \{0\}$,

$= \mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y})$
(podľa vety **7** a definície úplného stroja).

Podľa viet **7** a **5.2** teda neexistuje $\mathtt{Krok}(L, \mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y})$.

8 $((K_0, \ldots, K_n), L)$ je konečný výpočet na $\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}$ z K_0.

Podľa definície konečného výpočtu a sublem **3**, **6** a **7**.

Potom platí:

- $\mathtt{Koniec}(\mathtt{KNS}(a,p),\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y})$
  $= \mathtt{Koniec}(\mathtt{KNS}(c_0,p),\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y})$,
  $= \mathtt{Koniec}(\langle \mathtt{s}_0, c_0, p\rangle,\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y})$
  (podľa definície KNS),
  $= \mathtt{Koniec}(K_0,\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y})$,
  $= L$
  (podľa sublemy **8** a definície Koniec),
  $= \langle \mathtt{s}_1, c_k, q\rangle$,
  $= \langle 1, c_k, q\rangle$,
  $= \mathtt{KPS}(\langle 0, c_k, q\rangle, 1)$
  (podľa definície KPS a podľa definícií Stav a opäť Stav),
  $= \mathtt{KPS}(\langle \mathtt{s}_0, c_k, q\rangle, 1)$,
  $= \mathtt{KPS}(\mathtt{KNS}(c_k,q), 1)$
  (podľa definície KNS),
  $= \mathtt{KPS}(\mathtt{KNS}(c_k,q),\mathtt{MS}(\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}))$
  (podľa vety **7**),
  $= \mathtt{KPS}(\mathtt{KNS}(b,q),\mathtt{MS}(\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}))$.

  Z toho už podľa definície $\xrightarrow{\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}}$ dostávame $\mathtt{KNS}(a,p) \xrightarrow{\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y}} \mathtt{KNS}(b,q)$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(a,p),\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y})$,
  $= \mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(c_0,p),\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y})$
  $= \mathtt{Rozsah}(\langle \mathtt{s}_0, c_0, p\rangle,\mathtt{PrejdiPísmená}_{m,x,y})$
  (podľa definície KNS),
  $= \mathtt{Rozsah}(K_0,\mathtt{PosuňSa}_m)$,
  $= \max\{\mathtt{Hlava}(K_0),\dots,\mathtt{Hlava}(K_n),\mathtt{Hlava}(L)\}$
  (podľa sublemy **8** a definície Rozsah),
  $= \max(\{\mathtt{Hlava}(K_0),\dots,\mathtt{Hlava}(K_n)\} \cup \{\mathtt{Hlava}(L)\})$,
  $= \max(\{c_i : i \in \{0,\dots,k\}\} \cup \{\mathtt{Hlava}(L)\})$
  (pre každé i z $\{0,\dots,n\}$ podľa definície Hlava),
  $= \max(\{c_i : i \in \{0,\dots,k\}\} \cup \{c_k\})$
  (pre každé i z $\{0,\dots,n\}$ podľa definície Hlava),
  $= \max\{c_i : i \in \{0,\dots,k\}\}$,
  $= \max\{h+i : i \in \{0,\dots,k\}\}$
  (a to ako v prípade, že $m = \mathtt{R}$ a pre každé i z $\{0,\dots,k\}$ platí $c_i = h+i$, tak v prípade, že $m = \mathtt{L}$ a pre každé i z $\{0,\dots,k\}$ platí $c_i = h+k-i$),
  $= h+k$.

V $\boxed{\mathbf{9}}$

Nech $h,k \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathtt{Pásky}$, pričom platí:
- Ak $h \leq j < h+k$, tak $p(j) = \mathtt{1}$.
- $p(h+k) = \mathtt{0}$.

Potom platí:
- $\mathtt{KNS}(h,p) \xrightarrow{\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},1,1}} \mathtt{KNS}(h+k,p)$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(h,p),\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},1,1}) = h+k$.

Dokazované tvrdenie je špeciálnym prípadom vety **8**.

V $\boxed{\mathbf{10}}$

> Nech $h, k \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathtt{Pásky}$, pričom platí:
> - Ak $h < j \leq h + k$, tak $p(j) = \mathtt{1}$.
> - $p(h) = \mathtt{0}$.
>
> Potom platí:
> - $\mathtt{KNS}(h + k, p) \xrightarrow{\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}} \mathtt{KNS}(h, p)$.
> - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(h + k, p), \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}) = h + k$.

Dokazované tvrdenie je špeciálnym prípadom vety **8**.

Pokiaľ ide o poloúplné stroje, najjednoduchším testom je zisťovanie, či má aktuálne čítané políčko danú hodnotu:

D Nech $x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Nech T je stroj taký, že platí:

- Ak $x = \mathtt{0}$, tak $T = \mathtt{ElementárnyStroj}_{0;\mathtt{0},\mathtt{N},1;\mathtt{1},\mathtt{N},2}$.
- Ak $x = \mathtt{1}$, tak $T = \mathtt{ElementárnyStroj}_{0;\mathtt{0},\mathtt{N},2;\mathtt{1},\mathtt{N},1}$.

Potom stroj T označíme $\mathtt{TestPísmena}_x$.

P Podľa definície $\mathtt{ElementárnyStroj}_{0;\mathtt{0},\mathtt{N},1;\mathtt{1},\mathtt{N},2}$, resp. $\mathtt{ElementárnyStroj}_{0;\mathtt{0},\mathtt{N},2;\mathtt{1},\mathtt{N},1}$ platí

$$\mathtt{TestPísmena}_x = \{\mathtt{s}_0 x x \mathtt{N} \mathtt{s}_1, \mathtt{s}_0 y y \mathtt{N} \mathtt{s}_2\},$$

kde y je také, že $\{x, y\} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.

P

- $\mathtt{TestPísmena}_\mathtt{0} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{00N}\mathtt{s}_1, \mathtt{s}_0\mathtt{11N}\mathtt{s}_2\}$.
- $\mathtt{TestPísmena}_\mathtt{1} = \{\mathtt{s}_0\mathtt{00N}\mathtt{s}_2, \mathtt{s}_0\mathtt{11N}\mathtt{s}_1\}$.

V $\boxed{\mathbf{11}}$

> Nech $x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Potom platí:
> - $\mathtt{TestPísmena}_x$ je poloúplný.
> - $\mathtt{MS}(\mathtt{TestPísmena}_x) = 2$.

Podľa definície $\mathtt{TestPísmena}_x$ je to špeciálny prípad vety **5.15** a v druhom tiež špeciálny prípad vety **5.15**.

I Na stroji $\mathtt{TestPísmena}_\mathtt{1}$ vyzerá výpočet z konfigurácie

$$\mathtt{s}_0 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathtt{0} & \mathtt{1} & \mathtt{1} & \mathtt{1} & \boxed{\mathtt{0}} & \mathtt{0} & \mathtt{1} & \mathtt{1} & \mathtt{0} & \mathtt{0} \\ \hline \end{array} \cdots$$

takto:

$$\begin{array}{l} \mathtt{s}_0 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathtt{0} & \mathtt{1} & \mathtt{1} & \mathtt{1} & \boxed{\mathtt{0}} & \mathtt{0} & \mathtt{1} & \mathtt{1} & \mathtt{0} & \mathtt{0} \\ \hline \end{array} \cdots \\ \mathtt{s}_2 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathtt{0} & \mathtt{1} & \mathtt{1} & \mathtt{1} & \boxed{\mathtt{0}} & \mathtt{0} & \mathtt{1} & \mathtt{1} & \mathtt{0} & \mathtt{0} \\ \hline \end{array} \cdots \end{array}$$

Konfigurácii sa teda zmenil iba stav, a to na (pre tento stroj) záporný $\mathtt{s}_2$. Znamená to, že testovaná podmienka, či čítané písmeno je $\mathtt{1}$, neplatí.

I Naopak, pre konfiguráciu

$$\mathtt{s}_0 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathtt{0} & \mathtt{1} & \mathtt{1} & \boxed{\mathtt{1}} & \mathtt{0} & \mathtt{0} & \mathtt{1} & \mathtt{1} & \mathtt{0} & \mathtt{0} \\ \hline \end{array} \cdots$$

na tom istom stroji $\mathtt{TestPísmena}_\mathtt{1}$ vyzerá výpočet takto:

$\mathtt{s}_0$	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	⋯
$\mathtt{s}_1$	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	⋯

Aj tu sa konfigurácii zmenil iba stav, a to na (pre tento stroj) kladný $\mathtt{s}_1$. Testovaná podmienka, či čítané písmeno je $\mathtt{1}$, teda platí.

P Výpočet na takomto stroji má teda vždy jeden krok.

V $\boxed{\mathbf{12}}$

> Nech $x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ a K je konfigurácia s nulovým stavom. Potom platí:
>
> - Ak $\mathtt{ČítanéPísmeno}(K) = x$, tak $K \overset{\mathtt{TestPísmena}_x}{\dashrightarrow}_{+} K$.
> - Ak $\mathtt{ČítanéPísmeno}(K) \neq x$, tak $K \overset{\mathtt{TestPísmena}_x}{\dashrightarrow}_{-} K$.
>
> Navyše v oboch prípadoch $\mathtt{Rozsah}(K, \mathtt{TestPísmena}_x) = \mathtt{Hlava}(K)$.

Nech $\mathtt{ČítanéPísmeno}(K) = z$. Nech platí jeden z prípadov:

- $z \neq x$ a $k = 2$.
- $z = x$ a $k = 1$.

Nech $I = \mathtt{s}_0 zz\mathtt{N}\mathtt{s}_k$. Podľa definície $\mathtt{TestPísmena}_x$ platí $I \in \mathtt{TestPísmena}_x$.

1 I je aplikovateľná na K.

Podľa definície $\mathtt{StaréPísmeno}$ a predpokladu platí $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = z = \mathtt{ČítanéPísmeno}(K)$, podľa definície $\mathtt{StarýStav}$ platí $\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{s}_0$ a podľa vety **2.12** platí $\mathtt{Stav}(K) = 0 = \mathtt{s}_0$, takže podľa definície korešpondencie I korešponduje s K. A keďže podľa definície $\mathtt{Posun}$ platí $\mathtt{Posun}(I) = \mathtt{N} \neq \mathtt{L}$, podľa definície aplikovateľnosti je I aplikovateľná na K.

2 I mení K na $\mathtt{KPS}(K, k)$.

- $\mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(K, k))$
  - $= k$
    (podľa vety **4.8**),
  - $= \mathtt{NovýStav}(I)$
    (podľa definície $\mathtt{NovýStav}$).
- $\mathtt{Hlava}(\mathtt{KPS}(K, k))$
  - $= \mathtt{Hlava}(K)$
    (podľa definície $\mathtt{KPS}$),
  - $= \mathtt{Hlava}(K) + 1 - 1$,
  - $= \mathtt{Hlava}(K) + \mathtt{N} - 1$,
  - $= \mathtt{Hlava}(K) + \mathtt{Posun}(I) - 1$
    (podľa definície $\mathtt{Posun}$).
- - $(\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(K, k)))(\mathtt{Hlava}(K))$
    - $= (\mathtt{Páska}(K))(\mathtt{Hlava}(K))$
      (podľa definície $\mathtt{KPS}$),
    - $= \mathtt{ČítanéPísmeno}(K)$
      (podľa definície $\mathtt{ČítanéPísmeno}$),
    - $= z$,
    - $= \mathtt{NovéPísmeno}(I)$
      (podľa definície $\mathtt{NovéPísmeno}$).
  - Nech $j \neq \mathtt{Hlava}(K)$. Potom platí:

$(\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(K, k)))(j)$

$= (\mathtt{Páska}(K))(j)$
(podľa definície KPS).

To spolu so sublemou **1** podľa definície menenia znamená, že I mení K na $\mathtt{KPS}(K, k)$.

3 $\boxed{\mathtt{Krok}(K, \mathtt{TestPísmena}_x) = \mathtt{KPS}(K, k).}$

Dokazované tvrdenie platí podľa definície Krok a sublemy **2**.

4 Neexistuje $\mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K, k), \mathtt{TestPísmena}_x)$.

Platí:

$\mathtt{Stav}(\mathtt{KPS}(K, k))$
$= k$
(podľa vety **4.8**),
$\notin \{0\}$
(lebo $k \in \{1, 2\}$),
$= \mathtt{HyperaktívneStavy}(\mathtt{TestPísmena}_x)$
(podľa vety **11** a definície poloúplného stroja).

Podľa viet **11** a **5.2** teda neexistuje $\mathtt{Krok}(\mathtt{KPS}(K, k), \mathtt{TestPísmena}_x)$.

5 $(K, \mathtt{KPS}(K, k))$ je konečný výpočet na $\mathtt{TestPísmena}_x$ z K.

Dokazované tvrdenie platí podľa definície konečného výpočtu a sublem **3** a **4**.

Potom platí:

- Rozoberme oba prípady:
  - Nech $z \neq x$ a $k = 2$.

    Potom platí:

    $\mathtt{Koniec}(K, \mathtt{TestPísmena}_x)$

    $= \mathtt{KPS}(K, k)$
    (podľa sublemy **5** a definície Koniec),

    $= \mathtt{KPS}(K, 2)$,

    $= \mathtt{KPS}(K, \mathtt{MS}(\mathtt{TestPísmena}_x))$
    (podľa vety **11**).

    Z toho už podľa definície $\overset{\mathtt{TestPísmena}_x}{\underset{-}{\dashrightarrow}}$ dostávame $K \overset{\mathtt{TestPísmena}_x}{\underset{-}{\dashrightarrow}} K$.
  - Nech $z = x$ a $k = 1$.

    Potom platí:

    $\mathtt{Koniec}(K, \mathtt{TestPísmena}_x)$

    $= \mathtt{KPS}(K, k)$
    (podľa sublemy **5** a definície Koniec),

    $= \mathtt{KPS}(K, 1)$,

    $= \mathtt{KPS}(K, 2 - 1)$,

    $= \mathtt{KPS}(K, \mathtt{MS}(\mathtt{TestPísmena}_x) - 1)$
    (podľa vety **11**).

    Z toho už podľa definície $\overset{\mathtt{TestPísmena}_x}{\underset{+}{\dashrightarrow}}$ dostávame $K \overset{\mathtt{TestPísmena}_x}{\underset{+}{\dashrightarrow}} K$.
- $\mathtt{Rozsah}(K, \mathtt{TestPísmena}_x)$
  $= \max\{\mathtt{Hlava}(K), \mathtt{Hlava}(\mathtt{KPS}(K, k))\}$
  (podľa sublemy **5** a definície Rozsah),

$= \max\{\texttt{Hlava}(K), \texttt{Hlava}(K)\}$
(podľa definície KPS),
$= \texttt{Hlava}(K)$.

1.8 Molekulárne Turingove stroje

Teraz z atomických Turingových strojov poskladáme niektoré zložitejšie, ktoré potom budeme aplikovať výlučne na blokové konfigurácie:

P Polohu hlavy v blokovej konfigurácii budeme zdôrazňovať zvislou červenou čiarou medzi tými vstupmi (resp. pred prvý alebo za posledný), medzi blokmi ktorých sa hlava nachádza, t. j. $\mathrm{BK}_i^n(x_1, \dots, x_n)$ budeme alternatívne zapisovať $\mathrm{BK}_i^n(x_1, \dots, x_i, |x_{i+1}, \dots, x_n)$.

I
- $\mathrm{BK}_0^3(|2, 0, 3)$ bude znamenať $\mathrm{BK}_0^3(2, 0, 3)$.
- $\mathrm{BK}_1^3(2, |0, 3)$ bude znamenať $\mathrm{BK}_1^3(2, 0, 3)$.
- $\mathrm{BK}_2^3(2, 0, |3)$ bude znamenať $\mathrm{BK}_2^3(2, 0, 3)$.
- $\mathrm{BK}_3^3(2, 0, 3|)$ bude znamenať $\mathrm{BK}_3^3(2, 0, 3)$.

P Ak pre i z $\{0, \dots, n\}$ platí $a_i \in$ Slová a $h \leq n$, konfiguráciu $\mathrm{KNS}(h, a_0 \dots a_n \mathtt{0}\!\rightarrow)$ budeme alternatívne zapisovať $\mathrm{KNS}(h, a_0 \dots a_{h-1} a_h a_{h+1} \dots a_n \mathtt{0}\!\rightarrow)$, čiže farebne zvýrazníme písmeno, na ktorom stojí hlava (ak bude zrejmé, ktoré to je).

D Označme ChoďOBlokDoprava stroj

$$\mathrm{Sekvencia}^2(\mathrm{PosuňSa}_{\mathrm{R}}, \mathrm{PrejdiPísmená}_{\mathrm{R},1,1}).$$

P Stroj ChoďOBlokDoprava teda obsahuje tieto inštrukcie:

$\mathrm{PosuňSa}_{\mathrm{R}}$:	$s_0 \mathtt{00R} s_1, s_0 \mathtt{11R} s_1$
$\mathrm{SPS}(\mathrm{PrejdiPísmená}_{\mathrm{R},1,1}, 1)$:	$s_1 \mathtt{11R} s_1, s_1 \mathtt{00N} s_2$

V **1**

Stroj ChoďOBlokDoprava je úplný.

Je to dôsledok definície ChoďOBlokDoprava, viet **7.3** a **7.7** a definície $\mathrm{Sekvencia}^2$.

I Na stroji ChoďOBlokDoprava vyzerá výpočet z konfigurácie $\mathrm{BK}_1^4(1, |2, 3, 1)$

s_0	0	1	1	**0**	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	⋯

takto:

s_0	0	1	1	**0**	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	⋯
s_1	0	1	1	0	**1**	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	⋯
s_1	0	1	1	0	1	**1**	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	⋯
s_1	0	1	1	0	1	1	**1**	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	⋯
s_1	0	1	1	0	1	1	1	**0**	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	⋯
s_2	0	1	1	0	1	1	1	**0**	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	⋯

Výsledná konfigurácia je $\mathrm{KPS}(\mathrm{BK}_2^4(1, 2, |3, 1), 2)$, hlava sa teda presunula na nulu pred pravý susedný blok.

V $\boxed{2}$

> Nech $x \in \mathbb{N}$. Potom platí:
> - $\mathtt{BK}_0^1(|x) \xrightarrow{\mathtt{ChoďOBlokDoprava}} \mathtt{BK}_1^1(x|)$.
> - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{BK}_0^1(|x), \mathtt{ChoďOBlokDoprava}) = x + 2$.

Platí:

$\mathtt{BK}_0^1(|x) = \mathtt{KNS}(0, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(0, \mathtt{011}^{x}\mathtt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **2.33**),

$\xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}} \mathtt{KNS}(1, \mathtt{011}^{x}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(1, \mathtt{011}^{x}\mathtt{00}\!\rightarrow)$

(podľa viet **7.5** a **2.30**),

$\xrightarrow{\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},1,1}} \mathtt{KNS}(x + 2, \mathtt{011}^{x}\mathtt{00}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x + 2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{BK}_1^1(x|)$

(podľa viet **7.9**, **2.30** a **2.33**).

Z toho dostávame:

- Podľa vety **5.13** a definície $\mathtt{ChoďOBlokDoprava}$ platí $\mathtt{BK}_0^1(|x) \xrightarrow{\mathtt{ChoďOBlokDoprava}} \mathtt{BK}_1^1(x|)$.
- Platí:
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(0, \mathtt{011}^{x}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}) = 1$ podľa vety **7.5**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(1, \mathtt{011}^{x}\mathtt{00}\!\rightarrow), \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},1,1}) = x + 2$ podľa vety **7.9**.

  Podľa vety **5.13** a definície $\mathtt{ChoďOBlokDoprava}$ teda $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{BK}_0^1(|x), \mathtt{ChoďOBlokDoprava}) = x + 2$.

V $\boxed{3}$

> Nech $x \in \mathbb{N}$. Nech $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ a $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{N}$. Potom platí
>
> $$\mathtt{BK}_n^{n+m+1}(a_1, \dots, a_n, |x, b_1, \dots, b_m) \xrightarrow{\mathtt{ChoďOBlokDoprava}} \mathtt{BK}_{n+1}^{n+m+1}(a_1, \dots, a_n, x, |b_1, \dots, b_m).$$

Je to dôsledok viet **2** a **6.17**.

D Označme $\mathtt{ChoďOBlokDoľava}$ stroj

$$\mathtt{Sekvencia}^2(\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}, \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}).$$

P Stroj $\mathtt{ChoďOBlokDoľava}$ teda obsahuje tieto inštrukcie:

$\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}$:	$\mathtt{s}_0\mathtt{00Ls}_1, \mathtt{s}_0\mathtt{11Ls}_1$
$\mathtt{SPS}(\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}, 1)$:	$\mathtt{s}_1\mathtt{11Ls}_1, \mathtt{s}_1\mathtt{00Ns}_2$

V $\boxed{4}$

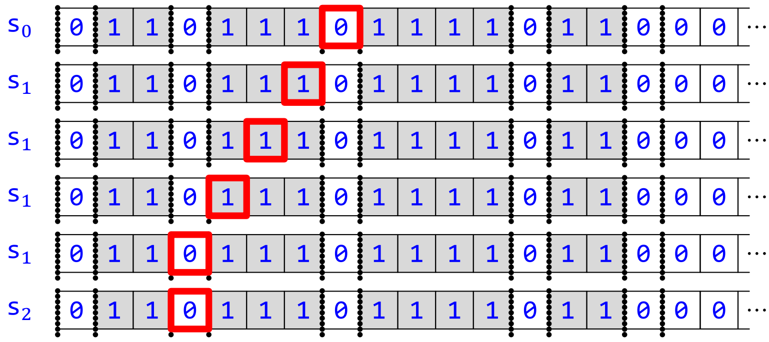
> Stroj $\mathtt{ChoďOBlokDoľava}$ je úplný.

Je to dôsledok definície $\mathtt{ChoďOBlokDoľava}$, viet **7.3** a **7.7** a definície $\mathtt{Sekvencia}^2$.

I Na stroji $\mathtt{ChoďOBlokDoľava}$ vyzerá výpočet z konfigurácie $\mathtt{BK}_2^4(1, 2, |3, 1)$

$\mathtt{s}_0$	0	1	1	0	1	1	1	**0**	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	…

takto:



Výsledná konfigurácia je $\mathtt{KPS}(\mathtt{BK}_1^4(1, |2, 3, 1), 2)$, hlava sa teda presunula na nulu pred ľavý susedný blok.

V 5

> Nech $x \in \mathbb{N}$. Potom platí:
> - $\mathtt{BK}_1^1(x|) \overset{\mathtt{ChoďOBlokDoľava}}{\dashrightarrow} \mathtt{BK}_0^1(|x)$.
> - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{BK}_1^1(x|), \mathtt{ChoďOBlokDoľava}) = x + 2$.

Platí:

$\mathtt{BK}_1^1(x|) = \mathtt{KNS}(x + 2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{0}\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x + 2, \mathtt{01}^{x}\mathtt{100}\rightarrow)$
(podľa viet **2.33** a **2.30**),

$\overset{\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x + 1, \mathtt{01}^{x}\mathtt{100}\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x + 1, \mathtt{01}^{x}\mathtt{10}\rightarrow)$
(podľa viet **7.6** a **2.30**),

$\overset{\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(0, \mathtt{01}^{x}\mathtt{10}\rightarrow) = \mathtt{KNS}(0, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{0}\rightarrow) = \mathtt{BK}_0^1(|x)$
(podľa viet **7.10** a **2.33**).

Z toho dostávame:

- Podľa vety **5.13** a definície ChoďOBlokDoľava platí $\mathtt{BK}_1^1(x|) \overset{\mathtt{ChoďOBlokDoľava}}{\dashrightarrow} \mathtt{BK}_0^1(|x)$.
- Platí:
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x + 2, \mathtt{01}^{x}\mathtt{100}\rightarrow), \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}) = x + 2$ podľa vety **7.6**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x + 1, \mathtt{01}^{x}\mathtt{10}\rightarrow, \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}) = x + 1$ podľa vety **7.10**.

  Podľa vety **5.13** a definície ChoďOBlokDoľava teda $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{BK}_1^1(x|), \mathtt{ChoďOBlokDoľava}) = x + 2$.

V 6

> Nech $x \in \mathbb{N}$. Nech $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ a $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{N}$. Potom platí
>
> $$\mathtt{BK}_{n+1}^{n+m+1}(a_1, \dots, a_n, x, |b_1, \dots, b_m) \overset{\mathtt{ChoďOBlokDoľava}}{\dashrightarrow} \mathtt{BK}_{n}^{n+m+1}(a_1, \dots, a_n, |x, b_1, \dots, b_m).$$

Je to dôsledok viet **5** a **6.17**.

D Označme VymažPoslednýBlok stroj

$$\mathtt{Sekvencia}^2(\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}, \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,0}).$$

P Stroj VymažPoslednýBlok teda obsahuje tieto inštrukcie:

$\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}$:	$\mathtt{s}_0\mathtt{00Ls}_1, \mathtt{s}_0\mathtt{11Ls}_1$
$\mathtt{SPS}(\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,0}, 1)$:	$\mathtt{s}_1\mathtt{10Ls}_1, \mathtt{s}_1\mathtt{00Ns}_2$

V 7

> Stroj VymažPoslednýBlok je úplný.

Je to dôsledok definície **VymažPoslednýBlok**, viet **7.3** a **7.7** a definície $\mathtt{Sekvencia}^2$.

I Na stroji VymažPoslednýBlok vyzerá výpočet z konfigurácie $\mathsf{BK}^2_2(2, 3|)$

s_0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	0	…

takto:

s_0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	0	…
s_1	0	1	1	1	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	0	…
s_1	0	1	1	1	0	1	1	$\boxed{1}$	0	0	0	0	…
s_1	0	1	1	1	0	1	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	…
s_1	0	1	1	1	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	0	…
s_1	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0	0	0	…
s_2	0	1	1	1	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0	0	0	…

Výsledná konfigurácia je $\mathsf{KPS}(\mathsf{BK}^1_1(2|), 2)$, stroj teda vymazal posledný blok jednotiek.

V $\boxed{8}$

> Nech $x \in \mathbb{N}$. Potom platí
> $$\mathsf{BK}^1_1(x|) \xrightarrow{\mathtt{VymažPoslednýBlok}} \mathsf{BK}^0_0(|).$$

Platí:

$\mathsf{BK}^1_1(x|) = \mathsf{KNS}(x + 2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{0}{\rightarrow}) = \mathsf{KNS}(x + 2, \mathtt{01}^{x}\mathtt{100}{\rightarrow})$
(podľa viet **2.33** a **2.30**),

$\xrightarrow{\mathtt{PosuňSa_L}} \mathsf{KNS}(x + 1, \mathtt{01}^{x}\mathtt{100}{\rightarrow}) = \mathsf{KNS}(x + 1, \mathtt{01}^{x}\mathtt{10}{\rightarrow})$
(podľa vety **7.6**),

$\xrightarrow{\mathtt{PrejdiPísmená_{L,1,0}}} \mathsf{KNS}(0, \mathtt{00}^{x}\mathtt{00}{\rightarrow}) = \mathsf{KNS}(0, \mathtt{0}^{x+2}\mathtt{0}{\rightarrow}) = \mathsf{KNS}(0, \mathtt{0}{\rightarrow}) = \mathsf{BK}^0_0(|)$
(podľa viet **7.8**, **2.29** a **2.33**).

Z toho podľa vety **5.13** a definície **VymažPoslednýBlok** dostávame $\mathsf{BK}^1_1(x|) \xrightarrow{\mathtt{VymažPoslednýBlok}} \mathsf{BK}^0_0(|)$.

V $\boxed{9}$

> Nech $x \in \mathbb{N}$. Nech $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Potom platí
> $$\mathsf{BK}^{n+1}_{n+1}(a_1, \dots, a_n, x|) \xrightarrow{\mathtt{VymažPoslednýBlok}} \mathsf{BK}^n_n(a_1, \dots, a_n|).$$

Je to dôsledok viet **8** a **6.16**.

D Označme InkrementujPoslednýBlok stroj

$$\mathtt{Sekvencia}^2(\mathtt{ZmeňPísmeno_1}, \mathtt{PosuňSa_R}).$$

P Stroj InkrementujPoslednýBlok teda obsahuje tieto inštrukcie:

$\mathtt{ZmeňPísmeno_1}$:	$s_0\mathtt{01N}s_1, s_0\mathtt{11N}s_1$
$\mathsf{SPS}(\mathtt{PosuňSa_R}, 1)$:	$s_1\mathtt{00R}s_2, s_1\mathtt{11R}s_2$

V **10**

Stroj InkrementujPoslednýBlok je úplný.

Je to dôsledok definície InkrementujPoslednýBlok, viet **7.1** a **7.3** a definície $\mathtt{Sekvencia}^2$.

I Na stroji InkrementujPoslednýBlok vyzerá výpočet z konfigurácie $\mathrm{BK}_2^2(2, 3|)$

s_0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	0	0	⋯

takto:

s_0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	0	0	⋯
s_1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	0	⋯
s_2	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	0	⋯

Výsledná konfigurácia je $\mathrm{SPS}(\mathrm{BK}_2^2(2, 4|), 2)$, stroj teda posledný blok predĺžil o jednu jednotku a hlavu nastavil opäť za koniec (už upraveného) posledného bloku.

V **11**

Nech $x \in \mathbb{N}$. Potom platí
$$\mathrm{BK}_1^1(x|) \overset{\mathtt{InkrementujPoslednýBlok}}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}_1^1(x+1|).$$

Platí:

$\mathrm{BK}_1^1(x|) = \mathrm{KNS}(x+2, 01^{x+1}0{\to}) = \mathrm{KNS}(x+2, 01^{x+1}00{\to})$
(podľa viet **2.33** a **2.30**),

$\overset{\mathtt{ZmeňPísmeno}_1}{\dashrightarrow} \mathrm{KNS}(x+2, 01^{x+1}10{\to}) = \mathrm{KNS}(x+2, 01^{x+1}100{\to})$
(podľa viet **7.2** a **2.30**),

$\overset{\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}}{\dashrightarrow} \mathrm{KNS}(x+3, 01^{x+1}100{\to}) = \mathrm{KNS}(x+3, 01^{x+2}0{\to}) = \mathrm{BK}_1^1(x+1|)$
(podľa viet **7.5**, **2.30** a **2.33**).

Z toho podľa vety **5.13** a definície InkrementujPoslednýBlok $\mathrm{BK}_1^1(x|) \overset{\mathtt{InkrementujPoslednýBlok}}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}_1^1(x+1|)$.

V **12**

Nech $x \in \mathbb{N}$. Nech $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Potom platí
$$\mathrm{BK}_{n+1}^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, x|) \overset{\mathtt{InkrementujPoslednýBlok}}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}_{n+1}^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, x+1|).$$

Je to dôsledok viet **11** a **6.16**.

D Označme PridajNulovýBlok (úplný) stroj
$$\mathtt{Sekvencia}^3(\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}, \mathtt{ZmeňPísmeno}_1, \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}).$$

P Stroj PridajNulovýBlok teda obsahuje tieto inštrukcie:

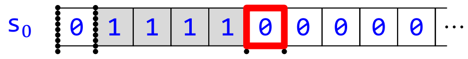
$\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}$:	$s_0 00 R s_1$, $s_0 11 R s_1$
$\mathrm{SPS}(\mathtt{ZmeňPísmeno}_1, 1)$:	$s_1 01 N s_2$, $s_1 11 N s_2$
$\mathrm{SPS}(\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}, 2)$:	$s_2 00 L s_3$, $s_2 11 L s_3$

V **13**

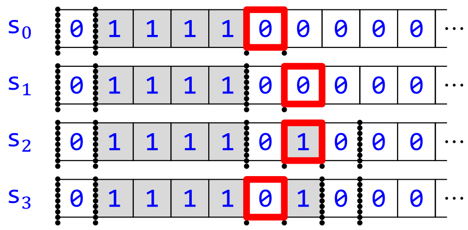
Stroj PridajNulovýBlok je úplný.

Je to dôsledok definície PridajNulovýBlok, viet **7.3**, **7.1** a **7.3** a definície $\mathsf{Sekvencia}^3$.

I Na stroji PridajNulovýBlok vyzerá výpočet z konfigurácie $\mathsf{BK}_1^1(3|)$



takto:



Výsledná konfigurácia je $\mathsf{SPS}(\mathsf{BK}_1^2(3,|0),3)$, stroj teda úplne vpravo vytvoril nový nulový blok a ostal na pôvodnom mieste.

V **14**

$$\mathsf{BK}_0^0(|) \xrightarrow{\text{PridajNulovýBlok}} \mathsf{BK}_0^1(|0).$$

Platí:

$\mathsf{BK}_0^0(|) = \mathsf{KNS}(0, 0\!\rightarrow) = \mathsf{KNS}(0, 000\!\rightarrow)$
(podľa viet **2.33** a **2.29**),

$\xrightarrow{\text{PosuňSa}_\text{R}} \mathsf{KNS}(1, 000\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.5**),

$\xrightarrow{\text{ZmeňPísmeno}_1} \mathsf{KNS}(1, 010\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.2**),

$\xrightarrow{\text{PosuňSa}_\text{L}} \mathsf{KNS}(0, 010\!\rightarrow) = \mathsf{BK}_0^1(|0)$
(podľa viet **7.6** a **2.33**).

Z toho podľa vety **5.13** a definície PridajNulovýBlok dostávame $\mathsf{BK}_0^0(|) \xrightarrow{\text{PridajNulovýBlok}} \mathsf{BK}_0^1(|0)$.

V **15**

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathsf{BK}_n^n(a_1, \dots, a_n|) \xrightarrow{\text{PridajNulovýBlok}} \mathsf{BK}_n^{n+1}(a_1, \dots, a_n, |0).$$

Je to dôsledok viet **14** a **6.16**.

D Označme SkopírujPoslednýBlok stroj $\mathsf{Sekvencia}^3(A, D, E)$, pričom platí:

- $A = \mathsf{PosuňSa}_\mathsf{L}$.
- $B = \mathsf{Sekvencia}^{11}(\mathsf{ZmeňPísmeno}_0, \mathsf{PosuňSa}_\mathsf{R}, \mathsf{PrejdiPísmená}_{\mathsf{R},1,1}, \mathsf{PosuňSa}_\mathsf{R}, \mathsf{PrejdiPísmená}_{\mathsf{R},1,1}, \mathsf{ZmeňPísmeno}_1, \mathsf{PrejdiPísmená}_{\mathsf{L},1,1}, \mathsf{PosuňSa}_\mathsf{L}, \mathsf{PrejdiPísmená}_{\mathsf{L},1,1}, \mathsf{ZmeňPísmeno}_1, \mathsf{PosuňSa}_\mathsf{L})$.
- $C = \mathsf{TestPísmena}_1 \odot B$.
- $D = \mathsf{Cyklus}(C)$.
- $E = \mathsf{Sekvencia}^2(\mathsf{PosuňSa}_\mathsf{R}, \mathsf{PrejdiPísmená}_{\mathsf{R},1,1})$.

P Stroj SkopírujPoslednýBlok teda obsahuje tieto inštrukcie:

A	0					PosuňSa$_L$	0	$s_{0}00Ls_{1}, s_{0}11Ls_{1}$
D	1	C	0	TestPísmena$_1$	0			$s_{1}00Ns_{3}, s_{1}11Ns_{2}$
				ZameňStav$_{1,3}$				$s_{2}00Ns_{4}, s_{2}11Ns_{4}$
				ZameňStav$_{2,15}$				$s_{3}00Ns_{16}, s_{3}11Ns_{16}$
				B	3	ZmeňPísmeno$_0$	0	$s_{4}00Ns_{5}, s_{4}10Ns_{5}$
						PosuňSa$_R$	1	$s_{5}00Rs_{6}, s_{5}11Rs_{6}$
						PrejdiPísmená$_{R,1,1}$	2	$s_{6}00Ns_{7}, s_{6}11Rs_{6}$
						PosuňSa$_R$	3	$s_{7}00Rs_{8}, s_{7}11Rs_{8}$
						PrejdiPísmená$_{R,1,1}$	4	$s_{8}00Ns_{9}, s_{8}11Rs_{8}$
						ZmeňPísmeno$_1$	5	$s_{9}01Ns_{10}, s_{9}11Ns_{10}$
						PrejdiPísmená$_{L,1,1}$	6	$s_{10}00Ns_{11}, s_{10}11Ls_{10}$
						PosuňSa$_L$	7	$s_{11}00Ls_{12}, s_{11}11Ls_{12}$
						PrejdiPísmená$_{L,1,1}$	8	$s_{12}00Ns_{13}, s_{12}11Ls_{12}$
						ZmeňPísmeno$_1$	9	$s_{13}01Ns_{14}, s_{13}11Ns_{14}$
						PosuňSa$_L$	10	$s_{14}00Ls_{15}, s_{14}11Ls_{15}$
		ZameňStav$_{14,0}$						$s_{15}00Ns_{1}, s_{15}11Ns_{1}$
E	16					PosuňSa$_R$	0	$s_{16}00Rs_{17}, s_{16}11Rs_{17}$
						PrejdiPísmená$_{R,1,1}$	1	$s_{17}00Ns_{18}, s_{17}11Rs_{17}$

V $\boxed{16}$

Stroj SkopírujPoslednýBlok je úplný.

Nech A, B, C, D a E sú stroje z definície SkopírujPoslednýBlok. Potom postupne platí:

A je úplný
(podľa vety **7.3**),

B je úplný
(podľa viet **7.1**, **7.1**, **7.3**, **7.3**, **7.7** a **7.7** a definície Sekvencia^{11}),

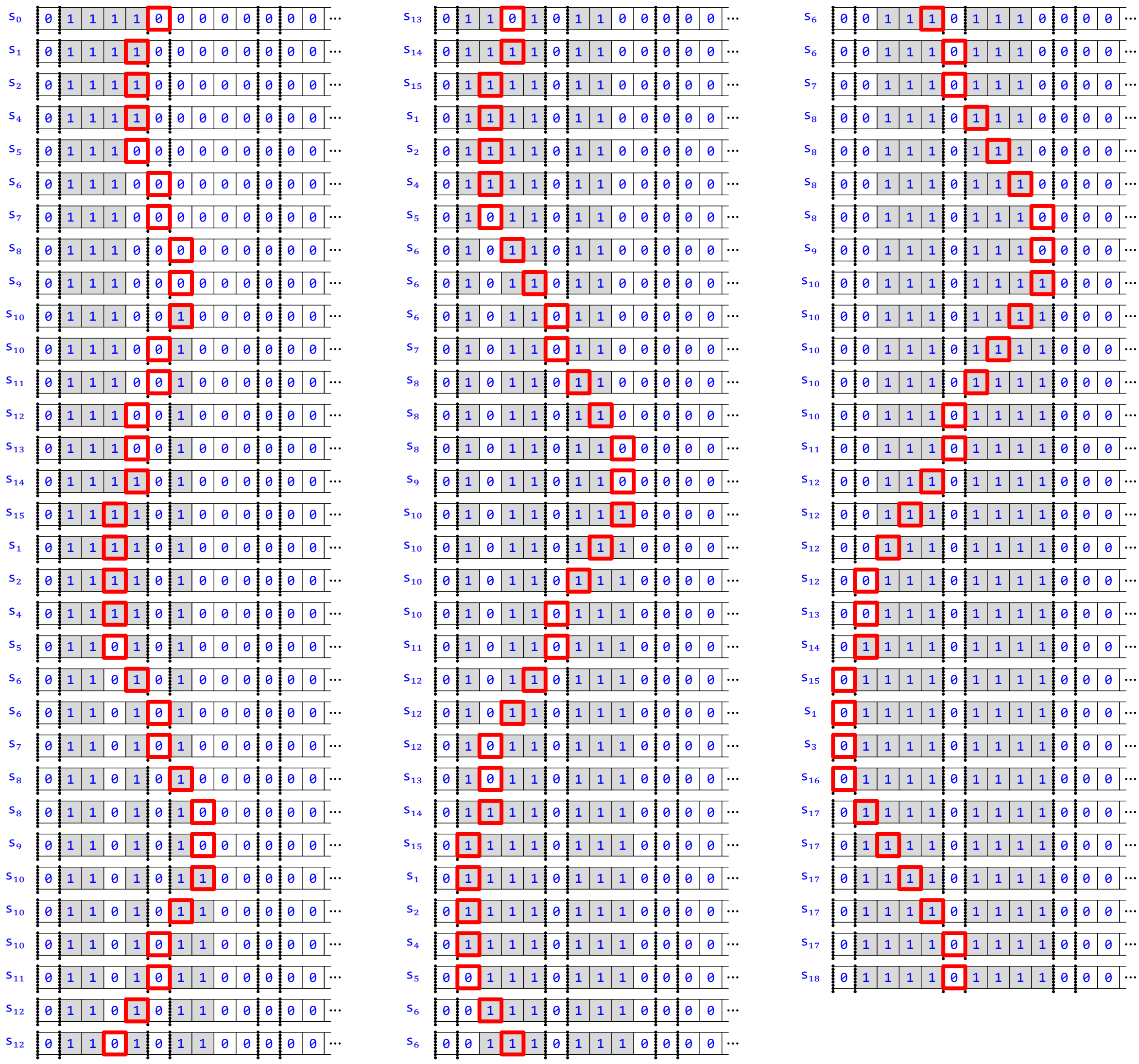
C je poloúplný
(podľa viet **7.11** a **5.19**),

D je úplný
(podľa vety **5.24**),

E je úplný
(podľa vety **1**, lebo podľa definície ChoďOBlokDoprava platí E = ChoďOBlokDoprava),

SkopírujPoslednýBlok je úplný
(podľa definície Sekvencia^{3}).

I Na stroji SkopírujPoslednýBlok vyzerá výpočet z konfigurácie $BK_1^1(3|)$ takto:



Výsledná konfigurácia je presne $\mathsf{KPS}(\mathsf{BK}_1^2(3, |3), 18)$, stroj teda skopíroval posledný blok do nového za ním a nastavil sa medzi ne na pôvodné miesto.

P Ako vidíme, stroj prechádza pôvodným blokom doľava, pričom si svoju polohu značí „jamkou", ktorú postupne posúva. Medzi každými dvoma jej posunmi „si odskočí" zväčšiť nový blok o jednu jednotku, takže keď prejde celým pôvodným blokom (čo zistí pravidelným testovaním v stave $\mathtt{s}_1$), vznikne rovnako dlhý nový.

V **17**

Nech $x \in \mathbb{N}$. Potom platí
$$\mathsf{BK}_1^1(x|) \xrightarrow{\mathtt{SkopírujPoslednýBlok}} \mathsf{BK}_1^2(x, |x).$$

Nech A, B, C, D a E sú stroje z definície `SkopírujPoslednýBlok`. Nech pre i z $\{0, \dots, x+1\}$ platí
$$K^i = \mathsf{KNS}(x + 1 - i, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^i\mathtt{0}\!\rightarrow).$$

1 $\mathsf{BK}_1^1(x|) \xrightarrow{A} K^0.$

Platí:
$\mathsf{BK}_1^1(x|) = \mathsf{KNS}(x + 2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathsf{KNS}(x + 2, \mathtt{01}^{x}\mathtt{100}\!\rightarrow)$
(podľa viet **2.33** a **2.30**),

$\xrightarrow{\texttt{PosuňSa}_{\texttt{L}}}$ $\texttt{KNS}(x+1, \texttt{01}^{x}\texttt{100}\!\rightarrow) = \texttt{KNS}(x+1, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{0}\texttt{0}\!\rightarrow) = K^0$
(podľa vety **7.6**).

Podľa definície A dostávame $\texttt{BK}_1^1(x|) \xrightarrow{A} K^0$.

2 Ak $i \in \{0, \dots, x\}$, tak $K^i \xrightarrow{B} K^{i+1}$.

Platí:

$K^i = \texttt{KNS}(x+1-i, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{i}\texttt{0}\!\rightarrow) = \texttt{KNS}(x+1-i, \texttt{01}^{x-i}\texttt{11}^{i}\texttt{01}^{i}\texttt{0}\!\rightarrow)$,

$\xrightarrow{\texttt{ZmeňPísmeno}_{\texttt{0}}}$ $\texttt{KNS}(x+1-i, \texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i}\texttt{01}^{i}\texttt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.2**),

$\xrightarrow{\texttt{PosuňSa}_{\texttt{R}}}$ $\texttt{KNS}(x+2-i, \texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i}\texttt{01}^{i}\texttt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.5**),

$\xrightarrow{\texttt{PrejdiPísmená}_{\texttt{R},1,1}}$ $\texttt{KNS}(x+2, \texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i}\texttt{01}^{i}\texttt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.9**),

$\xrightarrow{\texttt{PosuňSa}_{\texttt{R}}}$ $\texttt{KNS}(x+3, \texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i}\texttt{01}^{i}\texttt{0}\!\rightarrow) = \texttt{KNS}(x+3, \texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i}\texttt{01}^{i}\texttt{00}\!\rightarrow)$
(podľa viet **7.5** a **2.30**),

$\xrightarrow{\texttt{PrejdiPísmená}_{\texttt{R},1,1}}$ $\texttt{KNS}(x+3+i, \texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i}\texttt{01}^{i}\texttt{00}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.9**),

$\xrightarrow{\texttt{ZmeňPísmeno}_{\texttt{1}}}$ $\texttt{KNS}(x+3+i, \texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i}\texttt{01}^{i}\texttt{10}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.2**),

$\xrightarrow{\texttt{PrejdiPísmená}_{\texttt{L},1,1}}$ $\texttt{KNS}(x+2, \texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i}\texttt{01}^{i}\texttt{10}\!\rightarrow) = \texttt{KNS}(x+2, \texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i}\texttt{01}^{i+1}\texttt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.10**),

$\xrightarrow{\texttt{PosuňSa}_{\texttt{L}}}$ $\texttt{KNS}(x+1, \texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i}\texttt{01}^{i+1}\texttt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.6**),

$\xrightarrow{\texttt{PrejdiPísmená}_{\texttt{L},1,1}}$ $\texttt{KNS}(x-i+1, \texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i}\texttt{01}^{i+1}\texttt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.10**),

$\xrightarrow{\texttt{ZmeňPísmeno}_{\texttt{1}}}$ $\texttt{KNS}(x-i+1, \texttt{01}^{x-i}\texttt{11}^{i}\texttt{01}^{i+1}\texttt{0}\!\rightarrow) = \texttt{KNS}(x-i+1, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.2**),

$\xrightarrow{\texttt{PosuňSa}_{\texttt{L}}}$ $\texttt{KNS}(x-i, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{0}\!\rightarrow) = K^{i+1}$
(podľa vety **7.6**).

Z toho podľa vety **5.13** a definície B dostávame $K^i \xrightarrow{B} K^{i+1}$.

3 Pre každé i z $\{0, \dots, x\}$ platí $\texttt{ČítanéPísmeno}(K^i) = \texttt{1}$.

$\texttt{ČítanéPísmeno}(K^i)$
$= (\texttt{Páska}(K^i))(\texttt{Hlava}(K^i))$
(podľa definície ČítanéPísmeno),
$= (\texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{i}\texttt{0}\!\rightarrow)(x+1-i)$
(podľa definícií KNS, Páska a Hlava),
$= \texttt{1}$.

4 $\texttt{ČítanéPísmeno}(K^{x+1}) = \texttt{0}$.

$\texttt{ČítanéPísmeno}(K^{x+1})$
$= (\texttt{Páska}(K^{x+1}))(\texttt{Hlava}(K^{x+1}))$
(podľa definície ČítanéPísmeno),
$= (\texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{x+1}\texttt{0}\!\rightarrow)(0)$
(podľa definícií KNS, Páska a Hlava),
$= \texttt{0}$.

5 $\boxed{K^0 \overset{D}{\dashrightarrow} K^{x+1}.}$

Podľa vety **7.12** a sublemy **3** pre každé i z $\{0, \dots, x\}$ platí $K^i \overset{\mathtt{TestPísmena}_1}{\dashrightarrow_{+}} K^i$, podľa vety **7.12** a sublemy **4** platí $K^{x+1} \overset{\mathtt{TestPísmena}_1}{\dashrightarrow_{-}} K^{x+1}$. Keďže navyše platí sublema **2**, sú splnené podmienky vety **5.26**. Z nej už podľa definícií C a D dostávame $K^0 \overset{D}{\dashrightarrow} K^{x+1}$.

6 $\boxed{K^{x+1} \overset{E}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}_1^2(x, |x).}$

Platí:
$K^{x+1} = \mathtt{KNS}(0, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{x+1}\mathtt{0}\!\to) = \mathrm{BK}_0^2(|x, x)$
(podľa vety **2.33**),
$\overset{E}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}_1^2(x, |x)$
(podľa vety **3**, lebo podľa definícií E a ChoďOBlokDoprava platí $E =$ ChoďOBlokDoprava).

Podľa definície SkopírujPoslednýBlok už zo sublem **1**, **5** a **6** už podľa vety **5.13** dostávame dokazované tvrdenie.

V $\boxed{18}$

Nech $x \in \mathbb{N}$. Nech $n \in \mathbb{N}$, a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathrm{BK}_{n+1}^{n+1}(a_1, \dots, a_n, x|) \overset{\mathtt{SkopírujPoslednýBlok}}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}_{n+1}^{n+2}(a_1, \dots, a_n, x, |x).$$

Je to dôsledok viet **17** a **6.16**.

D Označme VymeňSusednéBloky stroj $\mathtt{Sekvencia}^3(A, D, E)$, pričom platí:

- $A = \mathtt{Sekvencia}^8(\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}, \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},1,1}, \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}, \mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{0}, \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}, \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}, \mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{1}, \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L})$.
- $B = \mathtt{Sekvencia}^{10}(\mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{0}, \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}, \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},1,1}, \mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{1}, \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}, \mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{0}, \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}, \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}, \mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{1}, \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L})$.
- $C = \mathtt{TestPísmena}_\mathtt{1} \odot B$.
- $D = \mathtt{Cyklus}(C)$.
- $E = \mathtt{Sekvencia}^2(\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}, \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},1,1})$.

P Všimnime si, že podľa definície ChoďOBlokDoprava platí $E =$ ChoďOBlokDoprava.

P Stroj VymeňSusednéBloky teda obsahuje tieto inštrukcie:

A	0					PosuňSa$_{R}$	0	$s_0 00Rs_1, s_0 11Rs_1$
						PrejdiPísmená$_{R,1,1}$	1	$s_1 00Ns_2, s_1 11Rs_1$
						PosuňSa$_{L}$	2	$s_2 00Ls_3, s_2 11Ls_3$
						ZmeňPísmeno$_{0}$	3	$s_3 00Ns_4, s_3 10Ns_4$
						PosuňSa$_{L}$	4	$s_4 00Ls_5, s_4 11Ls_5$
						PrejdiPísmená$_{L,1,1}$	5	$s_5 00Ns_6, s_5 11Ls_5$
						ZmeňPísmeno$_{1}$	6	$s_6 01Ns_7, s_6 11Ns_7$
						PosuňSa$_{L}$	7	$s_7 00Ls_8, s_7 11Ls_8$
D	8	C	0	TestPísmena$_{1}$	0			$s_8 00Ns_{10}, s_8 11Ns_9$
				ZameňStav$_{1,3}$				$s_9 00Ns_{11}, s_9 11Ns_{11}$
				ZameňStav$_{2,14}$				$s_{10} 00Ns_{22}, s_{10} 11Ns_{22}$
				B	5	ZmeňPísmeno$_{0}$	0	$s_{11} 00Ns_{12}, s_{11} 10Ns_{12}$
						PosuňSa$_{R}$	1	$s_{12} 00Rs_{13}, s_{12} 11Rs_{13}$
						PrejdiPísmená$_{R,1,1}$	2	$s_{13} 00Ns_{14}, s_{13} 11Rs_{13}$
						ZmeňPísmeno$_{1}$	3	$s_{14} 01Ns_{15}, s_{14} 11Ns_{15}$
						PosuňSa$_{L}$	4	$s_{15} 00Ls_{16}, s_{15} 11Ls_{16}$
						ZmeňPísmeno$_{0}$	5	$s_{16} 00Ns_{17}, s_{16} 10Ns_{17}$
						PosuňSa$_{L}$	6	$s_{17} 00Ls_{18}, s_{17} 11Ls_{18}$
						PrejdiPísmená$_{L,1,1}$	7	$s_{18} 00Ns_{19}, s_{18} 11Ls_{18}$
						ZmeňPísmeno$_{1}$	8	$s_{19} 01Ns_{20}, s_{19} 11Ns_{20}$
						PosuňSa$_{L}$	9	$s_{20} 00Ls_{21}, s_{20} 11Ls_{21}$
		ZameňStav$_{13,0}$						$s_{21} 00Ns_8, s_{21} 11Ns_8$
E	21					PosuňSa$_{R}$	0	$s_{22} 00Rs_{23}, s_{22} 11Rs_{23}$
						PrejdiPísmená$_{R,1,1}$	1	$s_{23} 00Ns_{24}, s_{23} 11Rs_{23}$

V $\boxed{19}$

Stroj VymeňSusednéBloky je úplný.

Nech A, B, C, D a E sú stroje z definície VymeňSusednéBloky. Potom postupne platí:

A je úplný
(podľa viet **7.1**, **7.1** **7.3**, **7.3**, **7.7** a **7.7** a definície Sekvencia^{8}),

B je úplný
(podľa viet **7.1**, **7.1**, **7.3**, **7.3**, **7.7** a **7.7** a definície Sekvencia^{10}),

C je poloúplný
(podľa viet **7.11** a **5.19**),

D je úplný
(podľa vety **5.24**),

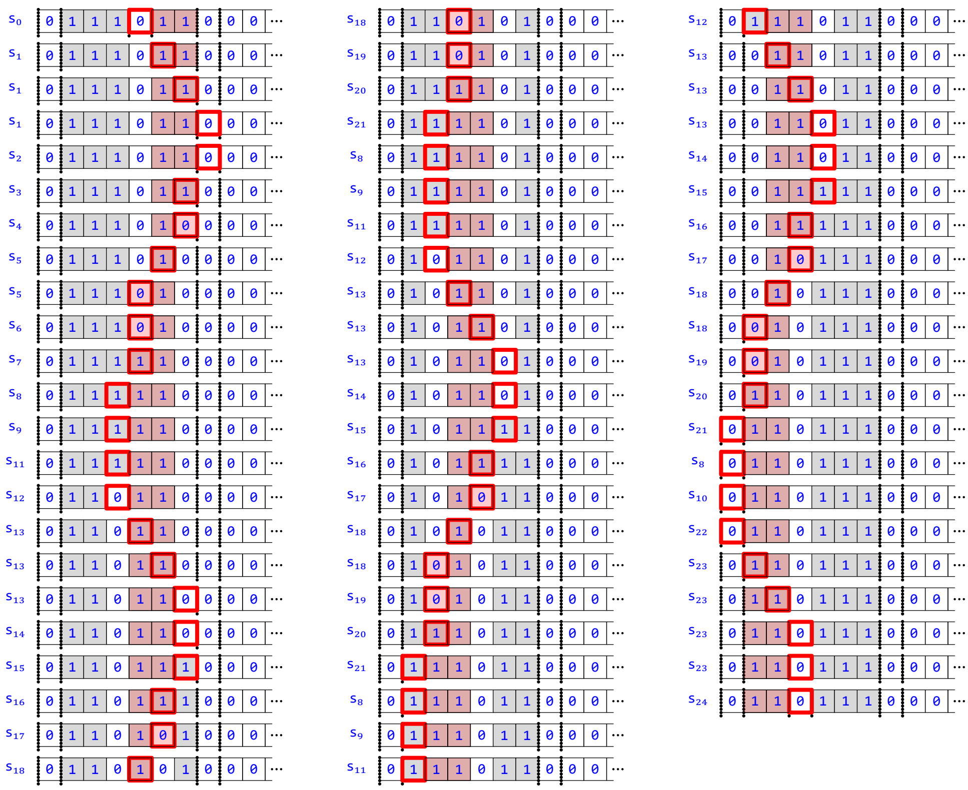
E je úplný
(podľa vety **1**, lebo podľa definície ChoďOBlokDoprava platí E = ChoďOBlokDoprava),

VymeňSusednéBloky je úplný
(podľa definície Sekvencia^{3}).

I Na stroji VymeňSusednéBloky vyzerá výpočet z konfigurácie BK$_1^2$(2, |1)

s_0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	⋯

takto:



Výsledná konfigurácia je presne $\mathtt{KPS}(\mathtt{BK}^2_1(1,|2),24)$.

P Stroj teda vymení dva bloky okolo hlavy. Pravý (ktorý je na ilustračnom príklade podfarbený) v priebehu výpočtu putuje na miesto ľavého. Ten postupne zaniká a namiesto neho sa vytvára ďalší blok vpravo od doľava sa posúvajúceho pôvodne pravého.

Uvedomme si pritom, že vzhľadom na nemennú dĺžku celého „dvojbloku“ musí byť na konci tohto procesu novovytvorený blok rovnako veľký, ako bol pôvodne ľavý, zanikajúci blok.

Všimnime si tiež dôležitý fakt, že počas výpočtu priestor nášho pôvodného dvojbloku opustíme len raz, aj to len na susedné políčko, ktoré dokonca ani nemodifikujeme.

V $\boxed{20}$

Nech $x, y \in \mathbb{N}$. Potom platí:
- $\mathtt{BK}^2_1(x,|y) \overset{\mathtt{VymeňSusednéBloky}}{\dashrightarrow} \mathtt{BK}^2_1(y,|x)$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{BK}^2_1(x,|y),\mathtt{VymeňSusednéBloky}) = x+y+4$.

Nech A, B, C, D a E sú stroje z a definície $\mathtt{VymeňSusednéBloky}$. Nech pre i z $\{0,\dots,x+1\}$ platí

$$K^i = \mathtt{KNS}(x+1-i, \mathtt{01}^{x+y+2-i}\mathtt{01}^i\mathtt{0}\!\to).$$

1
- $\mathtt{BK}^2_1(x,|y) \overset{A}{\dashrightarrow} K^0$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{BK}^2_1(x,|y),A) = x+y+4$.

Platí:

$\mathtt{BK}^2_1(x,|y) = \mathtt{KNS}(x+2,\mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}\!\to) = \mathtt{KNS}(x+2,\mathtt{01}^{x+1}\mathtt{011}^{y}\mathtt{0}\!\to)$
(podľa vety **2.33**),

$\overset{\mathtt{PosuňSa}_R}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+3,\mathtt{01}^{x+1}\mathtt{011}^{y}\mathtt{0}\!\to) = \mathtt{KNS}(x+3,\mathtt{01}^{x+1}\mathtt{011}^{y}\mathtt{00}\!\to)$
(podľa viet **7.5** a **2.30**),

$\overset{\mathtt{PrejdiPísmená}_{R,1,1}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+y+4,\mathtt{01}^{x+1}\mathtt{011}^{y}\mathtt{00}\!\to) = \mathtt{KNS}(x+y+4,\mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y}\mathtt{100}\!\to)$

(podľa vety **7.9**),
$\overset{\text{PosuňSa}_\text{L}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+y+3, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y}\mathtt{100}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x+y+3, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y}\mathtt{10}\!\rightarrow)$
(podľa viet **7.6** a **2.30**),
$\overset{\text{ZmeňPísmeno}_0}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+y+3, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y}\mathtt{00}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.2**),
$\overset{\text{PosuňSa}_\text{L}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+y+2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y}\mathtt{00}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.6**),
$\overset{\text{PrejdiPísmená}_{\text{L},1,1}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y}\mathtt{00}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.10**),
$\overset{\text{ZmeňPísmeno}_1}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{11}^{y}\mathtt{00}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^{x}\mathtt{111}^{y}\mathtt{00}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.2**),
$\overset{\text{PosuňSa}_\text{L}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+1, \mathtt{01}^{x}\mathtt{111}^{y}\mathtt{00}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x+1, \mathtt{01}^{x+y+2}\mathtt{01}^{0}\mathtt{0}\!\rightarrow) = K^0$
(podľa vety **7.6**).

Potom platí:

- $\mathtt{BK}_1^2(x, |y) \overset{A}{\dashrightarrow} K^0$ podľa vety **5.13** a definície A.
- Platí:
  - $\text{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{011}^{y}\mathtt{0}\!\rightarrow), \text{PosuňSa}_\text{R}) = x+3$ podľa vety **7.5**.
  - $\text{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+3, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{011}^{y}\mathtt{0}\!\rightarrow), \text{PrejdiPísmená}_{\text{R},1,1}) = x+y+4$ podľa vety **7.9**.
  - $\text{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+y+4, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y}\mathtt{100}\!\rightarrow), \text{PosuňSa}_\text{L}) = x+y+4$ podľa vety **7.6**.
  - $\text{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+y+3, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y}\mathtt{10}\!\rightarrow), \text{ZmeňPísmeno}_0) = x+y+3$ podľa vety **7.2**.
  - $\text{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+y+3, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y}\mathtt{00}\!\rightarrow), \text{PosuňSa}_\text{L}) = x+y+3$ podľa vety **7.6**.
  - $\text{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+y+2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y}\mathtt{0}\!\rightarrow), \text{PrejdiPísmená}_{\text{L},1,1}) = x+y+2$ podľa vety **7.10**.
  - $\text{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y}\mathtt{0}\!\rightarrow), \text{ZmeňPísmeno}_1) = x+2$ podľa vety **7.2**.
  - $\text{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^{x}\mathtt{111}^{y}\mathtt{0}\!\rightarrow), \text{PosuňSa}_\text{L}) = x+2$ podľa vety **7.6**.

  Podľa vety **5.13** a definície A teda $\text{Rozsah}(\mathtt{BK}_1^2(x, |y), A) = x+y+4$.

2 Nech $i \in \{0, \dots, x\}$. Potom platí:
- $K^i \overset{B}{\dashrightarrow} K^{i+1}$.
- $\text{Rozsah}(K^i, B) = x+y+3-i$.

Platí:
$K^i = \mathtt{KNS}(x+1-i, \mathtt{01}^{x+y+2-i}\mathtt{01}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x+1-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{11}^{y+1}\mathtt{01}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow)$,
$\overset{\text{ZmeňPísmeno}_0}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+1-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{01}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x+1-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{011}^{y}\mathtt{01}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.2**),
$\overset{\text{PosuňSa}_\text{R}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+2-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{011}^{y}\mathtt{01}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.5**),
$\overset{\text{PrejdiPísmená}_{\text{R},1,1}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+y+3-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{011}^{y}\mathtt{01}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x+y+3-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{01}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.9**),
$\overset{\text{ZmeňPísmeno}_1}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+y+3-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{11}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x+y+3-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y}\mathtt{111}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.2**),
$\overset{\text{PosuňSa}_\text{L}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+y+2-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y}\mathtt{111}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x+y+2-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y}\mathtt{11}^{i+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.6**),
$\overset{\text{ZmeňPísmeno}_0}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+y+2-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y}\mathtt{01}^{i+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.2**),
$\overset{\text{PosuňSa}_\text{L}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(x+y+1-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y}\mathtt{01}^{i+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **7.6**),

$\overset{\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}}{\dashrightarrow}$ $\mathtt{KNS}(x+1-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y}\mathtt{01}^{i+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **7.10**),

$\overset{\mathtt{ZmeňPísmeno}_1}{\dashrightarrow}$ $\mathtt{KNS}(x+1-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{11}^{y}\mathtt{01}^{i+1}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x+1-i, \mathtt{01}^{x+y+1-i}\mathtt{01}^{i+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **7.2**),

$\overset{\mathtt{PosuňSa}_{\mathtt{L}}}{\dashrightarrow}$ $\mathtt{KNS}(x-i, \mathtt{01}^{x+y+1-i}\mathtt{01}^{i+1}\mathtt{0}\!\rightarrow) = K^{i+1}$

(podľa vety **7.6**).

Potom platí:

- $K^i \overset{B}{\dashrightarrow} K^{i+1}$ podľa vety **5.13** a definície B.
- Platí:
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+1-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{11}^{y+1}\mathtt{01}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{ZmeňPísmeno}_0) = x+1-i$ podľa vety **7.2**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+1-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{011}^{y}\mathtt{01}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{PosuňSa}_{\mathtt{R}}) = x+2-i$ podľa vety **7.5**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+2-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{011}^{y}\mathtt{01}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},1,1}) = x+y+3-i$ podľa vety **7.9**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+y+3-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{01}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{ZmeňPísmeno}_1) = x+y+3-i$ podľa vety **7.2**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+y+3-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y}\mathtt{111}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{PosuňSa}_{\mathtt{L}}) = x+y+3-i$ podľa vety **7.6**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+y+2-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y}\mathtt{11}^{i+1}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{ZmeňPísmeno}_0) = x+y+2-i$ podľa vety **7.2**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+y+2-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y}\mathtt{01}^{i+1}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{PosuňSa}_{\mathtt{L}}) = x+y+2-i$ podľa vety **7.6**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+y+1-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y}\mathtt{01}^{i+1}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}) = x+y+1-i$ podľa vety **7.10**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+1-i, \mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y}\mathtt{01}^{i+1}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{ZmeňPísmeno}_1) = x+1-i$ podľa vety **7.2**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+1-i, \mathtt{01}^{x+y+1-i}\mathtt{01}^{i+1}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{PosuňSa}_{\mathtt{L}}) = x+1-i$ podľa vety **7.6**.

  Podľa vety **5.13** a definície B teda $\mathtt{Rozsah}(K^i, B) = x+y+3-i$.

3 Pre každé i z $\{0, \dots, x\}$ platí $\mathtt{ČítanéPísmeno}(K^i) = \mathtt{1}$.

$\mathtt{ČítanéPísmeno}(K^i)$

$= (\mathtt{Páska}(K^i))(\mathtt{Hlava}(K^i))$

(podľa definície ČítanéPísmeno),

$= (\mathtt{01}^{x+y+2-i}\mathtt{01}^{i}\mathtt{0}\!\rightarrow)(x+1-i)$

(podľa definícií Páska a Hlava),

$= \mathtt{1}$.

4 $\mathtt{ČítanéPísmeno}(K^{x+1}) = \mathtt{0}$.

$\mathtt{ČítanéPísmeno}(K^{x+1})$

$= (\mathtt{Páska}(K^{x+1}))(\mathtt{Hlava}(K^{x+1}))$

(podľa definície ČítanéPísmeno),

$= (\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{01}^{x+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)(0)$

(podľa definícií Páska a Hlava),

$= \mathtt{0}$.

5
- $K^0 \overset{D}{\dashrightarrow} K^{x+1}$.
- $\mathtt{Rozsah}(K^0, D) = x+y+3$.

Podľa vety **7.12** a sublemy **3** pre každé i z $\{0, \dots, x\}$ platí $K^i \overset{\mathtt{TestPísmena}_1}{\underset{+}{\dashrightarrow}} K^i$, podľa vety **7.12** a sublemy **4** platí $K^{x+1} \overset{\mathtt{TestPísmena}_1}{\underset{-}{\dashrightarrow}} K^{x+1}$. Potom platí:

- $K^0 \overset{D}{\dashrightarrow} K^{x+1}$ podľa definícií D a C, vety **5.26** a sublemy **2**.

- $\mathtt{Rozsah}(K^0, D)$

  $= \max\{\max\{\mathtt{Rozsah}(K^i, \mathtt{TestPísmena}_1) : i \in \{0, \dots, x+1\}\}, \mathtt{Max}\{\mathtt{Rozsah}(K^i, D) : i \in \{0, \dots, x\}\}\}$
  (podľa vety **5.26** a sublemy **2**),

  $= \max\{\max\{\mathtt{Rozsah}(K^i, \mathtt{TestPísmena}_1) : i \in \{0, \dots, x+1\}\}, \mathtt{Max}\{x+y+3-i : i \in \{0, \dots, x\}\}\}$
  (podľa sublemy **2**),

  $= \max\{\max\{\mathtt{Rozsah}(K^i, \mathtt{TestPísmena}_1) : i \in \{0, \dots, x+1\}\}, \max\{x+y+3-i : i \in \{0, \dots, x\}\}\}$
  (podľa definície $\mathtt{Max}$),

  $= \max\{\max\{\mathtt{Rozsah}(K^i, \mathtt{TestPísmena}_1) : i \in \{0, \dots, x+1\}\}, x+y+3\}$,

  $= \max\{\max\{\mathtt{Hlava}(K^i) : i \in \{0, \dots, x+1\}\}, x+y+3\}$
  (podľa vety **7.12**),

  $= \max\{\max\{x+1-i : i \in \{0, \dots, x+1\}\}, x+y+3\}$
  (podľa definície K^i),

  $= \max\{x+1, x+y+3\}$,

  $= x+y+3$.

6
- $K^{x+1} \overset{E}{\dashrightarrow} \mathtt{BK}_1^2(y, |x)$.
- $\mathtt{Rozsah}(K^{x+1}, E) = y+2$.

Platí:

$K^{x+1} = \mathtt{KNS}(0, \mathtt{0}\mathtt{1}^{y+1}\mathtt{0}\mathtt{1}^{x+1}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(0, \mathtt{0}\mathtt{1}\mathtt{1}^{y}\mathtt{0}\mathtt{1}^{x+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)$,

$\overset{\mathtt{PosuňSa_R}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(1, \mathtt{0}\mathtt{1}\mathtt{1}^{y}\mathtt{0}\mathtt{1}^{x+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.5**),

$\overset{\mathtt{PrejdiPísmená_{R,1,1}}}{\dashrightarrow} \mathtt{KNS}(y+2, \mathtt{0}\mathtt{1}\mathtt{1}^{y}\mathtt{0}\mathtt{1}^{x+1}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(y+2, \mathtt{0}\mathtt{1}^{y+1}\mathtt{0}\mathtt{1}^{x+1}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{BK}_1^2(y, |x)$
(podľa viet **7.9** a **2.33**).

Potom platí:

- $K^{x+1} \overset{E}{\dashrightarrow} \mathtt{BK}_1^2(y, |x)$ podľa vety **5.13** a definície E.
- Platí:
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(0, \mathtt{0}\mathtt{1}\mathtt{1}^{y}\mathtt{0}\mathtt{1}^{x+1}\mathtt{0}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{PosuňSa_R}) = 1$ podľa vety **7.5**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(1, \mathtt{0}\mathtt{1}\mathtt{1}^{y}\mathtt{0}\mathtt{1}^{x+1}\mathtt{0}\!\rightarrow), \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},1,1}) = y+2$ podľa vety **7.9**.

  Podľa vety **5.13** a definície E teda $\mathtt{Rozsah}(K^{x+1}, E) = y+2$.

Podľa definície $\mathtt{VymeňSusednéBloky}$ zo sublem **1**, **5** a **6** podľa vety **5.13**, dostávame:

- $\mathtt{BK}_1^2(x, |y) \overset{\mathtt{VymeňSusednéBloky}}{\dashrightarrow} \mathtt{BK}_1^2(y, |x)$.
- $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{BK}_1^2(x, |y), \mathtt{VymeňSusednéBloky}) = x+y+4$.

V **21**

Nech $x, y \in \mathbb{N}$. Nech $n, m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ a $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathtt{BK}_{n+1}^{n+2+m}(a_1, \dots, a_n, x, |y, b_1, \dots, b_m) \overset{\mathtt{VymeňSusednéBloky}}{\dashrightarrow} \mathtt{BK}_{n+1}^{n+2+m}(a_1, \dots, a_n, y, |x, b_1, \dots, b_m).$$

Je to dôsledok viet **20** a **6.17**, pretože podľa vety **2.25** a opäť podľa vety **2.25** platí $\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^2(x, y)) = x+y+4 = \mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^2(y, x))$.

D Označme $\mathtt{BlokJeVäčšíNežSusedný}$ stroj $F \circ H$, pričom platí:

- $A = \mathtt{Sekvencia}^8(\mathtt{PosuňSa_L}, \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}, \mathtt{PosuňSa_R}, \mathtt{ZmeňPísmeno}_{\mathtt{0}}, \mathtt{PosuňSa_R}, \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},1,1}, \mathtt{PosuňSa_R}, \mathtt{PosuňSa_R})$.
- $B = \mathtt{Sekvencia}^{14}(\mathtt{ZmeňPísmeno}_{\mathtt{0}}, \mathtt{PosuňSa_L}, \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}, \mathtt{PosuňSa_L}, \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1},$

ZmeňPísmeno$_1$, PosuňSa$_R$, ZmeňPísmeno$_0$, PosuňSa$_R$, PrejdiPísmená$_{R,1,1}$, PosuňSa$_R$, PrejdiPísmená$_{R,1,1}$, ZmeňPísmeno$_1$, PosuňSa$_R$).

- C = TestPísmena$_1$ $\odot$ B.
- D = Cyklus(C).
- E = Sekvencia^6(PosuňSa$_L$, PrejdiPísmená$_{L,1,1}$, PosuňSa$_L$, PrejdiPísmená$_{L,1,1}$, ZmeňPísmeno$_1$, PosuňSa$_R$).
- F = Sekvencia^3(A, D, E).
- G = Sekvencia^2(PosuňSa$_R$, PrejdiPísmená$_{R,1,1}$).
- H = TestPísmena$_1$ $\odot$ G.

P Stroj BlokJeVäčšíNežSusedný teda obsahuje tieto inštrukcie:

F	0	A	0					PosuňSa$_L$	0	$s_0 00L s_1, s_0 11L s_1$
								PrejdiPísmená$_{L,1,1}$	1	$s_1 00N s_2, s_1 11L s_1$
								PosuňSa$_R$	2	$s_2 00R s_3, s_2 11R s_3$
								ZmeňPísmeno$_0$	3	$s_3 00N s_4, s_3 10N s_4$
								PosuňSa$_R$	4	$s_4 00R s_5, s_4 11R s_5$
								PrejdiPísmená$_{R,1,1}$	5	$s_5 00N s_6, s_5 11R s_5$
								PosuňSa$_R$	6	$s_6 00R s_7, s_6 11R s_7$
								PosuňSa$_R$	7	$s_7 00R s_8, s_7 11R s_8$
		D	8	C	0	TestPísmena$_1$	0			$s_8 00N s_{10}, s_8 11N s_9$
						ZameňStav$_{1,3}$				$s_9 00N s_{11}, s_9 11N s_{11}$
						ZameňStav$_{2,18}$				$s_{10} 00N s_{26}, s_{10} 11N s_{26}$
						B	3	ZmeňPísmeno$_0$	0	$s_{11} 00N s_{12}, s_{11} 10N s_{12}$
								PosuňSa$_L$	1	$s_{12} 00L s_{13}, s_{12} 11L s_{13}$
								PrejdiPísmená$_{L,1,1}$	2	$s_{13} 00N s_{14}, s_{13} 11L s_{13}$
								PosuňSa$_L$	3	$s_{14} 00L s_{15}, s_{14} 11L s_{15}$
								PrejdiPísmená$_{L,1,1}$	4	$s_{15} 00N s_{16}, s_{15} 11L s_{15}$
								ZmeňPísmeno$_1$	5	$s_{16} 01N s_{17}, s_{16} 11N s_{17}$
								PosuňSa$_R$	6	$s_{17} 00R s_{18}, s_{17} 11R s_{18}$
								ZmeňPísmeno$_0$	7	$s_{18} 00N s_{19}, s_{18} 10N s_{19}$
								PosuňSa$_R$	8	$s_{19} 00R s_{20}, s_{19} 11R s_{20}$
								PrejdiPísmená$_{R,1,1}$	9	$s_{20} 00N s_{21}, s_{20} 11R s_{20}$
								PosuňSa$_R$	10	$s_{21} 00R s_{22}, s_{21} 11R s_{22}$
								PrejdiPísmená$_{R,1,1}$	11	$s_{22} 00N s_{23}, s_{22} 11R s_{22}$
								ZmeňPísmeno$_1$	12	$s_{23} 01N s_{24}, s_{23} 11N s_{24}$
								PosuňSa$_R$	13	$s_{24} 00R s_{25}, s_{24} 11R s_{25}$
				ZameňStav$_{17,0}$						$s_{25} 00N s_8, s_{25} 11N s_8$
		E	26					PosuňSa$_L$	0	$s_{26} 00L s_{27}, s_{26} 11L s_{27}$
								PrejdiPísmená$_{L,1,1}$	1	$s_{27} 00N s_{28}, s_{27} 11L s_{27}$
								PosuňSa$_L$	2	$s_{28} 00L s_{29}, s_{28} 11L s_{29}$
								PrejdiPísmená$_{L,1,1}$	3	$s_{29} 00N s_{30}, s_{29} 11L s_{29}$
								ZmeňPísmeno$_1$	4	$s_{30} 01N s_{31}, s_{30} 11N s_{31}$
								PosuňSa$_R$	5	$s_{31} 00R s_{32}, s_{31} 11R s_{32}$
H	32			TestPísmena$_1$	0					$s_{32} 00N s_{34}, s_{32} 11N s_{33}$
				ZameňStav$_{1,3}$						$s_{33} 00N s_{35}, s_{33} 11N s_{35}$
				ZameňStav$_{2,6}$						$s_{34} 00N s_{38}, s_{34} 11N s_{38}$
				G	3			PosuňSa$_R$	0	$s_{35} 00R s_{36}, s_{35} 11R s_{36}$
								PrejdiPísmená$_{R,1,1}$	1	$s_{36} 00N s_{37}, s_{36} 11R s_{36}$

V 22

Stroj BlokJeVäčšíNežSusedný je poloúplný.

Nech A, B, C, D, E, F a G sú stroje z definície BlokJeVäčšíNežSusedný. Potom postupne platí:

A je úplný
(podľa viet **7.1** **7.3**, **7.3**, **7.7** a **7.7** a definície Sekvencia^8),

B je úplný
(podľa viet **7.1**, **7.1**, **7.3**, **7.3**, **7.7** a **7.7** a definície Sekvencia^{14}),

C je polоúplný
(podľa viet **7.11** a **5.19**),

D je úplný
(podľa vety **5.24**),

E je úplný
(podľa viet **7.1**, **7.3**, **7.3** a **7.7** a podľa definície `Sekvencia`^{6}),

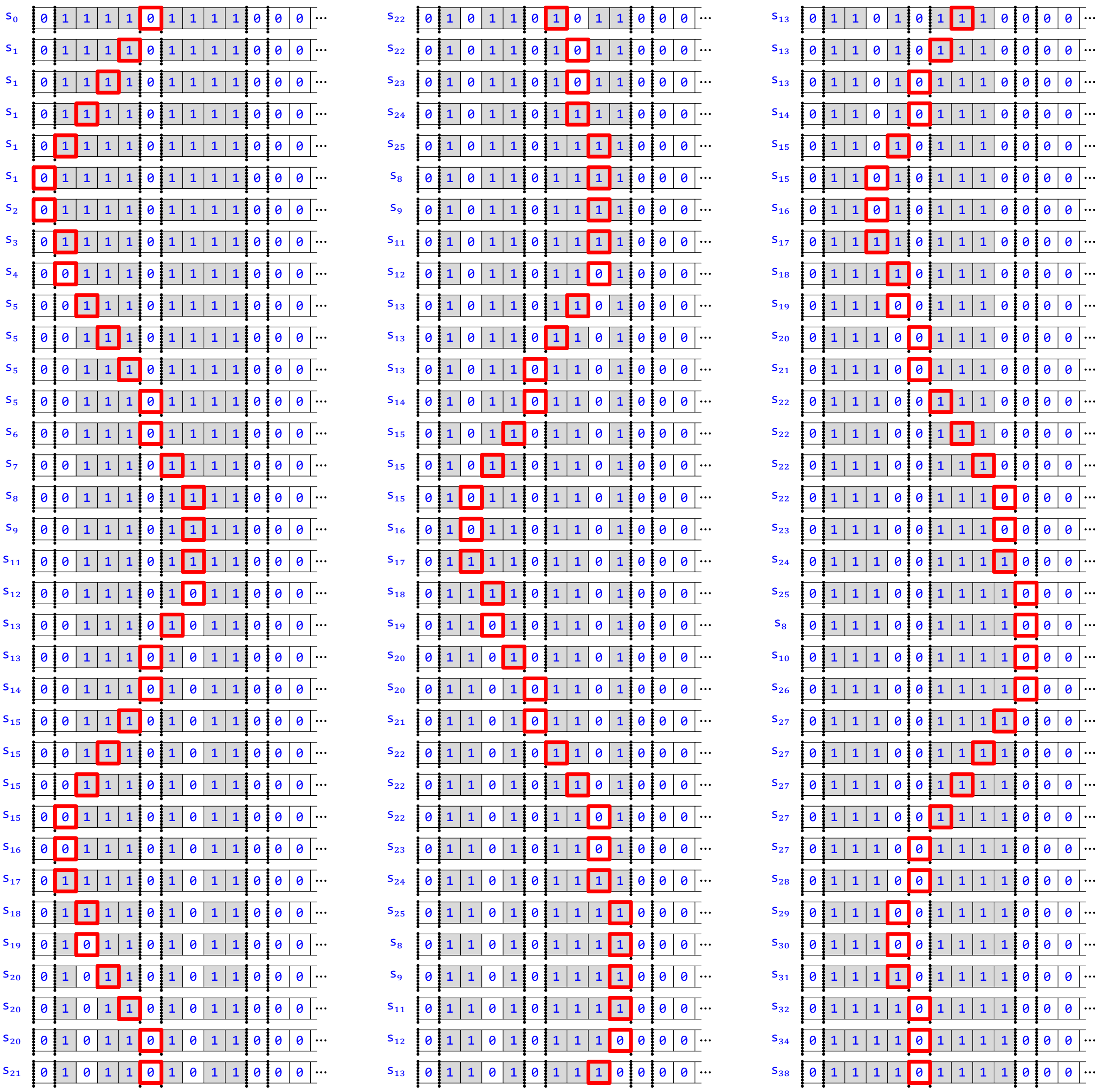
F je úplný
(podľa definície `Sekvencia`^{3}),

G je úplný
(podľa viet **7.3** a **7.7** a podľa definície `Sekvencia`^{2}),

H je poloúplný
(podľa viet **7.11** a **5.19**),

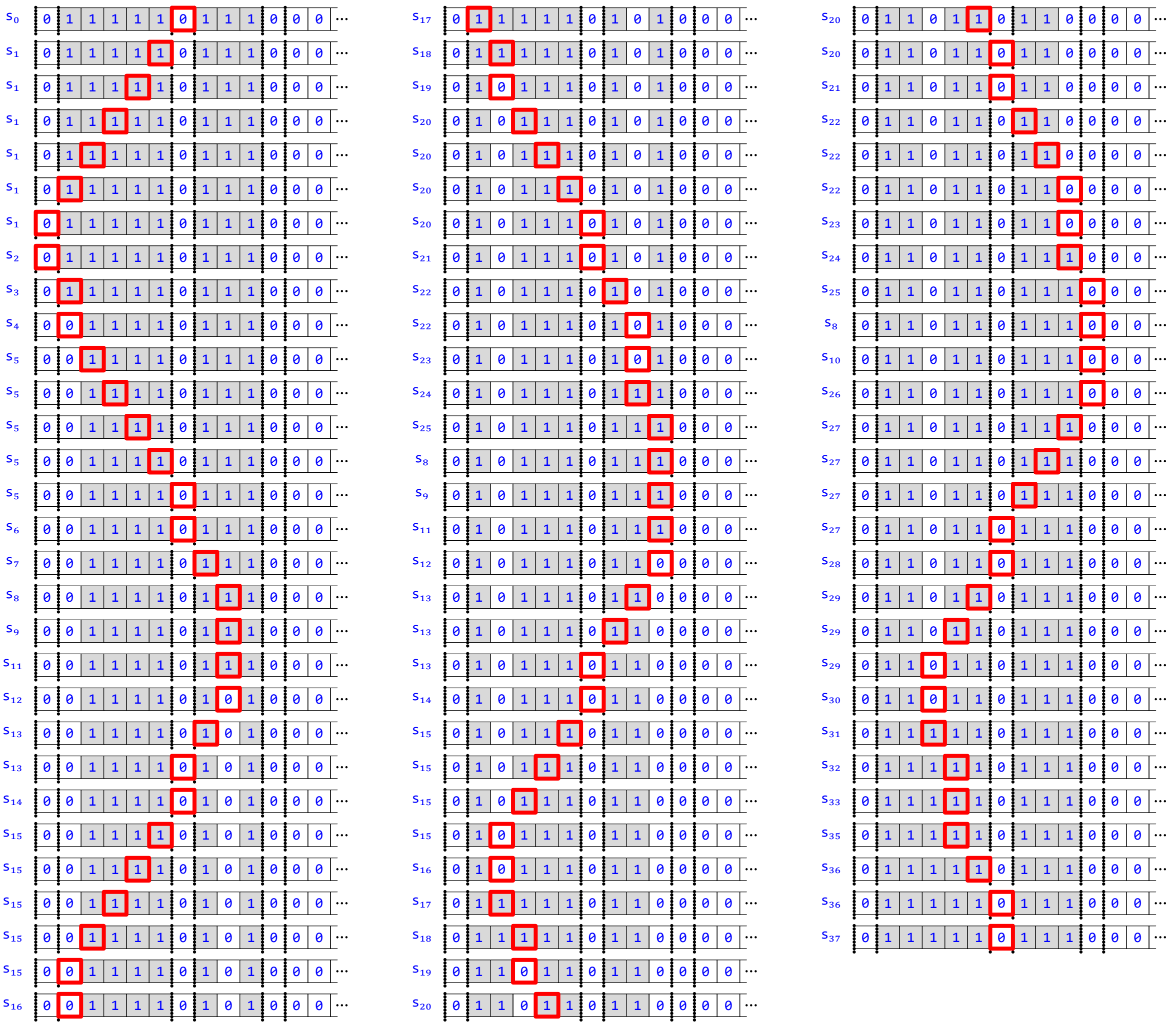
`BlokJeVäčšíNežSusedný` je poloúplný
(podľa vety **5.9**).

I Výpočet na stroji `BlokJeVäčšíNežSusedný` na konfigurácii $\mathtt{BK}_1^2(3,|3)$ vyzerá takto:



Výsledná konfigurácia je presne $\mathtt{KPS}(\mathtt{BK}_1^2(3,|3), 38)$, takže v zápornom stave stroja `BlokJeVäčšíNežSusedný`, čo je v zhode s tým, že odpoveď na otázku, či prvý vstup je väčší než druhý, je negatívna.

I Výpočet na stroji BlokJeVäčšíNežSusedný na konfigurácii $\mathrm{BK}^2_1(4, |2)$ vyzerá takto:



Posledná konfigurácia je tu $\mathrm{KPS}(\mathrm{BK}^2_1(4,|2), 37)$, výpočet sa teda skončil v kladnom stave Turingovho stroja BlokJeVäčšíNežSusedný. To je v súlade zhode s pozitívnou odpoveďou na test, či prvý vstup je väčší než druhý.

V **23**

Nech $x, y \in \mathbb{N}$, pričom $x \geq y$. Nech $K = \mathrm{BK}^2_1(x, |y)$. Potom platí:

-
  - Ak $x > y$, tak $K \xrightarrow[+]{\texttt{BlokJeVäčšíNežSusedný}} K$.
  - Ak $x = y$, tak $K \xrightarrow[-]{\texttt{BlokJeVäčšíNežSusedný}} K$.
- $\mathrm{Rozsah}(K, \texttt{BlokJeVäčšíNežSusedný}) = x + y + 4$.

Nech A, B, C, D, E, F, G a H sú stroje z definície BlokJeVäčšíNežSusedný.
Nech pre i z $\{0, \ldots, y\}$ platí

$$K^i = \mathrm{KNS}(x + 4 + i, \texttt{01}^i\texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\rightarrow)$$

(uvedomme si pritom, že podľa predpokladu $x - i \geq x - y \geq 0$) a

$$L = \mathrm{KNS}(y + 2, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\rightarrow).$$

1

- $K \xrightarrow{A} K^0$.
- $\mathrm{Rozsah}(K, A) = x + 4$.

Platí:

$K = \mathtt{BK}^2_1(x, |y) = \mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^{x+1}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\to}) = \mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^{x}\mathtt{101}^{y+1}\mathtt{0}{\to})$
(podľa vety **2.33**),

$\xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}} \mathtt{KNS}(x+1, \mathtt{01}^{x}\mathtt{101}^{y+1}\mathtt{0}{\to})$
(podľa vety **7.6**),

$\xrightarrow{\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}} \mathtt{KNS}(0, \mathtt{01}^{x}\mathtt{101}^{y+1}\mathtt{0}{\to}) = \mathtt{KNS}(0, \mathtt{011}^{x}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\to})$
(podľa vety **7.10**),

$\xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}} \mathtt{KNS}(1, \mathtt{011}^{x}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\to})$
(podľa vety **7.5**),

$\xrightarrow{\mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{0}} \mathtt{KNS}(1, \mathtt{001}^{x}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\to})$
(podľa vety **7.2**),

$\xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}} \mathtt{KNS}(2, \mathtt{001}^{x}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\to})$
(podľa vety **7.5**),

$\xrightarrow{\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},1,1}} \mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{001}^{x}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\to}) = \mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{001}^{x}\mathtt{011}^{y}\mathtt{0}{\to})$
(podľa vety **7.9**),

$\xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}} \mathtt{KNS}(x+3, \mathtt{001}^{x}\mathtt{011}^{y}\mathtt{0}{\to})$
(podľa vety **7.5**),

$\xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}} \mathtt{KNS}(x+4, \mathtt{001}^{x}\mathtt{011}^{y}\mathtt{0}{\to}) = \mathtt{KNS}(x+4, \mathtt{01}^{0}\mathtt{01}^{x}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\to}) = K^0$
(podľa vety **7.5**).

Potom platí:

- $K \xrightarrow{A} K^0$ podľa vety **5.13** a definície A.
- Platí:
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^{x}\mathtt{101}^{y+1}\mathtt{0}{\to}), \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}) = x+2$ podľa vety **7.6**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+1, \mathtt{01}^{x}\mathtt{101}^{y+1}\mathtt{0}{\to}), \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}) = x+1$ podľa vety **7.10**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(0, \mathtt{011}^{x}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\to}), \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}) = 1$ podľa vety **7.5**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(1, \mathtt{011}^{x}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\to}), \mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{0}) = 1$ podľa vety **7.2**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(1, \mathtt{001}^{x}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\to}), \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}) = 2$ podľa vety **7.5**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(2, \mathtt{001}^{x}\mathtt{011}^{y}\mathtt{0}{\to}), \mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{R},1,1}) = x+2$ podľa vety **7.9**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{001}^{x}\mathtt{011}^{y}\mathtt{0}{\to}), \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}) = x+3$ podľa vety **7.5**.
  - $\mathtt{Rozsah}(\mathtt{KNS}(x+3, \mathtt{001}^{x}\mathtt{011}^{y}\mathtt{0}{\to}), \mathtt{PosuňSa}_\mathtt{R}) = x+4$ podľa vety **7.5**.

  Podľa vety **5.13** a definície A teda $\mathtt{Rozsah}(K, A) = x+4$.

2 Ak $i \in \{0, \dots, y-1\}$, tak platí:

- $K^i \xrightarrow{B} K^{i+1}$.
- $\mathtt{Rozsah}(K^i, B) = x+5+i$.

Platí:

$K^i = \mathtt{KNS}(x+4+i, \mathtt{01}^{i}\mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}{\to}) = \mathtt{KNS}(x+4+i, \mathtt{01}^{i}\mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{i+1}\mathtt{11}^{y-i-1}\mathtt{0}{\to})$,

$\xrightarrow{\mathtt{ZmeňPísmeno}_\mathtt{0}} \mathtt{KNS}(x+4+i, \mathtt{01}^{i}\mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{i+1}\mathtt{01}^{y-i-1}\mathtt{0}{\to}) = \mathtt{KNS}(x+4+i, \mathtt{01}^{i}\mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{i}\mathtt{101}^{y-i-1}\mathtt{0}{\to})$
(podľa vety **7.2**),

$\xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}} \mathtt{KNS}(x+3+i, \mathtt{01}^{i}\mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{i}\mathtt{101}^{y-i-1}\mathtt{0}{\to})$
(podľa vety **7.6**),

$\xrightarrow{\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}} \mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^{i}\mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{i}\mathtt{101}^{y-i-1}\mathtt{0}{\to}) = \mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^{i}\mathtt{01}^{x-i-1}\mathtt{101}^{i+1}\mathtt{01}^{y-i-1}\mathtt{0}{\to})$
(podľa vety **7.10**),

$\xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}} \mathtt{KNS}(x+1, \mathtt{01}^{i}\mathtt{01}^{x-i-1}\mathtt{101}^{i+1}\mathtt{01}^{y-i-1}\mathtt{0}{\to})$

(podľa vety **7.6**),

$\xrightarrow{\texttt{PrejdiPísmená}_{L,1,1}} \texttt{KNS}(i+1, \texttt{01}^i\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{101}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow) = \texttt{KNS}(i+1, \texttt{01}^i\texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **7.10**),

$\xrightarrow{\texttt{ZmeňPísmeno}_1} \texttt{KNS}(i+1, \texttt{01}^i\texttt{11}^{x-i}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow) = \texttt{KNS}(i+1, \texttt{01}^i\texttt{111}^{x-i-1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **7.2**),

$\xrightarrow{\texttt{PosuňSa}_R} \texttt{KNS}(i+2, \texttt{01}^i\texttt{111}^{x-i-1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow) = \texttt{KNS}(i+2, \texttt{01}^{i+1}\texttt{11}^{x-i-1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **7.5**),

$\xrightarrow{\texttt{ZmeňPísmeno}_0} \texttt{KNS}(i+2, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **7.2**),

$\xrightarrow{\texttt{PosuňSa}_R} \texttt{KNS}(i+3, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **7.5**),

$\xrightarrow{\texttt{PrejdiPísmená}_{R,1,1}} \texttt{KNS}(x+2, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-1-i}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow) = \texttt{KNS}(x+2, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-1-i}\texttt{011}^i\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **7.9**),

$\xrightarrow{\texttt{PosuňSa}_R} \texttt{KNS}(x+3, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{011}^i\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **7.5**),

$\xrightarrow{\texttt{PrejdiPísmená}_{R,1,1}} \texttt{KNS}(x+4+i, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{011}^i\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow) = \texttt{KNS}(x+4+i, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **7.9**),

$\xrightarrow{\texttt{ZmeňPísmeno}_1} \texttt{KNS}(x+4+i, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{11}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow) = \texttt{KNS}(x+4+i, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow)$

(podľa vety **7.2**),

$\xrightarrow{\texttt{PosuňSa}_R} \texttt{KNS}(x+5+i, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow) = K^{i+1}$

(podľa vety **7.5**).

Potom platí:

- $K^i \xrightarrow{B} K^{i+1}$ podľa vety **5.13** a definície B.
- Platí:
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+4+i, \texttt{01}^i\texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^{i+1}\texttt{11}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{ZmeňPísmeno}_0) = x+4+i$ podľa vety **7.2**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+4+i, \texttt{01}^i\texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^i\texttt{101}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PosuňSa}_L) = x+4+i$ podľa vety **7.6**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+3+i, \texttt{01}^i\texttt{01}^{x-i}\texttt{01}^i\texttt{101}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PrejdiPísmená}_{L,1,1}) = x+3+i$ podľa vety **7.10**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+2, \texttt{01}^i\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{101}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PosuňSa}_L) = x+2$ podľa vety **7.6**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+1, \texttt{01}^i\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{101}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PrejdiPísmená}_{L,1,1}) = x+1$ podľa vety **7.10**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(i+1, \texttt{01}^i\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{101}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{ZmeňPísmeno}_1) = x+1$ podľa vety **7.2**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(i+1, \texttt{01}^i\texttt{111}^{x-i-1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PosuňSa}_R) = i+2$ podľa vety **7.5**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(i+2, \texttt{01}^{i+1}\texttt{11}^{x-i-1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{ZmeňPísmeno}_0) = i+2$ podľa vety **7.2**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(i+2, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PosuňSa}_R) = i+3$ podľa vety **7.5**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(i+3, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PrejdiPísmená}_{R,1,1}) = x+2$ podľa vety **7.9**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+2, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-1-i}\texttt{011}^i\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PosuňSa}_R) = x+3$ podľa vety **7.5**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+3, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{011}^i\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PrejdiPísmená}_{R,1,1}) = x+4+i$ podľa vety **7.9**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+4+i, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{y-i-1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{ZmeňPísmeno}_1) = x+4+i$ podľa vety **7.2**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+4+i, \texttt{01}^{i+1}\texttt{01}^{x-i-1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PosuňSa}_R) = x+5+i$ podľa vety **7.5**.

  Podľa vety **5.13** a definície B teda $\texttt{Rozsah}(K^i, B) = x+5+i$.

3 Pre každé i z $\{0, \dots, y-1\}$ platí $\texttt{ČítanéPísmeno}(K^i) = \texttt{1}$.

$\texttt{ČítanéPísmeno}(K^i)$
$= (\texttt{Páska}(K^i))(\texttt{Hlava}(K^i))$

(podľa definície $\mathtt{ČítanéPísmeno}$),

$= (\mathtt{01}^i\mathtt{01}^{x-i}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)(x+4+i)$
(podľa definícií K^i, $\mathtt{KNS}$, $\mathtt{Páska}$ a $\mathtt{Hlava}$),

$= \mathtt{1}$.

4 $\mathtt{ČítanéPísmeno}(K^y) = \mathtt{0}$.

$\mathtt{ČítanéPísmeno}(K^y)$

$= (\mathtt{Páska}(K^y))(\mathtt{Hlava}(K^y))$
(podľa definície $\mathtt{ČítanéPísmeno}$),

$= (\mathtt{01}^y\mathtt{01}^{x-y}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)(x+y+4)$
(podľa definícií K^y, $\mathtt{KNS}$, $\mathtt{Páska}$ a $\mathtt{Hlava}$),

$= \mathtt{0}$.

5
- $K^0 \xrightarrow{D} K^y$.
- $\mathtt{Rozsah}(K^0, D) = x+y+4$.

Podľa vety **7.12** a sublemy **3** pre každé i z $\{0,\dots,y-1\}$ platí $K^i \xrightarrow[+]{\mathtt{TestPísmena}_1} K^i$, podľa vety **7.12** a sublemy **4** platí $K^y \xrightarrow{\mathtt{TestPísmena}_1} K^y$. Potom dostávame:

- $K^0 \xrightarrow{D} K^y$ podľa vety **5.26** a sublemy **2**.
- $\mathtt{Rozsah}(K^0, B)$

  $= \max\{\max\{\mathtt{Rozsah}(K^i, \mathtt{TestPísmena}_1) : i \in \{0,\dots,y\}\}, \mathtt{Max}\{\mathtt{Rozsah}(K^i, B) : i \in \{0,\dots,y-1\}\}\}$
  (podľa vety **5.26**),

  $= \max\{\max\{\mathtt{Rozsah}(K^i, \mathtt{TestPísmena}_1) : i \in \{0,\dots,y\}\}, \mathtt{Max}\{x+5+i : i \in \{0,\dots,y-1\}\}\}$
  (podľa sublemy **2**),

  $= \max\{\max\{\mathtt{Hlava}(K^i) : i \in \{0,\dots,y\}\}, \mathtt{Max}\{x+5+i : i \in \{0,\dots,y-1\}\}\}$
  (podľa vety **7.12**),

  $= \max\{\max\{x+4+i : i \in \{0,\dots,y\}\}, \mathtt{Max}\{x+5+i : i \in \{0,\dots,y-1\}\}\}$
  (podľa definícií K^i, $\mathtt{KNS}$ a $\mathtt{Hlava}$),

  $= \max\{x+y+4, \mathtt{Max}\{x+5+i : i \in \{0,\dots,y-1\}\}\}$,

  $= x+y+4$
  (ak $y = 0$, tak podľa definície $\mathtt{Max}$ platí $\mathtt{Max}(\{x+5+i : i \in \{0,\dots,y-1\}\}) = \mathtt{Max}(\emptyset) = 0$, a ak $y > 0$, tak podľa definície $\mathtt{Max}$ platí $\mathtt{Max}(\{x+5+i : i \in \{0,\dots,y-1\}\}) = \max(\{x+5+i : i \in \{0,\dots,y-1\}\}) = x+y+4$).

6
- $K^y \xrightarrow{E} L$.
- $\mathtt{Rozsah}(K^y, E) = x+y+4$.

Platí:

$K^y = \mathtt{KNS}(x+y+4, \mathtt{01}^y\mathtt{01}^{x-y}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x+y+4, \mathtt{01}^y\mathtt{01}^{x-y}\mathtt{01}^y\mathtt{100}\!\rightarrow)$
(podľa vety **2.30**),

$\xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}} \mathtt{KNS}(x+y+3, \mathtt{01}^y\mathtt{01}^{x-y}\mathtt{01}^y\mathtt{100}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x+y+3, \mathtt{01}^y\mathtt{01}^{x-y}\mathtt{01}^y\mathtt{10}\!\rightarrow)$
(podľa viet **7.6** a **2.30**),

$\xrightarrow{\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}} \mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^y\mathtt{01}^{x-y}\mathtt{01}^y\mathtt{10}\!\rightarrow) = \mathtt{KNS}(x+2, \mathtt{01}^y\mathtt{01}^{x-y}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.10**),

$\xrightarrow{\mathtt{PosuňSa}_\mathtt{L}} \mathtt{KNS}(x+1, \mathtt{01}^y\mathtt{01}^{x-y}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.6**),

$\xrightarrow{\mathtt{PrejdiPísmená}_{\mathtt{L},1,1}} \mathtt{KNS}(y+1, \mathtt{01}^y\mathtt{01}^{x-y}\mathtt{01}^{y+1}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.10**),

$\xrightarrow{\texttt{ZmeňPísmeno}_1}$ $\texttt{KNS}(y+1, \texttt{01}^y\texttt{11}^{x-y}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow) = \texttt{KNS}(y+1, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.2**),
$\xrightarrow{\texttt{PosuňSa}_\texttt{R}}$ $\texttt{KNS}(y+2, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow) = L$
(podľa vety **7.5**).
Potom platí:

- $K^y \xrightarrow{E} L$ podľa vety **5.13** a definície E.
- Platí:
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+y+4, \texttt{01}^y\texttt{01}^{x-y}\texttt{01}^y\texttt{100}\!\rightarrow), \texttt{PosuňSa}_\texttt{L}) = x+y+4$ podľa vety **7.6**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+y+3, \texttt{01}^y\texttt{01}^{x-y}\texttt{01}^y\texttt{10}\!\rightarrow), \texttt{PrejdiPísmená}_{\texttt{L},1,1}) = x+y+3$ podľa vety **7.10**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+2, \texttt{01}^y\texttt{01}^{x-y}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PosuňSa}_\texttt{L}) = x+2$ podľa vety **7.6**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(x+1, \texttt{01}^y\texttt{01}^{x-y}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PrejdiPísmená}_{\texttt{L},1,1}) = x+1$ podľa vety **7.10**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(y+1, \texttt{01}^y\texttt{01}^{x-y}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{ZmeňPísmeno}_1) = y+1$ podľa vety **7.2**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(y+1, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PosuňSa}_\texttt{R}) = y+2$ podľa vety **7.5**.

  Podľa vety **5.13** a definície E teda $\texttt{Rozsah}(K^y, E) = x+y+4$.

7
- $K \xrightarrow{F} L$.
- $\texttt{Rozsah}(K, F) = x+y+4$.

- $K \xrightarrow{F} L$ podľa definície F, sublem **1**, **5** a **6** a vety **5.13**.
- $\texttt{Rozsah}(K, F)$

  $= \max\{\texttt{Rozsah}(K, A), \texttt{Rozsah}(K^0, B), \texttt{Rozsah}(K^y, E)\}$
  (podľa sublem **1**, **5** a **6** a vety **5.13**),
  $= \max\{x+4, x+y+4, x+y+4\}$,
  $= x+y+4$.

8
- Ak $x > y$, tak $\texttt{ČítanéPísmeno}(L) = \texttt{1}$.
- Ak $x = y$, tak $\texttt{ČítanéPísmeno}(L) = \texttt{0}$.

$\texttt{ČítanéPísmeno}(L)$
$= (\texttt{Páska}(L))(\texttt{Hlava}(L))$
(podľa definície ČítanéPísmeno),
$= (\texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow)(y+2)$
(podľa definícií L, KNS, Páska a Hlava).
Z toho už vyplývajú obe časti tvrdenia.

9 Ak $x > y$, tak platí:
- $L \xrightarrow{G} K$.
- $\texttt{Rozsah}(L, G) = x+2$.

Platí:
$L = \texttt{KNS}(y+2, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow)$,
$\xrightarrow{\texttt{PosuňSa}_\texttt{R}}$ $\texttt{KNS}(y+3, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow)$
(podľa vety **7.5**),
$\xrightarrow{\texttt{PrejdiPísmená}_{\texttt{R},1,1}}$ $\texttt{KNS}(x+2, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow) = \texttt{BK}_1^2(x, |y) = K$
(podľa vety **7.9**, keďže $x > y$, t. j. $x \geq y+1$, a podľa vety **2.33**).
Potom platí:

- $L \xrightarrow{G} K$ podľa vety **5.13** a definície G.

- Platí:
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(y+2, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PosuňSa}_{\texttt{R}}) = y+3$ podľa vety **7.5**.
  - $\texttt{Rozsah}(\texttt{KNS}(y+3, \texttt{01}^{x+1}\texttt{01}^{y+1}\texttt{0}\!\rightarrow), \texttt{PrejdiPísmená}_{\texttt{R},1,1}) = x+2$ podľa vety **7.9**.

  Podľa vety **5.13** definície G a predpokladu $x > y$ teda $\texttt{Rozsah}(L, G) = x+2$.

10 Ak $x > y$, tak platí:
- $L \overset{H}{\dashrightarrow}_{+} K$.
- $\texttt{Rozsah}(L, H) = x+2$.

Keďže $x > y$, podľa sublemy **8** a vety **7.12** platí $L \overset{\texttt{TestPísmena}_1}{\dashrightarrow}_{+} L$. Potom platí:

- $L \overset{H}{\dashrightarrow}_{+} K$ podľa definície H, vety **5.20** a sublemy **9**.
- $\texttt{Rozsah}(L, H)$

  $= \max\{\texttt{Rozsah}(L, \texttt{TestPísmena}_1), \texttt{Rozsah}(L, G)\}$
  (podľa definície H, vety **5.20** a sublemy **9**),

  $= \max\{\texttt{Hlava}(L), \texttt{Rozsah}(L, G)\}$
  (podľa vety **7.12**),

  $= \max\{y+2, \texttt{Rozsah}(L, G)\}$
  (podľa definícií L, KNS a Hlava),

  $= \max\{y+2, x+2\}$
  (podľa sublemy **9**),

  $= x+2$
  (lebo $x > y$).

11 Ak $x = y$, tak platí:
- $L \overset{H}{\dashrightarrow}_{=} K$.
- $\texttt{Rozsah}(L, H) = x+2$.

Keďže $x = y$, podľa sublemy **8** a vety **7.12** platí $L \overset{\texttt{TestPísmena}_1}{\dashrightarrow}_{=} L$. Potom platí:

- $L \overset{H}{\dashrightarrow}_{=} K$ podľa definície H a vety **5.20**.
- $\texttt{Rozsah}(L, H)$

  $= \texttt{Rozsah}(L, \texttt{TestPísmena}_1)$
  (podľa definície H a vety **5.20**),

  $= \texttt{Hlava}(L)$
  (podľa vety **7.12**),

  $= y+2$
  (podľa definícií L, KNS a Hlava),

  $= x+2$
  (lebo $x = y$).

Dokážeme konečne pôvodné tvrdenie:

- - Ak $x > y$, tak $K \overset{\texttt{BlokJeVäčšíNežSusedný}}{\dashrightarrow}_{+} K$ podľa definície BlokJeVäčšíNežSusedný, sublem **7** a **10** a vety **5.14**.
  - Ak $x = y$, tak $K \overset{\texttt{BlokJeVäčšíNežSusedný}}{\dashrightarrow}_{=} K$ podľa definície BlokJeVäčšíNežSusedný, sublem **7** a **11** a vety **5.14**.
- $\texttt{Rozsah}(K, \texttt{BlokJeVäčšíNežSusedný})$
  $= \max(\texttt{Rozsah}(K, F), \texttt{Rozsah}(L, H)\})$
  (podľa vety **5.14** a definície BlokJeVäčšíNežSusedný),

$= \max(\{x + y + 4, x + 2\})$
(podľa sublem **7** a **10** (ak $x > y$), resp. **11** (ak $x = y$)),
$= x + y + 4.$

V $\boxed{\mathbf{24}}$

Nech $x, y \in \mathbb{N}$, kde $x \geq y$. Nech $n, m \in \mathbb{N}$ $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$. Nech

$$K = \mathtt{BK}_{n+1}^{n+2+m}(a_1, \ldots, a_n, x, | y, b_1, \ldots, b_m).$$

Potom platí:

- Ak $x > y$, tak $K \xrightarrow[+]{\mathtt{BlokJeVäčšíNežSusedný}} K$.
- Ak $x = y$, tak $K \xrightarrow[-]{\mathtt{BlokJeVäčšíNežSusedný}} K$.

Je to dôsledok viet **23** a **6.17**, pretože podľa vety **2.25** platí $\mathtt{Dĺžka}(\mathtt{Bloky}^2(x, y)) = x + y + 4$.

1.9 Makromolekulárne Turingove stroje

V tejto stati budeme z už vytvorených molekulárnych strojov vytvárať *makromolekulárne*. Najprv zaveďme mocninu (úplného) stroja a ukážme niekoľko jej aplikácií:

D Nech T je úplný Turingov stroj a $n \in \mathbb{N}$. Potom označíme T^n stroj $\texttt{Sekvencia}^n(T, \dots, T)$ a budeme ho nazývať *n. mocnina stroja* T.

P Platí teda $T^0 = \emptyset$ a pre kladné n

$$T^n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n}.$$

V $\boxed{1}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a T je úplný stroj. Potom stroj T^n je úplný.

Je to priamy dôsledok definície $\texttt{Sekvencia}^n$.

V $\boxed{2}$

Nech $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \dots, n\}$ a $k \in \{0, \dots, n-i\}$. Nech $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathsf{BK}_i^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoprava}^k} \mathsf{BK}_{i+k}^n(x_1, \dots, x_n).$$

Pre j z $\{1, \dots, k\}$ podľa vety **8.3** platí $\mathsf{BK}_{i+(j-1)}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoprava}} \mathsf{BK}_{i+j}^n(x_1, \dots, x_n)$. Potom podľa vety **5.13** a definície mocniny strojov platí $\mathsf{BK}_i^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoprava}^k} \mathsf{BK}_{i+k}^n(x_1, \dots, x_n)$.

V $\boxed{3}$

Nech $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \dots, n\}$ a $k \in \{0, \dots, n-i\}$. Nech $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathsf{BK}_{i+k}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoľava}^k} \mathsf{BK}_i^n(x_1, \dots, x_n).$$

Pre j z $\{1, \dots, k\}$ podľa vety **8.6** platí $\mathsf{BK}_{i+((k+1)-j)}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoľava}} \mathsf{BK}_{i+((k+1)-j)-1}^n(x_1, \dots, x_n)$. Potom podľa vety **5.13** a definície mocniny strojov platí $\mathsf{BK}_{i+k}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoľava}^k} \mathsf{BK}_i^n(x_1, \dots, x_n)$.

V $\boxed{4}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$. Nech $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathsf{BK}_{n+k}^{n+k}(x_1, \dots, x_{n+k}) \xrightarrow{\texttt{VymažPoslednýBlok}^k} \mathsf{BK}_n^n(x_1, \dots, x_n).$$

Pre j z $\{1, \dots, k\}$ podľa vety **8.9** platí $\mathsf{BK}_{n+k-(j-1)}^{n+k-(j-1)}(x_1, \dots, x_{n+k-(j-1)}) \xrightarrow{\texttt{VymažPoslednýBlok}} \mathsf{BK}_{n+k-j}^{n+k-j}(x_1, \dots, x_{n+k-j})$. Potom podľa vety **5.13** a definície mocniny strojov platí $\mathsf{BK}_{n+k}^{n+k}(x_1, \dots, x_{n+k}) \xrightarrow{\texttt{VymažPoslednýBlok}^k} \mathsf{BK}_n^n(x_1, \dots, x_n)$.

D Nech $l \in \mathbb{N}$. Označme $\texttt{PreskočSledBlokovDoprava}_l$ stroj

$$\texttt{Sekvencia}^2((\texttt{Sekvencia}^2(\texttt{VymeňSusednéBloky}, \texttt{ChoďOBlokDoprava}))^l, \texttt{ChoďOBlokDoľava}).$$

V $\boxed{5}$

Nech $l \in \mathbb{N}$. Potom stroj $\texttt{PreskočSledBlokovDoprava}_l$ je úplný.

Postupne platí:

$\texttt{Sekvencia}^2(\texttt{VymeňSusednéBloky}, \texttt{ChoďOBlokDoprava})$ je úplný (podľa viet **8.19** a **8.1** a definície Sekvencia^2),

(Sekvencia^2(VymeňSusednéBloky, ChoďOBlokDoprava))^l je úplný

(podľa vety **1**),

PreskočSledBlokovDoprava$_l$ je úplný

(podľa definície PreskočSledBlokovDoprava$_l$, vety **8.4** a definície Sekvencia^2).

I Výpočet na Turingovom stroji PreskočSledBlokovDoprava$_3$ z konfigurácie $\mathsf{BK}_2^7(1, 2, |3, 4, 5, 6, 7)$ bude prebiehať cez tieto konfigurácie:

		$\mathsf{BK}_2^7(1, 2, \|3, 4, 5, 6, 7)$
	VymeňSusednéBloky	$\mathsf{BK}_2^7(1, 3, \|2, 4, 5, 6, 7)$
	ChoďOBlokDoprava	$\mathsf{BK}_3^7(1, 3, 2, \|4, 5, 6, 7)$
	VymeňSusednéBloky	$\mathsf{BK}_3^7(1, 3, 4, \|2, 5, 6, 7)$
	ChoďOBlokDoprava	$\mathsf{BK}_4^7(1, 3, 4, 2, \|5, 6, 7)$
	VymeňSusednéBloky	$\mathsf{BK}_4^7(1, 3, 4, 5, \|2, 6, 7)$
	ChoďOBlokDoprava	$\mathsf{BK}_5^7(1, 3, 4, 5, 2, \|6, 7)$
ChoďOBlokDoľava		$\mathsf{BK}_4^7(1, 3, 4, 5, \|2, 6, 7)$

Pôvodne druhý blok 2 teda preskočil (smerom doprava) trojblok 3, 4, 5.

V $\boxed{6}$

Nech $n, m, l \in \mathbb{N}$ $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$ a $y_1, \dots, y_l \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathsf{BK}_{n+1}^{n+1+l+m}(a_1, \dots, a_n, x, |y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m) \overset{\text{PreskočSledBlokovDoprava}_l}{\dashrightarrow} \mathsf{BK}_{n+l}^{n+l+1+m}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l, |x, b_1, \dots, b_m).$$

Najprv sublema:

1 Ak $j \in \{1, \dots, l\}$, tak

$$\mathsf{BK}_{n+j}^{n+l+1+m}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_{j-1}, x, |y_j, y_{j+1}, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m) \overset{\text{Sekvencia}^2(\text{VymeňSusednéBloky}, \text{ChoďOBlokDoprava})}{\dashrightarrow} \mathsf{BK}_{n+j+1}^{n+l+1+m}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, x, |y_{j+1}, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m).$$

Postupne platí:

$\mathsf{BK}_{n+j}^{n+l+1+m}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_{j-1}, x, |y_j, y_{j+1}, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m)$

$\overset{\text{VymeňSusednéBloky}}{\dashrightarrow} \mathsf{BK}_{n+j}^{n+l+1+m}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, |x, y_{j+1}, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m)$

(podľa vety **8.21**),

$\overset{\text{ChoďOBlokDoprava}}{\dashrightarrow} \mathsf{BK}_{n+j+1}^{n+l+1+m}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_j, x, |y_{j+1}, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m)$

(podľa vety **8.3**).

Podľa vety **5.13** už dostávame dokazované tvrdenie.

Potom platí:

$\mathsf{BK}_{n+1}^{m+n+l+1}(a_1, \dots, a_n, x, |y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m)$

$\overset{(\text{Sekvencia}^2(\text{VymeňSusednéBloky}, \text{ChoďOBlokDoprava}))^l}{\dashrightarrow} \mathsf{BK}_{n+l+1}^{m+n+l+1}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l, x, |b_1, \dots, b_m)$

(podľa definície mocniny strojov, sublemy **1** a vety **5.13**),

$\overset{\text{ChoďOBlokDoľava}}{\dashrightarrow} \mathsf{BK}_{n+l}^{m+n+l+1}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l, |x, b_1, \dots, b_m)$

(podľa vety **8.6**).

Podľa definície PreskočSledBlokovDoprava$_l$ a vety **5.13** už dostávame dokazované tvrdenie.

D Nech $k, l \in \mathbb{N}$. Označme $\mathtt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,l}$ stroj

$$\mathtt{Sekvencia}^2((\mathtt{Sekvencia}^2(\mathtt{PreskočSledBlokovDoprava}_l, \mathtt{ChoďOBlokDoľava}^l))^k, \mathtt{ChoďOBlokDoprava}^l).$$

V 7

> Nech $k, l \in \mathbb{N}$. Potom stroj $\mathtt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,l}$ je úplný.

Postupne platí:

$\mathtt{ChoďOBlokDoľava}^l$ je úplný
(podľa viet **8.4** a **1**),

$\mathtt{Sekvencia}^2(\mathtt{PreskočSledBlokovDoprava}_l, \mathtt{ChoďOBlokDoľava}^l)$ je úplný
(podľa vety **5** a definície $\mathtt{Sekvencia}^2$),

$(\mathtt{Sekvencia}^2(\mathtt{PreskočSledBlokovDoprava}_l, \mathtt{ChoďOBlokDoľava}^l))^k$ je úplný
(podľa vety **1**),

$\mathtt{ChoďOBlokDoprava}^l$ je úplný
(podľa viet **8.1** a **1**),

$\mathtt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,l}$ je úplný
(podľa definícií $\mathtt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,l}$ a $\mathtt{Sekvencia}^2$).

I Výpočet na Turingovom stroji $\mathtt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{3,2}$ z konfigurácie $\mathsf{BK}^7_4(1, 2, 3, 4, |5, 6, 7)$ bude prebiehať cez tieto konfigurácie:

		$\mathsf{BK}^7_4(1, 2, 3, 4, \vert 5, 6, 7)$
	$\mathtt{PreskočSledBlokovDoprava}_2$	$\mathsf{BK}^7_5(1, 2, 3, 5, 6, \vert 4, 7)$
	$\mathtt{ChoďOBlokDoľava}^2$	$\mathsf{BK}^7_3(1, 2, 3, \vert 5, 6, 4, 7)$
	$\mathtt{PreskočSledBlokovDoprava}_2$	$\mathsf{BK}^7_4(1, 2, 5, 6, \vert 3, 4, 7)$
	$\mathtt{ChoďOBlokDoľava}^2$	$\mathsf{BK}^7_2(1, 2, \vert 5, 6, 3, 4, 7)$
	$\mathtt{PreskočSledBlokovDoprava}_2$	$\mathsf{BK}^7_3(1, 5, 6, \vert 2, 3, 4, 7)$
	$\mathtt{ChoďOBlokDoľava}^2$	$\mathsf{BK}^7_1(1, \vert 5, 6, 2, 3, 4, 7)$
$\mathtt{ChoďOBlokDoprava}^2$		$\mathsf{BK}^7_3(1, 5, 6, \vert 2, 3, 4, 7)$

Trojblok 2, 3, 4 sa teda vymenil s dvojblokom 5, 6.

V 8

> Nech $n, m, k, l \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ a $y_1, \ldots, y_l \in \mathbb{N}$. Potom platí
>
> $$\mathsf{BK}^{n+k+l+m}_{n+k}(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_k, |y_1, \ldots, y_l, b_1, \ldots, b_m)$$
> $$\xrightarrow{\mathtt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,l}}$$
> $$\mathsf{BK}^{n+l+k+m}_{n+l}(a_1, \ldots, a_n, y_1, \ldots, y_l, |x_1, \ldots, x_k, b_1, \ldots, b_m).$$

Najprv sublema:

1

> Ak $j \in \{1, \ldots, k\}$, tak
>
> $$\mathsf{BK}^{n+k+l+m}_{n+j}(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, |y_1, \ldots, y_l, x_{j+1}, \ldots, x_k, b_1, \ldots, b_m)$$
> $$\xrightarrow{\mathtt{Sekvencia}^2(\mathtt{PreskočSledBlokovDoprava}_l, \mathtt{ChoďOBlokDoľava}^l)}$$
> $$\mathsf{BK}^{n+k+l+m}_{n+j-1}(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_{j-1}, |y_1, \ldots, y_l, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k, b_1, \ldots, b_m).$$

Postupne platí:

$\mathsf{BK}_{n+j}^{n+k+l+m}(a_1,\dots,a_n,x_1,\dots,x_{j-1},x_j,|y_1,\dots,y_l,x_{j+1},\dots,x_k,b_1,\dots,b_m)$
$\xrightarrow{\mathsf{PreskočSledBlokovDoprava}_l} \mathsf{BK}_{n+j-1+l}^{n+k+l+m}(a_1,\dots,a_n,x_1,\dots,x_{j-1},y_1,\dots,y_l,|x_j,x_{j+1},\dots,x_k,b_1,\dots,b_m)$

(podľa vety **6**),

$\xrightarrow{\mathsf{ChoďOBlokDoľava}^l} \mathsf{BK}_{n+j-1}^{n+k+l+m}(a_1,\dots,a_n,x_1,\dots,x_{j-1},|y_1,\dots,y_l,x_j,\dots,x_k,b_1,\dots,b_m)$

(podľa vety **3**).

Podľa vety **5.13** už dostávame dokazované tvrdenie.

Potom platí:

$\mathsf{BK}_{n+k}^{n+k+l+m}(a_1,\dots,a_n,x_1,\dots,x_k,|y_1,\dots,y_l,b_1,\dots,b_m)$
$\xrightarrow{(\mathsf{Sekvencia}^2(\mathsf{PreskočSledBlokovDoprava}_l,\mathsf{ChoďOBlokDoľava}^l))^k} \mathsf{BK}_{n}^{n+k+l+m}(a_1,\dots,a_n,|y_1,\dots,y_l,x_1,\dots,x_k,b_1,\dots,b_m)$

(podľa sublemy **1** a vety **5.13**),

$\xrightarrow{\mathsf{ChoďOBlokDoprava}^l} \mathsf{BK}_{n+l}^{n+l+k+m}(a_1,\dots,a_n,y_1,\dots,y_l,|x_1,\dots,x_k,b_1,\dots,b_m)$

(podľa vety **2**).

Podľa vety **5.13** už dostávame dokazované tvrdenie.

Aby sme nemuseli sledovať, medzi ktorými blokmi sa po výpočte nachádza hlava, zostrojíme zopár takých, ktoré budeme spúšťať výlučne na normalizovaných konfiguráciách.

D Nech $n,m,p\in\mathbb{N}$ a $k,l\in\mathbb{N}$. Označme $\mathsf{VymeňSledyBlokov}_{n,k;n+k+m,l}^{n+k+m+l+p}$ stroj

$$\mathsf{Sekvencia}^7(\mathsf{ChoďOBlokDoprava}^{n+k},\mathsf{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,m},$$
$$\mathsf{ChoďOBlokDoprava}^k,\mathsf{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,l},\mathsf{ChoďOBlokDoľava}^l,$$
$$\mathsf{VymeňSusednéSledyBlokov}_{m,l},\mathsf{ChoďOBlokDoľava}^{n+l}).$$

P Zdôraznime, že definícia je korektná: Ak poznáme hodnoty parametrov $n+k+m+l+p$, n, k, $n+k+m$ a l, za prirodzených predpokladov, že $n,k\le n+k+m\le n+k+m+l+p$ a $l\le n+k+m+l+p$, ľahko a jednoznačne určíme aj hodnoty zvyšných premenných m a p.

V $\boxed{9}$

Nech $n,m,p\in\mathbb{N}$ a $k,l\in\mathbb{N}$. Potom stroj $\mathsf{VymeňSledyBlokov}_{n,k;n+k+m,l}^{n+k+m+l+p}$ je úplný.

Postupne platí:

$\mathsf{ChoďOBlokDoprava}^{n+k}$ je úplný
(podľa viet **8.1** a **1**),

$\mathsf{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,m}$ je úplný
(podľa vety **7**),

$\mathsf{ChoďOBlokDoprava}^k$ je úplný
(podľa viet **8.1** a **1**),

$\mathsf{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,l}$ je úplný
(podľa vety **7**),

$\mathsf{ChoďOBlokDoľava}^l$ je úplný
(podľa viet **8.4** a **1**),

$\mathsf{VymeňSusednéSledyBlokov}_{m,l}$ je úplný
(podľa vety **7**),

$\mathsf{ChoďOBlokDoľava}^{n+l}$ je úplný
(podľa viet **8.4** a **1**),

VymeňSledyBlokov$^{n+k+m+l+p}_{n,k;n+k+m,l}$ je úplný
(podľa definícií VymeňSledyBlokov$^{n+k+m+l+p}_{n,k;n+k+m,l}$ a Sekvencia^{7}).

I Ukážme dôležité konfigurácie výpočtu na stroji VymeňSledyBlokov$^{7}_{1,2;4,2}$ z NK$^{7}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$:

	$\mathrm{BK}^7_0(\vert 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$
ChoďOBlokDoprava^{3}	$\mathrm{BK}^7_3(1, 2, 3, \vert 4, 5, 6, 7)$
VymeňSusednéSledyBlokov$_{2,1}$	$\mathrm{BK}^7_2(1, 4, \vert 2, 3, 5, 6, 7)$
ChoďOBlokDoprava^{2}	$\mathrm{BK}^7_4(1, 4, 2, 3, \vert 5, 6, 7)$
VymeňSusednéSledyBlokov$_{2,2}$	$\mathrm{BK}^7_4(1, 4, 5, 6, \vert 2, 3, 7)$
ChoďOBlokDoľava^{2}	$\mathrm{BK}^7_2(1, 4, \vert 5, 6, 2, 3, 7)$
VymeňSusednéSledyBlokov$_{1,2}$	$\mathrm{BK}^7_3(1, 5, 6, \vert 4, 2, 3, 7)$
ChoďOBlokDoľava^{3}	$\mathrm{BK}^7_0(\vert 1, 5, 6, 4, 2, 3, 7)$

Vymenili sme teda dvojbloky $2, 3$ a $5, 6$, čím sme dospeli k požadovanej konfigurácii NK$^{7}(1, 5, 6, 4, 2, 3, 7)$.

V $\boxed{\mathbf{10}}$

Nech $k, l \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ a $y_1, \dots, y_l \in \mathbb{N}$. Nech $n, m, p \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{N}$ a $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{N}$. Potom

$$\mathrm{NK}^{n+k+m+l+p}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m, y_1, \dots, y_l, c_1, \dots, c_p)$$

$$\overset{\text{VymeňSledyBlokov}^{n+k+m+l+p}_{n,k;n+k+m,l}}{\dashrightarrow}$$

$$\mathrm{NK}^{n+l+m+k+p}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m, x_1, \dots, x_k, c_1, \dots, c_p).$$

Platí:

$\mathrm{NK}^{n+k+m+l+p}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m, y_1, \dots, y_l, c_1, \dots, c_p)$

$= \mathrm{BK}^{n+k+m+l+p}_0(\vert a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m, y_1, \dots, y_l, c_1, \dots, c_p)$
(podľa definície NK$^{n+k+m+l+p}$),

$\overset{\text{ChoďOBlokDoprava}^{n+k}}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}^{n+k+m+l+p}_{n+k}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k, \vert b_1, \dots, b_m, y_1, \dots, y_l, c_1, \dots, c_p)$
(podľa vety **2**),

$\overset{\text{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,m}}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}^{n+m+k+l+p}_{n+m}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, \vert x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l, c_1, \dots, c_p)$
(podľa vety **8**),

$\overset{\text{ChoďOBlokDoprava}^{k}}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}^{n+m+k+l+p}_{n+m+k}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, x_1, \dots, x_k, \vert y_1, \dots, y_l, c_1, \dots, c_p)$
(podľa vety **2**),

$\overset{\text{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,l}}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}^{n+m+l+k+p}_{n+m+l}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, y_1, \dots, y_l, \vert x_1, \dots, x_k, c_1, \dots, c_p)$
(podľa vety **8**),

$\overset{\text{ChoďOBlokDoľava}^{l}}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}^{n+m+l+k+p}_{n+m}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, \vert y_1, \dots, y_l, x_1, \dots, x_k, c_1, \dots, c_p)$
(podľa vety **3**),

$\overset{\text{VymeňSusednéSledyBlokov}_{m,l}}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}^{n+l+m+k+p}_{n+l}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l, \vert b_1, \dots, b_m, x_1, \dots, x_k, c_1, \dots, c_p)$
(podľa vety **8**),

$\overset{\text{ChoďOBlokDoľava}^{n+l}}{\dashrightarrow} \mathrm{BK}^{n+l+m+k+p}_{0}(\vert a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m, x_1, \dots, x_k, c_1, \dots, c_p)$
(podľa vety **3**),

$= \mathrm{NK}^{n+l+m+k+p}(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_l, b_1, \dots, b_m, x_1, \dots, x_k, c_1, \dots, c_p)$
(podľa definície NK$^{n+l+m+k+p}$).

Podľa definície VymeňSledyBlokov$^{n+k+m+l+p}_{n,k;n+k+m,l}$ a vety **5.13** už dostávame dokazované tvrdenie.

D Nech $n, m \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$. Označme $\texttt{VymažSledBlokov}^{n+k+m}_{n,k}$ stroj

$$\texttt{Sekvencia}^5(\texttt{ChoďOBlokDoprava}^{n+k}, \texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,m},$$
$$\texttt{ChoďOBlokDoprava}^{k}, \texttt{VymažPoslednýBlok}^{k}, \texttt{ChoďOBlokDoľava}^{n+m}).$$

P Aj táto definícia je v poriadku: Ak poznáme parametre n, k a $n+k+m$, pričom $n, k \leq n+k+m$, hodnota premennej m je daná jednoznačne.

V **11**

Nech $n, m \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$. Potom stroj $\texttt{VymažSledBlokov}^{n+k+m}_{n,k}$ je úplný.

Postupne platí:

$\texttt{ChoďOBlokDoprava}^{n+k}$ je úplný
(podľa viet **8.1** a **1**),

$\texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,m}$ je úplný
(podľa vety **7**),

$\texttt{ChoďOBlokDoprava}^{k}$ je úplný
(podľa viet **8.1** a **1**),

$\texttt{VymažPoslednýBlok}^{k}$ je úplný
(podľa viet **8.7** a **1**),

$\texttt{ChoďOBlokDoľava}^{n+m}$ je úplný
(podľa viet **8.4** a **1**),

$\texttt{VymažSledBlokov}^{n+k+m}_{n,k}$ je úplný
(podľa definícií $\texttt{VymažSledBlokov}^{n+k+m}_{n,k}$ a $\texttt{Sekvencia}^5$).

I Ukážme dôležité konfigurácie výpočtu na stroji $\texttt{VymažSledBlokov}^{7}_{2,4}$ z $\mathsf{NK}^7(1,2,3,4,5,6,7)$:

	$\mathsf{BK}^7_0(\mid 1,2,3,4,5,6,7)$
$\texttt{ChoďOBlokDoprava}^6$	$\mathsf{BK}^7_6(1,2,3,4,5,6,\mid 7)$
$\texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{4,1}$	$\mathsf{BK}^7_3(1,2,7,\mid 3,4,5,6)$
$\texttt{ChoďOBlokDoprava}^4$	$\mathsf{BK}^7_7(1,2,7,3,4,5,6\mid)$
$\texttt{VymažPoslednýBlok}^4$	$\mathsf{BK}^3_3(1,2,7\mid)$
$\texttt{ChoďOBlokDoľava}^3$	$\mathsf{BK}^3_0(\mid 1,2,7)$

Vymazali sme teda štvorblok $3,4,5,6$, čím sme dospeli k požadovanej konfigurácii $\mathsf{NK}^3(1,2,7)$.

V **12**

Nech $k \in \mathbb{N}$ a $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$. Nech $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ a $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$. Potom

$$\mathsf{NK}^{n+k+m}(a_1,\ldots,a_n,x_1,\ldots,x_k,b_1,\ldots,b_m) \overset{\texttt{VymažSledBlokov}^{n+k+m}_{n,k}}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{n+m}(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m).$$

Platí:

$\mathsf{NK}^{n+k+m}(a_1,\ldots,a_n,x_1,\ldots,x_k,b_1,\ldots,b_m) = \mathsf{BK}^{n+k+m}_0(\mid a_1,\ldots,a_n,x_1,\ldots,x_k,b_1,\ldots,b_m)$
(podľa definície NK^{n+k+m}),

$\overset{\texttt{ChoďOBlokDoprava}^{n+k}}{\dashrightarrow} \mathsf{BK}^{n+k+m}_{n+k}(a_1,\ldots,a_n,x_1,\ldots,x_k,\mid b_1,\ldots,b_m)$
(podľa vety **2**),

$\overset{\texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{k,m}}{\dashrightarrow} \mathsf{BK}^{n+m+k}_{n+m}(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m,\mid x_1,\ldots,x_k)$
(podľa vety **8**),

$\overset{\texttt{ChoďOBlokDoprava}^k}{\dashrightarrow}$ $\mathsf{BK}^{n+m+k}_{n+m+k}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, x_1, \dots, x_k|)$
(podľa vety **2**),

$\overset{\texttt{VymažPoslednýBlok}^k}{\dashrightarrow}$ $\mathsf{BK}^{n+m}_{n+m}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m|)$
(podľa vety **4**),

$\overset{\texttt{ChoďOBlokDoľava}^{n+m}}{\dashrightarrow}$ $\mathsf{BK}^{n+m}_0(|a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = \mathsf{NK}^{n+m}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$
(podľa vety **3** a definície NK^{n+m}).

Podľa vety **5.13** už dostávame dokazované tvrdenie.

D Nech $n, m \in \mathbb{N}$. Označme $\texttt{SkopírujVybranýBlok}^{n+m+1}_{n+1}$ stroj

$$\texttt{Sekvencia}^7(\texttt{ChoďOBlokDoprava}^{n+1}, \texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{1,m}, \texttt{ChoďOBlokDoprava},$$
$$\texttt{SkopírujPoslednýBlok}, \texttt{ChoďOBlokDoľava}, \texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{m,1}, \texttt{ChoďOBlokDoľava}^{n+1}).$$

P Korektnosť tejto definície vyplýva z toho, že parametre $n + m + 1$ a $n + 1$ také, že platí $1 \leq n + 1 \leq n + m + 1$, jednoznačne určujú n a m.

V **13**

> Nech $n, m \in \mathbb{N}$. Potom stroj $\texttt{SkopírujVybranýBlok}^{n+m+1}_{n+1}$ je úplný.

Postupne platí:

$\texttt{ChoďOBlokDoprava}^{n+1}$ je úplný
(podľa viet **8.1** a **1**),

$\texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{1,m}$ je úplný
(podľa vety **7**),

$\texttt{ChoďOBlokDoprava}$ je úplný
(podľa vety **8.1**),

$\texttt{SkopírujPoslednýBlok}$ je úplný
(podľa vety **8.16**),

$\texttt{ChoďOBlokDoľava}$ je úplný
(podľa vety **8.4**),

$\texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{m,1}$ je úplný
(podľa vety **7**),

$\texttt{ChoďOBlokDoľava}^{n+1}$ je úplný
(podľa viet **8.4** a **1**),

$\texttt{SkopírujVybranýBlok}^{n+m+1}_{n+1}$ je úplný
(podľa definícií $\texttt{SkopírujVybranýBlok}^{n+m+1}_{n+1}$ a $\texttt{Sekvencia}^7$).

I Ukážme dôležité konfigurácie výpočtu na $\texttt{SkopírujVybranýBlok}^7_3$ z konfigurácie $\mathsf{NK}^7(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$:

	$\mathsf{BK}^7_0(\|1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$
$\texttt{ChoďOBlokDoprava}^3$	$\mathsf{BK}^7_3(1, 2, 3, \|4, 5, 6, 7)$
$\texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{1,4}$	$\mathsf{BK}^7_6(1, 2, 4, 5, 6, 7, \|3)$
$\texttt{ChoďOBlokDoprava}$	$\mathsf{BK}^7_7(1, 2, 4, 5, 6, 7, 3\|)$
$\texttt{SkopírujPoslednýBlok}$	$\mathsf{BK}^8_7(1, 2, 4, 5, 6, 7, 3, \|3)$
$\texttt{ChoďOBlokDoľava}$	$\mathsf{BK}^8_6(1, 2, 4, 5, 6, 7, \|3, 3)$
$\texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{4,1}$	$\mathsf{BK}^8_3(1, 2, 3, \|4, 5, 6, 7, 3)$
$\texttt{ChoďOBlokDoľava}^3$	$\mathsf{BK}^8_0(\|1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 3)$

Skopírovali sme teda (na koniec) 3. blok, čím sme dospeli k požadovanej konfigurácii $\mathsf{NK}^8(1,2,3,4,5,6,7,3)$.

V **14**

Nech $x \in \mathbb{N}$. Nech $n,m \in \mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{N}$ a $b_1,\dots,b_m \in \mathbb{N}$. Potom

$$\mathsf{NK}^{n+m+1}(a_1,\dots,a_n,x,b_1,\dots,b_m) \xrightarrow{\mathtt{SkopírujVybranýBlok}^{n+m+1}_{n+1}} \mathsf{NK}^{n+m+2}(a_1,\dots,a_n,x,b_1,\dots,b_m,x).$$

Platí:

$\mathsf{NK}^{n+m+1}(a_1,\dots,a_n,x,b_1,\dots,b_m) = \mathsf{BK}^{n+m+1}_0(|a_1,\dots,a_n,x,b_1,\dots,b_m)$
(podľa definície NK^{n+m+1}),

$\xrightarrow{\mathtt{ChoďOBlokDoprava}^{n+1}} \mathsf{BK}^{n+m+1}_{n+1}(a_1,\dots,a_n,x,|b_1,\dots,b_m)$
(podľa vety **2**),

$\xrightarrow{\mathtt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{1,m}} \mathsf{BK}^{n+m+1}_{n+m}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m,|x)$
(podľa vety **8**),

$\xrightarrow{\mathtt{ChoďOBlokDoprava}} \mathsf{BK}^{n+m+1}_{n+m+1}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m,x|)$
(podľa vety **8.3**),

$\xrightarrow{\mathtt{SkopírujPoslednýBlok}} \mathsf{BK}^{n+m+2}_{n+m+1}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m,x,|x)$
(podľa vety **8.18**),

$\xrightarrow{\mathtt{ChoďOBlokDoľava}} \mathsf{BK}^{n+m+2}_{n+m}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m,|x,x)$
(podľa vety **8.6**),

$\xrightarrow{\mathtt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{m,1}} \mathsf{BK}^{n+m+2}_{n+1}(a_1,\dots,a_n,x,|b_1,\dots,b_m,x)$
(podľa vety **8**),

$\xrightarrow{\mathtt{ChoďOBlokDoľava}^{n+1}} \mathsf{BK}^{n+m+2}_0(|a_1,\dots,a_n,x,b_1,\dots,b_m,x) = \mathsf{NK}^{n+m+2}(a_1,\dots,a_n,x,b_1,\dots,b_m,x)$
(podľa vety **3** a definície NK^{n+m+2}).

Podľa definície $\mathtt{SkopírujVybranýBlok}^{n+m+1}_{n+1}$ a vety **5.13** už dostávame dokazované tvrdenie.

D Nech $n,m \in \mathbb{N}$. Označme $\mathtt{InkrementujVybranýBlok}^{n+m+1}_{n+1}$ stroj

$$\mathtt{Sekvencia}^7(\mathtt{ChoďOBlokDoprava}^{n+1}, \mathtt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{1,m}, \mathtt{ChoďOBlokDoprava},$$
$$\mathtt{InkrementujPoslednýBlok}, \mathtt{ChoďOBlokDoľava}, \mathtt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{m,1}, \mathtt{ChoďOBlokDoľava}^{n+1}).$$

P Aj tu parametre $n+m+1$ a $n+1$ jednoznačne určujú n a m, takže definícia je korektná.

V **15**

Nech $n,m \in \mathbb{N}$. Potom stroj $\mathtt{InkrementujVybranýBlok}^{n+m+1}_{n+1}$ je úplný.

Postupne platí:

$\mathtt{ChoďOBlokDoprava}^{n+1}$ je úplný
(podľa viet **8.1** a **1**),

$\mathtt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{1,m}$ je úplný
(podľa vety **7**),

$\mathtt{ChoďOBlokDoprava}$ je úplný
(podľa vety **8.1**),

$\mathtt{InkrementujPoslednýBlok}$ je úplný
(podľa vety **8.10**),

$\mathtt{ChoďOBlokDoľava}$ je úplný
(podľa vety **8.4**),

$\texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{m,1}$ je úplný
(podľa vety **7**),

$\texttt{ChoďOBlokDoľava}^{n+1}$ je úplný
(podľa viet **8.4** a **1**),

$\texttt{SkopírujVybranýBlok}_{n+1}^{n+m+1}$ je úplný
(podľa definícií $\texttt{InkrementujVybranýBlok}_{n+1}^{n+m+1}$ a $\texttt{Sekvencia}^7$).

I Ukážme dôležité konfigurácie výpočtu na $\texttt{InkrementujVybranýBlok}_3^7$ z $\mathsf{NK}^7(1,2,3,4,5,6,7)$:

	$\mathsf{BK}_0^7(\vert 1,2,3,4,5,6,7)$
$\texttt{ChoďOBlokDoprava}^3$	$\mathsf{BK}_3^7(1,2,3,\vert 4,5,6,7)$
$\texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{1,4}$	$\mathsf{BK}_6^7(1,2,4,5,6,7,\vert 3)$
$\texttt{ChoďOBlokDoprava}$	$\mathsf{BK}_7^7(1,2,4,5,6,7,3\vert)$
$\texttt{InkrementujPoslednýBlok}$	$\mathsf{BK}_7^7(1,2,4,5,6,7,4\vert)$
$\texttt{ChoďOBlokDoľava}$	$\mathsf{BK}_6^7(1,2,4,5,6,7,\vert 4)$
$\texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{4,1}$	$\mathsf{BK}_3^7(1,2,4,\vert 4,5,6,7)$
$\texttt{ChoďOBlokDoľava}^3$	$\mathsf{BK}_0^7(\vert 1,2,4,4,5,6,7)$

Inkrementovali sme teda 3. blok, čím sme dospeli k požadovanej konfigurácii $\mathsf{NK}^7(1,2,4,4,5,6,7)$.

V $\boxed{\mathbf{16}}$

Nech $x \in \mathbb{N}$. Nech $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ a $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$. Potom

$$\mathsf{NK}^{n+m+1}(a_1,\ldots,a_n,x,b_1,\ldots,b_m) \xrightarrow{\texttt{InkrementujVybranýBlok}_{n+1}^{n+m+1}} \mathsf{NK}^{n+m+1}(a_1,\ldots,a_n,x+1,b_1,\ldots,b_m).$$

Platí:

$\mathsf{NK}^{n+m+1}(a_1,\ldots,a_n,x,b_1,\ldots,b_m) = \mathsf{BK}_0^{n+m+1}(\vert a_1,\ldots,a_n,x,b_1,\ldots,b_m)$
(podľa definície NK^{n+m+1}),

$\xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoprava}^{n+1}} \mathsf{BK}_{n+1}^{n+m+1}(a_1,\ldots,a_n,x,\vert b_1,\ldots,b_m)$
(podľa vety **2**),

$\xrightarrow{\texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{1,m}} \mathsf{BK}_{n+m}^{n+m+1}(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m,\vert x)$
(podľa vety **8**),

$\xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoprava}} \mathsf{BK}_{n+m+1}^{n+m+1}(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m,x\vert)$
(podľa vety **8.3**),

$\xrightarrow{\texttt{InkrementujPoslednýBlok}} \mathsf{BK}_{n+m+1}^{n+m+1}(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m,x+1\vert)$
(podľa vety **8.12**),

$\xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoľava}} \mathsf{BK}_{n+m}^{n+m+1}(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m,\vert x+1)$
(podľa vety **8.6**),

$\xrightarrow{\texttt{VymeňSusednéSledyBlokov}_{m,1}} \mathsf{BK}_{n+1}^{n+m+1}(a_1,\ldots,a_n,x+1,\vert b_1,\ldots,b_m)$
(podľa vety **8**),

$\xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoľava}^{n+1}} \mathsf{BK}_0^{n+m+1}(\vert a_1,\ldots,a_n,x+1,b_1,\ldots,b_m) = \mathsf{NK}^{n+m+1}(a_1,\ldots,a_n,x+1,b_1,\ldots,b_m)$
(podľa vety **3** a definície NK^{n+m+1}).

Podľa definície $\texttt{InkrementujVybranýBlok}_{n+1}^{n+m+1}$ a vety **5.13** už dostávame dokazované tvrdenie.

D Nech $n, m \in \mathbb{N}$. Označme $\texttt{VložNulovýBlok}_n^{n+m}$ stroj

$$\texttt{Sekvencia}^4(\texttt{ChoďOBlokDoprava}^{n+m}, \texttt{PridajNulovýBlok},$$

VymeňSusednéSledyBlokov$_{m,1}$, ChoďOBlokDoľava^{n+1}).

P Parametre $n + m$ a n jednoznačne určujú m.

V 17

Nech $n, m \in \mathbb{N}$. Potom stroj VložNulovýBlok$_n^{n+m}$ je úplný.

Postupne platí:

ChoďOBlokDoprava^{n+m} je úplný
(podľa viet **8.1** a **1**),

PridajNulovýBlok je úplný
(podľa vety **8.13**),

VymeňSusednéSledyBlokov$_{m,1}$ je úplný
(podľa vety **7**),

ChoďOBlokDoľava^{n+1} je úplný
(podľa viet **8.4** a **1**),

VložNulovýBlok$_n^{n+m}$ je úplný
(podľa definícií VložNulovýBlok$_n^{n+m}$ a Sekvencia^4).

I Ukážme dôležité konfigurácie výpočtu na VložNulovýBlok$_3^7$ z konfigurácie NK^7(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7):

	BK$_0^7$(| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
ChoďOBlokDoprava^7	BK$_7^7$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 |)
PridajNulovýBlok	BK$_7^8$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, | 0)
VymeňSusednéSledyBlokov$_{4,1}$	BK$_4^8$(1, 2, 3, 0, | 4, 5, 6, 7)
ChoďOBlokDoľava^4	BK$_0^8$(| 1, 2, 3, 0, 4, 5, 6, 7)

Za 3. blok sme teda vložili nový blok 0, čím sme dospeli k požadovanej konfigurácii NK^8(1, 2, 3, 0, 4, 5, 6, 7).

V 18

Nech $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ a $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{N}$. Potom

$$\text{NK}^{n+m}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \xrightarrow{\text{VložNulovýBlok}_n^{n+m}} \text{NK}^{n+m+1}(a_1, \dots, a_n, 0, b_1, \dots, b_m).$$

Platí:

$\text{NK}^{n+m}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = \text{BK}_0^{n+m}(| a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$
(podľa definície NK^{n+m}),

$\xrightarrow{\text{ChoďOBlokDoprava}^{n+m}} \text{BK}_{n+m}^{n+m}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m |)$
(podľa vety **2**),

$\xrightarrow{\text{PridajNulovýBlok}} \text{BK}_{n+m}^{n+m+1}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, | 0)$
(podľa vety **8.15**),

$\xrightarrow{\text{VymeňSusednéSledyBlokov}_{m,1}} \text{BK}_{n+1}^{n+m+1}(a_1, \dots, a_n, 0, | b_1, \dots, b_m)$
(podľa vety **8**),

$\xrightarrow{\text{ChoďOBlokDoľava}^{n+1}} \text{BK}_0^{n+m+1}(| a_1, \dots, a_n, 0, b_1, \dots, b_m) = \text{NK}^{n+m+1}(a_1, \dots, a_n, 0, b_1, \dots, b_m)$
(podľa vety **3** a definície NK^{n+m+1}).

Podľa definície VložNulovýBlok$_n^{n+m}$ a vety **5.13** už dostávame dokazované tvrdenie.

D Nech T je úplný Turingov stroj. Nech $n \in \mathbb{N}$. Označme $\texttt{AplikujZaBlokmi}_n^T$ stroj

$$\texttt{Sekvencia}^3(\texttt{ChoďOBlokDoprava}^n, T, \texttt{ChoďOBlokDoľava}^n).$$

V **19**

Nech T je úplný Turingov stroj. Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom stroj $\texttt{AplikujZaBlokmi}_n^T$ je úplný.

Postupne platí:

$\texttt{ChoďOBlokDoprava}^n$ je úplný
(podľa viet **8.1** a **1**),

T je úplný
(podľa predpokladu),

$\texttt{ChoďOBlokDoľava}^n$ je úplný
(podľa viet **8.4** a **1**),

$\texttt{AplikujZaBlokmi}_n^T$ je úplný
(podľa definícií $\texttt{AplikujZaBlokmi}_n^T$ a $\texttt{Sekvencia}^3$).

V **20**

Nech T je úplný Turingov stroj. Nech $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Nech $S = \texttt{AplikujZaBlokmi}_n^T$. Nech $k \in \mathbb{N}$ a $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$.

- Nech $l \in \mathbb{N}$ a $y_1, \ldots, y_l \in \mathbb{N}$. Ak $\mathsf{NK}^k(x_1, \ldots, x_k) \xrightarrow{T} \mathsf{NK}^l(y_1, \ldots, y_l)$, tak platí

$$\mathsf{NK}^{n+k}(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_k) \xrightarrow{S} \mathsf{NK}^{n+l}(a_1, \ldots, a_n, y_1, \ldots, y_l).$$

- Ak výpočet na T z $\mathsf{NK}^k(x_1, \ldots, x_k)$ je nekonečný, tak výpočet na S z $\mathsf{NK}^{n+k}(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_k)$ je nekonečný.

Najprv sublema:

1 $\mathsf{NK}^{n+k}(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_k) \xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoprava}^n} \mathsf{BK}_n^{n+k}(a_1, \ldots, a_n, |x_1, \ldots, x_k)$.

$\mathsf{NK}^{n+k}(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_k) = \mathsf{BK}_0^{n+k}(|a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_k)$
(podľa definície NK^{n+k}),

$\xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoprava}^n} \mathsf{BK}_n^{n+k}(a_1, \ldots, a_n, |x_1, \ldots, x_k)$
(podľa vety **2**).

Potom platí:

- $\mathsf{NK}^{n+k}(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_k)$
  $\xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoprava}^n} \mathsf{BK}_n^{n+k}(a_1, \ldots, a_n, |x_1, \ldots, x_k)$
  (podľa sublemy **1**),
  $\xrightarrow{T} \mathsf{BK}_n^{n+l}(a_1, \ldots, a_n, |y_1, \ldots, y_l)$
  (podľa vety **6.16** a predpokladu),
  $\xrightarrow{\texttt{ChoďOBlokDoľava}^n} \mathsf{BK}_0^{n+l}(|a_1, \ldots, a_n, y_1, \ldots, y_l) = \mathsf{NK}^{n+l}(a_1, \ldots, a_n, y_1, \ldots, y_l)$
  (podľa vety **3** a definície NK^{n+l}).

  Podľa definície $\texttt{AplikujZaBlokmi}_n^T$ a vety **5.13** už dostávame dokazované tvrdenie.
- Postupne platí:
  výpočet na T z $\mathsf{NK}^k(x_1, \ldots, x_k)$ je nekonečný
  (predpoklad),
  výpočet na T z $\mathsf{BK}_0^k(|x_1, \ldots, x_k)$ je nekonečný
  (podľa definície NK^k),

výpočet na T z KPP(BK$_0^k$(|$x_1, \dots, x_k$), Bloky^n($a_1, \dots, a_n$)) je nekonečný
(podľa vety **6.5**),

výpočet na T z BK$_k^{n+k}$($a_1, \dots, a_n$, |$x_1, \dots, x_k$) je nekonečný
(podľa vety **2.35**),

výpočet na S z BK$_0^{n+k}$(|$a_1, \dots, a_n$, $x_1, \dots, x_k$) je nekonečný
(podľa definície AplikujZaBlokmi$_n^T$ a vety **5.13**, ktorej jeden z predpokladov je splnený podľa sublemy **1**).

D Nech $n \in \mathbb{N}$ a $k, l \in \{1, \dots, n\}$. Označme PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý$_{k,l}^n$ stroj $A \circ C$, pričom platí:

- A = Sekvencia^3(SkopírujVybranýBlok$_k^n$, SkopírujVybranýBlok$_l^{n+1}$, ChoďOBlokDoprava^{n+1}).
- B = Sekvencia^2(ChoďOBlokDoľava^{n+1}, VymažSledBlokov$_{n,2}^{n+2}$).
- C = Dvojvetvenie(BlokJeVäčšíNežSusedný, B, B).

P Názov tohto stroja je mierne zavádzajúci, v prípade, že prvý porovnávaný blok je kratší než druhý, nemáme jeho chod, a teda ani jeho výsledok, pod kontrolou a nevieme ho interpretovať.

My ho však budeme používať výlučne za predpokladu, že druhý blok y nepresahuje prvý x. V takom prípade sa už názov stroja zhoduje s výsledkom jeho práce – rozhodne, či platí $x > y$, alebo $x = y$.

V **21**

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $k, l \in \{1, \dots, n\}$. Potom stroj PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý$_{k,l}^n$ je poloúplný.

Nech A, B, C, D a E sú stroje z definície PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý$_{k,l}^n$. Potom postupne platí:

SkopírujVybranýBlok$_k^n$ je úplný
(podľa vety **13**),

SkopírujVybranýBlok$_l^{n+1}$ je úplný
(podľa vety **13**),

ChoďOBlokDoprava^{n+1} je úplný
(podľa viet **8.1** a **1**),

A je úplný
(podľa definícií A a Sekvencia^3),

ChoďOBlokDoľava^{n+1} je úplný
(podľa viet **8.4** a **1**),

VymažSledBlokov$_{n,2}^{n+2}$ je úplný
(podľa vety **11**),

B je úplný
(podľa definícií B a Sekvencia^2),

C je poloúplný
(podľa viet **8.22** a definícií C a Dvojvetvenie),

PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý$_{k,l}^n$ je poloúplný
(podľa definície PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý$_{k,l}^n$ a vety **5.9**).

I Ukážme dôležité konfigurácie výpočtu na PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý$_{5,3}^7$ z NK^7(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7):

			$\mathsf{BK}^7_0(\mid 1,2,3,4,5,6,7)$	
A		$\mathtt{SkopírujVybranýBlok}^7_5$	$\mathsf{BK}^8_0(\mid 1,2,3,4,5,6,7,5)$	
		$\mathtt{SkopírujVybranýBlok}^8_3$	$\mathsf{BK}^9_0(\mid 1,2,3,4,5,6,7,5,3)$	
		$\mathtt{ChoďOBlokDoprava}^8$	$\mathsf{BK}^9_8(1,2,3,4,5,6,7,5,\mid 3)$	
C	$\mathtt{BlokJeVäčšíNežSusedný}$		$\mathsf{BK}^9_8(1,2,3,4,5,6,7,5,\mid 3)$	kladná odpoveď
	B	$\mathtt{ChoďOBlokDoľava}^8$	$\mathsf{BK}^9_0(\mid 1,2,3,4,5,6,7,5,3)$	
		$\mathtt{VymažSledBlokov}^9_{7,2}$	$\mathsf{BK}^7_0(\mid 1,2,3,4,5,6,7)$	

Zistili sme teda, že 5. blok je väčší než 3. blok. Pôvodná konfigurácia $\mathsf{NK}^7(1,2,3,4,5,6,7)$ sa pritom vôbec nezmenila.

I Ukážme dôležité konfigurácie výpočtu na $\mathtt{PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý}^7_{5,3}$ z $\mathsf{NK}^7(1,2,5,4,5,6,7)$:

			$\mathsf{BK}^7_0(\mid 1,2,5,4,5,6,7)$	
A		$\mathtt{SkopírujVybranýBlok}^7_5$	$\mathsf{BK}^8_0(\mid 1,2,5,4,5,6,7,5)$	
		$\mathtt{SkopírujVybranýBlok}^8_3$	$\mathsf{BK}^9_0(\mid 1,2,5,4,5,6,7,5,5)$	
		$\mathtt{ChoďOBlokDoprava}^8$	$\mathsf{BK}^9_8(1,2,5,4,5,6,7,5,\mid 5)$	
C	$\mathtt{BlokJeVäčšíNežSusedný}$		$\mathsf{BK}^9_8(1,2,5,4,5,6,7,5,\mid 5)$	záporná odpoveď
	B	$\mathtt{ChoďOBlokDoľava}^8$	$\mathsf{BK}^9_0(\mid 1,2,5,4,5,6,7,5,5)$	
		$\mathtt{VymažSledBlokov}^9_{7,2}$	$\mathsf{BK}^7_0(\mid 1,2,5,4,5,6,7)$	

Zistili sme teda, že 5. blok nie je väčší než 3. blok, a teda (keďže predpokladáme, že je aspoň taký veľký) oba sú rovnako veľké. Ani teraz sa pôvodná normalizovaná konfigurácia $\mathsf{NK}^7(1,2,5,4,5,6,7)$ vôbec nezmenila.

V $\boxed{22}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $k, l \in \{1,\dots,n\}$. Nech $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{N}$, pričom $x_k \geq x_l$. Potom platí:

- Ak $x_k > x_l$, tak $\mathsf{NK}^n(x_1,\dots,x_n) \overset{\mathtt{PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý}^n_{k,l}}{\dashrightarrow_{+}} \mathsf{NK}^n(x_1,\dots,x_n)$.
- Ak $x_k = x_l$, tak $\mathsf{NK}^n(x_1,\dots,x_n) \overset{\mathtt{PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý}^n_{k,l}}{\dashrightarrow_{-}} \mathsf{NK}^n(x_1,\dots,x_n)$.

Nech A, B a C sú stroje z definície $\mathtt{PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý}^n_{k,l}$.

1 $\mathsf{NK}^n(x_1,\dots,x_n) \overset{A}{\dashrightarrow} \mathsf{BK}^{n+2}_{n+1}(x_1,\dots,x_n,x_k,\mid x_l)$.

Platí:

$\mathsf{NK}^n(x_1,\dots,x_n)$

$\overset{\mathtt{SkopírujVybranýBlok}^n_k}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1,\dots,x_n,x_k)$

(podľa vety **14**),

$\overset{\mathtt{SkopírujVybranýBlok}^{n+1}_l}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{n+2}(x_1,\dots,x_n,x_k,x_l) = \mathsf{BK}^{n+2}_0(\mid x_1,\dots,x_n,x_k,x_l)$

(podľa vety **14** a definície NK^{n+2}),

$\overset{\mathtt{ChoďOBlokDoprava}^{n+1}}{\dashrightarrow} \mathsf{BK}^{n+2}_{n+1}(x_1,\dots,x_n,x_k,\mid x_l)$

(podľa vety **2**).

Podľa vety **5.13** a definície A z toho dostávame požadované tvrdenie.

2 $\mathsf{BK}^{n+2}_{n+1}(x_1,\dots,x_n,x_k,\mid x_l) \overset{B}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^n(x_1,\dots,x_n)$.

Platí:

$\mathsf{BK}^{n+2}_{n+1}(x_1,\dots,x_n,x_k,\mid x_l)$

$\overset{\mathtt{ChoďOBlokDoľava}^{n+1}}{\dashrightarrow} \mathsf{BK}^{n+2}_0(\mid x_1,\dots,x_n,x_k,x_l) = \mathsf{NK}^{n+2}(x_1,\dots,x_n,x_k,x_l)$

(podľa vety **3** a definície NK^{n+2}),

$\overset{\mathtt{VymažSledBlokov}^{n+2}_{n,2}}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^n(x_1,\dots,x_n)$

(podľa vety **12**).

Podľa vety **5.13** a definície B z toho dostávame požadované tvrdenie.

3
- Ak $x_k > x_l$, tak $\mathsf{BK}^{n+2}_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_k, |x_l) \overset{C}{\underset{+}{\dashrightarrow}} \mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$.
- Ak $x_k = x_l$, tak $\mathsf{BK}^{n+2}_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_k, |x_l) \overset{C}{\underset{-}{\dashrightarrow}} \mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$.

V oboch prípadoch to je tvrdenie vety **5.23**, ktorej podmienky sú splnené podľa definície C, vety **8.24** a sublemy **2**.

Dokazované tvrdenie potom vyplýva z vety **5.14** a sublem **1** a **3**.

D Nech $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1, \dots, n\}$. Označme `VybranýBlokJeKladný`^n_k stroj $A \circ C$, pričom platí:

- $A =$ `VložNulovýBlok`^n_n.
- $B =$ `VymažSledBlokov`$^{n+1}_{n,1}$.
- $C =$ `Dvojvetvenie`(`PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý`$^{n+1}_{k,n+1}$, B, B).

V $\boxed{23}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1, \dots, n\}$. Potom stroj `VybranýBlokJeKladný`^n_k je poloúplný.

Nech A, B a C sú stroje z definície `VybranýBlokJeKladný`^n_k. Potom postupne platí:

A je úplný
(podľa vety **17**),

B je úplný
(podľa vety **11**),

`PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý`$^{n+1}_{k,n+1}$ je poloúplný
(podľa vety **21**),

C je poloúplný
(podľa definície `Dvojvetvenie`),

`VybranýBlokJeKladný`^n_k je poloúplný
(podľa definície `VybranýBlokJeKladný`^n_k a vety **5.9**).

I Ukážme dôležité konfigurácie výpočtu na `VybranýBlokJeKladný`$^7_5$ z konfigurácie $\mathsf{NK}^7(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$:

			$\mathsf{NK}^7(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$	
A		`VložNulovýBlok`$^7_7$	$\mathsf{NK}^8(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0)$	
B	`PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý`$^8_{5,8}$		$\mathsf{NK}^8(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0)$	kladná
	C	`VymažSledBlokov`$^8_{7,1}$	$\mathsf{NK}^7(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$	

Zistili sme teda, že 5. blok je kladný. Pôvodná konfigurácia $\mathsf{NK}^7(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ sa pritom vôbec nezmenila.

I Ukážme dôležité konfigurácie výpočtu na `VybranýBlokJeKladný`$^7_5$ z konfigurácie $\mathsf{NK}^7(1, 2, 3, 4, 0, 6, 7)$:

			$\mathsf{NK}^7(1, 2, 3, 4, 0, 6, 7)$	
A		`VložNulovýBlok`$^7_7$	$\mathsf{NK}^8(1, 2, 3, 4, 0, 6, 7, 0)$	
B	`PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý`$^8_{5,8}$		$\mathsf{NK}^8(1, 2, 3, 4, 0, 6, 7, 0)$	záporná
	C	`VymažSledBlokov`$^8_{7,1}$	$\mathsf{NK}^7(1, 2, 3, 4, 0, 6, 7)$	

Zistili sme teda, že 5. blok nie je kladný, čiže je nulový. Pôvodná konfigurácia $\mathsf{NK}^7(1, 2, 3, 4, 0, 6, 7)$ sa ani tu nezmenila.

V $\boxed{24}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$. Nech $k \in \{1, \dots, n\}$. Potom platí:

- Ak $x_k > 0$, tak $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow[+]{\mathtt{VybranýBlokJeKladný}_k^n} \mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$.
- Ak $x_k = 0$, tak $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow[-]{\mathtt{VybranýBlokJeKladný}_k^n} \mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$.

Nech A, B a C sú stroje z definície $\mathtt{VybranýBlokJeKladný}_k^n$.

1 $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{A} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0)$.

Podľa definície A a vety **18**.

2 $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) \xrightarrow{B} \mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$.

Podľa definície B a vety **12**.

3
- Ak $x_k > 0$, tak $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) \xrightarrow[+]{C} \mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$.
- Ak $x_k = 0$, tak $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) \xrightarrow[-]{C} \mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$.

V oboch prípadoch to je tvrdenie vety **5.23**, ktorej podmienky sú splnené podľa definície C, vety **22** (pretože $x_k \geq 0$) a sublemy **2**.

Dokazované tvrdenie potom vyplýva z vety **5.14** a sublem **1** a **3**.

2

Rekurzívne funkcie

2.1 Primitívne rekurzívne funkcie

Povedali sme si už, že naším hlavným záujmom sú funkcie, ktorých vstupy i jediný výstup sú prirodzené čísla. Tieto funkcie možno (podobne ako v predchádzajúcej kapitole spomínané Turingove stroje) tiež istým spôsobom hierarchizovať. Najprv definujeme niekoľko typov elementárnych funkcií a potom z nich prostredníctvom pár definovaných operácií budeme vytvárať funkcie zložitejšie.

D Pod *základnou* rozumieme každú z týchto funkcií:

- $\mathtt{Nula}$, kde $\mathtt{Nula} : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ a $\mathtt{Nula}() = 0$,
- $\mathtt{Nasledovník}$, kde $\mathtt{Nasledovník} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a $\mathtt{Nasledovník}(x) = x + 1$,
- $\mathtt{Projekcia}_i^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathtt{Projekcia}_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ a $\mathtt{Projekcia}_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$.

I
- $\mathtt{Nasledovník}(0) = 1$.
- $\mathtt{Nasledovník}(7) = 8$.
- $\mathtt{Nasledovník}(100) = 101$.

I
- $\mathtt{Projekcia}_1^3(0, 7, 100) = 0$.
- $\mathtt{Projekcia}_2^3(0, 7, 100) = 7$.
- $\mathtt{Projekcia}_3^3(0, 7, 100) = 100$.

P Podmienka $i \in \{1, \dots, n\}$ v definícii $\mathtt{Projekcia}_i^n$ vynucuje, aby n bolo kladné.

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Označme $\mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^n$ množinu všetkých (totálnych) funkcií z $\mathbb{N}^n$ do $\mathbb{N}$.

I $\mathtt{Nula} \in \mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^0$.

I $\mathtt{Nasledovník} \in \mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^1$.

I Pre každé n z $\mathbb{N}$ a i z $\{1, \dots, n\}$ platí $\mathtt{Projekcia}_i^n \in \mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^n$.

P Často budeme pracovať s klasickými číselnými operáciami, ktoré budeme alternatívne nazývať takto:

- $\mathtt{Súčet}$ znamená „+", t. j. $\mathtt{Súčet}(x, y) = x + y$. Táto funkcia je totálna a má dva vstupy, patrí teda do množiny $\mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^2$.
- $\mathtt{Súčin}$ znamená „·", t. j. $\mathtt{Súčin}(x, y) = x \cdot y$. Aj táto funkcia je totálna s dvoma vstupmi, takže patrí do množiny $\mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^2$.
- $\mathtt{Mocnina}$ vlastne ani nemá alternatívne označenie, platí $\mathtt{Mocnina}(x, y) = x^y$. Špeciálne $\mathtt{Mocnina}(0, 0) = 0^0 = 1$ (čo je v súlade s tým, že x^y je počet zobrazení z ľubovoľnej y-prvkovej množiny do ľubovoľnej x-prvkovej množiny). Aj táto funkcia je teda totálna, takže je v $\mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^2$.
- $\mathtt{Rozdiel}$ je „−", t. j. $\mathtt{Rozdiel}(x, y) = x - y$, avšak iba v prípade, keď $x \geq y$. V opačnom prípade hodnota tejto funkcie nie je definovaná, takže napríklad $\langle 1, 2 \rangle$ nepatrí do jej definičného oboru (zdôraznime, že pracujeme v obore prirodzených čísel). Inými slovami, nie je totálna, a teda nepatrí do $\mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^2$.

D Nech $n, k \in \mathbb{N}$. Definujme zobrazenie $\mathtt{PrimitívneZloženie}^{n,k}$ z množiny $(\mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^n)^k \times \mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^k$ do množiny $\mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^n$ takto:

Ak pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ platí $g_i \in \mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^n$ a $h \in \mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^k$ a pre každé x_1, ..., x_n z $\mathbb{N}$ platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)),$$

tak $\mathtt{PrimitívneZloženie}^{n,k}(\langle g_1, \dots, g_k \rangle, h) = f$ a budeme hovoriť, že funkcia f vznikla *primitívnym zložením* z funkcií g_1, ..., g_k a h.

I Nech platí:

- $h(a, b) = a + ab$.
- $g_1(x, y, z) = xyz$.
- $g_2(x, y, z) = 2x + 3z$.
- $f(x, y, z) = xyz + xyz(2x + 3z)$.

Potom $f = \texttt{PrimitívneZloženie}^{3,2}(\langle g_1, g_2\rangle, h)$, pretože platí:

$f(x_1, x_2, x_3)$
$= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3(2x_1 + 3x_3)$,
$= g_1(x_1, x_2, x_3) + g_1(x_1, x_2, x_3)g_2(x_1, x_2, x_3)$,
$= h(g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3))$.

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom definujme zobrazenie $\texttt{PrimitívnaRekurzia}^n$ z množiny $\texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^n \times \texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+2}$ do množiny $\texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$ takto:

Nech platí $g \in \texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^n$ a $h \in \texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+2}$ a pre každé x_1, ..., x_n z $\mathbb{N}$ platí:

1
$$f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n).$$

2 Ak $y \in \mathbb{N}$, tak
$$f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)).$$

Potom $\texttt{PrimitívnaRekurzia}^n(g, h) = f$ a budeme hovoriť, že funkcia f vznikla *primitívnou rekurziou* z funkcií g a h.

I Nech platí:

- $g(a) = 0$.
- $h(a, b, c) = c + a$.
- $f(a, b) = ab$.

Potom $f = \texttt{PrimitívnaRekurzia}^1(g, h)$, pretože platí:

1 $f(x_1, 0)$
$= x_1 \cdot 0$,
$= 0$,
$= g(x_1)$.

2 $f(x_1, y + 1)$
$= x_1(y + 1)$,
$= x_1y + x_1$,
$= f(x_1, y) + x_1$,
$= h(x_1, y, f(x_1, y))$.

I Nech platí:

- $g() = 1$.
- $h(a, b) = (a + 1)b$.
- $f(a) = a!$.

Potom $f = \texttt{PrimitívnaRekurzia}^0(g, h)$, pretože platí:

1 $f(0)$
$= 0!$,
$= 1$,
$= g()$.

2 $f(y+1)$
$= (y+1)!,$
$= (y+1)\cdot y!,$
$= (y+1)f(y),$
$= h(y, f(y)).$

D Definujme `PrimitívneRekurzívneFunkcie` (skrátene `PRF`) ako najmenšiu množinu, pre ktorú platí:

1 **a** `Nula` $\in$ `PRF`.
b `Nasledovník` $\in$ `PRF`.
c $\texttt{Projekcia}_i^n \in$ `PRF` pre každé n z $\mathbb{N}$ a i z $\{1, \dots, n\}$.
2 **a** Ak f, g_1, ..., g_k a h sú funkcie také, že pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ platí $g_i \in$ `PRF`, $h \in$ `PRF` a f vznikla primitívnym zložením z g_1, ..., g_k a h, tak aj $f \in$ `PRF`.
b Ak f, g a h sú funkcie také, že $g \in$ `PRF`, $h \in$ `PRF` a f vznikla z g a h primitívnou rekurziou, tak aj $f \in$ `PRF`.

Jej prvky budeme nazývať *primitívne rekurzívne funkcie*.

I Ukážeme, že funkcia `Súčet` je primitívne rekurzívna. Platí totiž:

1 $\texttt{Súčet}(x_1, 0)$
$= x_1 + 0,$
$= x_1,$
$= \texttt{Projekcia}_1^1(x_1).$
2 $\texttt{Súčet}(x_1, y+1)$
$= x_1 + (y+1),$
$= (x_1 + y) + 1,$
$= \texttt{Súčet}(x_1, y) + 1,$
$= \texttt{Nasledovník}(\texttt{Súčet}(x_1, y)),$
$= h(x_1, y, \texttt{Súčet}(x_1, y)),$
kde
$h(a, b, c)$
$= \texttt{Nasledovník}(c),$
$= \texttt{Nasledovník}(\texttt{Projekcia}_3^3(a, b, c)).$

Funkcia `Súčet` teda vznikla primitívnou rekurziou z funkcií $\texttt{Projekcia}_1^1$ a h. Kým prvá z nich je primitívne rekurzívna priamo podľa definície `PRF`, druhá, h, vznikla primitívnym zložením z $\texttt{Projekcia}_3^3$ a `Nasledovník`. Tie sú podľa definície `PRF` a opäť `PRF` primitívne rekurzívne, teda h je podľa definície `PRF` tiež primitívne rekurzívna. A to podľa definície `PRF` znamená, že aj naša funkcia `Súčet` je primitívne rekurzívna.

P Všimnime si odlišný spôsob označovania funkcií `Súčet`, $\texttt{Projekcia}_1^1$, $\texttt{Projekcia}_3^3$ či `Nasledovník`, ktoré sú napísané červenou farbou a osobitným nenakloneným typom písma, a funkciou h, ktorej označenie je kurzívou.
Podľa pravidiel matematickej typografie sa kurzívou píšu také označenia, ktoré majú dočasný charakter (trvajú len vo vymedzenej oblasti) a mohli by pokojne byť zamenené za iné.
Pre nás to okrem iného znamená, že v ďalšom príklade už môže (a aj bude) h označovať úplne inú funkciu.

I Podobne možno ukázať primitívnu rekurzivitu funkcie `Súčin`:

1 $\texttt{Súčin}(x_1, 0)$
$= x_1 \cdot 0,$
$= 0,$
$= \texttt{Nula}(),$
$= g(x_1),$

kde $g(a) = \texttt{Nula}()$, a teda

$$g = \texttt{PrimitívneZloženie}^{1,0}(\langle\rangle, \texttt{Nula}).$$

A keďže Nula je podľa definície PRF primitívne rekurzívna, podľa definície PRF je aj g primitívne rekurzívna.

2 $\texttt{Súčin}(x_1, y+1)$
$= x_1 \cdot (y+1),$
$= x_1 \cdot y + x_1,$
$= \texttt{Súčin}(x_1, y) + x_1,$
$= \texttt{Súčet}(\texttt{Súčin}(x_1, y), x_1),$
$= h(x_1, y, \texttt{Súčin}(x_1, y)),$
kde
$h(a, b, c)$
$= \texttt{Súčet}(c, a),$
$= \texttt{Súčet}(\texttt{Projekcia}_3^3(a, b, c), \texttt{Projekcia}_1^3(a, b, c)),$
a teda

$$h = \texttt{PrimitívneZloženie}^{3,2}(\langle \texttt{Projekcia}_3^3, \texttt{Projekcia}_1^3\rangle, \texttt{Súčet}).$$

A keďže $\texttt{Projekcia}_3^3$, $\texttt{Projekcia}_1^3$ a Súčet sú primitívne rekurzívne, podľa definície PRF je aj h primitívne rekurzívna.

Funkcia Súčin teda vznikla primitívnou rekurziou z primitívne rekurzívnych funkcií g a h, takže podľa definície PRF je i sama primitívne rekurzívna.

V $\boxed{1}$

Každá primitívne rekurzívna funkcia je totálna.

Vetu dokážeme matematickou indukciou podľa definície PRF:

1 Každá základná funkcia je podľa svojej definície totálna.

2 **a** Nech $f = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,k}(\langle g_1, \dots, g_k\rangle, h)$, pričom $n, k \in \mathbb{N}$, $g_1, \dots, g_k \in$ PRF a $h \in$ PRF. Potom podľa indukčného predpokladu sú g_1, ..., g_k a h totálne, takže podľa definície primitívneho zloženia je aj f totálna.

b Nech $f = \texttt{PrimitívnaRekurzia}^n(g, h)$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $g, h \in$ PRF. Potom podľa indukčného predpokladu sú g a h totálne, takže podľa definície primitívnej rekurzie je aj f totálna.

I Funkcia Rozdiel nie je primitívne rekurzívna, lebo nie je totálna.

Azda najjednoduchším príkladom nezákladných primitívne rekurzívnych funkcií sú konštantné funkcie, pretože pri nich vystačíme s primitívnym zložením:

D Nech $n \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{N}$. Definujme funkciu $\texttt{Konštanta}_c^n$ vzťahom

$$\texttt{Konštanta}_c^n(x_1, \dots, x_n) = c.$$

I $\texttt{Konštanta}_{77}^3(a, b, c) = 77$ (a to pre každé a, b a c z $\mathbb{N}$).

P Špeciálne $\texttt{Konštanta}_0^0 = \texttt{Nula}$.

V $\boxed{2}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{N}$. Potom $\texttt{Konštanta}_c^n \in$ PRF.

Vetu dokážeme klasickou matematickou indukciou pre c:

1 Platí:

$\texttt{Konštanta}_0^n(x_1, \dots, x_n)$
$= 0$
(podľa definície $\texttt{Konštanta}_0^n$),
$= \texttt{Nula}()$
(podľa definície $\texttt{Nula}$),

takže funkcia $\texttt{Konštanta}_0^n$ vznikla primitívnym zložením z funkcie $\texttt{Nula}$. Keďže však podľa definície $\texttt{PRF}$ platí $\texttt{Nula} \in \texttt{PRF}$, opäť podľa definície $\texttt{PRF}$ platí aj $\texttt{Konštanta}_0^n \in \texttt{PRF}$.

2 Platí:

$\texttt{Konštanta}_{c+1}^n(x_1, \dots, x_n)$
$= c + 1$
(podľa definície $\texttt{Konštanta}_{c+1}^n$),
$= \texttt{Nasledovník}(c)$
(podľa definície $\texttt{Nasledovník}$),
$= \texttt{Nasledovník}(\texttt{Konštanta}_c^n(x_1, \dots, x_n))$
(podľa definície $\texttt{Konštanta}_c^n$),

takže funkcia $\texttt{Konštanta}_{c+1}^n$ vznikla primitívnym zložením z funkcií $\texttt{Konštanta}_c^n$ a $\texttt{Nasledovník}$. Keďže podľa definície $\texttt{PRF}$ platí $\texttt{Nasledovník} \in \texttt{PRF}$ a podľa indukčného predpokladu $\texttt{Konštanta}_c^n \in \texttt{PRF}$, podľa definície $\texttt{PRF}$ platí aj $\texttt{Konštanta}_{c+1}^n \in \texttt{PRF}$.

Ako v každej induktívnej štruktúre, aj tu možno pre každý jej prvok napísať jeho tzv. *vytvárajúcu postupnosť* čiže akýsi recept na jeho vytvorenie:

D Konečnú postupnosť primitívne rekurzívnych funkcií $(g_0, \dots, g_n)$ nazveme *vytvárajúca postupnosť* primitívne rekurzívnej funkcie f, ak $f = g_n$ a pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ platí aspoň jedna z podmienok:

1 g_i je základná primitívne rekurzívna funkcia.

2 **a** Existujú j_1, ..., j_k a l menšie než i také, že g_i vznikla primitívnym zložením z g_{j_1}, ..., g_{j_k} a g_l.

b Existujú j a k menšie než i také, že g_i vznikla primitívnou rekurziou z g_j a g_k.

P Ako dôkaz primitívnej rekurzivity nejakej funkcie teda stačí nájsť nejakú jej vytvárajúcu postupnosť.

I Vytvárajúca postupnosť funkcie $\texttt{Konštanta}_0^n$ je (napríklad) $(\texttt{Nula}, \texttt{Konštanta}_0^n)$, pretože platí:

- $\texttt{Nula}$ je základná funkcia.
- $\texttt{Konštanta}_0^n = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,0}(\langle\rangle, \texttt{Nula})$
(lebo $\texttt{Konštanta}_0^n(x_1, \dots, x_n) = 0 = \texttt{Nula}()$).

I Vytvárajúca postupnosť funkcie $\texttt{Konštanta}_1^n$ je (napríklad) $(\texttt{Nula}, \texttt{Nasledovník}, \texttt{Konštanta}_0^n, \texttt{Konštanta}_1^n)$, pretože platí:

- $\texttt{Nula}$ je základná funkcia.
- $\texttt{Nasledovník}$ je základná funkcia.
- $\texttt{Konštanta}_0^n = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,0}(\langle\rangle, \texttt{Nula})$.
- $\texttt{Konštanta}_1^n = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,1}(\langle\texttt{Konštanta}_0^n\rangle, \texttt{Nasledovník})$
(lebo $\texttt{Konštanta}_1^n(x_1, \dots, x_n) = 1 = \texttt{Nasledovník}(0) = \texttt{Nasledovník}(\texttt{Konštanta}_0^n(x_1, \dots, x_n))$).

I Vytvárajúca postupnosť funkcie $\texttt{Konštanta}_2^n$ môže pozostávať z ľavých strán týchto vzťahov:

- $\texttt{Nula}$ je základná funkcia.
- $\texttt{Nasledovník}$ je základná funkcia.
- $\texttt{Konštanta}_0^n = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,0}(\langle\rangle, \texttt{Nula})$.
- $\texttt{Konštanta}_1^n = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,1}(\langle\texttt{Konštanta}_0^n\rangle, \texttt{Nasledovník})$.

- $\texttt{Konštanta}_2^n = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,1}(\langle\texttt{Konštanta}_1^n\rangle, \texttt{Nasledovník})$
(lebo $\texttt{Konštanta}_2^n(x_1, \dots, x_n) = 2 = \texttt{Nasledovník}(1) = \texttt{Nasledovník}(\texttt{Konštanta}_1^n(x_1, \dots, x_n))$).

I Vytvárajúca postupnosť funkcie $\texttt{Konštanta}_m^n$ môže pozostávať z ľavých strán týchto vzťahov:

- $\texttt{Nula}$ je základná funkcia.
- $\texttt{Nasledovník}$ je základná funkcia.
- $\texttt{Konštanta}_0^n = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,0}(\langle\rangle, \texttt{Nula})$.
- $\texttt{Konštanta}_1^n = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,1}(\langle\texttt{Konštanta}_0^n\rangle, \texttt{Nasledovník})$.
- …
- $\texttt{Konštanta}_m^n = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,1}(\langle\texttt{Konštanta}_{m-1}^n\rangle, \texttt{Nasledovník})$.

I Vytvárajúcou postupnosťou funkcie $\texttt{Súčet}$ je, ako sme videli v uvedenom príklade, ($\texttt{Projekcia}_1^1, \texttt{Projekcia}_3^3, \texttt{Nasledovník}, h, \texttt{Súčet}$), kde $h(a, b, c) = \texttt{Nasledovník}(c)$.

I Vytvárajúcou postupnosťou funkcie $\texttt{Súčin}$ je, ako sme videli v uvedenom príklade, ($\texttt{Projekcia}_1^1, \texttt{Projekcia}_3^3, \texttt{Nasledovník}, h_1, \texttt{Súčet}, \texttt{Nula}, \texttt{Projekcia}_1^3, h_2, \texttt{Súčin}$), pričom $h_1(a, b, c) = \texttt{Nasledovník}(c)$ a $h_2(a, b, c) = \texttt{Súčet}(c, a)$.

Vidíme teda, že už pri pomerne jednoduchých funkciách majú vytvárajúce postupnosti pomerne veľkú dĺžku. Všimnime si tiež, že vytvárajúca postupnosť zložitejšej funkcie v sebe musí obsahovať (nejaké) vytvárajúce postupnosti všetkých funkcií, z ktorých bola vytvorená. To znamená, že čím je funkcia v zmysle primitívnej rekurzivity zložitejšia, tým je takýto priamy dôkaz zdĺhavejší. Bude preto užitočné nájsť nepriame metódy dôkazu primitívnej rekurzivity.

Nasledujúce vety nám čoskoro značne uľahčia dokazovanie, že daná funkcia je primitívne rekurzívna. Najprv však definujme pojmy *termu* (a neskôr i *formuly*) a pomocné syntaktické funkcie, ktoré budú pre daný term vracať množiny v ňom prítomných premenných a funkciových symbolov (a potom pre danú formulu vracať množiny jej voľných premenných, funkciových symbolov a relációvých symbolov).

Týmto pojmom budeme rozumieť v zmysle klasickej matematickej logiky: každý konštantový symbol je interpretovaný nejakou konštantou (v našom kontexte sú konštantovými symbolmi sú to práve značky pre prirodzené čísla), funkciový nejakou funkciou a relációvý (častejšie nazývaný predikátový) reláciou. Za symboly tu teda nebudeme považovať také značky, ktoré sú definované pomocou nejakých skrytých premenných (typickým príkladom je napríklad označenie $\sum_{i=\dots}^{\dots}$, to má za pomocnú premennú i). Ak budeme niektoré potrebovať, vyjadríme ich alternatívne pomocou bezparametrických symbolov.

Matematický zápis môžeme chápať dvoma spôsobmi – sémanticky a syntakticky. V prvom, omnoho obvyklejšom, prípade nám ide o to, čo tento zápis znamená, teda o *hodnotu*, ktorú nadobúda. Pre nás je však často dôležitá i *štruktúra* jeho zápisu. V takom prípade budeme tento zápis dôsledne podfarbovať sivým obdĺžnikom.

Napríklad platí $2 + 2 = 4$, pretože výrazy na oboch stranách rovnosti majú rovnakú hodnotu, avšak $\boxed{2 + 2} \neq \boxed{4}$, pretože tieto zápisy majú rôznu štruktúru.

Rovnakosť štruktúr však nemožno chápať príliš fundamentalisticky či materialisticky, niekedy môže mať tá istá štruktúra rôzne *formy*. Napríklad namiesto $\boxed{a + b}$ môžeme písať $\boxed{\texttt{Súčet}(a, b)}$, stále však ide o ten istý syntaktický útvar (t. j. platí $\boxed{a + b} = \boxed{\texttt{Súčet}(a, b)}$).

Pri tejto príležitosti si uvedomme, že syntaktická rovnosť dvoch zápisov implikuje i zhodnosť ich hodnôt, nie však naopak (ako sme videli napríklad na zápisoch $\boxed{2 + 2}$ a $\boxed{4}$).

D Množina $\texttt{Termy}$ bude najmenšia množina, pre ktorú platí:

1 **a** Ak $\boxed{v}$ je premenná, tak $\boxed{v} \in \texttt{Termy}$.

b Ak $\boxed{c}$ je konštantový symbol, tak $\boxed{c} \in \texttt{Termy}$.

2 Ak $\boxed{f}$ je n-árny funkciový symbol, kde $n \in \mathbb{N}$, a pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ platí $\boxed{\alpha_i} \in \texttt{Termy}$, tak aj $\boxed{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \in \texttt{Termy}$.

Prvky množiny $\texttt{Termy}$ budeme nazývať *termy*.

P V prípade, že f je binárny symbol, namiesto $f(\alpha_1, \alpha_2)$ píšeme alternatívne v infixovom tvare $\alpha_1\, f\, \alpha_2$, prípadne $(\alpha_1\, f\, \alpha_2)$.

P Používame aj iné matematicko-typografické dohody, napríklad namiesto $\texttt{Mocnina}(a, b)$ píšeme a^b.

I Termami sú napríklad x, 4 či $x \cdot (4 + y)^x$.

D Definujme funkciu $\texttt{PremennéVTerme}$ indukciou:

1 **a** Ak v je premenná, tak $\texttt{PremennéVTerme}(v) = \{v\}$.

b Ak c je konštantový symbol, tak $\texttt{PremennéVTerme}(c) = \emptyset$.

2 Ak f je n-árny funkciový symbol a α_1, ..., α_n sú termy, tak

$$\texttt{PremennéVTerme}(f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \texttt{PremennéVTerme}(\alpha_1) \cup \dots \cup \texttt{PremennéVTerme}(\alpha_n).$$

I $\texttt{PremennéVTerme}(x \cdot (4 + y)^x) = \{x, y\}$.

D Definujme funkciu $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}$ indukciou:

1 **a** Ak v je premenná, tak $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(v) = \emptyset$.

b Ak c je konštantový symbol, tak $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(c) = \emptyset$.

2 Ak f je n-árny funkciový symbol a α_1, ..., α_n sú termy, tak

$$\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) =$$
$$= \{f\} \cup \texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha_1) \cup \dots \cup \texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha_n).$$

I $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(x \cdot (4 + y)^x) = \{\texttt{Súčet}, \texttt{Súčin}, \texttt{Mocnina}\}$.

V nasledujúcich vetách niekoľkokrát využijeme takýto myšlienkový obrat: Ak budeme vedieť, že α je term taký, že $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, môžeme vziať doteraz nepoužitý funkciový symbol f s predpísaným počtom vstupov n a interpretovať ho n-árnou funkciou f definovanou formulou $f(x_1, \dots, x_n) = \alpha$. Prostredníctvom termu α vlastne funkciový symbol f interpretujeme funkciou f. Ak chceme vedieť hodnotu tejto funkcie v nejakom vstupe $\langle h_1, \dots, h_n \rangle$ pre nejaké h_1, ..., h_n z $\mathbb{N}$, stačí do tohto vzťahu pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ substituovať za premennú x_i konštantný term h_i, hodnota $f(h_1, \dots, h_n)$ potom bude rovná hodnote termu, ktorý vznikne aplikovaním tejto substitúcie do termu α. Vzťah $f(x_1, \dots, x_n) = \alpha$ takto umožňuje zistiť hodnotu funkcie f v ľubovoľnom vstupe, môžeme teda oprávnene povedať, že funkcia f je ním *definovaná*. Keďže na ľavej strane „priznávame“ všetky premenné (potenciálne) prítomné v terme α, takáto definícia je korektná.

Napríklad nech α je term $ab + c$. Všimnime si, že platí $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{a, b, c\}$. Definujme teraz funkciu f vzťahom $f(a, b, c) = \alpha$ čiže $f(a, b, c) = ab + c$. Ak chceme vedieť napríklad hodnotu tejto funkcie vo vstupe $\langle 1, 2, 3 \rangle$, stačí do vzťahu substituovať za premennú a konštantný term 1, za premennú b konštantný term 2 a za premennú a konštantný term 3. Získavame tak vzťah $f(1, 2, 3) = 1 \cdot 2 + 3$. Term $1 \cdot 2 + 3$, ktorý vznikol na pravej strane rovnosti, má hodnotu 5, a tak $f(1, 2, 3) = 5$.

Nech g je ďalší doteraz nepoužitý, tentoraz 2-árny, funkciový symbol. Potom vzťah $g(a, b) = \alpha$ čiže $g(a, b) = ab + c$ nie je korektnou definíciou funkcie g, pretože by musel platiť ako vzťah $g(1, 2) = 1 \cdot 2 + 3$, ktorý z nej vznikne substitúciou termu 1 za premennú a, termu 2 za premennú b a termu 3 za premennú c, tak vzťah $g(1, 2) = 1 \cdot 2 + 4$, ktorý z nej vznikne substitúciou termu 1 za premennú a, termu 2 za premennú b a termu 4 za premennú c. Z tranzitívnosti rovnosti (cez tranzit $g(1, 2)$) však potom dostávame vzťah $1 \cdot 2 + 3 = 1 \cdot 2 + 4$, ktorý zrejme neplatí. Táto nekonzistencia vznikla nepriznaním premennej c, pretože jej ohodnotenie má na hodnotu termu α nezanedbateľný vplyv.

V $\boxed{3}$ (*o terme*)

Nech $n \in \mathbb{N}$ a x_1, ..., x_n sú rôzne premenné. Nech α je term taký, že platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Ak $e \in \texttt{FunkcioSymbolyVTerme}(\alpha)$, tak $e \in \texttt{PRF}$.

Nech f je funkcia taká, že platí $f(x_1, \dots, x_n) = \alpha$. Potom $f \in \texttt{PRF}$.

Dokážeme to matematickou indukciou cez množinu termov:

1 a Nech α je premenná.

Keďže podľa definície PremennéVTerme a podľa predpokladu $\{\alpha\} = \texttt{PremennéVTerme}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, existuje i z $\{1, \dots, n\}$, že $\alpha = x_i$. To znamená, že $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$, z čoho dostávame, že $f = \texttt{Projekcia}^n_i$, a teda podľa definície PRF platí $f \in \texttt{PRF}$.

b Nech α je konštantový symbol, čiže α je c pre nejaké c z $\mathbb{N}$.

To znamená, že platí $f(x_1, \dots, x_n) = c$, z čoho dostávame, že $f = \texttt{Konštanta}^n_c$, a teda podľa vety **2** platí $f \in \texttt{PRF}$.

2 Nech α je term $h(\beta_1, \dots, \beta_k)$, kde $k \in \mathbb{N}$, h je k-árny funkciový symbol a β_1, ..., β_k sú termy, pre ktoré platia indukčné predpoklady.

Podľa definície FunkcioSymbolyVTerme platí $h \in \texttt{FunkcioSymbolyVTerme}(\alpha)$, a teda podľa predpokladu vety $h \in \texttt{PRF}$.

Pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ tiež platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\beta_i)$

  $\subseteq \texttt{PremennéVTerme}(\alpha)$
  (podľa definície PremennéVTerme),

  $\subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$
  (podľa predpokladu).
- $\texttt{FunkcioSymbolyVTerme}(\beta_i)$

  $\subseteq \texttt{FunkcioSymbolyVTerme}(\alpha)$
  (podľa definície FunkcioSymbolyVTerme).

  Takže ak $e \in \texttt{FunkcioSymbolyVTerme}(\beta_i)$, platí aj $e \in \texttt{FunkcioSymbolyVTerme}(\alpha)$, a teda podľa predpokladu vety $e \in \texttt{PRF}$.

Podmienky indukčného predpokladu pre term β_i sú teda splnené, takže ak definujeme funkciu g_i vzťahom $g_i(x_1, \dots, x_n) = \beta_i$, tak platí $g_i \in \texttt{PRF}$. Máme teda

$$\alpha = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)),$$

takže aj

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Funkcia f teda vznikne primitívnym zložením funkcií g_1, ..., g_k a h. A pretože tie sú prvkami PRF, podľa definície PRF platí aj $f \in \texttt{PRF}$.

I Nech pre každé x a y platí $f(x, y) = (x + 4)(y + 2x) + 3$. Nech α je term $(x + 4)(y + 2x) + 3$. Potom platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x, y\} \subseteq \{x, y\}$.
- $\texttt{FunkcioSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\texttt{Súčet}, \texttt{Súčin}\}$, pričom, ako vieme, $\texttt{Súčet} \in \texttt{PRF}$ aj $\texttt{Súčin} \in \texttt{PRF}$.

Sú tak splnené podmienky vety **3** o terme, a preto $f \in \texttt{PRF}$.

V $\boxed{4}$ (*o rekurzii*)

Nech $n \in \mathbb{N}$ a x_1, ..., x_n, y, z sú rôzne premenné. Nech α a β sú termy také, že platí:

- PremennéVTerme$(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Ak $e \in$ FunkcioveSymbolyVTerme(α), tak $e \in$ PRF.
- PremennéVTerme$(\beta) \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y, z\}$.
- Ak $e \in$ FunkcioveSymbolyVTerme(β), tak $e \in$ PRF.

Nech term γ vznikne z termu β substitúciou termu $f(x_1, \dots, x_n, y)$ za premennú z. Nech platia vzťahy:

1 $f(x_1, \dots, x_n, 0) = \alpha$.

2 $f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = \gamma$.

Potom $f \in$ PRF.

Definujme funkciu g vzťahom $g(x_1, \dots, x_n) = \alpha$. Podľa predpokladov a vety **3** o terme potom $g \in$ PRF.

Podobne definujme funkciu h vzťahom $h(x_1, \dots, x_n, y, z) = \beta$. Podľa predpokladov a vety **3** o terme potom $h \in$ PRF.

Keďže platí tento vzťah, musí platiť i vzťah $h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)) = \gamma$, ktorý z neho vznikne substitúciou termu $f(x_1, \dots, x_n, y)$ za premennú z (keďže podľa predpokladu vety sú x_1, ..., x_n, y, z rôzne). Dostávame teda:

1 $f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$.

2 $f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$.

To však znamená, že funkcia f vznikne primitívnou rekurziou z funkcií g a h. A pretože $g, h \in$ PRF, podľa definície PRF platí aj $f \in$ PRF.

I Nech platí:

1 $f(x, 0) = 5x$.

2 $f(x, y + 1) = 4f(x, y)(f(x, y) + 1) + 7y$.

Nech α je term $5x$ a β term $4z(z + 1) + 7y$, z ktorého po substitúcii termu $f(x, y)$ za z vznikne práve term $4f(x, y)(f(x, y) + 1) + 7y$ z pravej strany druhej rovnosti. Ľahko vidieť, že platí:

- PremennéVTerme$(\alpha) = \{x\} \subseteq \{x\}$.
- FunkcioveSymbolyVTerme$(\alpha) = \{$Súčin$\}$, pričom Súčin $\in$ PRF.
- PremennéVTerme$(\beta) = \{y, z\} \subseteq \{x, y, z\}$.
- FunkcioveSymbolyVTerme$(\beta) = \{$Súčet, Súčin$\}$, pričom Súčet $\in$ PRF aj Súčin $\in$ PRF.

Sú tak splnené podmienky vety **4** o rekurzii, a preto $f \in$ PRF.

P V prípade $n = 0$ nastáva vo vete **4** o rekurzii nasledujúce zjednodušenie.

V $\boxed{5}$ (*o bezparametrickej rekurzii*)

Nech y, z sú rôzne premenné a β je term taký, že platí:

- PremennéVTerme$(\beta) \subseteq \{y, z\}$.
- Ak $e \in$ FunkcioveSymbolyVTerme(β), tak $e \in$ PRF.

Nech f je funkcia reprezentovaná symbolom f. Nech term γ vznikne z termu β substitúciou termu $f(y)$ za premennú z. Nech platí vzťah $f(y + 1) = \gamma$. Potom $f \in$ PRF.

Nech c je konštantový symbol pre číslo c také, že $f(0) = c$. Preto platí:

- Podľa definície PremennéVTerme platí PremennéVTerme$(c) = \emptyset$.
- Podľa definície FunkcioveSymbolyVTerme platí FunkcioveSymbolyVTerme$(c) = \emptyset$.

Spolu s ďalšími predpokladmi vety sú teda splnené podmienky vety **4** o rekurzii, podľa ktorej už $f \in$ PRF.

I Nech platí $f(y+1) = 2f(y) + 1$. Nech β je term $2z+1$, potom term $2f(y)+1$ z neho vznikne substitúciou termu $f(y)$ za premennú z a platí:

- PremennéVTerme$(\beta) = \{z\} \subseteq \{y, z\}$.
- FunkcióvéSymbolyVTerme$(\beta) = \{$Súčet, Súčin$\}$, pričom Súčet $\in$ PRF aj Súčin $\in$ PRF.

Podľa vety **5** o bezparametrickej rekurzii potom $f \in$ PRF.

P Predchádzajúce tri vety nám umožňujú pri dokazovaní primitívnej rekurzivity nebyť viazaní presnou podobou definície metód PrimitívneZloženie či PrimitívnaRekurzia. Teraz už na to vlastne stačí jediný pohľad na pravé strany príslušných definujúcich vzorcov.

Ako ďalšiu ilustráciu použime známe funkcie Súčet a Súčin, ktorých primitívnu rekurzivitu sme už ukazovali rigidnou aplikáciou definícií. Teraz to bude omnoho jednoduchšie. Ako bonus pridáme i primitívnu rekurzivitu funkcie Mocnina.

V **6**

Súčet $\in$ PRF.

Nech x_1, y a z sú rôzne premenné.
Platí:

1 Súčet$(x_1, 0)$
$= x_1 + 0$,
$= x_1$.

2 Súčet$(x_1, y+1)$
$= x_1 + (y+1)$,
$= (x_1 + y) + 1$,
$=$ Súčet$(x_1, y) + 1$,
$=$ Nasledovník(Súčet(x_1, y))
(podľa definície Nasledovník).

Nech platí:

- $\alpha = x_1$.
- $\beta =$ Nasledovník(z).
- $\gamma =$ Nasledovník(Súčet(x_1, y)).

Podľa príslušných definícií potom platí:

- PremennéVTerme$(\alpha) = \{x_1\}$.
- FunkcióvéSymbolyVTerme$(\alpha) = \emptyset$.
- PremennéVTerme$(\beta) = \{z\} \subseteq \{x_1, y, z\}$.
- FunkcióvéSymbolyVTerme$(\beta) = \{$Nasledovník$\}$, pričom Nasledovník $\in$ PRF platí podľa definície PRF.
- Term γ vznikne z termu β substitúciou termu Súčet(x_1, y) za premennú z.

Podľa vety **4** o rekurzii to už znamená, že Súčet $\in$ PRF.

V **7**

Súčin $\in$ PRF.

Nech x_1, y a z sú rôzne premenné.

Platí:

1 $\texttt{Súčin}(x_1, 0)$
$= x_1 \cdot 0,$
$= 0.$

2 $\texttt{Súčin}(x_1, y + 1)$
$= x_1(y + 1),$
$= x_1 y + x_1,$
$= \texttt{Súčin}(x_1, y) + x_1.$

Nech platí:

- $\alpha = 0$.
- $\beta = z + x_1$.
- $\gamma = \texttt{Súčin}(x_1, y) + x_1$.

Podľa príslušných definícií potom totiž platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \emptyset \subseteq \{x_1\}$.
- $\texttt{FunkcionéSymbolyVTerme}(\alpha) = \emptyset$.
- $\texttt{PremennéVTerme}(\beta) = \{z, x_1\} \subseteq \{x_1, y, z\}$.
- $\texttt{FunkcionéSymbolyVTerme}(\beta) = \{\texttt{Súčet}\}$, pričom $\texttt{Súčet} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **6**.
- Term γ vznikne z termu β substitúciou termu $\texttt{Súčin}(x_1, y)$ za premennú z.

Podľa vety **4** o rekurzii to už znamená, že $\texttt{Súčin} \in \texttt{PRF}$.

V **8**

$\texttt{Mocnina} \in \texttt{PRF}$.

Nech x_1, y a z sú rôzne premenné.
Platí:

1 $\texttt{Mocnina}(x_1, 0)$
$= x_1^0,$
$= 1.$

2 $\texttt{Mocnina}(x_1, y + 1)$
$= x_1^{y+1},$
$= x_1^y \cdot x_1,$
$= \texttt{Mocnina}(x_1, y) \cdot x_1.$

Nech platí:

- $\alpha = 1$.
- $\beta = z \cdot x_1$.
- $\gamma = \texttt{Mocnina}(x_1, y) \cdot x_1$.

Podľa príslušných definícií potom totiž platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \emptyset \subseteq \{x_1\}$.
- $\texttt{FunkcionéSymbolyVTerme}(\alpha) = \emptyset$.
- $\texttt{PremennéVTerme}(\beta) = \{z, x_1\} \subseteq \{x_1, y, z\}$.
- $\texttt{FunkcionéSymbolyVTerme}(\beta) = \{\texttt{Súčin}\}$, pričom $\texttt{Súčin} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **7**.
- Term γ vznikne z termu β substitúciou termu $\texttt{Mocnina}(x_1, y)$ za premennú z.

Podľa vety **4** o rekurzii to znamená, že $\texttt{Mocnina} \in \texttt{PRF}$.

Ďalšími, menej známymi, ale rovnako užitočnými funkciami sú `Signum` a `AntiSignum`, ktoré testujú, či je vstup nenulový, resp. nulový:

D Definujme funkciu `Signum` vzťahom

$$\texttt{Signum}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x = 0, \\ 1 & \text{inak.} \end{cases}$$

D Definujme funkciu `AntiSignum` vzťahom

$$\texttt{AntiSignum}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x = 0, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

I
- $\texttt{Signum}(0) = 0$, $\texttt{AntiSignum}(0) = 1$.
- $\texttt{Signum}(1) = 1$, $\texttt{AntiSignum}(1) = 0$.
- $\texttt{Signum}(3) = 1$, $\texttt{AntiSignum}(3) = 0$.

V $\boxed{9}$

- $\texttt{Signum} \in \texttt{PRF}$.
- $\texttt{AntiSignum} \in \texttt{PRF}$.

Nech y a z sú rôzne premenné.
Nech platí jedna z možností:

- $f = \texttt{Signum}$, $m = 1$.
- $f = \texttt{AntiSignum}$, $m = 0$.

Potom podľa definície `Signum`, resp. `AntiSignum` platí $f(y + 1) = m$.
Nech platí:

- $\beta = m$.
- $\gamma = m$.

Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\beta) = \emptyset \subseteq \{y, z\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\beta) = \emptyset$.
- Term γ vznikne z termu β substitúciou termu $f(y)$ za premennú z.

Podľa vety **5** o bezparametrickej rekurzii to znamená, že $f \in \texttt{PRF}$.

Napriek tomu, že funkcia `Nasledovník`, počítajúca nasledovníka, je primitívne rekurzívna (dokonca je základná), jej „inverzná“ funkcia, počítajúca predchodcu, taká nemôže byť, pretože nie je ani totálna – veď 0 predchodcu nemá. Ak však hodnotu v tomto bode dodefinujeme, výsledná funkcia už primitívne rekurzívna bude. Podobný prípad je `Rozdiel`, ten tiež dodefinujeme na totálnu funkciu, ktorá bude navyše tiež primitívne rekurzívna:

D Definujme funkciu `KváziPredchodca` vzťahom

$$\texttt{KváziPredchodca}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x = 0, \\ x - 1 & \text{inak.} \end{cases}$$

I
- $\texttt{KváziPredchodca}(4) = 3$.
- $\texttt{KváziPredchodca}(1) = 0$.
- $\texttt{KváziPredchodca}(0) = 0$.

V **10**

$\mathtt{KváziPredchodca} \in \mathtt{PRF}$.

Nech y a z sú rôzne premenné.

Podľa definície KváziPredchodca platí $\mathtt{KváziPredchodca}(y+1) = y$.

Nech platí:

- $\beta = y$.
- $\gamma = y$.

Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\beta) = \{y\} \subseteq \{y, z\}$.
- $\mathtt{FunkcioveSymbolyVTerme}(\beta) = \emptyset$.
- Term γ vznikne z termu β substitúciou termu $\mathtt{KváziPredchodca}(y)$ za premennú z.

Podľa vety **5** o bezparametrickej rekurzii to znamená, že $\mathtt{KváziPredchodca} \in \mathtt{PRF}$.

D Definujme funkciu KváziRozdiel vzťahom

$$\mathtt{KváziRozdiel}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x < y, \\ x - y & \text{inak.} \end{cases}$$

I
- $\mathtt{KváziRozdiel}(5, 3) = 2$.
- $\mathtt{KváziRozdiel}(3, 3) = 0$.
- $\mathtt{KváziRozdiel}(3, 5) = 0$.

V **11**

$\mathtt{KváziRozdiel} \in \mathtt{PRF}$.

Najprv sublema:

1 $\mathtt{KváziRozdiel}(a, b+1) = \mathtt{KváziPredchodca}(\mathtt{KváziRozdiel}(a, b))$.

Rozlíšme prípady:

- Nech $a > b$.

  Potom platí:

  $\mathtt{KváziRozdiel}(a, b+1)$

  $= a - (b+1)$
  (podľa definície KváziRozdiel, lebo $a \geq b+1$),

  $= (a-b) - 1$,

  $= \mathtt{KváziPredchodca}(a-b)$
  (podľa definície KváziPredchodca, lebo $a - b > 0$),

  $= \mathtt{KváziPredchodca}(\mathtt{KváziRozdiel}(a, b))$
  (lebo $a \geq b$).

- Nech $a \leq b$.

  Potom platí:

  $\mathtt{KváziRozdiel}(a, b+1)$

  $= 0$
  (podľa definície KváziRozdiel, lebo $a < b+1$),

  $= \mathtt{KváziPredchodca}(0)$
  (podľa definície KváziPredchodca),

$= \texttt{KváziPredchodca}(\texttt{KváziRozdiel}(a, b))$
(podľa definície KváziRozdiel, lebo $a \leq b$, t. j. $a < b$ alebo $a = b$ a v oboch týchto prípadoch platí $\texttt{KváziRozdiel}(a, b) = 0$).

Nech x_1, y a z sú rôzne premenné.
Potom platí:

1 $\texttt{KváziRozdiel}(x_1, 0) = x_1 - 0 = x_1$ podľa definície KváziRozdiel.
2 $\texttt{KváziRozdiel}(x_1, y + 1) = \texttt{KváziPredchodca}(\texttt{KváziRozdiel}(x_1, y))$ podľa sublemy **1**.

Nech platí:

- $\alpha = x_1$.
- $\beta = \texttt{KváziPredchodca}(z)$.
- $\gamma = \texttt{KváziPredchodca}(\texttt{KváziRozdiel}(x_1, y))$.

Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x_1\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha) = \emptyset$.
- $\texttt{PremennéVTerme}(\beta) = \{z\} \subseteq \{x_1, y, z\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\beta) = \{\texttt{KváziPredchodca}\}$, pričom $\texttt{KváziPredchodca} \in \text{PRF}$ podľa vety **10**.
- Term γ vznikne z termu β substitúciou termu $\texttt{KváziRozdiel}(x_1, y)$ za premennú z.

Podľa vety **4** o rekurzii to znamená, že $\texttt{KváziRozdiel} \in \text{PRF}$.

D Definujme funkciu Maximum vzťahom

$$\texttt{Maximum}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \geq y, \\ y & \text{inak.} \end{cases}$$

I
- $\texttt{Maximum}(5, 3) = 5$.
- $\texttt{Maximum}(3, 3) = 3$.
- $\texttt{Maximum}(3, 5) = 5$.

V **12**

$\texttt{Maximum} \in \text{PRF}$.

Najprv sublema:

1 $\texttt{Maximum}(a, b) = b + \texttt{KváziRozdiel}(a, b)$.

Rozlíšme prípady:

- Nech $a \geq b$.
  Potom platí:
  $\texttt{Maximum}(a, b)$
  $= a$
  (podľa definície Maximum, lebo $a \geq b$),
  $= b + (a - b)$
  (lebo $a - b$ je definované, keďže $a \geq b$),
  $= b + \texttt{KváziRozdiel}(a, b)$
  (podľa definície KváziRozdiel, lebo $a \geq b$).
- Nech $a < b$.
  Potom platí:
  $\texttt{Maximum}(a, b)$

$= b$
(podľa definície Maximum, lebo $a < b$),

$= b + 0$,

$= b + \texttt{KváziRozdiel}(a, b)$
(podľa definície KváziRozdiel, lebo $a < b$).

Nech x_1 a x_2 sú rôzne premenné.
Podľa sublemy **1** platí $\texttt{Maximum}(x_1, x_2) = x_2 + \texttt{KváziRozdiel}(x_1, x_2)$.
Nech platí $\alpha = x_2 + \texttt{KváziRozdiel}(x_1, x_2)$. Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x_1, x_2\}$.
- $\texttt{FunkcioveSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\texttt{Súčet}, \texttt{KváziRozdiel}\}$, pričom platí:
  - Súčet ∈ PRF podľa vety **6**.
  - KváziRozdiel ∈ PRF podľa vety **11**.

Podľa vety **3** o terme to znamená, že Maximum ∈ PRF.

Užitočnou konštrukciou funkcií (špeciálne ju budeme používať pre Súčet a Súčin) je iterovanie. Ukážeme, že zachováva primitívnu rekurzivitu:

D Nech $n \in \mathbb{N}$ a $\oplus : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Definujme zobrazenie $\texttt{Iterovanie}^n_\oplus$ z $\texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$ do $\texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$ takto:
Nech $f \in \texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$. Potom funkcia $\texttt{Iterovanie}^n_\oplus(f)$ bude definovaná indukciou:

1 $(\texttt{Iterovanie}^n_\oplus(f))(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n, 0)$.
2 $(\texttt{Iterovanie}^n_\oplus(f))(x_1, \dots, x_n, y + 1) = (\texttt{Iterovanie}^n_\oplus(f))(x_1, \dots, x_n, y) \oplus f(x_1, \dots, x_n, y + 1)$.

P Inými slovami,

$$(\texttt{Iterovanie}^n_\oplus(f))(x_1, \dots, x_n, y) = f(x_1, \dots, x_n, 0) \oplus \cdots \oplus f(x_1, \dots, x_n, y).$$

V **13**

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $f \in \texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$. Nech $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ a $y \in \mathbb{N}$. Potom platí:
- $(\texttt{Iterovanie}^n_{\texttt{Súčet}}(f))(x_1, \dots, x_n, y) = \sum_{i=0}^{y} f(x_1, \dots, x_n, i)$.
- $(\texttt{Iterovanie}^n_{\texttt{Súčin}}(f))(x_1, \dots, x_n, y) = \prod_{i=0}^{y} f(x_1, \dots, x_n, i)$.

- Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou:

  1 $(\texttt{Iterovanie}^n_{\texttt{Súčet}}(f))(x_1, \dots, x_n, 0)$

  $= f(x_1, \dots, x_n, 0)$
  (podľa definície $\texttt{Iterovanie}^n_{\texttt{Súčet}}(f)$),

  $= \sum_{i=0}^{0} f(x_1, \dots, x_n, i)$.

  2 $(\texttt{Iterovanie}^n_{\texttt{Súčet}}(f))(x_1, \dots, x_n, y + 1)$

  $= (\texttt{Iterovanie}^n_{\texttt{Súčet}}(f))(x_1, \dots, x_n, y) + f(x_1, \dots, x_n, y + 1)$
  (podľa definície $\texttt{Iterovanie}^n_{\texttt{Súčet}}(f)$),

  $= \sum_{i=0}^{y} f(x_1, \dots, x_n, i) + f(x_1, \dots, x_n, y + 1)$
  (podľa indukčného predpokladu),

  $= \sum_{i=0}^{y+1} f(x_1, \dots, x_n, i)$.

- Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou:

  1 $(\texttt{Iterovanie}^n_{\texttt{Súčin}}(f))(x_1, \dots, x_n, 0)$

$= f(x_1, \dots, x_n, 0)$
(podľa definície $\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\mathtt{Súčin}}(f)$),

$= \prod_{i=0}^{0} f(x_1, \dots, x_n, i)$.

2 $(\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\mathtt{Súčin}}(f))(x_1, \dots, x_n, y+1)$

$= (\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\mathtt{Súčin}}(f))(x_1, \dots, x_n, y) \cdot f(x_1, \dots, x_n, y+1)$
(podľa definície $\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\mathtt{Súčin}}(f)$),

$= \prod_{i=0}^{y} f(x_1, \dots, x_n, i) \cdot f(x_1, \dots, x_n, y+1)$
(podľa indukčného predpokladu),

$= \prod_{i=0}^{y+1} f(x_1, \dots, x_n, i)$.

I Ak $f(x) = x^2$, tak

$$(\mathtt{Iterovanie}^{0}_{\mathtt{Súčet}}(f))(5) = \sum_{i=0}^{5} f(i) =$$
$$= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

I Ak $f(x, y) = x + y$, tak

$$(\mathtt{Iterovanie}^{1}_{\mathtt{Súčin}}(f))(x, 4) = \prod_{i=0}^{4} f(x, i) =$$
$$= f(x, 0) \cdot f(x, 1) \cdot f(x, 2) \cdot f(x, 3) \cdot f(x, 4) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

V $\boxed{\mathbf{14}}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$. Potom platí:
- $(\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\mathtt{Súčet}}(f))(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ práve vtedy, keď pre každé i z $\{0, \dots, y\}$ platí $f(x_1, \dots, x_n, i) = 0$.
- $(\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\mathtt{Súčin}}(f))(x_1, \dots, x_n, y) = 1$ práve vtedy, keď pre každé i z $\{0, \dots, y\}$ platí $f(x_1, \dots, x_n, i) = 1$.
- $(\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\mathtt{Súčin}}(f))(x_1, \dots, x_n, y) \geq 1$ práve vtedy, keď pre každé i z $\{0, \dots, y\}$ platí $f(x_1, \dots, x_n, i) \geq 1$.

Nech nastáva jedna z možností:

- $\oplus = \mathtt{Súčet}$, ? je = a $k = 0$.
- $\oplus = \mathtt{Súčin}$, ? je = a $k = 1$.
- $\oplus = \mathtt{Súčin}$, ? je ≥ a $k = 1$.

Tvrdenie dokážeme indukciou pre y z $\mathbb{N}$:

1 $(\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\oplus}(f))(x_1, \dots, x_n, 0)$? k,
akk $f(x_1, \dots, x_n, 0)$? k
(podľa definície $\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\oplus}(f)$),
akk pre každé i z $\{0, \dots, 0\}$ platí $f(x_1, \dots, x_n, i)$? k.

2 $(\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\oplus}(f))(x_1, \dots, x_n, y+1)$? k,
akk $(\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\oplus}(f))(x_1, \dots, x_n, y) \oplus f(x_1, \dots, x_n, y+1)$? k
(podľa definície $\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\oplus}(f)$),
akk $(\mathtt{Iterovanie}^{n}_{\oplus}(f))(x_1, \dots, x_n, y)$? k a $f(x_1, \dots, x_n, y+1)$? k
(vo všetkých troch prípadoch),
akk pre každé i z $\{0, \dots, y\}$ platí $f(x_1, \dots, x_n, i)$? k a $f(x_1, \dots, x_n, y+1)$? k
(podľa indukčného predpokladu),
akk pre každé i z $\{0, \dots, y+1\}$ platí $f(x_1, \dots, x_n, i)$? k.

V $\boxed{15}$

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $\bigoplus$ je binárna operácia na $\mathbb{N}$. Nech $f \in \mathtt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$. Potom ak platí $f \in \mathtt{PRF}$ a $\bigoplus \in \mathtt{PRF}$, tak platí $\mathtt{Iterovanie}^n_{\bigoplus}(f) \in \mathtt{PRF}$.

Definujme funkciu s vzťahom $s = \mathtt{Iterovanie}^n_{\bigoplus}(f)$.

Nech x_1, ..., x_n, y a z sú rôzne premenné. Podľa definície $\mathtt{Iterovanie}^n_{\bigoplus}(f)$ máme:

1 $s(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n, 0)$,

2 $s(x_1, \dots, x_n, y + 1) = s(x_1, \dots, x_n, y) \bigoplus f(x_1, \dots, x_n, y + 1)$.

Nech platí:

- $\alpha = f(x_1, \dots, x_n, 0)$.
- $\beta = z \bigoplus f(x_1, \dots, x_n, y + 1)$.
- $\gamma = s(x_1, \dots, x_n, y) \bigoplus f(x_1, \dots, x_n, y + 1)$.

Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- $\mathtt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{f\}$, pričom $f \in \mathtt{PRF}$ podľa predpokladu.
- $\mathtt{PremennéVTerme}(\beta) = \{x_1, \dots, x_n, y, z\}$.
- $\mathtt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\beta) = \{\bigoplus, f, \mathtt{Súčet}\}$, pričom platí:
  - $\bigoplus \in \mathtt{PRF}$ podľa predpokladu.
  - $f \in \mathtt{PRF}$ podľa predpokladu.
  - $\mathtt{Súčet} \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **6**.
- Term γ vznikne z termu β substitúciou termu $s(x_1, \dots, x_n, y)$ za premennú z.

Podľa vety **4** o rekurzii to znamená, že $s \in \mathtt{PRF}$.

2.2 Primitívne rekurzívne relácie

Podobne ako novú funkciu definujeme obvykle pomocou rovnosti s nejakým termom na jej druhej strane, môžeme definovať i novú reláciu. Namiesto znaku $=$ tu však používame symbol $\leftrightarrow$ a na druhej strane už nie je term, ale tzv. *formula*. Najprv si preto vyjasníme, čo budeme pod týmto pojmom rozumieť, a pridáme už spomínané charakteristiky.

D Nech r je n-árny reláciový symbol a pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ platí $\alpha_i \in \texttt{Termy}$. Potom výraz $r(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ budeme nazývať *atomická formula*.

P V prípade, že r je binárny symbol, namiesto $r(\alpha_1, \alpha_2)$ píšeme alternatívne v infixovom tvare $\alpha_1\ r\ \alpha_2$, prípadne $(\alpha_1\ r\ \alpha_2)$.

I Atomickými formulami sú napríklad porovnania $2 + 2 = 4$, $x < y$, $x \cdot (4 + y)^x \geq 2 \cdot y$ (tie sú v infixovom tvare) alebo $\texttt{Delí}(a, b)$.

D Množina $\texttt{Formuly}$ bude najmenšia množina, pre ktorú platí:

1 Ak φ je atomická formula, tak $\varphi \in \texttt{Formuly}$.

2 **a** Ak $\varphi = \neg\psi$, pričom $\psi \in \texttt{Formuly}$, tak $\varphi \in \texttt{Formuly}$.

b Ak $\varphi = \psi^1 \mathbin{@} \psi^2$, pričom $\psi^1, \psi^2 \in \texttt{Formuly}$ a $@$ je binárna spojka, tak $\varphi \in \texttt{Formuly}$.

c Ak $\varphi = \#v\psi$, pričom $\psi \in \texttt{Formuly}$, v je premenná a $\#$ je jeden z kvantifikátorov $\forall$ alebo $\exists$, tak $\varphi \in \texttt{Formuly}$.

Prvky množiny $\texttt{Formuly}$ budeme nazývať *formuly*.

P Formulami sú napríklad $2 + 2 = 4$, $\neg(2 + 2 = 4)$, $(x < y) \wedge (x \cdot (4 + y)^x \geq 2 \cdot y)$ či $(\exists a)\texttt{Delí}(a, b)$.

D Definujme funkciu $\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}$ indukciou:

1 Ak r je n-árny reláciový symbol a α_1, ..., α_n sú termy, tak

$$\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(r(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \texttt{PremennéVTerme}(\alpha_1) \cup \dots \cup \texttt{PremennéVTerme}(\alpha_n).$$

2 **a** Ak $\varphi = \neg\psi$, pričom $\psi \in \texttt{Formuly}$, tak

$$\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\psi).$$

b Ak $\varphi = \psi^1 \mathbin{@} \psi^2$, pričom $\psi^1, \psi^2 \in \texttt{Formuly}$ a $@$ je binárna spojka, tak

$$\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\psi^1) \cup \texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\psi^2).$$

c Ak $\varphi = \#v\psi$, pričom $\psi \in \texttt{Formuly}$, v je premenná a $\#$ je jeden z kvantifikátorov $\forall$ alebo $\exists$, tak

$$\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\psi) \setminus \{v\}.$$

I
- $\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\neg(2 + 2 = 4)) = \emptyset$.
- $\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}((x < y) \wedge (x \cdot (4 + y)^x \geq 2 \cdot y)) = \{x, y\}$.
- $\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}((\exists a)\texttt{Delí}(a, b)) = \{b\}$.

D Definujme funkciu $\texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}$ indukciou:

1 Ak r je n-árny reláciový symbol a α_1, ..., α_n sú termy, tak

$$\texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(r(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) =$$
$$= \texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha_1) \cup \dots \cup \texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha_n).$$

2 a Ak $\varphi = \neg\psi$, pričom $\psi \in \texttt{Formuly}$, tak

$$\texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\psi).$$

b Ak $\varphi = \psi^1 \mathbin{@} \psi^2$, pričom $\psi^1, \psi^2 \in \texttt{Formuly}$ a $@$ je binárna spojka, tak

$$\texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi) =$$
$$= \texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\psi^1) \cup \texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\psi^2).$$

c Ak $\varphi = \#v\psi$, pričom $\psi \in \texttt{Formuly}$, v je premenná a $\#$ je jeden z kvantifikátorov $\forall$ alebo $\exists$, tak

$$\texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\psi).$$

I
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\neg(2+2=4)) = \{\texttt{Súčet}\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}((x<y) \wedge (x \cdot (4+y)^x \geq 2 \cdot y)) = \{\texttt{Súčet}, \texttt{Súčin}, \texttt{Mocnina}\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}((\exists a)\texttt{Delí}(a,b)) = \emptyset$.

D Definujme funkciu $\texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}$ indukciou:

1 Ak r je n-árny relációvý symbol a α_1, ..., α_n sú termy, tak

$$\texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(r(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \{r\}.$$

2 a Ak $\varphi = \neg\psi$, pričom $\psi \in \texttt{Formuly}$, tak

$$\texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\varphi) = \texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\psi).$$

b Ak $\varphi = \psi^1 \mathbin{@} \psi^2$, pričom $\psi^1, \psi^2 \in \texttt{Formuly}$ a $@$ je binárna spojka, tak

$$\texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\varphi) =$$
$$= \texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\psi^1) \cup \texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\psi^2).$$

c Ak $\varphi = \#v\psi$, pričom $\psi \in \texttt{Formuly}$, v je premenná a $\#$ je jeden z kvantifikátorov $\forall$ alebo $\exists$, tak

$$\texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\varphi) = \texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\psi).$$

I
- $\texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\neg(2+2=4)) = \{=\}$.
- $\texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}((x<y) \wedge (x \cdot (4+y)^x \geq 2 \cdot y)) = \{<, \geq\}$.
- $\texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}((\exists a)\texttt{Delí}(a,b)) = \{\texttt{Delí}\}$.

Doteraz sme skúmali len primitívnu rekurzivitu funkcií, tento pojem však má svoje opodstatnenie i pri reláciách. Hoci relácia nevracia ako odpoveď číslo, ale „áno“ (v prípade, že daná vstupná tica do tejto relácie patrí) alebo „nie“ (ak tam nepatrí). Takéto odpovede však môžeme veľmi prirodzeným spôsobom transformovať na čísla 1, resp. 0, a to prostredníctvom tzv. *indikátora*.

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Definujme zobrazenie $\texttt{Indikátor}^n$ takto:

Ak r je n-árna relácia, tak $\texttt{Indikátor}^n(r)$ je n-árna funkcia definovaná vzťahom

$$(\texttt{Indikátor}^n(r))(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{ak } r(x_1, \dots, x_n), \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

I
- $(\texttt{Indikátor}^2(\texttt{Delí}))(2,4) = 1$, lebo $\texttt{Delí}(2,4)$.
- $(\texttt{Indikátor}^2(\texttt{Delí}))(3,4) = 0$, lebo neplatí $\texttt{Delí}(3,4)$.

D Definujme množinu relácií PrimitívneRekurzívneRelácie (skrátene PRR) takto:

Ak r je n-árna relácia, tak $r \in$ PrimitívneRekurzívneRelácie, práve keď $\text{Indikátor}^n(r) \in$ PRF.

Prvky tejto množiny budeme nazývať *primitívne rekurzívne relácie*.

V nasledujúcich vetách sa budeme zaoberať otázkou, ako sa jednotlivé základné symboly správajú k primitívnej rekurzivite. Najprv ukážeme, že logické spojky a porovnania sú bezproblémové.

V **1**

Nech $n \in \mathbb{N}$ a q a r sú n-árne relácie také, že platí

$$r(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \neg q(x_1, \dots, x_n).$$

Potom ak $q \in$ PRR, tak $r \in$ PRR.

Nech $f = \text{Indikátor}^n(r)$ a $g = \text{Indikátor}^n(q)$. Potom platí:

$f(x_1, \dots, x_n) = 1$,
akk $(\text{Indikátor}^n(r))(x_1, \dots, x_n) = 1$,
akk $r(x_1, \dots, x_n)$
(podľa definície $\text{Indikátor}^n(r)$),
akk $\neg q(x_1, \dots, x_n)$
(podľa predpokladu),
akk neplatí $q(x_1, \dots, x_n)$,
akk $(\text{Indikátor}^n(q))(x_1, \dots, x_n) = 0$
(podľa definície $\text{Indikátor}^n(q)$),
akk $g(x_1, \dots, x_n) = 0$,
akk $\text{AntiSignum}(g(x_1, \dots, x_n)) = 1$
(podľa definície AntiSignum).

Keďže podľa definícií f, $\text{Indikátor}^n(r)$ a AntiSignum môžu mať funkcie f a AntiSignum iba hodnoty 0 alebo 1, znamená to, že

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{AntiSignum}(g(x_1, \dots, x_n)),$$

a teda funkcia f vznikla podľa definície primitívnym zložením funkcií g a AntiSignum. Avšak platí:

- AntiSignum $\in$ PRF podľa vety **1.9**.
- $g = \text{Indikátor}^n(q) \in$ PRF podľa definície PRR, lebo $q \in$ PRR.

Podľa definície PRF potom $\text{Indikátor}^n(r) = f \in$ PRF, a teda podľa definície PRR platí $r \in$ PRR.

V **2**

Nech @ je binárna logická spojka, $n \in \mathbb{N}$, a q^1, q^2 a r sú n-árne relácie také, že platí

$$r(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow (q^1(x_1, \dots, x_n) \mathbin{@} q^2(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom ak $q^1, q^2 \in$ PRR, tak $r \in$ PRR.

Rozoberieme postupne jednotlivé prípady:

$\wedge$ Nech $f = \text{Indikátor}^n(r)$, $g^1 = \text{Indikátor}^n(q^1)$ a $g^2 = \text{Indikátor}^n(q^2)$. Potom platí:

$f(x_1, \dots, x_n) = 1$,
akk $(\text{Indikátor}^n(r))(x_1, \dots, x_n) = 1$,
akk $r(x_1, \dots, x_n)$
(podľa definície $\text{Indikátor}^n(r)$),
akk $q^1(x_1, \dots, x_n) \wedge q^2(x_1, \dots, x_n)$
(podľa predpokladu),

akk $q^1(x_1,\dots,x_n)$ a zároveň $q^2(x_1,\dots,x_n)$,
akk $(\mathtt{Indikátor}^n(q^1))(x_1,\dots,x_n) = 1$ a zároveň $(\mathtt{Indikátor}^n(q^2))(x_1,\dots,x_n) = 1$
(pre obe j z $\{1,2\}$ podľa definície $\mathtt{Indikátor}^n(q^j)$),
akk $g^1(x_1,\dots,x_n) = 1$ a zároveň $g^2(x_1,\dots,x_n) = 1$,
akk $\mathtt{Súčin}(g^1(x_1,\dots,x_n), g^2(x_1,\dots,x_n)) = 1$.
Keďže podľa definícií $\mathtt{Indikátor}^n(r)$, $\mathtt{Indikátor}^n(q^1)$ a $\mathtt{Indikátor}^n(q^2)$ môžu mať funkcie f, g^1 a g^2 iba hodnoty 0 alebo 1, platí

$$f(x_1,\dots,x_n) = \mathtt{Súčin}(g^1(x_1,\dots,x_n), g^2(x_1,\dots,x_n)),$$

teda funkcia f vznikla podľa definície primitívnym zložením funkcií g^1, g^2 a Súčin. Avšak platí:

- Súčin $\in$ PRF podľa vety **1.7**.
- Pre obe j z $\{1,2\}$ platí $g^j = \mathtt{Indikátor}^n(q^j) \in$ PRF podľa definície PRR, lebo $q^j \in$ PRR.

Podľa definície PRF potom $\mathtt{Indikátor}^n(r) = f \in$ PRF, a teda podľa definície PRR platí $r \in$ PRR.

$\vee$ Pre obe j z $\{1,2\}$ definujme n-árnu reláciu p^j vzťahom

$$p^j(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \neg q^j(x_1,\dots,x_n).$$

Keďže podľa predpokladu $q^1, q^2 \in$ PRR, podľa viet **1** a opäť **1** máme $p^1, p^2 \in$ PRR.
Definujme n-árnu reláciu s vzťahom

$$s(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow (p^1(x_1,\dots,x_n) \wedge p^2(x_1,\dots,x_n)).$$

Keďže $p^1, p^2 \in$ PRR, podľa už dokázanej časti tejto vety **2** máme $s \in$ PRR.
Potom platí:
$r(x_1,\dots,x_n)$,
akk $q^1(x_1,\dots,x_n) \vee q^2(x_1,\dots,x_n)$
(podľa predpokladu),
akk $\neg(\neg q^1(x_1,\dots,x_n) \wedge \neg q^2(x_1,\dots,x_n))$,
akk $\neg(p^1(x_1,\dots,x_n) \wedge p^2(x_1,\dots,x_n))$
(podľa definícií p^1 a p^2),
akk $\neg s(x_1,\dots,x_n)$
(podľa definície s).
To teda znamená, že platí $r(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \neg s(x_1,\dots,x_n)$, a keďže $s \in$ PRR, podľa vety **1** platí $r \in$ PRR.

$\rightarrow$ Definujme n-árnu reláciu p^1 vzťahom

$$p^1(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \neg q^1(x_1,\dots,x_n).$$

Keďže podľa predpokladu $q^1 \in$ PRR, podľa vety **1** máme $p^1 \in$ PRR.
Potom platí:
$r(x_1,\dots,x_n)$,
akk $q^1(x_1,\dots,x_n) \rightarrow q^2(x_1,\dots,x_n)$
(podľa predpokladu),
akk $\neg q^1(x_1,\dots,x_n) \vee q^2(x_1,\dots,x_n)$,
akk $p^1(x_1,\dots,x_n) \vee q^2(x_1,\dots,x_n)$
(podľa definície p^1).
To teda znamená, že platí $r(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow (p^1(x_1,\dots,x_n) \vee q^2(x_1,\dots,x_n))$, a keďže $p^1, q^2 \in$ PRR, podľa už dokázanej časti tejto vety **2** máme $r \in$ PRR.

$\leftrightarrow$ Nech $i \in \{1,2\}$. Definujme n-árnu reláciu p^i vzťahom

$$p^i(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow (q^i(x_1,\dots,x_n) \rightarrow q^j(x_1,\dots,x_n)),$$

kde $\{i,j\} = \{1,2\}$. Keďže podľa predpokladu $q^1, q^2 \in$ PRR, podľa už dokázanej časti tejto vety **2** máme $p^i \in$ PRR.

Potom platí:

$r(x_1, \dots, x_n)$,
akk $q^1(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow q^2(x_1, \dots, x_n)$
(podľa predpokladu),
akk $(q^1(x_1, \dots, x_n) \rightarrow q^2(x_1, \dots, x_n)) \wedge (q^2(x_1, \dots, x_n) \rightarrow q^1(x_1, \dots, x_n))$,
akk $p^1(x_1, \dots, x_n) \wedge p^2(x_1, \dots, x_n)$
(podľa definícií p^1 a p^2).

To teda znamená, že platí $r(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow (p^1(x_1, \dots, x_n) \wedge p^2(x_1, \dots, x_n))$, a keďže $p^1, p^2 \in$ PRR, podľa už dokázanej časti tejto vety **2** máme $r \in$ PRR.

V $\boxed{3}$

$=, \neq, <, >, \leq, \geq \in$ PRR.

Rozoberieme postupne jednotlivé prípady:

$>$ Nech $f = \texttt{Indikátor}^2(>)$. Potom platí:

$f(x, y) = 1$,
akk $(\texttt{Indikátor}^2(>))(x, y) = 1$,
akk $x > y$
(podľa definície $\texttt{Indikátor}^2(>)$),
akk $\texttt{KváziRozdiel}(x, y) > 0$
(podľa definície KváziRozdiel),
akk $\texttt{Signum}(\texttt{KváziRozdiel}(x, y)) = 1$
(podľa definície Signum).

Keďže podľa definícií $\texttt{Indikátor}^2(>)$ a Signum môžu mať funkcie f a Signum iba hodnoty 0 alebo 1, znamená to, že

$$f(x, y) = \texttt{Signum}(\texttt{KváziRozdiel}(x, y)),$$

a teda funkcia f vznikla podľa definície primitívnym zložením funkcií KváziRozdiel a Signum. Podľa vety **1.11** platí KváziRozdiel $\in$ PRF a podľa vety **1.9** Signum $\in$ PRF. To však podľa definície PRF znamená, že $\texttt{Indikátor}^2(>) = f \in$ PRF, a teda podľa definície PRR platí $> \in$ PRR.

$<$ Nech $f = \texttt{Indikátor}^2(<)$ a $g = \texttt{Indikátor}^2(>)$. Potom platí:

$f(x, y) = 1$,
akk $(\texttt{Indikátor}^2(<))(x, y) = 1$,
akk $x < y$
(podľa definície $\texttt{Indikátor}^2(<)$),
akk $y > x$,
akk $(\texttt{Indikátor}^2(>))(y, x) = 1$
(podľa definície $\texttt{Indikátor}^2(>)$),
akk $g(y, x) = 1$.

Keďže podľa definícií $\texttt{Indikátor}^2(<)$ a $\texttt{Indikátor}^2(>)$ môžu mať funkcie f a g iba hodnoty 0 alebo 1, znamená to, že $f(x, y) = g(y, x)$.

Nech $\alpha = g(y, x)$. Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x, y\}$.
- $\texttt{FunkcionéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{g\}$, pričom $g = \texttt{Indikátor}^2(>) \in$ PRF podľa už dokázanej časti a podľa definície PRR.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že $\texttt{Indikátor}^2(<) = f \in$ PRF, a teda podľa definície PRR platí $< \in$ PRR.

$\leq$ Vieme, že $(x \leq y) \leftrightarrow \neg(x > y)$. Podľa už dokázanej časti platí $> \in$ PRR, takže podľa vety **1** platí $\leq \in$ PRR.

$\geq$ Vieme, že $(x \geq y) \leftrightarrow \neg(x < y)$. Podľa už dokázanej časti platí $< \in$ PRR, takže podľa vety **1** platí $\geq \in$ PRR.

$=$ Vieme, že $(x = y) \leftrightarrow ((x \leq y) \wedge (x \geq y))$. Podľa už dokázaných častí platí $\leq, \geq \in$ PRR, takže podľa vety **2** platí $= \in$ PRR.

$\neq$ Vieme, že $(x \neq y) \leftrightarrow \neg(x = y)$. Podľa už dokázanej časti platí $= \in$ PRR, takže podľa vety **1** platí $\neq \in$ PRR.

Kvantifikátory, žiaľ, ako neskôr uvidíme, primitívnu rekurzivitu zachovávať nemusia. Ukážeme však, že sú v tomto zmysle použiteľné aspoň v špeciálnom prípade, keď kvantifikovaná premenná nadobúda iba konečne veľa hodnôt. Formulám s takýmito kvantifikátormi budeme hovoriť *ohraničené*.

P Nech α je term a φ je formula. Pripomeňme význam nasledujúcich relativizácií kvantifikátorov:

- $(\forall v \leq \alpha)\varphi$ je skratkou pre $\forall v((v \leq \alpha) \rightarrow \varphi)$ a znamená, že formula φ nemusí platiť pre všetky hodnoty parametra v, iba pre tie, za ktorých platí nerovnosť $v \leq \alpha$.
- $(\exists v \leq \alpha)\varphi$ je skratkou pre $\exists v((v \leq \alpha) \wedge \varphi)$ a znamená, že existuje taká hodnota parametra v, za ktorej platí nielen formula φ, ale aj nerovnosť $v \leq \alpha$.

D Množinou ohraničených formúl `OhraničenéFormuly` budeme rozumieť najmenšiu množinu formúl spĺňajúcu tieto podmienky:

1 Ak φ je atomická formula (t. j. $\varphi = r(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, pričom r je reláciový symbol, $k \in \mathbb{N}$ a α_1, ..., α_k sú termy), tak $\varphi \in$ `OhraničenéFormuly`.

2 **a** Ak $\varphi = \neg\psi$, kde $\psi \in$ `OhraničenéFormuly`, tak $\varphi \in$ `OhraničenéFormuly`.

b Ak $\varphi = \psi^1 \mathbin{@} \psi^2$, kde $\psi^1, \psi^2 \in$ `OhraničenéFormuly` a $@ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, tak $\varphi \in$ `OhraničenéFormuly`.

c Ak $\varphi = (\# v \leq \alpha)\psi$, kde $\psi \in$ `OhraničenéFormuly`, v je premenná, # je jeden z kvantifikátorov $\forall$ alebo $\exists$ a α je term taký, že $v \notin$ `PremennéVTerme`(α), tak $\varphi \in$ `OhraničenéFormuly`.

Každú formulu z množiny `OhraničenéFormuly` budeme nazývať *ohraničená*.

I Formula $(\forall x \leq 100)(\exists y \leq 33)x > y$ je ohraničená.

I Formula $(\forall x \leq 100)(\exists y \leq x)x > y$ je ohraničená.

I Formula $(\forall x \leq z)(\exists y \leq x)x > y$ je ohraničená.

I Formula $(\forall x)(\exists y \leq x)x > y$ nie je ohraničená, lebo pri kvantifikácii premennej x chýba ohraničenie.

I Formula $(\forall x \geq z)(\exists y \leq x)x > y$ nie je ohraničená, lebo síce pri kvantifikácii premennej x je ohraničenie, ale iba zdola.

I Formula $(\forall x \leq z)(\exists y)x > y$ nie je ohraničená, lebo pri kvantifikácii premennej y chýba ohraničenie.

I Formula $(\forall x \leq z)(\exists y \leq 2y)x > y$ nie je ohraničená, lebo ohraničenie $2y$ pri kvantifikácii premennej y ju obsahuje.

V $\boxed{4}$ (*o ohraničenej formule*)

Nech $n \in \mathbb{N}$, x_1, ..., x_n sú rôzne premenné a φ je formula taká, že platí:
- φ je ohraničená.
- `VoľnéPremennéVoFormule`$(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Ak $e \in$ `FunkcioveSymbolyVoFormule`(φ), tak $e \in$ PRF.
- Ak $q \in$ `ReláciovéSymbolyVoFormule`(φ), tak $q \in$ PRR.

Nech r je n-árna relácia taká, že platí $r(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi$. Potom $r \in$ PRR.

Tvrdenie dokážeme štrukturálnou matematickou indukciou cez množinu ohraničených formúl:

1 Nech φ je atomická formula, t. j. $\varphi = q(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, pričom q je reláciový symbol, $k \in \mathbb{N}$ a α_1, ..., α_k sú termy.

Podľa definície `ReláciovéSymbolyVoFormule` platí $q \in$ `ReláciovéSymbolyVoFormule`(φ), takže podľa predpokladu $q \in$ PRR, z čoho podľa definície PRR máme `Indikátor`$^k(q) \in$ PRF.

Nech $i \in \{1, \ldots, k\}$. Podľa príslušných definícií potom platí:

- `PremennéVTerme`$(\alpha_i) \subseteq$ `VoľnéPremennéVoFormule`$(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- `FunkciovéSymbolyVTerme`$(\alpha_i) \subseteq$ `FunkciovéSymbolyVoFormule`(φ). Z toho vyplýva, že ak platí $e \in$ `FunkciovéSymbolyVTerme`(α_i), tak $e \in$ `FunkciovéSymbolyVoFormule`(φ), a teda podľa predpokladu vety $e \in$ PRF.

Definujme funkciu g_i vzťahom $g_i(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_i$. Sú teda splnené podmienky vety **1.3** o terme, podľa ktorej $g_i \in$ PRF.

Nech $f =$ `Indikátor`$^n(r)$ a $h =$ `Indikátor`$^k(q)$. Keďže $q \in$ PRR, podľa definície PRR platí $h \in$ PRF.

Ďalej platí:

$f(x_1, \ldots, x_n) = 1$,
akk $($`Indikátor`$^n(r))(x_1, \ldots, x_n) = 1$,
akk $r(x_1, \ldots, x_n)$
    (podľa definície `Indikátor`$^n(r)$),
akk φ
    (podľa predpokladu),
akk $q(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$,
akk $q(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$
    (pre každé i z $\{1, \ldots, k\}$ podľa definície g_i),
akk $($`Indikátor`$^k(q))(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)) = 1$
    (podľa definície `Indikátor`$^k(q)$),
akk $h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)) = 1$.

Keďže podľa definícií `Indikátor`$^n(r)$ a `Indikátor`$^k(q)$ môžu mať tieto funkcie iba hodnoty 0 alebo 1, znamená to, že

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)),$$

a teda funkcia f vznikla podľa definície primitívnym zložením funkcií g_1, ..., g_k a h. A keďže všetky tieto funkcie sú v PRF, podľa definície PRF platí aj `Indikátor`$^n(r) = f \in$ PRF, takže podľa definície PRR platí $r \in$ PRR.

2 **a** Nech $\varphi = \neg\psi$, pričom $\psi \in$ `OhraničenéFormuly`.

Podľa príslušných definícií potom platí:

- `VoľnéPremennéVoFormule`$(\psi) =$ `VoľnéPremennéVoFormule`$(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- `FunkciovéSymbolyVoFormule`$(\psi) =$ `FunkciovéSymbolyVoFormule`(φ). Z toho vyplýva, že ak $e \in$ `FunkciovéSymbolyVoFormule`(ψ), tak $e \in$ `FunkciovéSymbolyVoFormule`(φ), a teda podľa predpokladu vety platí $e \in$ PRF.
- `ReláciovéSymbolyVoFormule`$(\psi) =$ `ReláciovéSymbolyVoFormule`(φ). Z toho vyplýva, že ak $s \in$ `ReláciovéSymbolyVoFormule`(ψ), tak $s \in$ `ReláciovéSymbolyVoFormule`(φ), a teda podľa predpokladu vety platí $s \in$ PRR.

Definujme reláciu q vzťahom $q(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi$. Podľa indukčného predpokladu $q \in$ PRR.

Potom platí:

$r(x_1, \ldots, x_n)$,

akk φ
    (podľa predpokladu vety),

akk $\neg\psi$
    (podľa predpokladu),

akk $\neg q(x_1, \ldots, x_n)$
    (podľa predpokladu),

takže platí

$$r(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \neg q(x_1, \dots, x_n).$$

Keďže $q \in$ PRR, podľa vety **1** aj $r \in$ PRR.

b Nech $\varphi = \psi^1 @ \psi^2$, pričom $\psi^1, \psi^2 \in$ `OhraničenéFormuly` a @ je binárna spojka.

Podľa príslušných definícií potom pre obe j z $\{1, 2\}$ platí:

- `VoľnéPremennéVoFormule`$(\psi^j) \subseteq$ `VoľnéPremennéVoFormule`$(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.
- `FunkciovéSymbolyVoFormule`$(\psi^j) \subseteq$ `FunkciovéSymbolyVoFormule`(φ). Z toho vyplýva, že ak $e \in$ `FunkciovéSymbolyVoFormule`(ψ^j), tak $e \in$ `FunkciovéSymbolyVoFormule`(φ), a teda podľa predpokladu vety platí $e \in$ PRF.
- `RelačnéSymbolyVoFormule`$(\psi^j) \subseteq$ `RelačnéSymbolyVoFormule`(φ). Z toho vyplýva, že ak $s \in$ `RelačnéSymbolyVoFormule`(ψ^j), tak $s \in$ `RelačnéSymbolyVoFormule`(φ), a teda podľa predpokladu vety platí $s \in$ PRR.

Pre j z $\{1, 2\}$ definujme reláciu q^j vzťahom $q^j(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi^j$, potom podľa indukčného predpokladu $q^j \in$ PRR.

Potom platí:

$r(x_1, \dots, x_n)$,

akk φ
(podľa predpokladu vety),

akk $\psi^1 @ \psi^2$
(podľa predpokladu),

akk $q^1(x_1, \dots, x_n) @ q^2(x_1, \dots, x_n)$
(podľa predpokladu),

takže platí

$$r(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow (q^1(x_1, \dots, x_n) @ q^2(x_1, \dots, x_n)).$$

Keďže $q^1, q^2 \in$ PRR, podľa vety **2** aj $r \in$ PRR.

c Nech $\varphi = (\#v \leq \alpha)\psi$, pričom $\psi \in$ `OhraničenéFormuly`, v je premenná, # je jeden z kvantifikátorov $\forall$ alebo $\exists$ a α je term taký, že $v \notin$ `PremennéVTerme`(α).

Podľa príslušných definícií potom platí:

- `VoľnéPremennéVoFormule`$(\psi) \subseteq$ `VoľnéPremennéVoFormule`$(\varphi) \cup \{v\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, v\}$.
- `FunkciovéSymbolyVoFormule`$(\psi) \subseteq$ `FunkciovéSymbolyVoFormule`(φ). Z toho vyplýva, že ak $e \in$ `FunkciovéSymbolyVoFormule`(ψ), tak $e \in$ `FunkciovéSymbolyVoFormule`(φ), a teda podľa predpokladu vety platí $e \in$ PRF.
- `RelačnéSymbolyVoFormule`$(\psi) \subseteq$ `RelačnéSymbolyVoFormule`(φ). Z toho vyplýva, že ak $s \in$ `RelačnéSymbolyVoFormule`(ψ), tak $s \in$ `RelačnéSymbolyVoFormule`(φ), a teda podľa predpokladu vety platí $s \in$ PRR.

Definujme reláciu q vzťahom $q(x_1, \dots, x_n, v) \leftrightarrow \psi$. Podľa indukčného predpokladu $q \in$ PRR.

Nech nastáva jedna z možností:

- $\# = \exists$ a $@ = \wedge$.
- $\# = \forall$ a $@ = \rightarrow$.

Potom $\varphi = (\#v \leq \alpha)\psi = \#v((v \leq \alpha) @ \psi)$, takže platí:

- `PremennéVTerme`(α)

  $\subseteq$ `VoľnéPremennéVoFormule`$(v \leq \alpha)$
  (podľa definície `VoľnéPremennéVoFormule`),

  $\subseteq$ `VoľnéPremennéVoFormule`$((v \leq \alpha) @ \psi)$
  (podľa definície `VoľnéPremennéVoFormule`),

$\subseteq \mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) \cup \{v\}$
(podľa definície VoľnéPremennéVoFormule),

$\subseteq \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{v\}$
(podľa predpokladu vety),

a pretože podľa predpokladu $v \notin \mathtt{PremennéVTerme}(\alpha)$, máme $\mathtt{PremennéVTerme}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

- $\mathtt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha)$

  $\subseteq \mathtt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(v \leq \alpha)$
  (podľa definície FunkciovéSymbolyVoFormule),

  $\subseteq \mathtt{FunkciovéSymbolyVoFormule}((v \leq \alpha) \mathbin{@} \psi)$
  (podľa definície FunkciovéSymbolyVoFormule),

  $\subseteq \mathtt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi)$
  (podľa definície FunkciovéSymbolyVoFormule).

  Z toho vyplýva, že ak $e \in \mathtt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha)$, tak $e \in \mathtt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi)$, a teda podľa predpokladu vety platí $e \in \mathtt{PRF}$.

Definujme funkciu g vzťahom $g(x_1, \dots, x_n) = \alpha$. Podľa vety **1.3** o terme potom $g \in \mathtt{PRF}$.

Nech $f = \mathtt{Indikátor}^n(r)$ a $h = \mathtt{Indikátor}^{n+1}(q)$. Keďže $q \in \mathtt{PRR}$, podľa definície PRR platí $h \in \mathtt{PRF}$. Nech nastáva jedna z možností:

- $\# = \exists$ a $s = \mathtt{Súčet}$.
- $\# = \forall$ a $s = \mathtt{Súčin}$.

Nech $t = \mathtt{Iterovanie}^n_s(h)$. Potom podľa vety **1.15** platí $t \in \mathtt{PRF}$, lebo $h \in \mathtt{PRF}$ a podľa vety **1.6**, resp. **1.7** platí $s \in \mathtt{PRF}$.

1 $\boxed{f(x_1, \dots, x_n) = \mathtt{Signum}(t(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))).}$

- Nech $\# = \exists$ a $s = \mathtt{Súčet}$.

  Potom platí:

  $f(x_1, \dots, x_n) = 1$,

  akk $(\mathtt{Indikátor}^n(r))(x_1, \dots, x_n) = 1$,

  akk $r(x_1, \dots, x_n)$
  (podľa definície $\mathtt{Indikátor}^n(r)$),

  akk φ
  (podľa predpokladu vety),

  akk $(\exists v \leq \alpha)\psi$
  (podľa predpokladu),

  akk $(\exists v \leq g(x_1, \dots, x_n))q(x_1, \dots, x_n, v)$,

  akk $(\exists v \leq g(x_1, \dots, x_n))(\mathtt{Indikátor}^{n+1}(q))(x_1, \dots, x_n, v) = 1$
  (podľa definície $\mathtt{Indikátor}^{n+1}(q)$),

  akk $(\exists v \leq g(x_1, \dots, x_n))h(x_1, \dots, x_n, v) = 1$,

  akk neplatí $(\forall v \leq g(x_1, \dots, x_n))h(x_1, \dots, x_n, v) = 0$,

  akk neplatí $(\mathtt{Iterovanie}^n_{\mathtt{Súčet}}(h))(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) = 0$
  (podľa vety **1.14**),

  akk neplatí $t(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) = 0$,

  akk $\mathtt{Signum}(t(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))) = 1$
  (podľa definície Signum).

  Keďže podľa definícií $\mathtt{Indikátor}^n(r)$ a Signum môžu mať funkcie f a Signum iba hodnoty 0 alebo 1, znamená to, že $f(x_1, \dots, x_n) = \mathtt{Signum}(t(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)))$.

- Nech $\# = \forall$ a $s =$ Súčin.

  Potom platí:

  $f(x_1, \dots, x_n) = 1$,

  akk $(\mathtt{Indikátor}^n(r))(x_1, \dots, x_n) = 1$,

  akk $r(x_1, \dots, x_n)$
  (podľa definície $\mathtt{Indikátor}^n(r)$),

  akk φ
  (podľa predpokladu vety),

  akk $(\forall v \leq \alpha)\psi$
  (podľa predpokladu),

  akk $(\forall v \leq g(x_1, \dots, x_n))q(x_1, \dots, x_n, v)$,

  akk $(\forall v \leq g(x_1, \dots, x_n))(\mathtt{Indikátor}^{n+1}(q))(x_1, \dots, x_n, v) = 1$
  (podľa definície $\mathtt{Indikátor}^{n+1}(q)$),

  akk $(\forall v \leq g(x_1, \dots, x_n))(\mathtt{Indikátor}^{n+1}(q))(x_1, \dots, x_n, v) \geq 1$
  (lebo podľa definície $\mathtt{Indikátor}^{n+1}(q)$ platí $\mathrm{Rng}(\mathtt{Indikátor}^{n+1}(q)) \subseteq \{0, 1\}$),

  akk $(\forall v \leq g(x_1, \dots, x_n))h(x_1, \dots, x_n, v) \geq 1$,

  akk $(\mathtt{Iterovanie}^n_{\mathtt{Súčin}}(h))(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) \geq 1$
  (podľa vety **1.14**),

  akk $t(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) \geq 1$,

  akk $\mathtt{Signum}(t(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))) = 1$
  (podľa definície Signum).

  Keďže podľa definícií $\mathtt{Indikátor}^n(r)$ a Signum môžu mať funkcie f a Signum iba hodnoty 0 alebo 1, znamená to, že $f(x_1, \dots, x_n) = \mathtt{Signum}(t(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)))$.

Nech $\beta = \mathtt{Signum}(t(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)))$. Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\beta) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- $\mathtt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\beta) = \{\mathtt{Signum}, t, g\}$, pričom platí:
  - Signum $\in$ PRF a podľa vety **1.9**.
  - $t \in$ PRF už vieme.
  - $g \in$ PRF už vieme.

To podľa sublemy **1** a vety **1.3** znamená, že $\mathtt{Indikátor}^n(r) = f \in$ PRF, takže podľa definície PRR platí $r \in$ PRR.

Nezriedka sa stáva, že funkcia je definovaná po častiach, a to podľa toho, či tica jej vstupov je v nejakej relácii. Ak je táto relácia primitívne rekurzívna a také sú aj definujúce funkcie v oboch vetvách, primitívne rekurzívna bude i výsledná funkcia. Ďalšia veta potom hovorí, že pravé strany v oboch vetvách ani nemusia mať takú striktnú podobu.

V $\boxed{5}$ *(o rozbore prípadov)*

Nech $n \in \mathbb{N}$, $r \in$ PRR a $g_0, g_1 \in$ PRF. Nech f je funkcia taká, že platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n), & \text{ak platí } r(x_1, \dots, x_n), \\ g_0(x_1, \dots, x_n), & \text{ak platí } \neg r(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Potom $f \in$ PRF.

Nech $h = \mathtt{Indikátor}^n(r)$. Keďže $r \in$ PRR, podľa definície PRR platí $h \in$ PRF.

1 $\boxed{f(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n) \cdot g_1(x_1, \dots, x_n) + \mathtt{AntiSignum}(h(x_1, \dots, x_n)) \cdot g_0(x_1, \dots, x_n).}$

Rozlíšime dva prípady:

- Nech platí $r(x_1, \dots, x_n)$.

  Potom platí:

  $h(x_1, \dots, x_n) \cdot g_1(x_1, \dots, x_n) + \texttt{AntiSignum}(h(x_1, \dots, x_n)) \cdot g_0(x_1, \dots, x_n)$

  $= (\texttt{Indikátor}^n(r))(x_1, \dots, x_n) \cdot g_1(x_1, \dots, x_n)$
  $\quad + \texttt{AntiSignum}((\texttt{Indikátor}^n(r))(x_1, \dots, x_n)) \cdot g_0(x_1, \dots, x_n)$,

  $= 1 \cdot g_1(x_1, \dots, x_n) + \texttt{AntiSignum}(1) \cdot g_0(x_1, \dots, x_n)$
  (podľa definície $\texttt{Indikátor}^n(r)$),

  $= 1 \cdot g_1(x_1, \dots, x_n) + 0 \cdot g_0(x_1, \dots, x_n)$
  (podľa definície $\texttt{AntiSignum}$),

  $= g_1(x_1, \dots, x_n)$.

- Nech platí $\neg r(x_1, \dots, x_n)$.

  Potom platí:

  $h(x_1, \dots, x_n) \cdot g_1(x_1, \dots, x_n) + \texttt{AntiSignum}(h(x_1, \dots, x_n)) \cdot g_0(x_1, \dots, x_n)$

  $= (\texttt{Indikátor}^n(r))(x_1, \dots, x_n) \cdot g_1(x_1, \dots, x_n)$
  $\quad + \texttt{AntiSignum}((\texttt{Indikátor}^n(r))(x_1, \dots, x_n)) \cdot g_0(x_1, \dots, x_n)$,

  $= 0 \cdot g_1(x_1, \dots, x_n) + \texttt{AntiSignum}(0) \cdot g_0(x_1, \dots, x_n)$
  (podľa definície $\texttt{Indikátor}^n(r)$),

  $= 0 \cdot g_1(x_1, \dots, x_n) + 1 \cdot g_0(x_1, \dots, x_n)$
  (podľa definície $\texttt{AntiSignum}$),

  $= g_0(x_1, \dots, x_n)$.

Nech $\alpha = h(x_1, \dots, x_n) \cdot g_1(x_1, \dots, x_n) + \texttt{AntiSignum}(h(x_1, \dots, x_n)) \cdot g_0(x_1, \dots, x_n)$. Podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- $\texttt{FunkcionéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{h, \texttt{Súčin}, g_1, \texttt{Súčet}, \texttt{AntiSignum}, g_0\}$, pričom platí:
  - $h \in \texttt{PRF}$ už vieme.
  - $\texttt{Súčin} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **1.7**.
  - $g_0, g_1 \in \texttt{PRF}$ podľa predpokladov.
  - $\texttt{Súčet} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **1.6**.
  - $\texttt{AntiSignum} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **1.9**.

To podľa vety **1.3** znamená, že $f \in \texttt{PRF}$.

V $\boxed{6}$ (*o rozbore prípadov podľa ohraničenej formuly*)

Nech $n \in \mathbb{N}$ a x_1, ..., x_n sú rôzne premenné. Nech φ je formula taká, že platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Ak $e \in \mathtt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi)$, tak $e \in \mathtt{PRF}$.
- Ak $q \in \mathtt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\varphi)$, tak $q \in \mathtt{PRR}$.

Nech pre obe j z $\{0, 1\}$ je α_j term taký, že platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\alpha_j) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Ak $e \in \mathtt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha_j)$, tak $e \in \mathtt{PRF}$.

Nech f je funkcia taká, že platí

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \alpha_1, & \text{ak platí } \varphi, \\ \alpha_0, & \text{ak platí } \neg\varphi. \end{cases}$$

Potom $f \in \mathtt{PRF}$.

Definujme reláciu r vzťahom $r(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi$. Keďže podľa predpokladov sú splnené všetky podmienky vety **4** o ohraničenej formule, platí $r \in \mathtt{PRR}$.

Pre obe j z $\{0, 1\}$ definujme funkciu g_j vzťahom $g_j(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_j$. Keďže podľa predpokladov sú splnené všetky podmienky vety **1.3** o terme, platí $g_j \in \mathtt{PRF}$.

To znamená, že platí

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{ak platí } r(x_1, \ldots, x_n), \\ g_0(x_1, \ldots, x_n), & \text{ak platí } \neg r(x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

takže podľa vety **5** o rozbore prípadov $f \in \mathtt{PRF}$.

P Často budeme vetu používať pre prípad, že α_0 je symbol pre nejaké prirodzené číslo (najčastejšie 0). V takom prípade sú preň požadované podmienky automaticky splnené.

Ďalšou užitočnou pomôckou pri dokazovaní primitívnej rekurzivity bude nasledujúci pojem:

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Definujme zobrazenie $\mathtt{OhraničenáMinimalizácia}^n$ takto:

Ak r je $(n+2)$-árna relácia, tak $\mathtt{OhraničenáMinimalizácia}^n(r)$ je funkcia z $\mathbb{N}^{n+1}$ do $\mathbb{N}$ definovaná vzťahom

$$(\mathtt{OhraničenáMinimalizácia}^n(r))(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} \min\{z \leq y : r(x_1, \ldots, x_n, y, z)\}, \\ \quad \text{ak je minimovaná množina neprázdna}, \\ 0 \\ \quad \text{inak}. \end{cases}$$

I Nech r je relácia definovaná formulou $r(a, b, c) \leftrightarrow (b \leq ac)$. Pri ohraničenej minimalizácii teda hľadáme najmenšie také číslo c, pre ktoré platí $c \leq b$ a $b \leq ac$.

- V prípade $a > 0$ možno druhú podmienku ekvivalentne upraviť na tvar $b/a \leq c$, takže najmenšie c vyhovujúce obom podmienkam je $\lceil b/a \rceil$ (platí totiž $\lceil b/a \rceil \leq \lceil b/1 \rceil = b$).
- V prípade $a = b = 0$ je druhá podmienka splnená automaticky a prvá je $c \leq 0$, takže najmenšie (a jediné) c vyhovujúce obom podmienkam je 0.
- V prípade $a = 0 \wedge b > 0$ je druhá podmienka automaticky neplatná, takže množina $\{c \leq b : b \leq ac\}$ je prázdna.

Zhrnutím teda dostávame, že platí

$$(\mathtt{OhraničenáMinimalizácia}^1(r))(a, b) = \begin{cases} \lceil b/a \rceil, & \text{ak } a > 0, \\ 0 & \text{inak}. \end{cases}$$

V 7

Nech $n \in \mathbb{N}$ a r je $(n+2)$-árna relácia. Potom ak $r \in$ PRR, tak $\texttt{OhraničenáMinimalizácia}^n(r) \in$ PRF.

Uvedomme si, že podmienka členenia prípadov v definícii $\texttt{OhraničenáMinimalizácia}^n(r)$ znamená, že platí formula $(\exists z \leq y) r(x_1, \dots, x_n, y, z)$. Označme ju φ.
Podľa príslušných definícií potom platí:

- φ je ohraničená.
- $\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n, y\}$.
- $\texttt{FunkcionéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \emptyset$.
- $\texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{\leq, r\}$, pričom platí:
  - $\leq \in$ PRR podľa vety **3**.
  - $r \in$ PRR podľa predpokladu.

Pre term 0 v druhej vetve potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(0) = \emptyset \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y\}$.
- $\texttt{FunkcionéSymbolyVTerme}(0) = \emptyset$.

Ostáva rozobrať hodnotu z prvej vetvy. Nech je teda množina $\{z \leq y : r(x_1, \dots, x_n, y, z)\}$ neprázdna, označme jej minimum m. To teda znamená, že platí $r(x_1, \dots, x_n, y, m)$, ale ak $i < m$, tak platí $\neg r(x_1, \dots, x_n, y, i)$. Zrejme tiež $m \leq y$.
Nech q je relácia definovaná vzťahom

$$q(x_1, \dots, x_n, y, z) \leftrightarrow \neg r(x_1, \dots, x_n, y, z),$$

podľa vety **1** potom $q \in$ PRR.
Nech $f = \texttt{Indikátor}^{n+2}(q)$. Keďže $q \in$ PRR, podľa definície PRR platí $f \in$ PRF.

1
- Ak $i < m$, tak $f(x_1, \dots, x_n, y, i) = 1$.
- $f(x_1, \dots, x_n, y, m) = 0$.

- Postupne platí:
  $i < m$
  (predpoklad),
  $\neg r(x_1, \dots, x_n, y, i)$
  (podľa definície m),
  $q(x_1, \dots, x_n, y, i)$
  (podľa definície q),
  $(\texttt{Indikátor}^{n+2}(q))(x_1, \dots, x_n, y, i) = 1$
  (podľa definície $\texttt{Indikátor}^{n+2}(q)$),
  $f(x_1, \dots, x_n, y, i) = 1$.
- Postupne platí:
  $r(x_1, \dots, x_n, y, m)$
  (podľa definície m),
  neplatí $q(x_1, \dots, x_n, y, m)$
  (podľa definície q),
  $(\texttt{Indikátor}^{n+2}(q))(x_1, \dots, x_n, y, m) = 0$
  (podľa definície $\texttt{Indikátor}^{n+2}(q)$),
  $f(x_1, \dots, x_n, y, m) = 0$.

Nech $g = \texttt{Iterovanie}^{n+1}_{\texttt{Súčin}}(f)$. Podľa viet **1.15** a **1.7** teda platí $g \in$ PRF.

Nech $h = \mathtt{Iterovanie}^{n+1}_{\mathtt{Súčet}}(g)$. Podľa viet **1.15** a **1.6** teda platí $h \in$ PRF.

Nech $e = \mathtt{OhraničenáMinimalizácia}^{n}(r)$.

2 $e(x_1, \dots, x_n, y) = h(x_1, \dots, x_n, y, y)$.

Platí:

$h(x_1, \dots, x_n, y, y)$
$= (\mathtt{Iterovanie}^{n+1}_{\mathtt{Súčet}}(g))(x_1, \dots, x_n, y, y)$,
$= \sum_{j=0}^{y} g(x_1, \dots, x_n, y, j)$
(podľa vety **1.13**),
$= \sum_{j=0}^{y} (\mathtt{Iterovanie}^{n+1}_{\mathtt{Súčin}}(f))(x_1, \dots, x_n, y, j)$,
$= \sum_{j=0}^{y} \prod_{i=0}^{j} f(x_1, \dots, x_n, y, i)$
(podľa vety **1.13**),
$= \sum_{j=0}^{m-1} \prod_{i=0}^{j} f(x_1, \dots, x_n, y, i) + \sum_{j=m}^{y} \prod_{i=0}^{j} f(x_1, \dots, x_n, y, i)$
(lebo $m \leq y$),
$= \sum_{j=0}^{m-1} \prod_{i=0}^{j} f(x_1, \dots, x_n, y, i) + \sum_{j=m}^{y} (\prod_{i=0}^{m-1} f(x_1, \dots, x_n, y, i) \cdot f(x_1, \dots, x_n, y, m) \cdot \prod_{i=m+1}^{j} f(x_1, \dots, x_n, y, i))$,
$= \sum_{j=0}^{m-1} \prod_{i=0}^{j} 1 + \sum_{j=m}^{y} (\prod_{i=0}^{m-1} 1 \cdot 0 \cdot \prod_{i=m+1}^{j} f(x_1, \dots, x_n, y, i))$
(podľa sublemy **1**),
$= \sum_{j=0}^{m-1} 1 + \sum_{j=m}^{y} 0$,
$= m + 0$,
$= m$,
$= \min\{z \leq y : r(x_1, \dots, x_n, y, z)\}$,
$= (\mathtt{OhraničenáMinimalizácia}^{n}(r))(x_1, \dots, x_n, y)$
(podľa definície $\mathtt{OhraničenáMinimalizácia}^{n}(r)$, lebo $\{z \leq y : r(x_1, \dots, x_n, y, z)\} \neq \emptyset$),
$= e(x_1, \dots, x_n, y)$.

Nech $\alpha = h(x_1, \dots, x_n, y, y)$. Podľa príslušných definícií potom platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x_1, \dots, x_n, y\}$.
- $\mathtt{FunkcióvéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{h\}$, pričom $h \in$ PRF.

Podľa vety **6** o rozbore prípadov podľa ohraničenej formuly a sublemy **2** teda $\mathtt{OhraničenáMinimalizácia}^{n}(r) = e \in$ PRF.

V **8** *(o ohraničenej minimalizácii)*

Nech $n \in \mathbb{N}$ a x_1, ..., x_n sú rôzne premenné. Nech α je term taký, že platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Ak $e \in \mathtt{FunkcióvéSymbolyVTerme}(\alpha)$, tak $e \in$ PRF.

Nech φ je formula taká, že platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n, z\}$.
- Ak $e \in \mathtt{FunkcióvéSymbolyVoFormule}(\varphi)$, tak $e \in$ PRF.
- Ak $q \in \mathtt{RelációvéSymbolyVoFormule}(\varphi)$, tak $q \in$ PRR.

Nech f je funkcia taká, že platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \min\{z \leq \alpha : \varphi\}, & \text{ak je minimovaná množina neprázdna,} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Potom $f \in$ PRF.

Definujme funkciu g vzťahom $g(x_1, \dots, x_n) = \alpha$. Keďže podľa predpokladov sú splnené podmienky vety **1.3** o terme, platí $g \in$ PRF.

Nech y je premenná rôzna od x_1, ..., x_n a z. Definujme reláciu r vzťahom $r(x_1, \dots, x_n, y, z) \leftrightarrow \varphi$. Keďže podľa predpokladov sú splnené podmienky vety **4** o ohraničenej formule, platí $r \in$ PRR.

Substitúciou termu $g(x_1, \dots, x_n)$ za premennú y do formuly $r(x_1, \dots, x_n, y, z) \leftrightarrow \varphi$ vznikne rovnako platná formula $r(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n), z) \leftrightarrow \varphi$ (pravá časť tejto ekvivalencie sa nezmení, lebo podľa predpokladov vety y nepatrí do množiny VoľnéPremennéVoFormule(φ)). Dostávame teda:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \min\{z \leq g(x_1, \dots, x_n) : r(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n), z)\}, \\ \qquad \text{ak je minimovaná množina neprázdna,} \\ 0 \\ \qquad \text{inak.} \end{cases}$$

Podľa definície OhraničenáMinimalizácia^n potom platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = (\texttt{OhraničenáMinimalizácia}^n(r))(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)).$$

Nech $h =$ OhraničenáMinimalizácia$^n(r)$. Potom $h \in$ PRF podľa vety **7**, keďže $r \in$ PRR. Platí tiež

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)).$$

Nech $\delta = h(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))$. Podľa príslušných definícií potom platí:

- PremennéVTerme(δ) $= \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.
- FunkcioveSymbolyVTerme(δ) $= \{h, g\}$, pričom $h, g \in$ PRF.

To však podľa vety **1.3** o terme znamená, že $f \in$ PRF.

2.3 Funkcie a relácie z teórie čísel

V tejto stati ukážeme primitívnu rekurzivitu niektorých užitočných funkcií známych z teórie čísel:

D Relácia Delí je definovaná vzťahom

$$\text{Delí}(x, y) \leftrightarrow \exists z(y = xz).$$

Obvyklý symbol preň je | a používame ho pri infixovom tvare (čiže namiesto Delí(x, y) píšeme $x \mid y$).

I
- $2 \mid 4$ platí.
- $4 \mid 2$ neplatí.

V $\boxed{1}$

Delí ∈ PRR.

Najprv sublema:

1 Delí$(x, y) \leftrightarrow (\exists z \leq y)(y = xz)$.

Rozoberme prípady:

- Nech $y > 0$.
  Potom z $y = xz$ vyplýva $x > 0$, a teda aj $y = xz \geq 1 \cdot z = z$. Tvrdenia $\exists z(y = xz)$ a $(\exists z \leq y)(y = xz)$ sú teda ekvivalentné.
- Nech $y = 0$.
  Potom $y = x \cdot 0$, takže platí ako $\exists z(y = xz)$, tak $(\exists z \leq y)(y = xz)$.

Dokazované tvrdenie teda platí podľa definicie Delí.

Formulu na pravej strane ekvivalencie zo sublemy **1** označme φ. Potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- VoľnéPremennéVoFormule$(\varphi) = \{x, y\}$.
- FunkcioväSymbolyVoFormule$(\varphi) = \{$Súčin$\}$, pričom Súčin ∈ PRF podľa vety **1.7**.
- RelačnéSymbolyVoFormule$(\varphi) = \{\leq, =\}$, pričom $\leq, = \in$ PRR podľa vety **2.3**.

Podľa sublemy **1** a vety **2.4** o ohraničenej formule teda dostávame Delí ∈ PRR.

P Pripomeňme, že *prvočíslom* nazývame prirodzené číslo, ktoré má práve dva rôzne delitele, a to 1 a seba.

D Definujme reláciu JePrvočíslo vzťahom

$$\text{JePrvočíslo}(x) \leftrightarrow (x > 1 \wedge \forall y(y \mid x \to (y = 1 \vee y = x))).$$

P
- JePrvočíslo(0) neplatí.
- JePrvočíslo(1) neplatí.
- JePrvočíslo(2) platí.
- JePrvočíslo(3) platí.
- JePrvočíslo(4) neplatí.

V $\boxed{2}$

Nech $x \in \mathbb{N}$. Potom x je prvočíslo práve vtedy, keď platí JePrvočíslo(x).

Rozoberme prípady:

- Ak $x \leq 1$, tak JePrvočíslo(x) neplatí, lebo neplatí prvá časť definujúcej konjunkcie $x > 1$.

- Ak x je prvočíslo, tak JePrvočíslo(x) platí, lebo $x > 1$ a každý deliteľ x je buď 1, alebo samotné x.
- Ak je x zložené číslo, existuje jeho deliteľ rôzny od 1 aj od x, čiže neplatí druhá časť definujúcej konjunkcie $\forall y(y \mid x \to (y = 1 \lor y = x))$.

V **3**

JePrvočíslo $\in$ PRR.

Najprv sublema:

1 JePrvočíslo(x) $\leftrightarrow (x > 1 \land (\forall y \leq x)(y \mid x \to (y = 1 \lor y = x)))$.

Rozoberme prípady:

- Nech $x > 1$.
  Potom z $y \mid x$ vyplýva $y \leq x$, takže tvrdenia $x > 1 \land \forall y(y \mid x \to (y = 1 \lor y = x))$ a $x > 1 \land (\forall y \leq x)(y \mid x \to (y = 1 \lor y = x))$ sú ekvivalentné.
- Nech $x \leq 1$.
  Potom neplatí ani $x > 1 \land \forall y(y \mid x \to (y = 1 \lor y = x))$ ani $x > 1 \land (\forall y \leq x)(y \mid x \to (y = 1 \lor y = x))$, takže tieto dve tvrdenia sú ekvivalentné.

Formulu na pravej strane ekvivalencie zo sublemy **1** označme φ. Podľa príslušných definícií potom platí:

- φ je ohraničená.
- VoľnéPremennéVoFormule(φ) = $\{x\}$.
- FunkcioméSymbolyVoFormule(φ) = $\emptyset$.
- RelációvéSymbolyVoFormule(φ) = $\{>, \leq,$ Delí$, =\}$, pričom platí:
  - $>, \leq, = \in$ PRR podľa vety **2.3**.
  - Delí $\in$ PRR podľa vety **1**.

Podľa sublemy **1** a vety **2.4** o ohraničenej formule teda dostávame JePrvočíslo $\in$ PRR.

D Označme Prvočíslo (jedinú) všade rastúcu bijekciu z $\mathbb{N}$ do množiny všetkých prvočísel.

P
- Prvočíslo(0) = 2.
- Prvočíslo(1) = 3.
- Prvočíslo(2) = 5.
- Prvočíslo(3) = 7.
- Prvočíslo(4) = 11.

V **4**

Pre každé i z $\mathbb{N}$ platí JePrvočíslo(Prvočíslo(i)).

Podľa definície Prvočíslo je Prvočíslo(i) prvočíslo, takže podľa vety **2** dostávame dokazované tvrdenie.

V **5**

Prvočíslo $\in$ PRF.

Najprv sublema:

1 Ak $x \in \mathbb{N}$, tak Prvočíslo(x) $<$ Prvočíslo($x+1$) $\leq 1 +$ Prvočíslo$(x)^{x+1}$.

Nech $s = 1 + \prod_{i=0}^{x}$ Prvočíslo(i). Keďže $s \geq 1 +$ Prvočíslo(0) $= 1 + 2 > 1$, číslo s musí mať nejakého prvočíselného deliteľa Prvočíslo(m), ktorý ho nepresahuje. Avšak pre žiadne i z $\{0, \ldots, x\}$ neplatí

$\mathtt{Prvočíslo}(i) \mid s$ (lebo zvyšok je vždy 1), čo znamená, že m do tejto množiny nepatrí, a teda $m \geq x + 1$. Potom platí:

$\mathtt{Prvočíslo}(x)$
$< \mathtt{Prvočíslo}(x + 1)$
(lebo podľa definície $\mathtt{Prvočíslo}$ je táto funkcia všade rastúca),
$\leq \mathtt{Prvočíslo}(m)$
(lebo podľa definície $\mathtt{Prvočíslo}$ je táto funkcia všade rastúca),
$\leq s$
(lebo $s > 0$ a $\mathtt{Prvočíslo}(m) \mid s$),
$= 1 + \prod_{i=0}^{x} \mathtt{Prvočíslo}(i)$,
$\leq 1 + \prod_{i=0}^{x} \mathtt{Prvočíslo}(x)$
(lebo podľa definície $\mathtt{Prvočíslo}$ je táto funkcia všade rastúca),
$= 1 + \mathtt{Prvočíslo}(x)^{x+1}$.

Podľa vety **4** platí $\mathtt{JePrvočíslo}(\mathtt{Prvočíslo}(x + 1))$. Keďže $\mathtt{Prvočíslo}$ je všade rastúca bijekcia z $\mathbb{N}$ na množinu prvočísel, podľa sublemy **1** platí

$$\mathtt{Prvočíslo}(x + 1) = \min\{z \leq 1 + \mathtt{Prvočíslo}(x)^{x+1} : \mathtt{JePrvočíslo}(z) \wedge z > \mathtt{Prvočíslo}(x)\}.$$

Nech f je funkcia taká, že

$$f(x, y) = \begin{cases} \min\{z \leq 1 + y^{x+1} : \mathtt{JePrvočíslo}(z) \wedge z > y\}, & \text{ak je minimovaná množina neprázdna,} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Ak α je term $1 + y^{x+1}$, tak podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x, y\}$.
- $\mathtt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\mathtt{Mocnina}, \mathtt{Súčet}\}$, pričom platí:
  - $\mathtt{Mocnina} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **1.8**.
  - $\mathtt{Súčet} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **1.6**.

Ak φ je formula $\mathtt{JePrvočíslo}(z) \wedge z > y$, tak podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{y, z\} \subseteq \{x, y, z\}$.
- $\mathtt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \emptyset$.
- $\mathtt{ReláciovéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{\mathtt{JePrvočíslo}, >\}$, pričom platí:
  - $\mathtt{JePrvočíslo} \in \mathrm{PRR}$ podľa vety **3**.
  - $> \in \mathrm{PRR}$ podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.8** znamená, že $f \in \mathrm{PRF}$. Zároveň však

$$\mathtt{Prvočíslo}(x + 1) = f(x, \mathtt{Prvočíslo}(x))$$

(druhá vetva v definícii f je totiž v tomto prípade podľa sublemy **1** neaktuálna).
Nech platí:

- x a w sú rôzne premenné.
- $\beta = f(x, w)$.
- $\gamma = f(x, \mathtt{Prvočíslo}(x))$.

Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\beta) = \{x, w\}$.
- $\mathtt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\beta) = \{f\}$, pričom už vieme, že platí $f \in \mathrm{PRF}$.

- Term γ vznikne z termu β substitúciou termu $\texttt{Prvočíslo}(x)$ za premennú w.

Podľa vety **1.5** o bezparametrickej rekurzii to znamená, že $\texttt{Prvočíslo} \in \texttt{PRF}$.

P Zdôraznime, že myšlienka sublemy **1** v predošlej vete pochádza z Euklidovho dôkazu, že prvočísel existuje nekonečne mnoho.

Pre ďalšie úvahy bude dôležitá *základná veta aritmetiky*, ktorá hovorí, že každé kladné prirodzené číslo sa dá (až na poradie) jednoznačným spôsobom rozložiť na (prípadne prázdny či jednoprvkový) súčin prvočísel.

D Postupnosť q prirodzených čísel nazveme *takmer k-konštantná*, ak je množina $\{i \in \mathbb{N} : q(i) \neq k\}$ konečná.

Špeciálne takmer 0-konštantné postupnosti budeme nazývať *takmer nulové* a takmer 1-konštantné postupnosti *takmer jednotkové*.

P Inými slovami, postupnosť q je k-konštantná práve vtedy, ak existuje h také, že ak $i \geq h$, tak $q(i) = k$.

P Konštantne nulová postupnosť je tiež takmer nulová.

P
- Nech q je takmer nulová postupnosť. Nech h je také, že ak $i \geq h$, tak $q(i) = 0$. Potom pre každé j také, že $j \geq h$, platí $\sum_{i=0}^{j} q(i) = \sum_{i=0}^{h} q(i)$, a teda
$$\sum_{i=0}^{\infty} q(i) = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=0}^{j} q(i) = \sum_{i=0}^{h} q(i).$$
Namiesto $\sum_{i=0}^{\infty} q(i)$ budeme v takom prípade písať zjednodušene $\sum_i q(i)$.
- Nech q je takmer jednotková postupnosť. Nech h je také, že ak $i \geq h$, tak $q(i) = 1$. Potom pre každé j také, že $j \geq h$, platí $\prod_{i=0}^{j} q(i) = \prod_{i=0}^{h} q(i)$, a teda
$$\prod_{i=0}^{\infty} q(i) = \lim_{j\to\infty} \prod_{i=0}^{j} q(i) = \prod_{i=0}^{h} q(i).$$
Namiesto $\prod_{i=0}^{\infty} q(i)$ budeme v takom prípade písať zjednodušene $\prod_i q(i)$.

P Nech p je ľubovoľná postupnosť a q je takmer nulová postupnosť. Potom postupnosť $(p(i)^{q(i)} : i \in \mathbb{N})$ je takmer jednotková.

P Predchádzajúcu poznámku budeme používať pre prípad $p = \texttt{Prvočíslo}$.

V $\boxed{6}$ (*základná veta aritmetiky*)

Nech $x > 0$. Potom existuje jediná takmer nulová postupnosť $(\alpha_i : i \in \mathbb{N})$ taká, že
$$x = \prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i}.$$

1 Nech $x > 0$. Potom existuje takmer nulová postupnosť $(\alpha_i : i \in \mathbb{N})$ taká, že $x = \prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i}$.

Tvrdenie dokážeme jednokrokovou matematickou indukciou. Rozoberme prípady:

- Nech $x = 1$.
  Potom stačí vziať konštantnú nulovú postupnosť, lebo platí $\prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^0 = \prod_i 1 = 1 = x$.
- Nech $x > 1$.

Potom existuje nejaký prvočíselný deliteľ x a ten má podľa definície Prvočíslo tvar $\texttt{Prvočíslo}(n)$. Nech $y = x/\texttt{Prvočíslo}(n)$. Potom $1 \leq y < x$, a teda podľa indukčného predpokladu existuje takmer nulová postupnosť $(\beta_i : i \in \mathbb{N})$ taká, že $y = \prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\beta_i}$. Nech postupnosť $(\alpha_i : i \in \mathbb{N})$ je definovaná takto:

$$\alpha_i = \begin{cases} \beta_i + 1, & \text{ak } i = n, \\ \beta_i & \text{inak.} \end{cases}$$

Táto postupnosť je tiež takmer nulová (počet nenulových členov sa zvýšil najviac o 1) a navyše platí:

$\prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i}$
$= \prod_{i=0}^{\infty} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i}$,
$= \prod_{i=0}^{n-1} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i} \cdot \texttt{Prvočíslo}(n)^{\alpha_n} \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i}$,
$= \prod_{i=0}^{n-1} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\beta_i} \cdot \texttt{Prvočíslo}(n)^{\beta_n+1} \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\beta_i}$,
$= \prod_{i=0}^{n-1} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\beta_i} \cdot \texttt{Prvočíslo}(n)^{\beta_n} \cdot \texttt{Prvočíslo}(n) \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\beta_i}$,
$= \texttt{Prvočíslo}(n) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\beta_i} \cdot \texttt{Prvočíslo}(n)^{\beta_n} \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\beta_i}$,
$= \texttt{Prvočíslo}(n) \cdot \prod_{i=0}^{\infty} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\beta_i}$,
$= \texttt{Prvočíslo}(n) \cdot \prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\beta_i}$,
$= \texttt{Prvočíslo}(n) \cdot y$,
$= x$.

2 Nech $x > 0$. Nech existujú takmer nulové postupnosti $(\alpha_i^1 : i \in \mathbb{N})$ a $(\alpha_i^2 : i \in \mathbb{N})$ také, že pre každé j z $\{1, 2\}$ platí $x = \prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i^j}$. Potom $(\alpha_i^1 : i \in \mathbb{N}) = (\alpha_i^2 : i \in \mathbb{N})$.

Nech $n \in \mathbb{N}$ a nech $\alpha_n^1 \neq \alpha_n^2$. Nech $m = \min\{\alpha_n^1, \alpha_n^2\}$. Potom pre každé j z $\{1, 2\}$ platí

$x/\texttt{Prvočíslo}(n)^m$
$= \prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i^j}/\texttt{Prvočíslo}(n)^m$,
$= \prod_{i=0}^{\infty} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i^j}/\texttt{Prvočíslo}(n)^m$,
$= \prod_{i=0}^{n-1} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i^j} \cdot \texttt{Prvočíslo}(n)^{\alpha_n^j} \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i^j}/\texttt{Prvočíslo}(n)^m$,
$= \prod_{i=0}^{n-1} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i^j} \cdot \texttt{Prvočíslo}(n)^{\alpha_n^j - m} \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i^j}$.

Číslo $x/\texttt{Prvočíslo}(n)^m$ je deliteľné prvočíslom $\texttt{Prvočíslo}(n)$ práve vtedy, keď je exponent $\alpha_n^j - m$ tohto prvočísla kladný. Vzhľadom na definíciu m je však aspoň jedno z čísel $\alpha_n^1 - m$ a $\alpha_n^2 - m$ nulové, a teda sú nulové obe. To však znamená, že $\alpha_n^1 = m = \alpha_n^2$, čo je spor.

Dokazované tvrdenie je zhrnutím sublem **1** a **2**.

D Definujme funkciu Exponent z $\mathbb{N}^2$ do $\mathbb{N}$ vzťahom

$$\texttt{Exponent}(x, y) = \begin{cases} \alpha_y, & \text{ak } x = \prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i}, \\ 0, & \text{ak } x = 0. \end{cases}$$

P Korektnosť tejto definície vyplýva zo základnej vety aritmetiky **6**.

V 7

Nech $x > 0$. Potom

$$x = \prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}.$$

Tvrdenie vyplýva priamo z definície Exponent.

I Keďže $250 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^3$, platí:

- $\texttt{Exponent}(250, 0) = 1$.
- $\texttt{Exponent}(250, 1) = 0$.
- $\texttt{Exponent}(250, 2) = 3$.
- $\texttt{Exponent}(250, y) = 0$ pre všetky ostatné y z $\mathbb{N}$.

V **8**

Nech $x \in \mathbb{N}$. Potom postupnosť $(\texttt{Exponent}(x, i) : i \in \mathbb{N})$ je takmer nulová.

Rozoberme dva prípady:

- Nech $x = 0$.

  Podľa definície Exponent potom platí $(\texttt{Exponent}(x, i) : i \in \mathbb{N}) = (0 : i \in \mathbb{N})$, a teda platí dokazované tvrdenie.
- Nech $x > 0$.

  Podľa základnej vety aritmetiky **6** existuje (jediná) takmer nulová postupnosť $(\alpha_i : i \in \mathbb{N})$, že platí $x = \prod_{i \in \mathbb{N}} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i}$. Podľa vety **7** potom $(\texttt{Exponent}(x, i) : i \in \mathbb{N}) = (\alpha_i : i \in \mathbb{N})$, a teda platí dokazované tvrdenie.

V **9**

Nech $x, y, z \in \mathbb{N}$ a $x > 0$. Potom $\texttt{Exponent}(x, y) \geq z$ práve vtedy, keď $\texttt{Prvočíslo}(y)^z \mid x$.

→ Platí:

$\texttt{Prvočíslo}(y)^z$
$\mid \texttt{Prvočíslo}(y)^{\texttt{Exponent}(x,y)}$
  (lebo podľa predpokladu $\texttt{Exponent}(x, y) \geq z$),
$\mid \prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$
  (pretože $\texttt{Prvočíslo}(y)^{\texttt{Exponent}(x,y)}$ je jeden z činiteľov súčinu $\prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$),
$= x$
  (podľa vety **7**).

Tvrdenie potom vyplýva z tranzitivity relácie Delí.

← Podľa predpokladu existuje w z $\mathbb{N}$ také, že $w = x / \texttt{Prvočíslo}(y)^z$. Keďže $x > 0$, tak aj $w > 0$, a teda podľa základnej vety aritmetiky **6** existuje (jediná) takmer nulová postupnosť $(\beta_i : i \in \mathbb{N})$, že platí $w = \prod_{i \in \mathbb{N}} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\beta_i}$. Keďže $x = \texttt{Prvočíslo}(y)^z \cdot w$, t. j. $x = \texttt{Prvočíslo}(y)^z \cdot \prod_{i \in \mathbb{N}} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\beta_i}$, platí $x = \prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\alpha_i}$, kde

$$\alpha_i = \begin{cases} z + \beta_i, & \text{ak } i = y, \\ \beta_i & \text{inak.} \end{cases}$$

Podľa definície Exponent potom platí $\texttt{Exponent}(x, y) = \alpha_y = z + \beta_y \geq z$.

V **10**

Nech $x, y \in \mathbb{N}$. Potom $\texttt{Exponent}(x, y) \leq x$.

Rozoberme dva prípady:

- Nech $x = 0$.

  Potom podľa definície Exponent platí $\texttt{Exponent}(x, y) = 0 \leq x$.
- Nech $x > 0$.

  Potom platí:

  $\texttt{Exponent}(x, y)$
  $< 2^{\texttt{Exponent}(x,y)}$
    (lebo pre každé n z $\mathbb{N}$ platí $n < 2^n$),
  $\leq \texttt{Prvočíslo}(y)^{\texttt{Exponent}(x,y)}$

(podľa definície Prvočíslo),

$\leq \prod_i \text{Prvočíslo}(i)^{\text{Exponent}(x,i)}$

(pretože $\text{Prvočíslo}(y)^{\text{Exponent}(x,y)}$ je činiteľ kladného súčinu $\prod_i \text{Prvočíslo}(i)^{\text{Exponent}(x,i)}$),

$= x$

(podľa vety 7).

V **11**

Exponent $\in$ PRF.

1 Ak $x > 0$, tak $\text{Exponent}(x, y) \in \{z \leq x : \neg(\text{Prvočíslo}(y)^{z+1} \mid x)\}$.

Podľa vety **9** neplatí $\text{Prvočíslo}(y)^{\text{Exponent}(x,y)+1} \mid x$. Podľa vety **10** už z toho dostávame požadované tvrdenie.

2 Ak $x > 0$ a $w < \text{Exponent}(x, y)$, tak $w \notin \{z \leq x : \neg(\text{Prvočíslo}(y)^{z+1} \mid x)\}$.

Keďže $w + 1 \leq \text{Exponent}(x, y)$, podľa vety **9** platí $\text{Prvočíslo}(y)^{w+1} \mid x$. Z toho už dostávame požadované tvrdenie.

3
$$\text{Exponent}(x, y) = \begin{cases} \min\{z \leq x : \neg(\text{Prvočíslo}(y)^{z+1} \mid x)\}, & \text{ak je minimovaná množina neprázdna,} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Rozlíšime dva prípady:

- Nech $x = 0$.

  Potom $\{z \leq x : \neg(\text{Prvočíslo}(y)^{z+1} \mid x)\} = \emptyset$, lebo každé číslo delí 0. V tom prípade však podľa definície Exponent naozaj platí $\text{Exponent}(x, y) = 0$.
- Nech $x > 0$.

  Potom sublema **1** znamená, že $\text{Exponent}(x, y)$ patrí do uvedenej množiny, takže tá je neprázdna. Zo sublem **1** a **2** už potom vyplýva, že $\text{Exponent}(x, y)$ je jej minimom.

Nech $\alpha = x$, potom podľa príslušných definícií platí:

- $\text{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x\} \subseteq \{x, y\}$.
- $\text{FunkcióvéSymbolyVTerme}(\alpha) = \emptyset$.

Nech $\varphi = \neg(\text{Prvočíslo}(y)^{z+1} \mid x)$, potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\text{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x, y, z\}$.
- $\text{FunkcióvéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{\text{Prvočíslo}, \text{Mocnina}, \text{Súčet}\}$, pričom platí:
  - Prvočíslo $\in$ PRF podľa vety **5**.
  - Mocnina $\in$ PRF podľa vety **1.8**.
  - Súčet $\in$ PRF podľa vety **1.6**.
- $\text{RelácioVéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{\text{Delí}\}$, pričom Delí $\in$ PRR podľa vety **1**.

To podľa sublemy **3** a vety **2.8** znamená, že Exponent $\in$ PRF.

D Definujme funkciu IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa vzťahom

$$\text{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x) = \begin{cases} \max\{y : \text{Prvočíslo}(y) \mid x\}, & \text{ak } x > 1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

P V prípade $x > 1$ je maximovaná množina neprázdna a konečná, inak by malo x nekonečne veľa deliteľov. Jej maximum teda naozaj existuje.

I Keďže $250 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^3$, platí $\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(250) = 2$, lebo najväčšie prvočíslo deliace 250 je 5 čiže $\texttt{Prvočíslo}(2)$.

V $\boxed{12}$

- Ak $y > \texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)$, tak $\texttt{Exponent}(x, y) = 0$.
- Ak $x > 1$, tak $\texttt{Exponent}(x, \texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)) > 0$.

- Rozoberme dva prípady:
  - Nech $x \leq 1$.
    Potom podľa definície Exponent platí $\texttt{Exponent}(x, y) = 0$.
  - Nech $x > 1$.
    Podľa definície IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa neplatí $\texttt{Prvočíslo}(y) \mid x$, a teda podľa vety **9** neplatí $\texttt{Exponent}(x, y) \geq 1$. To znamená, že platí platí $\texttt{Exponent}(x, y) = 0$.
- Z definície IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa platí $\texttt{Prvočíslo}(\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)) \mid x$, a teda podľa vety **9** platí $\texttt{Exponent}(x, \texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)) \geq 1$. To znamená, že platí požadované tvrdenie.

V $\boxed{13}$

Ak $x \geq 1$, tak $x = \prod_{i=0}^{y} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$, práve keď $y \geq \texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)$.

1 Ak $y \geq \texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)$, tak $\prod_{i=0}^{y} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)} = x$.

$\prod_{i=0}^{y} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$
$= \prod_{i=0}^{y} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)} \cdot \prod_{i=y+1}^{\infty} 1$,
$= \prod_{i=0}^{y} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)} \cdot \prod_{i=y+1}^{\infty} \texttt{Prvočíslo}(i)^0$,
$= \prod_{i=0}^{y} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)} \cdot \prod_{i=y+1}^{\infty} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$
(podľa vety **12**, lebo $i \geq y + 1 > \texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)$),
$= \prod_{i=0}^{\infty} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$,
$= \prod_{i} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$,
$= x$
(podľa vety **7**, lebo $x > 0$).

2 Ak $y < \texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)$, tak $\prod_{i=0}^{y} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)} < x$.

x
$= \prod_{i=0}^{\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$
(podľa sublemy **1**),
$= \prod_{i=0}^{y} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)} \cdot \prod_{i=y+1}^{\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$
(lebo $y + 1 \leq \texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)$),
$\geq \prod_{i=0}^{y} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)} \cdot$
$\cdot \texttt{Prvočíslo}(\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x))^{\texttt{Exponent}(x,\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x))}$,
$\geq \prod_{i=0}^{y} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)} \cdot \texttt{Prvočíslo}(\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x))^1$
(podľa vety **12**, ktorej podmienka $x > 1$ je splnená, lebo v definícii IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa nastáva prvá vetva, keďže $\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x) > y \geq 0$),
$> \prod_{i=0}^{y} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$.

Dokazované tvrdenie priamo vyplýva zo sublem **1** a **2**.

V $\boxed{\mathbf{14}}$

$\boxed{\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa} \in \texttt{PRF}.}$

Najprv sublema:

1
$$\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x) = \begin{cases} \min\{z \leq x : \prod_{i=0}^{z} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)} = x\}, \\ \quad \text{ak je minimovaná množina neprázdna,} \\ 0 \\ \quad \text{inak.} \end{cases}$$

Rozoberme prípady:

- Nech $x = 0$.
  Množina $\{z \leq x : \prod_{i=0}^{z} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)} = x\}$ je potom prázdna, takže nastáva druhý prípad. Podľa definície IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa naozaj $\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x) = 0$.
- Nech $x \geq 1$.
  Podľa vety **13** číslo $\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)$ do minimovanej množiny patrí, ale ak platí $y < \texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)$, tak opäť podľa vety **13** číslo y do tejto množiny nepatrí. Z toho už vyplýva dokazované tvrdenie.

Definujme funkciu f vzťahom
$$f(x,i) = \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}.$$

Nech α je term z pravej strany, potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x, i\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\texttt{Prvočíslo}, \texttt{Mocnina}, \texttt{Exponent}\}$, pričom platí:
  - Prvočíslo $\in$ PRF podľa vety **5**.
  - Mocnina $\in$ PRF podľa vety **1.8**.
  - Exponent $\in$ PRF podľa vety **11**.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že $f \in \texttt{PRF}$.

Definujme funkciu h vzťahom $h = \texttt{Iterovanie}^{1}_{\texttt{Súčin}}(f)$. Podľa viet **1.7** a **1.15** platí $h \in \texttt{PRF}$. Navyše platí

$$h(x,z) = \prod_{i=0}^{z} f(x,i) = \prod_{i=0}^{z} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)},$$

takže podľa sublemy **1** máme

$$\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x) = \begin{cases} \min\{z \leq x : h(x,z) = x\}, & \text{ak je minimovaná množina neprázdna,} \\ 0, & \text{ak } x \leq 1. \end{cases}$$

Nech β je term x, potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\beta) = \{x\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\beta) = \emptyset$.

Nech φ je formula $h(x,z) = x$, potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x, z\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{h\}$, pričom $h \in \texttt{PRF}$.
- $\texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{=\}$, pričom $= \in \texttt{PRR}$ podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.8** o ohraničenej minimalizácii znamená, že $\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa} \in \texttt{PRF}$.

Zíde sa nám aj nasledujúca funkcia:

D Definujme funkciu `KváziPodiel` vzťahom

$$\texttt{KváziPodiel}(x,y) = \begin{cases} x/y, & \text{ak } (y \neq 0) \wedge (y \mid x), \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

I
- $\texttt{KváziPodiel}(6,3) = 2$.
- $\texttt{KváziPodiel}(5,3) = 0$.
- $\texttt{KváziPodiel}(0,3) = 0$.
- $\texttt{KváziPodiel}(3,0) = 0$.

V **15**

`KváziPodiel` $\in$ PRF.

Najprv sublema:

1
$$\texttt{KváziPodiel}(x,y) = \begin{cases} \min\{z \leq x : (y \neq 0) \wedge (x = zy)\}, & \text{ak je minimovaná množina neprázdna,} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Rozlíšime tri prípady:

- Nech $y = 0$.

  Potom je množina $\{z \leq x : (y \neq 0) \wedge (x = zy)\}$ prázdna, lebo nie je splnená prvá podmienka definujúcej konjunkcie. Tvrdenie je teda v zhode s definíciou `KváziPodiel`.
- Nech $y \neq 0$, ale neplatí $y \mid x$.

  Potom je množina $\{z \leq x : (y \neq 0) \wedge (x = zy)\}$ prázdna, lebo druhá podmienka definujúcej konjunkcie nie je splnená pre žiadne z (znamenalo by to, že $y \mid x$). Tvrdenie je teda v zhode s definíciou `KváziPodiel`.
- Nech $y \neq 0$ a $y \mid x$.

  Rozoberme dva prípady:

  - Nech $x = 0$.

    Potom $0 \in \{z \leq x : (y \neq 0) \wedge (x = zy)\}$, takže táto množina je neprázdna a 0 je jej minimum. Tvrdenie je teda v zhode s definíciou `KváziPodiel`.
  - Nech $x > 0$.

    Potom rovnica $x = zy$ s neznámou z má jediné riešenie x/y, a keďže to je jeho deliteľom kladného x, platí $x/y \leq x$. To teda znamená, že množina $\{z \leq x : (y \neq 0) \wedge (x = zy)\}$ je jednoprvková, a teda jej jediný prvok x/y je jeho minimum. Tvrdenie je teda v zhode s definíciou `KváziPodiel`.

Nech $\alpha = x$, potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x\} \subseteq \{x, y\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha) = \emptyset$.

Nech $\varphi = (y \neq 0) \wedge (x = zy)$, potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x, y, z\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{\texttt{Súčin}\}$, pričom `Súčin` $\in$ PRF podľa vety **1.7**.
- $\texttt{RelačnéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{\neq, =\}$, pričom $\neq, = \in$ PRR podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.8** o ohraničenej minimalizácii znamená, že `KváziPodiel` $\in$ PRF.

2.4 Gödelovská aritmetizácia

Základná veta aritmetiky **3.6** umožňuje veľmi užitočnú metódu zvanú *gödelovská aritmetizácia*, ktorá spočíva v zakódovaní tice prirodzených čísel do jediného prirodzeného čísla nasledujúcim spôsobom: Ak y_1, ..., y_n sú prirodzené čísla, kód nimi vytvorenej tice $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$ bude

$$\mathtt{Prvočíslo}(0)^n \cdot (\mathtt{Prvočíslo}(1)^{y_1} \cdots \mathtt{Prvočíslo}(n)^{y_n}).$$

Pojem *zakódovanie* v sebe, samozrejme, implicitne zahŕňa možnosť jednoznačného odkódovania. A naozaj, ak toto kódujúce číslo označíme x, vieme, že potom pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ platí $y_i = \mathtt{Exponent}(x, i)$. Všimnime si, že na odkódovanie tak môžeme použiť primitívne rekurzívnu funkciu. Pojem kódovania teraz sformalizujeme:

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkciu $\mathtt{KódTice}^n$ z $\mathbb{N}^n$ do $\mathbb{N}$ vzťahom

$$\mathtt{KódTice}^n(y_1, \dots, y_n) = \mathtt{Prvočíslo}(0)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{y_i}.$$

I $\mathtt{KódTice}^4(3, 1, 0, 2) = 2^4 \cdot (3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^2)$.

V **1**

$\mathtt{KódTice}^{n^1}(y_1^1, \dots, y_{n^1}^1) = \mathtt{KódTice}^{n^2}(y_1^2, \dots, y_{n^2}^2)$ práve vtedy, keď $n^1 = n^2$ a pre každé i z $\{1, \dots, n^1\}$ platí $y_i^1 = y_i^2$.

→ $\mathtt{KódTice}^{n^1}(y_1^1, \dots, y_{n^1}^1) = \mathtt{KódTice}^{n^2}(y_1^2, \dots, y_{n^2}^2)$
(predpoklad),
akk $\mathtt{Prvočíslo}(0)^{n^1} \cdot \prod_{i=1}^{n^1} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{y_i^1} = \mathtt{Prvočíslo}(0)^{n^2} \cdot \prod_{i=1}^{n^2} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{y_i^2}$
(podľa definícií $\mathtt{KódTice}^{n^1}$ a $\mathtt{KódTice}^{n^2}$),
akk $n^1 = n^2$ a pre každé i z $\{1, \dots, n^1\}$ platí $y_i^1 = y_i^2$
(podľa základnej vety aritmetiky **3.6**).

← Platí triviálne.

V **2**

Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom $\mathtt{KódTice}^n \in \mathtt{PRF}$.

Dokážeme to klasickou matematickou indukciou:

1 Platí:
$\mathtt{KódTice}^0()$
$= \mathtt{Prvočíslo}(0)^0$
(podľa definície $\mathtt{KódTice}^n$),
$= 1$,
$= \mathtt{Konštanta}_1^0()$
(podľa definície $\mathtt{Konštanta}_1^0$),
takže $\mathtt{KódTice}^0 = \mathtt{Konštanta}_1^0$. Podľa vety **1.2** potom $\mathtt{KódTice}^0 \in \mathtt{PRF}$.

2 Platí:
$\mathtt{KódTice}^{n+1}(y_1, \dots, y_{n+1})$
$= \mathtt{Prvočíslo}(0)^{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{y_i}$
(podľa definície $\mathtt{KódTice}^{n+1}$),
$= (\mathtt{Prvočíslo}(0)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{y_i}) \cdot (\mathtt{Prvočíslo}(0) \cdot \mathtt{Prvočíslo}(n+1)^{y_{n+1}})$,
$= \mathtt{KódTice}^n(y_1, \dots, y_n) \cdot (\mathtt{Prvočíslo}(0) \cdot \mathtt{Prvočíslo}(n+1)^{y_{n+1}})$
(podľa definície $\mathtt{KódTice}^n$).

Nech α je posledný term v tomto odvodení, potom podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{y_1, \dots, y_{n+1}\}$.
- $\mathtt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\mathtt{KódTice}^n, \mathtt{Prvočíslo}, \mathtt{Súčet}, \mathtt{Súčin}, \mathtt{Mocnina}\}$, pričom platí:
  - $\mathtt{KódTice}^n \in \mathtt{PRF}$ podľa indukčného predpokladu.
  - $\mathtt{Prvočíslo} \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **3.5**.
  - $\mathtt{Súčet} \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **1.6**.
  - $\mathtt{Súčin} \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **1.7**.
  - $\mathtt{Mocnina} \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **1.8**.

To podľa vety **1.3** znamená, že $\mathtt{KódTice}^{n+1} \in \mathtt{PRF}$.

D Definujme reláciu $\mathtt{JeTica}$ na množine $\mathbb{N}$ vzťahom

$$\mathtt{JeTica}(x) \leftrightarrow (x > 0 \land \mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x) \leq \mathtt{Exponent}(x, 0)).$$

V $\boxed{3}$

$\mathtt{JeTica}(x)$ platí práve vtedy, keď existuje n z $\mathbb{N}$ a y_1, ..., y_n z $\mathbb{N}$ také, že $x = \mathtt{KódTice}^n(y_1, \dots, y_n)$. V takom prípade sú navyše čísla n a y_1, ..., y_n určené jednoznačne.

→ Podľa definície $\mathtt{JeTica}$ platí $x > 0$.

Nech $n = \mathtt{Exponent}(x, 0)$ a pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ nech $y_i = \mathtt{Exponent}(x, i)$. Potom platí:

x

$= \prod_{i=0}^{\mathtt{Exponent}(x,0)} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{\mathtt{Exponent}(x,i)}$
(podľa vety **3.13**, lebo $\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x) \leq \mathtt{Exponent}(x, 0)$, a to podľa definície $\mathtt{JeTica}$),

$= \mathtt{Prvočíslo}(0)^{\mathtt{Exponent}(x,0)} \cdot \prod_{i=1}^{\mathtt{Exponent}(x,0)} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{\mathtt{Exponent}(x,i)}$,

$= \mathtt{Prvočíslo}(0)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{\mathtt{Exponent}(x,i)}$
(podľa definície n),

$= \mathtt{Prvočíslo}(0)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{y_i}$
(pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ podľa definície y_i),

$= \mathtt{KódTice}^n(y_1, \dots, y_n)$
(podľa definície $\mathtt{KódTice}^n$).

Jednoznačnosť čísel n a y_1, ..., y_n vyplýva z vety **1**.

← Dokážeme obe časti konjunkcie v definícii $\mathtt{JeTica}$:

- Podľa definície $\mathtt{KódTice}^n$ platí $x = \mathtt{KódTice}^n(y_1, \dots, y_n) > 0$.
- Podľa definície $\mathtt{KódTice}^n$ platí $x = \mathtt{Prvočíslo}(0)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{y_i}$, podľa definície $\mathtt{Exponent}$ teda platí $\mathtt{Exponent}(x, 0) = n$ a pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ platí $\mathtt{Exponent}(x, i) = y_i$. Z toho dostávame, že $x = \prod_{i=0}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{y_i}$, takže podľa vety **3.13** platí $\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x) \leq n = \mathtt{Exponent}(x, 0)$.

V $\boxed{4}$

$\mathtt{JeTica} \in \mathtt{PRR}$.

Nech φ označuje formulu na pravej strane ekvivalencie v definícii $\mathtt{JeTica}$. Potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x\}$.
- $\mathtt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}, \mathtt{Exponent}\}$, pričom platí:

- $\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **3.14**.
- $\texttt{Exponent} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **3.11**.

- $\texttt{RelačnéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{>, \leq\}$, pričom $>, \leq \in \texttt{PRR}$ podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.4** o ohraničenej formule znamená, že $\texttt{JeTica} \in \texttt{PRR}$.

D Definujme funkciu $\texttt{PočetZložiek}$ z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ vzťahom

$$\texttt{PočetZložiek}(x) = \texttt{Exponent}(x, 0).$$

D Definujme funkciu $\texttt{Zložka}$ z $\mathbb{N}^2$ do $\mathbb{N}$ vzťahom

$$\texttt{Zložka} = \texttt{Exponent}.$$

P Mnemotechnický názov $\texttt{Zložka}$ budeme používať výhradne v súvislosti s kódovaním tíc.

V $\boxed{5}$

$x = \texttt{KódTice}^n(y_1, \dots, y_n)$ práve vtedy, keď platí:
- $\texttt{JeTica}(x)$.
- $\texttt{PočetZložiek}(x) = n$.
- Pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ platí $\texttt{Zložka}(x, i) = y_i$.

→ Podľa vety **3** platí $\texttt{JeTica}(x)$. Z toho podľa definície $\texttt{JeTica}$ platí $x > 0$, a teda podľa definície $\texttt{Exponent}$ platí $x = \prod_i \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$. Podľa predpokladu a definície $\texttt{KódTice}^n$ však $x = \texttt{KódTice}^n(y_1, \dots, y_n) = \texttt{Prvočíslo}(0)^n \cdot \prod_{i=1}^n \texttt{Prvočíslo}(i)^{y_i}$. Potom platí:

- $\texttt{PočetZložiek}(x)$

  $= \texttt{Exponent}(x, 0)$
  (podľa definície $\texttt{PočetZložiek}$),

  $= n$
  (podľa definície $\texttt{Exponent}$, keďže $x > 0$).

- Ak $i \in \{1, \dots, n\}$, tak platí:

  $\texttt{Zložka}(x, i)$

  $= \texttt{Exponent}(x, i)$
  (podľa definície $\texttt{Zložka}$),

  $= y_i$
  (podľa definície $\texttt{Exponent}$, keďže $x > 0$).

← Platí:

x

$= \prod_{i=0}^{\texttt{Exponent}(x,0)} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$
(podľa vety **3.13**, keďže $\texttt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x) \leq \texttt{Exponent}(x, 0)$, a to podľa definície $\texttt{JeTica}$),

$= \texttt{Prvočíslo}(0)^{\texttt{Exponent}(x,0)} \cdot \prod_{i=1}^{\texttt{Exponent}(x,0)} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$,

$= \texttt{Prvočíslo}(0)^{\texttt{PočetZložiek}(x)} \cdot \prod_{i=1}^{\texttt{PočetZložiek}(x)} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$
(podľa definície $\texttt{PočetZložiek}$),

$= \texttt{Prvočíslo}(0)^{\texttt{PočetZložiek}(x)} \cdot \prod_{i=1}^{\texttt{PočetZložiek}(x)} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Zložka}(x,i)}$
(podľa definície $\texttt{Zložka}$),

$= \texttt{Prvočíslo}(0)^n \cdot \prod_{i=1}^n \texttt{Prvočíslo}(i)^{y_i}$
(podľa predpokladu),

$= \texttt{KódTice}^n(y_1, \dots, y_n)$
(podľa definície $\texttt{KódTice}^n$).

V $\boxed{6}$

$\boxed{\texttt{PočetZložiek} \in \mathsf{PRF}.}$

Nech α je term $\texttt{Exponent}(x, 0)$, potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x\}$.
- $\texttt{FunkcioveSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\texttt{Exponent}\}$, pričom $\texttt{Exponent} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **3.11**.

To podľa definície $\texttt{PočetZložiek}$ a vety **1.3** znamená, že $\texttt{PočetZložiek} \in \mathsf{PRF}$.

V $\boxed{7}$

$\boxed{\texttt{Zložka} \in \mathsf{PRF}.}$

Podľa definície $\texttt{Zložka}$ a vety **3.11**.

Nezriedka sa stáva, že tice potrebujeme konkatenovať. Zmyslom nasledujúcej definície je, aby sme z kódov dvoch zúčastnených tíc mohli zistiť kód ich konkatenácie.

D Definujme funkciu $\texttt{Konkatenácia}$ vzťahom

$$\texttt{Konkatenácia}(x, y) =$$
$$= x \cdot \texttt{Prvočíslo}(0)^{\texttt{PočetZložiek}(y)} \cdot \prod_{i=1}^{\texttt{PočetZložiek}(y)} \texttt{Prvočíslo}(\texttt{PočetZložiek}(x) + i)^{\texttt{Zložka}(y,i)}.$$

I $\texttt{Konkatenácia}(\texttt{KódTice}^2(0, 2), \texttt{KódTice}^3(3, 1, 0))$

$= \texttt{Konkatenácia}(2^2 \cdot (3^0 \cdot 5^2), 2^3 \cdot (3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0))$
(podľa definícií $\texttt{KódTice}^2$ a $\texttt{KódTice}^3$),

$= (2^2 \cdot (3^0 \cdot 5^2)) \cdot (2^3 \cdot (7^3 \cdot 11^1 \cdot 13^0))$
(podľa definície $\texttt{Konkatenácia}$),

$= 2^5 \cdot (3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11^1 \cdot 13^0)$,

$= \texttt{KódTice}^5(0, 2, 3, 1, 0)$
(podľa definície $\texttt{KódTice}^5$).

V $\boxed{8}$

Nech $n, m \in \mathbb{N}$ a nech $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ a $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{N}$. Potom

$$\texttt{Konkatenácia}(\texttt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n), \texttt{KódTice}^m(y_1, \dots, y_m)) = \texttt{KódTice}^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

$\texttt{Konkatenácia}(\texttt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n), \texttt{KódTice}^m(y_1, \dots, y_m))$

$= \texttt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n) \cdot \texttt{Prvočíslo}(0)^{\texttt{PočetZložiek}(\texttt{KódTice}^m(y_1,\dots,y_m))} \cdot \prod_{i=1}^{\texttt{PočetZložiek}(\texttt{KódTice}^m(y_1,\dots,y_m))}$
$\texttt{Prvočíslo}(\texttt{PočetZložiek}(\texttt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n)) + i)^{\texttt{Zložka}(\texttt{KódTice}^m(y_1,\dots,y_m),i)}$
(podľa definície $\texttt{Konkatenácia}$),

$= \texttt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n) \cdot \texttt{Prvočíslo}(0)^m \cdot \prod_{i=1}^m \texttt{Prvočíslo}(\texttt{PočetZložiek}(\texttt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n)) + i)^{y_i}$
(podľa vety **5**),

$= \texttt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n) \cdot \texttt{Prvočíslo}(0)^m \cdot \prod_{i=1}^m \texttt{Prvočíslo}(n + i)^{y_i}$
(podľa vety **5**),

$= \texttt{Prvočíslo}(0)^n \cdot \prod_{i=1}^n \texttt{Prvočíslo}(i)^{x_i} \cdot \texttt{Prvočíslo}(0)^m \cdot \prod_{i=1}^m \texttt{Prvočíslo}(n + i)^{y_i}$
(podľa definície $\texttt{KódTice}^n$),

$= \texttt{Prvočíslo}(0)^{n+m} \cdot \prod_{i=1}^n \texttt{Prvočíslo}(i)^{x_i} \cdot \prod_{i=1}^m \texttt{Prvočíslo}(n + i)^{y_i}$,

$= \mathtt{Prvočíslo}(0)^{n+m} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{x_i} \cdot \prod_{i=n+1}^{n+m} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{y_{i-n}}$
(posun indexov),
$= \mathtt{KódTice}^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$
(podľa definície $\mathtt{KódTice}^{n+m}$).

V $\boxed{9}$

$\mathtt{Konkatenácia} \in \mathrm{PRF}$.

Nech f je funkcia definovaná vzťahom

$$f(x, y, i) = \mathtt{Prvočíslo}(\mathtt{PočetZložiek}(x) + i)^{\mathtt{Zložka}(y,i)}.$$

Nech α je term na pravej strane tejto rovnosti, potom podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x, y, i\}$.
- $\mathtt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\mathtt{Prvočíslo}, \mathtt{PočetZložiek}, \mathtt{Súčet}, \mathtt{Mocnina}, \mathtt{Zložka}\}$, pričom platí:
  - $\mathtt{Prvočíslo} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **3.5**.
  - $\mathtt{PočetZložiek} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **6**.
  - $\mathtt{Súčet} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **1.6**.
  - $\mathtt{Mocnina} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **1.8**.
  - $\mathtt{Zložka} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **7**.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že $f \in \mathrm{PRF}$.

Definujme funkciu h vzťahom $h = \mathtt{Iterovanie}^2_{\mathtt{Súčin}}(f)$. Podľa vety **1.15** platí $h \in \mathrm{PRF}$. Zároveň platí:
$\mathtt{Konkatenácia}(x, y)$
$= x \cdot \mathtt{Prvočíslo}(0)^{\mathtt{PočetZložiek}(y)} \cdot \prod_{i=1}^{\mathtt{PočetZložiek}(y)} \mathtt{Prvočíslo}(\mathtt{PočetZložiek}(x) + i)^{\mathtt{Zložka}(y,i)}$
(podľa definície $\mathtt{Konkatenácia}$),
$= x \cdot \mathtt{Prvočíslo}(0)^{\mathtt{PočetZložiek}(y)} \cdot \prod_{i=1}^{\mathtt{PočetZložiek}(y)} f(x, y, i)$
(podľa definície f),
$= x \cdot \mathtt{Prvočíslo}(0)^{\mathtt{PočetZložiek}(y)} \cdot \left(\prod_{i=0}^{\mathtt{PočetZložiek}(y)} f(x, y, i)\right) / f(x, y, 0)$
(lebo $f(x, y, 0) \neq 0$),
$= x \cdot \mathtt{Prvočíslo}(0)^{\mathtt{PočetZložiek}(y)} \cdot \mathtt{KváziPodiel}(\prod_{i=0}^{\mathtt{PočetZložiek}(y)} f(x, y, i), f(x, y, 0))$
(podľa definície $\mathtt{KváziPodiel}$),
$= x \cdot \mathtt{Prvočíslo}(0)^{\mathtt{PočetZložiek}(y)} \cdot \mathtt{KváziPodiel}((\mathtt{Iterovanie}^2_{\mathtt{Súčin}}(f))(x, y, \mathtt{PočetZložiek}(y)), f(x, y, 0))$
(podľa vety **1.13**),
$= x \cdot \mathtt{Prvočíslo}(0)^{\mathtt{PočetZložiek}(y)} \cdot \mathtt{KváziPodiel}(h(x, y, \mathtt{PočetZložiek}(y)), f(x, y, 0))$
(podľa definície h).
Nech β je term z posledného riadku toho odvodenia. Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\beta) = \{x, y\}$.
- $\mathtt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\beta) = \{\mathtt{Prvočíslo}, \mathtt{Mocnina}, \mathtt{PočetZložiek}, \mathtt{KváziPodiel}, h, f\}$, pričom platí:
  - $\mathtt{Prvočíslo} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **3.5**.
  - $\mathtt{Mocnina} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **1.8**.
  - $\mathtt{PočetZložiek} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **6**.
  - $\mathtt{KváziPodiel} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **3.15**.
  - $h \in \mathrm{PRF}$.
  - $f \in \mathrm{PRF}$.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že $\texttt{Konkatenácia} \in \texttt{PRF}$.

Pri primitívnej rekurzii sa pri definícii hodnoty funkcie v nejakom čísle odvolávame na hodnotu tejto funkcie v predchádzajúcom čísle. Situácia však môže byť komplikovanejšia – napríklad v známej Fibonacciho postupnosti hodnota v nejakom čísle závisí od hodnôt v dvoch predchádzajúcich číslach. Takúto situáciu zatiaľ nemáme podchytenú. Vyriešime ju tak, že si budeme pamätať všetky doterajšie hodnoty. Využijeme na to práve gödelovské kódovanie, ktoré vieme v prípade potreby primitívne rekurzívne rozkódovať, a dostať sa tak k všetkým potrebným hodnotám. Tento postup potom budeme ilustrovať na spomínanej Fibonacciho postupnosti.

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Definujme zobrazenie $\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n$ z množiny $\texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$ do množiny $\texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$ takto:

Ak $f \in \texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$ a $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathbb{N}^n$, tak $\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f)$ bude definovaná indukciou:

1

$$(\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \dots, x_n, 0) = \texttt{KódTice}^1(f(x_1, \dots, x_n, 0)).$$

2 Ak $y \in \mathbb{N}$, tak

$$(\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \dots, x_n, y+1) =$$
$$= \texttt{Konkatenácia}((\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \dots, x_n, y), \texttt{KódTice}^1(f(x_1, \dots, x_n, y+1))).$$

V $\boxed{\textbf{10}}$

Nech $n \in \mathbb{N}$, $f \in \texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$ a $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathbb{N}^n$. Potom pre každé y z $\mathbb{N}$ platí

$$(\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \dots, x_n, y) = \texttt{KódTice}^{y+1}(f(x_1, \dots, x_n, 0), \dots, f(x_1, \dots, x_n, y)).$$

Tvrdenie dokážeme indukciou cez y:

1 $(\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \dots, x_n, 0) = \texttt{KódTice}^1(f(x_1, \dots, x_n, 0))$ platí priamo z definície funkcie $\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n$.

2 Nech $y \in \mathbb{N}$. Potom platí:

$(\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \dots, x_n, y+1)$

$= \texttt{Konkatenácia}((\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \dots, x_n, y), \texttt{KódTice}^1(f(x_1, \dots, x_n, y+1)))$
(podľa definície $\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n$),

$= \texttt{Konkatenácia}(\texttt{KódTice}^{y+1}(f(x_1, \dots, x_n, 0), \dots, f(x_1, \dots, x_n, y)), \texttt{KódTice}^1(f(x_1, \dots, x_n, y+1)))$
(podľa indukčného predpokladu),

$= \texttt{KódTice}^{y+2}(f(x_1, \dots, x_n, 0), \dots, f(x_1, \dots, x_n, y+1))$
(podľa vety **8**).

V $\boxed{\textbf{11}}$

Nech $n \in \mathbb{N}$, $f \in \texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$, $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathbb{N}^n$ a $y \in \mathbb{N}$. Potom pre každé i z $\{0, \dots, y\}$ platí

$$\texttt{Zložka}((\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \dots, x_n, y), i) = f(x_1, \dots, x_n, i).$$

$\texttt{Zložka}((\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \dots, x_n, y), i)$

$= \texttt{Zložka}(\texttt{KódTice}^{y+1}(f(x_1, \dots, x_n, 0), \dots, f(x_1, \dots, x_n, y)), i)$
(podľa vety **10**),

$= f(x_1, \dots, x_n, i)$
(podľa vety **5**).

V **12**

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $f \in \texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$. Potom $\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^{n}(f) \in \texttt{PRF}$ práve vtedy, keď $f \in \texttt{PRF}$.

Nech $g = \texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^{n}(f)$. Podľa definície $\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^{n}$ teda platí:

1 $g(x_1, \dots, x_n, 0) = \texttt{KódTice}^{1}(f(x_1, \dots, x_n, 0))$.

2 Ak $y \in \mathbb{N}$, tak $g(x_1, \dots, x_n, y + 1) = \texttt{Konkatenácia}(g(x_1, \dots, x_n, y), \texttt{KódTice}^{1}(f(x_1, \dots, x_n, y + 1)))$.

Rozoberme oba smery osobitne:

→ Podľa vety **11** platí

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = \texttt{Zložka}((\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^{n}(f))(x_1, \dots, x_n, y), y) = \\ = \texttt{Zložka}(g(x_1, \dots, x_n, y), y).$$

Ak α je term z druhého riadku, tak podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x_1, \dots, x_n, y\}$.
- $\texttt{FunkcioséSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\texttt{Zložka}, g\}$, pričom platí:
  - $\texttt{Zložka} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **7**.
  - $g \in \texttt{PRF}$ podľa predpokladu.

To však podľa vety **1.3** o terme znamená, že $f \in \texttt{PRF}$.

← Nech platí:

- x_1, ..., x_n, y a z sú rôzne premenné.
- $\alpha = \texttt{KódTice}^{1}(f(x_1, \dots, x_n, 0))$.
- $\beta = \texttt{Konkatenácia}(z, \texttt{KódTice}^{1}(f(x_1, \dots, x_n, y + 1)))$.
- $\gamma = \texttt{Konkatenácia}(g(x_1, \dots, x_n, y), \texttt{KódTice}^{1}(f(x_1, \dots, x_n, y + 1)))$.

Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- $\texttt{FunkcioséSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\texttt{KódTice}^{1}, f\}$, pričom platí:
  - $\texttt{KódTice}^{1} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **2**.
  - $f \in \texttt{PRF}$ podľa predpokladu.
- $\texttt{PremennéVTerme}(\beta) = \{x_1, \dots, x_n, y, z\}$.
- $\texttt{FunkcioséSymbolyVTerme}(\beta) = \{\texttt{Konkatenácia}, \texttt{KódTice}^{1}, f, \texttt{Súčet}\}$, pričom platí:
  - $\texttt{Konkatenácia} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **9**.
  - $\texttt{KódTice}^{1} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **2**.
  - $f \in \texttt{PRF}$ podľa predpokladu.
  - $\texttt{Súčet} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **1.6**.
- Term γ vznikne z termu β substitúciou termu $g(x_1, \dots, x_n, y)$ za premennú z.

Podľa vety **1.4** o rekurzii to teda znamená, že $g \in \texttt{PRF}$.

V **13**

Nech $f \in \texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$, $g \in \texttt{PRF}$ a $h \in \texttt{PRF}$, pričom platí:

1 $f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$.

2 Pre každé y z $\mathbb{N}$ platí $f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, (\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^{n}(f))(x_1, \dots, x_n, y))$.

Potom $f \in \texttt{PRF}$.

Nech $e = \texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f)$. Potom platí:

1 $e(x_1, \ldots, x_n, 0)$
$= (\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \ldots, x_n, 0)$,
$= \texttt{KódTice}^1(f(x_1, \ldots, x_n, 0))$
(podľa definície $\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n$).
$= \texttt{KódTice}^1(g(x_1, \ldots, x_n))$
(podľa predpokladu).

2 $e(x_1, \ldots, x_n, y+1)$
$= (\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \ldots, x_n, y+1)$,
$= \texttt{Konkatenácia}((\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \ldots, x_n, y), \texttt{KódTice}^1(f(x_1, \ldots, x_n, y+1)))$
(podľa definície $\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n$),
$= \texttt{Konkatenácia}((\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \ldots, x_n, y),$
$\texttt{KódTice}^1(h(x_1, \ldots, x_n, y, (\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^n(f))(x_1, \ldots, x_n, y))))$
(podľa predpokladu),
$= \texttt{Konkatenácia}(e(x_1, \ldots, x_n, y), \texttt{KódTice}^1(h(x_1, \ldots, x_n, e(x_1, \ldots, x_n, y))))$.

Nech platí:

- $\alpha = \texttt{KódTice}^1(g(x_1, \ldots, x_n))$.
- $\beta = \texttt{Konkatenácia}(z, \texttt{KódTice}^1(h(x_1, \ldots, x_n, y, z)))$.
- $\gamma = \texttt{Konkatenácia}(e(x_1, \ldots, x_n, y), \texttt{KódTice}^1(h(x_1, \ldots, x_n, y, e(x_1, \ldots, x_n, y))))$.

Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\texttt{KódTice}^1, g\}$, pričom platí:
  - $\texttt{KódTice}^1 \in \texttt{PRF}$ podľa vety **2**.
  - $g \in \texttt{PRF}$ podľa predpokladu.
- $\texttt{PremennéVTerme}(\beta) = \{x_1, \ldots, x_n, y, z\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\beta) = \{\texttt{Konkatenácia}, \texttt{KódTice}^1, h\}$, pričom platí:
  - $\texttt{Konkatenácia} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **9**.
  - $\texttt{KódTice}^1 \in \texttt{PRF}$ podľa vety **2**.
  - $h \in \texttt{PRF}$ podľa predpokladu.
- Term γ vznikne z termu β substitúciou termu $e(x_1, \ldots, x_n, y)$ za premennú z.

Podľa vety **1.4** o rekurzii to teda znamená, že $e \in \texttt{PRF}$. Podľa vety **12** teda platí aj $f \in \texttt{PRF}$.

P Pripomeňme, že Fibonacciho postupnosť $\texttt{Fibonacci}$ je definovaná indukciou takto:

1
- $\texttt{Fibonacci}(0) = 0$.
- $\texttt{Fibonacci}(1) = 1$.

2 Ak $n \in \mathbb{N}$, tak $\texttt{Fibonacci}(n+2) = \texttt{Fibonacci}(n) + \texttt{Fibonacci}(n+1)$.

I Ukážeme, že funkcia $\texttt{Fibonacci}$ je primitívne rekurzívna.
Zrejme $\texttt{Fibonacci}(0) = \texttt{Nula}()$, pričom podľa definície $\texttt{PRF}$ platí $\texttt{Nula} \in \texttt{PRF}$.
Definujme funkciu h takto:

$$h(y,t) = \begin{cases} \texttt{Zložka}(t, y-1) + \texttt{Zložka}(t, y), & \text{ak } y \geq 1, \\ 1 & \text{inak.} \end{cases}$$

Všimnime si, že ak $y \geq 1$, podľa definície KváziPredchodca platí $y - 1 = \texttt{KváziPredchodca}(y)$, a teda

$$h(y,t) = \begin{cases} \texttt{Zložka}(t, \texttt{KváziPredchodca}(y)) + \texttt{Zložka}(t,y), & \text{ak } y \geq 1, \\ 1 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nech platí:

- φ je $y \geq 1$.
- α_1 je $\texttt{Zložka}(t, \texttt{KváziPredchodca}(y)) + \texttt{Zložka}(t,y)$.
- α_0 je 1.

Potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{y\} \subseteq \{y,t\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \emptyset$.
- $\texttt{RelačnéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{\geq\}$, pričom $\geq \in$ PRR podľa vety **2.3**.
- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha_0) = \emptyset \subseteq \{y,t\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha_0) = \emptyset$.
- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha_1) = \{y,t\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha_1) = \{\texttt{Zložka}, \texttt{KváziPredchodca}, \texttt{Súčet}\}$, pričom platí:
  - Zložka $\in$ PRF podľa vety **7**.
  - KváziPredchodca $\in$ PRF podľa vety **1.10**.
  - Súčet $\in$ PRF podľa vety **1.6**.

To podľa vety **2.6** o rozbore prípadov podľa ohraničenej formuly znamená, že $h \in$ PRF.
Ukážeme, že pre každé y z $\mathbb{N}$ platí

$$\texttt{Fibonacci}(y+1) = h(y, (\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^0(\texttt{Fibonacci}))(y)).$$

Rozoberme dva prípady:

- Nech $y = 0$.
  Potom platí:
  $h(y, (\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^0(\texttt{Fibonacci}))(y))$
  $= h(0, (\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^0(\texttt{Fibonacci}))(0)),$
  $= 1$
  (podľa definície h),
  $= \texttt{Fibonacci}(1),$
  $= \texttt{Fibonacci}(y+1).$
- Nech $y \geq 1$.
  Potom platí:
  $h(y, (\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^0(\texttt{Fibonacci}))(y))$
  $= \texttt{Zložka}((\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^0(\texttt{Fibonacci}))(y), y-1)$
  $+ \texttt{Zložka}((\texttt{TicaZačiatočnýchHodnôt}^0(\texttt{Fibonacci}))(y), y)$
  (podľa definície h),
  $= \texttt{Fibonacci}(y-1) + \texttt{Fibonacci}(y)$
  (podľa viet **11** a opäť **11**),
  $= \texttt{Fibonacci}(y+1).$

Podľa vety **13** dostávame Fibonacci $\in$ PRF.

Budeme potrebovať kódovať i postupnosti. V plnej všeobecnosti to však nepôjde, nekonečné množstvo informácií totiž nemožno zakódovať do jedného prirodzeného čísla. Našťastie sa nám bude stačiť obmedziť na už spomínané takmer nulové postupnosti, ktorých informačná hodnota je konečná.

D Definujme funkciu KódTakmerNulovejPostupnosti z množiny TakmerNulovéPostupnosti do množiny $\mathbb{N}$ takto:

Nech q je takmer nulová postupnosť. Potom

$$\texttt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(q) = \prod_{i \in \mathbb{N}} \texttt{Prvočíslo}(i)^{q(i)}.$$

I Ak q je takmer nulová postupnosť $(3, 4, 0, 5, 2, 0, 0, 0, \dots)$, tak $\texttt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(q) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdots = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \cdot 7^5 \cdot 11^2$.

V $\boxed{14}$

Funkcia KódTakmerNulovejPostupnosti je injektívna.

Nech q^1 a q^2 sú takmer nulové postupnosti. Potom postupne platí:

$\texttt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(q^1) = \texttt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(q^2)$
(predpoklad s cieľom $q^1 = q^2$),

$\prod_{i \in \mathbb{N}} \texttt{Prvočíslo}(i)^{q^1(i)} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \texttt{Prvočíslo}(i)^{q^2(i)}$
(podľa definícií KódTakmerNulovejPostupnosti a opäť KódTakmerNulovejPostupnosti),

$q^1 = q^2$
(podľa základnej vety aritmetiky **3.6**).

D Definujme reláciu JeTakmerNulováPostupnosť na množine $\mathbb{N}$ vzťahom

$$\texttt{JeTakmerNulováPostupnosť}(x) \leftrightarrow x > 0.$$

D Definujme funkciu Člen vzťahom

$$\texttt{Člen} = \texttt{Exponent}.$$

P Toto alternatívne pomenovanie funkcie Exponent budeme používať výhradne v súvislosti s takmer nulovými postupnosťami.

V $\boxed{15}$

$\texttt{JeTakmerNulováPostupnosť}(x)$ platí práve vtedy, keď $\texttt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(q) = x$ pre nejakú takmer nulovú postupnosť q. Vtedy je takáto postupnosť jediná a $q = (\texttt{Člen}(x, i) : i \in \mathbb{N})$.

→ Nech $q = (\texttt{Člen}(x, i) : i \in \mathbb{N})$. Podľa definície Člen potom platí $q = (\texttt{Exponent}(x, i) : i \in \mathbb{N})$, takže podľa vety **3.8** je q takmer nulová postupnosť. Navyše platí:

$\texttt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(q)$
$= \prod_{i \in \mathbb{N}} \texttt{Prvočíslo}(i)^{q(i)}$
(podľa definície KódTakmerNulovejPostupnosti),
$= \prod_{i \in \mathbb{N}} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Člen}(x,i)}$
(podľa definície q),
$= \prod_{i \in \mathbb{N}} \texttt{Prvočíslo}(i)^{\texttt{Exponent}(x,i)}$
(podľa definície Člen),
$= x$
(podľa vety **3.7**, lebo podľa definície JeTakmerNulováPostupnosť platí $x > 0$).

Jedinosť q vyplýva z vety **14**.

← Podľa definície KódTakmerNulovejPostupnosti platí $x = \prod_{i \in \mathbb{N}} \texttt{Prvočíslo}(i)^{q(i)} > 0$. Podľa definície JeTakmerNulováPostupnosť už dostávame požadované tvrdenie.

V 16

$\mathtt{JeTakmerNulováPostupnosť} \in \mathtt{PRR}$.

Ak označíme φ formulu na pravej strane ekvivalencie v definícii $\mathtt{JeTakmerNulováPostupnosť}$, tak podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x\}$.
- $\mathtt{FunkcioovéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \emptyset$.
- $\mathtt{RelácioovéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{>\}$, pričom $> \in \mathtt{PRR}$ podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.4** o ohraničenej formule znamená, že $\mathtt{JeTakmerNulováPostupnosť} \in \mathtt{PRR}$.

V 17

$\mathtt{Člen} \in \mathtt{PRF}$.

Podľa definície $\mathtt{Člen}$ a vety **3.11**.

Vieme už teda kódovať tice i takmer nulové postupnosti. Užitočné bude vedieť i prejsť od jedných k druhým.

D Definujme funkciu $\mathtt{DoplnenýNulovýChvost}$ z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ takto:

$$\mathtt{DoplnenýNulovýChvost}(x) = \prod_{i=1}^{\mathtt{PočetZložiek}(x)} \mathtt{Prvočíslo}(\mathtt{KváziPredchodca}(i))^{\mathtt{Zložka}(x,i)}.$$

D Definujme funkciu $\mathtt{OdobratýNulovýChvost}$ z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ takto:

$$\mathtt{OdobratýNulovýChvost}(x) =$$

$$\begin{cases} \mathtt{Prvočíslo}(0)^{\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)+1} \cdot \prod_{i=0}^{\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)} \mathtt{Prvočíslo}(i+1)^{\mathtt{Člen}(x,i)}, \\ \qquad \text{ak } x > 1, \\ x \\ \qquad \text{inak.} \end{cases}$$

V 18

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- $$\mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}((x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots)) =$$
  $$= \mathtt{DoplnenýNulovýChvost}(\mathtt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n)).$$
- Ak $x_n > 0$, tak
  $$\mathtt{OdobratýNulovýChvost}(\mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}((x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots)) =$$
  $$= \mathtt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n).$$

Postupnosť $(x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots)$ označme q, platí teda

$$q(i) = \begin{cases} x_{i+1}, & \text{ak } i \in \{0, \dots, n-1\}, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Potom platí:

- $\mathtt{DoplnenýNulovýChvost}(\mathtt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n))$

$= \prod_{i=1}^{\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{KódTice}^n(x_1,\ldots,x_n))} \mathtt{Prvočíslo}(\mathtt{KváziPredchodca}(i))^{\mathtt{Zložka}(\mathtt{KódTice}^n(x_1,\ldots,x_n),i)}$
(podľa definície `DoplnenýNulovýChvost`),
$= \prod_{i=1}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(\mathtt{KváziPredchodca}(i))^{x_i}$
(podľa vety **5**),
$= \prod_{i=1}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(\mathtt{KváziPredchodca}(i))^{q(i-1)}$
(podľa definície q),
$= \prod_{i=1}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(i-1)^{q(i-1)}$
(pre každé i z $\{1,\ldots,n\}$ podľa definície `KváziPredchodca`),
$= \prod_{i=0}^{n-1} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{q(i)}$
(posun indexu),
$= \prod_{i=0}^{n-1} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{q(i)} \cdot 1$,
$= \prod_{i=0}^{n-1} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{q(i)} \cdot \prod_{i=n}^{\infty} 1$,
$= \prod_{i=0}^{n-1} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{q(i)} \cdot \prod_{i=n}^{\infty} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{0}$,
$= \prod_{i=0}^{n-1} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{q(i)} \cdot \prod_{i=n}^{\infty} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{q(i)}$
(podľa definície q),
$= \prod_{i=0}^{\infty} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{q(i)}$,
$= \prod_{i} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{q(i)}$,
$= \mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(q)$
(podľa definície `KódTakmerNulovejPostupnosti`),
$= \mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}((x_1,\ldots,x_n,0,0,0,\ldots))$.

- Nech $y = \mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(q)$. Z predpokladu $x_n > 0$ podľa definície q máme $n > 0$ a $q(n-1) > 0$, a teda podľa definície `KódTakmerNulovejPostupnosti` platí $y \geq \mathtt{Prvočíslo}(n-1)^{q(n-1)} > 1$.

  Podľa vety **15** pre každé i z $\mathbb{N}$ platí $\mathtt{Člen}(y,i) = q(i)$. Podľa definície `Člen` a definície q teda platí:

  - $\mathtt{Exponent}(y,n-1) = \mathtt{Člen}(y,n-1) = q(n-1) > 0$.
  - Ak $i > n-1$, tak $\mathtt{Exponent}(y,i) = \mathtt{Člen}(y,i) = q(i) = 0$.

  Podľa vety **3.12** teda z prvej vlastnosti neplatí $n-1 > \mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(y)$ a z druhej neplatí $\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(y) > n-1$. Platí teda $\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(y) = n-1$.

  Potom platí:

  $\mathtt{OdobratýNulovýChvost}(\mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}((x_1,\ldots,x_n,0,0,0,\ldots)))$
  $= \mathtt{OdobratýNulovýChvost}(\mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(q))$,
  $= \mathtt{OdobratýNulovýChvost}(y)$,
  $= \mathtt{Prvočíslo}(0)^{\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(y)+1} \cdot \prod_{i=0}^{\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(y)} \mathtt{Prvočíslo}(i+1)^{\mathtt{Člen}(y,i)}$
  (podľa definície `OdobratýNulovýChvost`, lebo $y > 1$),
  $= \mathtt{Prvočíslo}(0)^{n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \mathtt{Prvočíslo}(i+1)^{\mathtt{Člen}(y,i)}$
  (lebo $\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(y) = n-1$),
  $= \mathtt{Prvočíslo}(0)^{n} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{\mathtt{Člen}(y,i-1)}$
  (posun indexu),
  $= \mathtt{Prvočíslo}(0)^{n} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{q(i-1)}$
  (pre každé i z $\mathbb{N}$ platí $\mathtt{Člen}(y,i) = q(i)$),
  $= \mathtt{Prvočíslo}(0)^{n} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathtt{Prvočíslo}(i)^{x_i}$
  (podľa definície q),
  $= \mathtt{KódTice}^n(x_1,\ldots,x_n)$
  (podľa definície $\mathtt{KódTice}^n$).

V **19**

$\mathtt{DoplnenýNulovýChvost} \in \mathtt{PRF}$.

Definujme f vzťahom $f(x,i) = \mathtt{Prvočíslo}(\mathtt{KváziPredchodca}(i))^{\mathtt{Zložka}(x,i)}$.
Nech α je term z pravej strany tohto vzťahu, potom podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x, i\}$.
- $\mathtt{FunkcioséSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\mathtt{Prvočíslo}, \mathtt{KváziPredchodca}, \mathtt{Mocnina}, \mathtt{Zložka}\}$, pričom platí:
  - $\mathtt{Prvočíslo} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **3.5**.
  - $\mathtt{KváziPredchodca} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **1.10**.
  - $\mathtt{Mocnina} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **1.8**.
  - $\mathtt{Zložka} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **7**.

Podľa vety **1.3** o terme tak dostávame, že $f \in \mathsf{PRF}$.

Definujme h vzťahom $h = \mathtt{Iterovanie}^{1}_{\mathtt{Súčin}}(f)$. Podľa vety **1.15** platí $h \in \mathsf{PRF}$.
Zároveň platí:

$\mathtt{DoplnenýNulovýChvost}(x)$
$= \prod_{i=1}^{\mathtt{PočetZložiek}(x)} \mathtt{Prvočíslo}(\mathtt{KváziPredchodca}(i))^{\mathtt{Zložka}(x,i)}$
(podľa definície $\mathtt{DoplnenýNulovýChvost}$),
$= \prod_{i=1}^{\mathtt{PočetZložiek}(x)} f(x,i)$
(podľa definície f),
$= \left(\prod_{i=0}^{\mathtt{PočetZložiek}(x)} f(x,i)\right) / f(x,0)$
(lebo $f(x,0) = \mathtt{Prvočíslo}(\mathtt{KváziPredchodca}(0))^{\mathtt{Zložka}(x,0)} \neq 0$),
$= \mathtt{KváziPodiel}(\prod_{i=0}^{\mathtt{PočetZložiek}(x)} f(x,i), f(x,0))$
(podľa definície $\mathtt{KváziPodiel}$),
$= \mathtt{KváziPodiel}((\mathtt{Iterovanie}^{1}_{\mathtt{Súčin}}(f))(x, \mathtt{PočetZložiek}(x)), f(x,0))$
(podľa vety **1.13**),
$= \mathtt{KváziPodiel}(h(x, \mathtt{PočetZložiek}(x)), f(x,0))$
(podľa definície h).

Nech β je term z posledného kroku tohto odvodenia, potom podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\beta) = \{x\}$.
- $\mathtt{FunkcioséSymbolyVTerme}(\beta) = \{\mathtt{KváziPodiel}, h, \mathtt{PočetZložiek}, f\}$, pričom platí:
  - $\mathtt{KváziPodiel} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **3.15**.
  - $h \in \mathsf{PRF}$.
  - $\mathtt{PočetZložiek} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **6**.
  - $f \in \mathsf{PRF}$.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že $\mathtt{DoplnenýNulovýChvost} \in \mathsf{PRF}$.

V **20**

$\mathtt{OdobratýNulovýChvost} \in \mathsf{PRF}$.

Definujme funkciu f vzťahom $f(x,i) = \mathtt{Prvočíslo}(i+1)^{\mathtt{Člen}(x,i)}$.
Nech α je term z pravej strany tohto vzťahu, potom podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x, i\}$.
- $\mathtt{FunkcioséSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\mathtt{Prvočíslo}, \mathtt{Súčet}, \mathtt{Mocnina}, \mathtt{Člen}\}$, pričom platí:
  - $\mathtt{Prvočíslo} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **3.5**.
  - $\mathtt{Súčet} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **1.6**.
  - $\mathtt{Mocnina} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **1.8**.

- $\mathtt{Člen} \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **17**.

To podľa vety **1.3** znamená, že $f \in \mathtt{PRF}$.

Definujme funkciu h vzťahom $h = \mathtt{Iterovanie}^{1}_{\mathtt{Súčin}}(f)$. Podľa vety **1.15** platí $h \in \mathtt{PRF}$.

Podľa definície $\mathtt{OdobratýNulovýChvost}$ platí

$$\mathtt{OdobratýNulovýChvost}(x) =$$

$$= \begin{cases} \mathtt{Prvočíslo}(0)^{\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)+1} \cdot h(x, \mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)), \\ \qquad \text{ak } x > 1, \\ x \\ \qquad \text{inak.} \end{cases}$$

Nech platí:

- φ je formula $x > 1$.
- β_1 je term $\mathtt{Prvočíslo}(0)^{\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x)+1} \cdot h(x, \mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}(x))$.
- β_0 je term x.

Potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x\}$.
- $\mathtt{FunkcionéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \emptyset$.
- $\mathtt{RelačnéSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{>\}$, pričom $> \in \mathtt{PRR}$ podľa vety **2.3**.
- $\mathtt{PremennéVTerme}(\beta_0) = \{x\}$.
- $\mathtt{FunkcionéSymbolyVTerme}(\beta_0) = \emptyset$.
- $\mathtt{PremennéVTerme}(\beta_1) = \{x\}$.
- $\mathtt{FunkcionéSymbolyVTerme}(\beta_1) = \{\mathtt{Prvočíslo}, \mathtt{Mocnina}, \mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}, \mathtt{Súčet}, h\}$, pričom platí:
  - $\mathtt{Prvočíslo} \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **3.5**.
  - $\mathtt{Mocnina} \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **1.8**.
  - $\mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa} \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **3.14**.
  - $\mathtt{Súčet} \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **1.6**.
  - $h \in \mathtt{PRF}$.

To podľa vety **2.6** znamená, že $\mathtt{OdobratýNulovýChvost} \in \mathtt{PRF}$.

2.5 Gödelovská aritmetizácia turingovskej vypočítateľnosti

Poďme teraz postupne gödelovsky aritmetizovať všetky pojmy z kapitoly **1** o Turingových strojoch, pričom vždy, keď to bude možné, budeme dbať na primitívnu rekurzivitu ich kódovania.

Začnime inštrukciou:

D Definujme funkciu KódInštrukcie z množiny Inštrukcie do množiny ℕ takto:
Ak I je inštrukcia, tak

KódInštrukcie(I) =

= KódTice^2(KódTice^2(StarýStav(I), StaréPísmeno(I)),
KódTice^3(NovéPísmeno(I), Posun(I), NovýStav(I))).

I KódInštrukcie($s_1$10Ns_2)
= KódTice^2(KódTice^2(s_1, 1), KódTice^3(0, N, s_2)),
= KódTice^2(KódTice^2(1, 1), KódTice^3(0, 1, 2)),
$= 2^2 \cdot 3^{2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1} \cdot 5^{2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^2}$.

V **1**

Funkcia KódInštrukcie je injektívna.

Nech I^1, I^2 sú inštrukcie. Potom postupne platí
KódInštrukcie(I^1) = KódInštrukcie(I^2)
(predpoklad s cieľom $I^1 = I_2$),
KódTice^2(KódTice^2(StarýStav(I^1), StaréPísmeno(I^1)),
KódTice^3(NovéPísmeno(I^1), Posun(I^1), NovýStav(I^1)))
= KódTice^2(KódTice^2(StarýStav(I^2), StaréPísmeno(I^2)),
KódTice^3(NovéPísmeno(I^2), Posun(I^2), NovýStav(I^2)))
(podľa definícií KódInštrukcie a opäť KódInštrukcie),
KódTice^2(StarýStav(I^1), StaréPísmeno(I^1)) = KódTice^2(StarýStav(I^2), StaréPísmeno(I^2))
a KódTice^3(NovéPísmeno(I^1), Posun(I^1), NovýStav(I^1))
= KódTice^3(NovéPísmeno(I^2), Posun(I^2), NovýStav(I^2))
(podľa vety **4.1**),
StarýStav(I^1) = StarýStav(I^2), StaréPísmeno(I^1) = StaréPísmeno(I^2),
NovéPísmeno(I^1) = NovéPísmeno(I^2), Posun(I^1) = Posun(I^2) a NovýStav(I^1) = NovýStav(I^2)
(podľa viet **4.1** a opäť **4.1**),
⟨⟨StarýStav(I^1), StaréPísmeno(I^1)⟩, ⟨NovéPísmeno(I^1), Posun(I^1), NovýStav(I^1)⟩⟩
= ⟨⟨StarýStav(I^2), StaréPísmeno(I^2)⟩, ⟨NovéPísmeno(I^2), Posun(I^2), NovýStav(I^2)⟩⟩
$I^1 = I^2$
(podľa viet **1.2.1** a opäť **1.2.1**).

D Definujme funkcie

- StarýStavInštrukcie,
- StaréPísmenoInštrukcie,
- NovéPísmenoInštrukcie,
- PosunInštrukcie,
- NovýStavInštrukcie,

a to týmito vzťahmi:

- StarýStavInštrukcie(x) = Zložka(Zložka(x, 1), 1).

- $\texttt{StaréPísmenoInštrukcie}(x) = \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 1), 2)$.
- $\texttt{NovéPísmenoInštrukcie}(x) = \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 2), 1)$.
- $\texttt{PosunInštrukcie}(x) = \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 2), 2)$.
- $\texttt{NovýStavInštrukcie}(x) = \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 2), 3)$.

V $\boxed{2}$

Nech I je inštrukcia a $x = \texttt{KódInštrukcie}(I)$. Potom platí:

- $\texttt{StarýStavInštrukcie}(x) = \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 1), 1) = \texttt{StarýStav}(I)$.
- $\texttt{StaréPísmenoInštrukcie}(x) = \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 1), 2) = \texttt{StaréPísmeno}(I)$.
- $\texttt{NovéPísmenoInštrukcie}(x) = \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 2), 1) = \texttt{NovéPísmeno}(I)$.
- $\texttt{PosunInštrukcie}(x) = \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 2), 2) = \texttt{Posun}(I)$.
- $\texttt{NovýStavInštrukcie}(x) = \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 2), 3) = \texttt{NovýStav}(I)$.

- $\texttt{StarýStavInštrukcie}(x)$
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 1), 1)$
  (podľa definície $\texttt{StarýStavInštrukcie}$),
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(\texttt{KódInštrukcie}(I), 1), 1)$,
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{KódTice}^2(\texttt{StarýStav}(I), \texttt{StaréPísmeno}(I)), 1)$
  (podľa viet **1.2.1** a **4.5**),
  $= \texttt{StarýStav}(I)$
  (podľa vety **4.5**).
- $\texttt{StaréPísmenoInštrukcie}(x)$
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 1), 2)$
  (podľa definície $\texttt{StaréPísmenoInštrukcie}$),
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(\texttt{KódInštrukcie}(I), 1), 2)$,
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{KódTice}^2(\texttt{StarýStav}(I), \texttt{StaréPísmeno}(I)), 2)$
  (podľa viet **1.2.1** a **4.5**),
  $= \texttt{StaréPísmeno}(I)$
  (podľa vety **4.5**).
- $\texttt{NovéPísmenoInštrukcie}(x)$
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 2), 1)$
  (podľa definície $\texttt{NovéPísmenoInštrukcie}$),
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(\texttt{KódInštrukcie}(I), 2), 1)$,
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{KódTice}^3(\texttt{NovéPísmeno}(I), \texttt{Posun}(I), \texttt{NovýStav}(I)), 1)$
  (podľa viet **1.2.1** a **4.5**),
  $= \texttt{NovéPísmeno}(I)$
  (podľa vety **4.5**).
- $\texttt{PosunInštrukcie}(x)$
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 2), 2)$
  (podľa definície $\texttt{PosunInštrukcie}$),
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(\texttt{KódInštrukcie}(I), 2), 2)$,
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{KódTice}^3(\texttt{NovéPísmeno}(I), \texttt{Posun}(I), \texttt{NovýStav}(I)), 2)$
  (podľa viet **1.2.1** a **4.5**),
  $= \texttt{Posun}(I)$
  (podľa vety **4.5**).
- $\texttt{NovýStavInštrukcie}(x)$
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(x, 2), 3)$
  (podľa definície $\texttt{NovýStavInštrukcie}$),
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{Zložka}(\texttt{KódInštrukcie}(I), 2), 3)$,
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{KódTice}^3(\texttt{NovéPísmeno}(I), \texttt{Posun}(I), \texttt{NovýStav}(I)), 3)$
  (podľa viet **1.2.1** a **4.5**),

$= \mathtt{NovýStav}(I)$
(podľa vety **4.5**).

P Ak teda $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, tak platí

$$I = \langle\langle \mathtt{StarýStavInštrukcie}(x), \mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(x)\rangle,$$
$$\langle \mathtt{NovéPísmenoInštrukcie}(x), \mathtt{PosunInštrukcie}(x), \mathtt{NovýStavInštrukcie}(x)\rangle\rangle.$$

V $\boxed{3}$

- $\mathtt{StarýStavInštrukcie} \in \mathsf{PRF}$.
- $\mathtt{StaréPísmenoInštrukcie} \in \mathsf{PRF}$.
- $\mathtt{NovéPísmenoInštrukcie} \in \mathsf{PRF}$.
- $\mathtt{PosunInštrukcie} \in \mathsf{PRF}$.
- $\mathtt{NovýStavInštrukcie} \in \mathsf{PRF}$.

Nech nastáva jedna z možností:

- $f = \mathtt{StarýStavInštrukcie}$, $k = 1$, $l = 1$.
- $f = \mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}$, $k = 1$, $l = 2$.
- $f = \mathtt{NovéPísmenoInštrukcie}$, $k = 2$, $l = 1$.
- $f = \mathtt{PosunInštrukcie}$, $k = 2$, $l = 2$.
- $f = \mathtt{NovýStavInštrukcie}$, $k = 2$, $l = 3$.

Podľa príslušnej definície f potom platí $f(x) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, k), l)$.

Nech α je term $\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, k), l)$, potom podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x\}$.
- $\mathtt{FunkcioéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\mathtt{Zložka}\}$, pričom $\mathtt{Zložka} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **4.7**.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že $f \in \mathsf{PRF}$.

D Definujme reláciu $\mathtt{JeInštrukcia}$ na množine $\mathbb{N}$ vzťahom

$$\mathtt{JeInštrukcia}(x) \leftrightarrow (\mathtt{JeTica}(x) \wedge \mathtt{PočetZložiek}(x) = 2 \wedge$$
$$\wedge \mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x, 1)) \wedge \mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x, 1)) = 2 \wedge$$
$$\wedge \mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x, 2)) \wedge \mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x, 2)) = 3 \wedge$$
$$\wedge \mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(x) \leq 1 \wedge \mathtt{NovéPísmenoInštrukcie}(x) \leq 1 \wedge \mathtt{PosunInštrukcie}(x) \leq 2).$$

I Ako vieme z predchádzajúceho príkladu, $\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_1 10N s_2}) = 2^2 \cdot 3^{2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1} \cdot 5^{2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^2}$. Potom platí $\mathtt{JeInštrukcia}(\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_1 10N s_2}))$, lebo platí:

- $\mathtt{JeTica}(\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_1 10N s_2}))$.
- $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_1 10N s_2})) = 2$.
- $\mathtt{Zložka}(\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_1 10N s_2}), 1) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.
- $\mathtt{Zložka}(\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_1 10N s_2}), 2) = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^2$.
- $\mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_1 10N s_2})) = \mathtt{Zložka}(2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1, 2) = 1 \leq 1$.
- $\mathtt{NovéPísmenoInštrukcie}(\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_1 10N s_2})) = \mathtt{Zložka}(2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^2, 1) = 0 \leq 1$.
- $\mathtt{PosunInštrukcie}(\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_1 10N s_2})) = \mathtt{Zložka}(2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^2, 2) = 1 \leq 2$.

V $\boxed{4}$

$\mathtt{JeInštrukcia}(x)$ platí práve vtedy, keď existuje inštrukcia I taká, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$.

$\mathtt{JeInštrukcia}(x)$,

akk $\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 2$,
$\mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x,1))$, $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x,1)) = 2$,
$\mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x,2))$, $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x,2)) = 3$,
$\mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(x) \leq 1$, $\mathtt{NovéPísmenoInštrukcie}(x) \leq 1$ a $\mathtt{PosunInštrukcie}(x) \leq 2$
(podľa definície $\mathtt{JeInštrukcia}$),

akk $\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 2$,
$\mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x,1))$, $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x,1)) = 2$,
$\mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x,2))$, $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x,2)) = 3$,
$\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),2) \leq 1$, $\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),1) \leq 1$ a $\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),2) \leq 2$
(podľa definícií týchto funkcií),

akk $\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 2$,
$\mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x,1))$, $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x,1)) = 2$,
$\mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x,2))$, $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x,2)) = 3$,
$\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),2) \in \mathtt{Písmená}$, $\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),1) \in \mathtt{Písmená}$
a $\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),2) \in \mathtt{Posuny}$
(podľa definícií $\mathtt{Písmená}$ a $\mathtt{Posuny}$),

akk $\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 2$,
$\mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x,1))$, $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x,1)) = 2$,
$\mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x,2))$, $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x,2)) = 3$,
$\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),1) \in \mathtt{Stavy}$, $\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),2) \in \mathtt{Písmená}$,
$\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),1) \in \mathtt{Písmená}$, $\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),2) \in \mathtt{Posuny}$
a $\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),3) \in \mathtt{Stavy}$
(lebo podľa definície $\mathtt{Stavy}$ sú pridané tvrdenia triviálne pravdivé),

akk $\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 2$,
$\mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x,1))$, $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x,1)) = 2$,
$\mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x,2))$, $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x,2)) = 3$
a existuje inštrukcia I taká, že $I = \langle\langle\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),1), \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),2)\rangle,$
$\langle\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),1), \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),2), \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),3)\rangle\rangle$
(podľa definície inštrukcie),

akk $\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 2$,
$\mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x,1))$, $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x,1)) = 2$,
$\mathtt{JeTica}(\mathtt{Zložka}(x,2))$, $\mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{Zložka}(x,2)) = 3$
a existuje inštrukcia I taká, že
$\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),1)$, $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),2)$,
$\mathtt{NovéPísmeno}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),1)$, $\mathtt{Posun}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),2)$
a $\mathtt{NovýStav}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),3)$
(v jednom smere podľa definície týchto funkcií, v druhom podľa vety **1.2.1**),

akk $\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 2$,
$\mathtt{Zložka}(x,1) = \mathtt{KódTice}^2(\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),1), \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),2))$,
$\mathtt{Zložka}(x,2) = \mathtt{KódTice}^2(\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),1), \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),2), \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),3))$,
a existuje inštrukcia I taká, že
$\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),1)$, $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),2)$,
$\mathtt{NovéPísmeno}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),1)$, $\mathtt{Posun}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),2)$
a $\mathtt{NovýStav}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),3)$
(podľa viet **4.5** a opäť **4.5**),

akk a existuje inštrukcia I taká, že
$\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 2$,
$\mathtt{Zložka}(x,1) = \mathtt{KódTice}^2(\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),1), \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),2))$,
$\mathtt{Zložka}(x,2) = \mathtt{KódTice}^3(\mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),1), \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),2), \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),3))$,
$\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),1)$, $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,1),2)$,
$\mathtt{NovéPísmeno}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),1)$, $\mathtt{Posun}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),2)$
a $\mathtt{NovýStav}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x,2),3)$,

akk existuje inštrukcia I taká, že

$\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 2$,
$\mathtt{Zložka}(x, 1) = \mathtt{KódTice}^2(\mathtt{StarýStav}(I), \mathtt{StaréPísmeno}(I))$,
$\mathtt{Zložka}(x, 2) = \mathtt{KódTice}^3(\mathtt{NovéPísmeno}(I), \mathtt{Posun}(I), \mathtt{NovýStav}(I))$,
$\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 1), 1)$, $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 1), 2)$,
$\mathtt{NovéPísmeno}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 2), 1)$, $\mathtt{Posun}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 2), 2)$
a $\mathtt{NovýStav}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 2), 3)$,

akk existuje inštrukcia I taká, že
$x = \mathtt{KódTice}^2(\mathtt{KódTice}^2(\mathtt{StarýStav}(I), \mathtt{StaréPísmeno}(I))$,
$\mathtt{KódTice}^3(\mathtt{NovéPísmeno}(I), \mathtt{Posun}(I), \mathtt{NovýStav}(I)))$,
$\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 1), 1)$, $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 1), 2)$,
$\mathtt{NovéPísmeno}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 2), 1)$, $\mathtt{Posun}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 2), 2)$
a $\mathtt{NovýStav}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 2), 3)$
(podľa vety **4.5**),

akk existuje inštrukcia I taká, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$,
$\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 1), 1)$, $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 1), 2)$,
$\mathtt{NovéPísmeno}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 2), 1)$, $\mathtt{Posun}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 2), 2)$
a $\mathtt{NovýStav}(I) = \mathtt{Zložka}(\mathtt{Zložka}(x, 2), 3)$
(podľa definície $\mathtt{KódInštrukcie}$),

akk existuje inštrukcia I taká, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$
(vynechané tvrdenia platia podľa vety **2**).

V **5**

$\mathtt{JeInštrukcia} \in \mathrm{PRR}$.

Nech φ je formula na pravej strane ekvivalencie v definícii $\mathtt{JeInštrukcia}$, potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine $\mathtt{FunkcioveSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{PočetZložiek} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **4.6**.
  - $\mathtt{Zložka} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **4.7**.
  - $\mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}, \mathtt{NovéPísmenoInštrukcie}, \mathtt{PosunInštrukcie} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **3**.
- Skontrolujme všetky relácie so symbolmi v množine $\mathtt{RelačnéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{JeTica} \in \mathrm{PRR}$ podľa vety **4.4**.
  - $=, \leq \in \mathrm{PRR}$ podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.4** o ohraničenej formule znamená, že $\mathtt{JeInštrukcia} \in \mathrm{PRR}$.

D Definujme reláciu $\mathtt{InštrukcieSúVKonflikte}$ na množine $\mathbb{N}^2$ vzťahom

$$\mathtt{InštrukcieSúVKonflikte}(x, y) \leftrightarrow (\mathtt{JeInštrukcia}(x) \wedge \mathtt{JeInštrukcia}(y) \wedge x \neq y \wedge$$
$$\wedge\, \mathtt{StarýStavInštrukcie}(x) = \mathtt{StarýStavInštrukcie}(y) \wedge$$
$$\wedge\, \mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(x) = \mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(y)).$$

V **6**

$\mathtt{InštrukcieSúVKonflikte}(x, y)$ platí práve vtedy, keď existujú inštrukcie I a J v konflikte také, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$ a $y = \mathtt{KódInštrukcie}(J)$.

$\mathtt{InštrukcieSúVKonflikte}(x, y)$,

akk $\mathtt{JeInštrukcia}(x)$, $\mathtt{JeInštrukcia}(y)$, $x \neq y$,
$\mathtt{StarýStavInštrukcie}(x) = \mathtt{StarýStavInštrukcie}(y)$
a $\mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(x) = \mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(y)$
(podľa definície InštrukcieSúVKonflikte),

akk existujú inštrukcie I a J, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$ a $y = \mathtt{KódInštrukcie}(J)$, $x \neq y$,
$\mathtt{StarýStavInštrukcie}(x) = \mathtt{StarýStavInštrukcie}(y)$
a $\mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(x) = \mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(y)$
(podľa viet **4** a opäť **4**),

akk existujú inštrukcie I a J, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódInštrukcie}(J)$ a $I \neq J$,
a $\mathtt{StarýStavInštrukcie}(x) = \mathtt{StarýStavInštrukcie}(y)$
a $\mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(x) = \mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(y)$
(podľa vety **1**),

akk existujú inštrukcie I a J, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódInštrukcie}(J)$,
$I \neq J$, $\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{StarýStav}(J)$ a $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = \mathtt{StaréPísmeno}(J)$
(podľa viet **2** a opäť **2**),

akk existujú inštrukcie I a J v konflikte, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$ a $y = \mathtt{KódInštrukcie}(J)$
(podľa definície konfliktu inštrukcií).

V $\boxed{7}$

Nech I a J sú inštrukcie. Potom $\mathtt{InštrukcieSúVKonflikte}(\mathtt{KódInštrukcie}(I), \mathtt{KódInštrukcie}(J))$ platí práve vtedy, keď I a J sú v konflikte.

→ Podľa vety **6** existujú inštrukcie G a H, ktoré sú v konflikte a platí $\mathtt{KódInštrukcie}(I) = \mathtt{KódInštrukcie}(G)$ a $\mathtt{KódInštrukcie}(J) = \mathtt{KódInštrukcie}(H)$. Podľa vety **1** potom $I = G$ a $J = H$, a teda inštrukcie I a J sú v konflikte.

← Vyplýva priamo z vety **6**.

V $\boxed{8}$

$\mathtt{InštrukcieSúVKonflikte} \in \mathrm{PRR}$.

Nech φ je formula na pravej strane ekvivalencie v definícii InštrukcieSúVKonflikte, potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x, y\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine $\mathtt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{StarýStavInštrukcie}, \mathtt{StaréPísmenoInštrukcie} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **3**.
- Skontrolujme všetky relácie so symbolmi v množine $\mathtt{RelációvéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{JeInštrukcia} \in \mathrm{PRR}$ podľa vety **5**.
  - $\neq, = \in \mathrm{PRR}$ podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.4** o ohraničenej formule znamená, že $\mathtt{InštrukcieSúVKonflikte} \in \mathrm{PRR}$.

Teraz budeme aritmetizovať Turingov stroj. Vieme, že je to istá množina inštrukcií, pri kódovaní však budeme musieť zvoliť nejaké ich poradie. Musíme však dávať pozor, aby sa nestalo, že napríklad pri stroji s dvoma inštrukciami I a J raz zvolíme poradie $\langle I, J\rangle$ a inokedy $\langle J, I\rangle$. To by totiž znamenalo, že tento stroj by získal dva rôzne kódy, a takto vzniknutá relácia by tak nebola funkcia. Inštrukcie preto treba usporiadať nejakým dopredu daným spôsobom.

D Definujme $<$ reláciu na množine $\mathtt{Inštrukcie}$ takto: Ak I a J sú inštrukcie, tak $I < J$, práve keď nastáva jeden z prípadov:

- $\texttt{StarýStav}(I) < \texttt{StarýStav}$,
- $\texttt{StarýStav}(I) = \texttt{StarýStav}$ a $\texttt{StaréPísmeno}(I) < \texttt{StaréPísmeno}(J)$.

P Ide teda o ostré lexikografické usporiadanie prvých dvojíc znakov inštrukcií. Keďže podľa vety **1.2.3** sú inštrukcie z toho istého stroja navzájom nekonfliktné, príslušné zúženie relácie $\lessdot$ je ich ostrým usporiadaním.

D Definujme reláciu $\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}$ na množine $\mathbb{N}$ vzťahom

$$\begin{aligned}\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(x,y) \leftrightarrow (&\texttt{JeInštrukcia}(x) \wedge \texttt{JeInštrukcia}(y) \wedge \\ &\wedge ((\texttt{StarýStavInštrukcie}(x) < \texttt{StarýStavInštrukcie}(y)) \vee \\ &\vee (\texttt{StarýStavInštrukcie}(x) = \texttt{StarýStavInštrukcie}(y) \wedge \\ &\wedge \texttt{StaréPísmenoInštrukcie}(x) < \texttt{StaréPísmenoInštrukcie}(y)))).\end{aligned}$$

V $\boxed{\textbf{9}}$

Nech I a J sú inštrukcie. Potom $\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(\texttt{KódInštrukcie}(I), \texttt{KódInštrukcie}(J))$ práve vtedy, keď $I \lessdot J$.

$\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(\texttt{KódInštrukcie}(I), \texttt{KódInštrukcie}(J))$,

akk $\texttt{JeInštrukcia}(\texttt{KódInštrukcie}(I))$, $\texttt{JeInštrukcia}(\texttt{KódInštrukcie}(J))$
a platí $\texttt{StarýStavInštrukcie}(\texttt{KódInštrukcie}(I)) < \texttt{StarýStavInštrukcie}(\texttt{KódInštrukcie}(J))$
alebo $\texttt{StarýStavInštrukcie}(\texttt{KódInštrukcie}(I)) = \texttt{StarýStavInštrukcie}(\texttt{KódInštrukcie}(J))$
a $\texttt{StaréPísmenoInštrukcie}(\texttt{KódInštrukcie}(I)) < \texttt{StaréPísmenoInštrukcie}(\texttt{KódInštrukcie}(J))$
(podľa definície $\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}$),

akk $\texttt{StarýStavInštrukcie}(\texttt{KódInštrukcie}(I)) < \texttt{StarýStavInštrukcie}(\texttt{KódInštrukcie}(J))$
alebo $\texttt{StarýStavInštrukcie}(\texttt{KódInštrukcie}(I)) = \texttt{StarýStavInštrukcie}(\texttt{KódInštrukcie}(J))$
a $\texttt{StaréPísmenoInštrukcie}(\texttt{KódInštrukcie}(I)) < \texttt{StaréPísmenoInštrukcie}(\texttt{KódInštrukcie}(J))$
(vynechané tvrdenia platia podľa viet **4** a opäť **4**),

akk $\texttt{StarýStav}(I) < \texttt{StarýStav}(J)$
alebo $\texttt{StarýStav}(I) = \texttt{StarýStav}(J)$ a $\texttt{StaréPísmeno}(I) < \texttt{StaréPísmeno}(J)$
(podľa viet **2** a opäť **2**),

akk $I \lessdot J$
(podľa definície $\lessdot$).

V $\boxed{\textbf{10}}$

$\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou} \in \texttt{PRR}$.

Nech φ je formula na pravej strane ekvivalencie v definícii $\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}$, potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x, y\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine $\texttt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\texttt{StarýStavInštrukcie}, \texttt{StaréPísmenoInštrukcie} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **3**.
- Skontrolujme všetky relácie so symbolmi v množine $\texttt{ReláciovéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\texttt{JeInštrukcia} \in \texttt{PRR}$ podľa vety **5**.
  - $<, = \in \texttt{PRR}$ podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.4** o ohraničenej formule znamená, že $\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou} \in \texttt{PRR}$.

D Definujme funkciu $\mathtt{KódStroja}$ z množiny $\mathtt{TuringoveStroje}$ do množiny $\mathbb{N}$ takto:
Ak T je stroj taký, že $T = \{I_1, \dots, I_n\}$ a $I_1 < \dots < I_n$, tak

$$\mathtt{KódStroja}(T) = \mathtt{KódTice}^n(\mathtt{KódInštrukcie}(I_1), \dots, \mathtt{KódInštrukcie}(I_n)).$$

I Nech $T = \{\mathtt{s_0 11Rs_2}, \mathtt{s_1 00Ls_3}, \mathtt{s_0 01Ns_4}, \mathtt{s_2 10Ls_3}\}$. Keďže $\mathtt{s_0 01Ns_4} < \mathtt{s_0 11Rs_2} < \mathtt{s_1 00Ls_3} < \mathtt{s_2 10Ls_3}$, platí:
$\mathtt{KódStroja}(T)$
$= \mathtt{KódTice}^4(\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_0 01Ns_4}), \mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_0 11Rs_2}),$
$\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_1 00Ls_3}), \mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_2 10Ls_3})),$
$= 2^4 \cdot 3^{\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_0 01Ns_4})} \cdot 5^{\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_0 11Rs_2})} \cdot 7^{\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_1 00Ls_3})} \cdot 11^{\mathtt{KódInštrukcie}(\mathtt{s_2 10Ls_3})},$
$= 2^4 \cdot 3^{2^2 \cdot 3^{2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0} \cdot 5^{2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^4}} \cdot 5^{2^2 \cdot 3^{2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1} \cdot 5^{2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^2}} \cdot 7^{2^2 \cdot 3^{2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0} \cdot 5^{2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^3}} \cdot 11^{2^2 \cdot 3^{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1} \cdot 5^{2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^3}}.$

V **11**

Funkcia $\mathtt{KódStroja}$ je injektívna.

Nech T^1 a T^2 sú stroje také, že $\mathtt{KódStroja}(T^1) = \mathtt{KódStroja}(T^2)$ a pre obe j z $\{1, 2\}$ platí $T^j = \{I_1^j, \dots, I_{n^j}^j\}$, kde $I_1^j < \dots < I_{n^j}^j$. Potom platí:
$\mathtt{KódStroja}(T^1) = \mathtt{KódStroja}(T^2)$
(predpoklad s cieľom $T^1 = T^2$),
$\mathtt{KódTice}^{n^1}(\mathtt{KódInštrukcie}(I_1^1), \dots, \mathtt{KódInštrukcie}(I_{n^1}^1)) =$
$= \mathtt{KódTice}^{n^2}(\mathtt{KódInštrukcie}(I_1^2), \dots, \mathtt{KódInštrukcie}(I_{n^2}^2))$
(pre obe j z $\{1, 2\}$ podľa definície $\mathtt{KódStroja}$),
$n^1 = n^2$ a pre každé i z $\{1, \dots, n^1\}$ platí $\mathtt{KódInštrukcie}(I_i^1) = \mathtt{KódInštrukcie}(I_i^2)$
(podľa vety **4.1**),
$n^1 = n^2$ a pre každé i z $\{1, \dots, n^1\}$ platí $I_i^1 = I_i^2$
(podľa vety **1**),
$\{I_1^1, \dots, I_{n^1}^1\} = \{I_1^2, \dots, I_{n^2}^2\}$,
$T^1 = T^2$.

D Definujme funkciu $\mathtt{PočetInštrukciíStroja}$ z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ vzťahom

$$\mathtt{PočetInštrukciíStroja} = \mathtt{PočetZložiek}.$$

D Definujme funkciu $\mathtt{InštrukciaStroja}$ z $\mathbb{N}^2$ do $\mathbb{N}$ vzťahom

$$\mathtt{InštrukciaStroja} = \mathtt{Zložka}.$$

P Obe tieto alternatívne pomenovania budeme používať iba v súvislosti so strojmi a ich inštrukciami.

V **12**

Nech T je stroj $\{I_1, \dots, I_n\}$, kde $I_1 < \dots < I_n$. Potom platí:
- $\mathtt{PočetInštrukciíStroja}(\mathtt{KódStroja}(T)) = n$.
- Pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ platí $\mathtt{InštrukciaStroja}(\mathtt{KódStroja}(T), i) = \mathtt{KódInštrukcie}(I_i)$.

- $\mathtt{PočetInštrukciíStroja}(\mathtt{KódStroja}(T))$
  $= \mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{KódStroja}(T))$
  (podľa definície $\mathtt{PočetInštrukciíStroja}$),
  $= \mathtt{PočetZložiek}(\mathtt{KódTice}^n(\mathtt{KódInštrukcie}(I_1), \dots, \mathtt{KódInštrukcie}(I_n)))$
  (podľa definície $\mathtt{KódStroja}$),
  $= n$
  (podľa vety **4.5**).

- $\texttt{InštrukciaStroja}(\texttt{KódStroja}(T), i)$
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{KódStroja}(T), i)$
  (podľa definície InštrukciaStroja),
  $= \texttt{Zložka}(\texttt{KódTice}^n(\texttt{KódInštrukcie}(I_1), \dots, \texttt{KódInštrukcie}(I_n)), i)$
  (podľa definície KódStroja),
  $= \texttt{KódInštrukcie}(I_i)$
  (podľa vety **4.5**).

V $\boxed{\mathbf{13}}$

$\texttt{PočetInštrukciíStroja} \in \mathsf{PRF}$.

Podľa definície PočetInštrukciíStroja a vety **4.6**.

V $\boxed{\mathbf{14}}$

$\texttt{InštrukciaStroja} \in \mathsf{PRF}$.

Podľa definície InštrukciaStroja a vety **4.7**.

D Definujme reláciu JeStroj na množine $\mathbb{N}$ vzťahom

$$
\begin{gathered}
\texttt{JeStroj}(x) \leftrightarrow (\texttt{JeTica}(x) \wedge \\
\wedge (\forall i \leq \texttt{PočetInštrukciíStroja}(x))(i \geq 1 \to \texttt{JeInštrukcia}(\texttt{InštrukciaStroja}(x, i))) \wedge \\
\wedge (\forall i \leq \texttt{PočetInštrukciíStroja}(x))(\forall j \leq \texttt{PočetInštrukciíStroja}(x))((i \geq 1 \wedge j \geq 1) \to \\
\to \neg\texttt{InštrukcieSúVKonflikte}(\texttt{InštrukciaStroja}(x, i), \texttt{InštrukciaStroja}(x, j))) \wedge \\
\wedge (\forall i \leq \texttt{PočetInštrukciíStroja}(x))((i \geq 1 \wedge i < \texttt{PočetInštrukciíStroja}(x)) \to \\
\to \texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(\texttt{InštrukciaStroja}(x, i), \texttt{InštrukciaStroja}(x, i + 1)))).
\end{gathered}
$$

V $\boxed{\mathbf{15}}$

$\texttt{JeStroj}(x)$ platí práve vtedy, keď existuje stroj T taký, že $x = \texttt{KódStroja}(T)$.

$\texttt{JeStroj}(x)$,
akk $\texttt{JeTica}(x)$,
pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(x)\}$ platí $\texttt{JeInštrukcia}(\texttt{InštrukciaStroja}(x, i))$,
pre žiadne i a j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(x)\}$ neplatí
$\texttt{InštrukcieSúVKonflikte}(\texttt{InštrukciaStroja}(x, i), \texttt{InštrukciaStroja}(x, j))$
a pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(x) - 1\}$ platí
$\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(\texttt{InštrukciaStroja}(x, i), \texttt{InštrukciaStroja}(x, i + 1))$
(podľa definície JeStroj),
akk $\texttt{JeTica}(x)$,
pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetZložiek}(x)\}$ platí $\texttt{JeInštrukcia}(\texttt{Zložka}(x, i))$,
pre žiadne i a j z $\{1, \dots, \texttt{PočetZložiek}(x)\}$ neplatí
$\texttt{InštrukcieSúVKonflikte}(\texttt{Zložka}(x, i), \texttt{Zložka}(x, j))$
a pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetZložiek}(x) - 1\}$ platí
$\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(\texttt{Zložka}(x, i), \texttt{Zložka}(x, i + 1))$
(podľa definícií PočetInštrukciíStroja a InštrukciaStroja),
akk existujú n a $y_1, \dots, y_n$ z $\mathbb{N}$, že $x = \texttt{KódTice}^n(y_1, \dots, y_n)$,
pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetZložiek}(x)\}$ platí $\texttt{JeInštrukcia}(\texttt{Zložka}(x, i))$,
pre žiadne i a j z $\{1, \dots, \texttt{PočetZložiek}(x)\}$ neplatí
$\texttt{InštrukcieSúVKonflikte}(\texttt{Zložka}(x, i), \texttt{Zložka}(x, j))$
a pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetZložiek}(x) - 1\}$ platí
$\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(\texttt{Zložka}(x, i), \texttt{Zložka}(x, i + 1))$
(podľa vety **4.3**),

akk existujú n a y_1, ..., y_n z $\mathbb{N}$, že $x = \texttt{KódTice}^n(y_1, \dots, y_n)$,
pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ platí $\texttt{JeInštrukcia}(y_i)$,
pre žiadne i a j z $\{1, \dots, n\}$ neplatí $\texttt{InštrukcieSúVKonflikte}(y_i, y_j)$
a pre každé i z $\{1, \dots, n-1\}$ platí $\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(y_i, y_{i+1})$
(podľa viet **4.5**, **4.5** a opäť **4.5**),

akk existujú n a y_1, ..., y_n z $\mathbb{N}$, že $x = \texttt{KódTice}^n(y_1, \dots, y_n)$,
pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ existuje inštrukcia I_i, že $y_i = \texttt{KódInštrukcie}(I_i)$,
pre žiadne i a j z $\{1, \dots, n\}$ neplatí $\texttt{InštrukcieSúVKonflikte}(y_i, y_j)$
a pre každé i z $\{1, \dots, n-1\}$ platí $\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(y_i, y_{i+1})$
(pre každé i z $\{1, \dots, n-1\}$ podľa vety **4**),

akk existujú n a y_1, ..., y_n z $\mathbb{N}$ a inštrukcie I_1, ..., I_n, že $x = \texttt{KódTice}^n(y_1, \dots, y_n)$,
pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ platí $y_i = \texttt{KódInštrukcie}(I_i)$,
pre žiadne i a j z $\{1, \dots, n\}$ neplatí $\texttt{InštrukcieSúVKonflikte}(y_i, y_j)$
a pre každé i z $\{1, \dots, n-1\}$ platí $\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(y_i, y_{i+1})$,

akk existujú n a y_1, ..., y_n z $\mathbb{N}$ a inštrukcie I_1, ..., I_n, že
$x = \texttt{KódTice}^n(\texttt{KódInštrukcie}(I_1), \dots, \texttt{KódInštrukcie}(I_n))$,
pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ platí $y_i = \texttt{KódInštrukcie}(I_i)$,
pre žiadne i a j z $\{1, \dots, n\}$ neplatí $\texttt{InštrukcieSúVKonflikte}(\texttt{KódInštrukcie}(I_i), \texttt{KódInštrukcie}(I_j))$
a pre každé i z $\{1, \dots, n-1\}$ platí
$\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(\texttt{KódInštrukcie}(I_i), \texttt{KódInštrukcie}(I_{i+1}))$,

akk existuje n z $\mathbb{N}$ a inštrukcie I_1, ..., I_n, že
$x = \texttt{KódTice}^n(\texttt{KódInštrukcie}(I_1), \dots, \texttt{KódInštrukcie}(I_n))$,
pre žiadne i a j z $\{1, \dots, n\}$ neplatí $\texttt{InštrukcieSúVKonflikte}(\texttt{KódInštrukcie}(I_i), \texttt{KódInštrukcie}(I_j))$
a pre každé i z $\{1, \dots, n-1\}$ platí
$\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(\texttt{KódInštrukcie}(I_i), \texttt{KódInštrukcie}(I_{i+1}))$
(vynechali sme už irelevantné označenie),

akk existuje n z $\mathbb{N}$ a inštrukcie I_1, ..., I_n, že
$x = \texttt{KódTice}^n(\texttt{KódInštrukcie}(I_1), \dots, \texttt{KódInštrukcie}(I_n))$,
pre žiadne i a j z $\{1, \dots, n\}$ neplatí, že I_i a I_j sú v konflikte,
a pre každé i z $\{1, \dots, n-1\}$ platí
$\texttt{InštrukciaJePredInštrukciou}(\texttt{KódInštrukcie}(I_i), \texttt{KódInštrukcie}(I_{i+1}))$
(podľa vety **7**),

akk existuje n z $\mathbb{N}$ a inštrukcie I_1, ..., I_n, že
$x = \texttt{KódTice}^n(\texttt{KódInštrukcie}(I_1), \dots, \texttt{KódInštrukcie}(I_n))$,
pre žiadne i a j z $\{1, \dots, n\}$ neplatí, že I_i a I_j sú v konflikte,
a pre každé i z $\{1, \dots, n-1\}$ platí $I_i < I_{i+1}$
(podľa vety **9**),

akk existuje stroj T, n z $\mathbb{N}$ a inštrukcie I_1, ..., I_n, že
$T = \{I_1, \dots, I_n\}$, $x = \texttt{KódTice}^n(\texttt{KódInštrukcie}(I_1), \dots, \texttt{KódInštrukcie}(I_n))$
a pre každé i z $\{1, \dots, n-1\}$ platí $I_i < I_{i+1}$
(podľa definície stroja),

akk existuje stroj T, n z $\mathbb{N}$ a inštrukcie I_1, ..., I_n, že
$T = \{I_1, \dots, I_n\}$, $x = \texttt{KódStroja}(T)$
a pre každé i z $\{1, \dots, n-1\}$ platí $I_i < I_{i+1}$
(podľa definície $\texttt{KódStroja}$),

akk existuje stroj T, že $x = \texttt{KódStroja}(T)$.

V $\boxed{\textbf{16}}$

$\texttt{JeStroj} \in \texttt{PRR}$.

Označme φ formulu na pravej strane ekvivalencie v definícii $\texttt{JeStroj}$. Potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x\}$.

- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine FunkciovéSymbolyVoFormule(φ):
  - PočetInštrukciíStroja ∈ PRF podľa vety **13**.
  - InštrukciaStroja ∈ PRF podľa vety **14**.
  - Súčet ∈ PRF podľa vety **1.6**.
- Skontrolujme všetky relácie so symbolmi v množine RelácioéSymbolyVoFormule(φ):
  - JeTica ∈ PRR podľa vety **4.4**.
  - JeInštrukcia ∈ PRR podľa vety **5**.
  - InštrukcieSúVKonflikte ∈ PRR podľa vety **8**.
  - InštrukciaJePredInštrukciou ∈ PRR podľa vety **10**.
  - $\leq, \geq, <$ ∈ PRR podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.4** o ohraničenej formule znamená, že JeStroj ∈ PRR.

Pokračujeme páskou. Uvedomme si pritom, že ide o špeciálny prípad takmer nulovej postupnosti:

D Definujme funkciu KódPásky z množiny Pásky do množiny ℕ vzťahom

$$\mathtt{KódPásky}(p) = \mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(p).$$

V **17**

Funkcia KódPásky je injektívna.

Keďže funkcia KódPásky je podľa svojej definície zúžením funkcie KódTakmerNulovejPostupnosti, ktorá je podľa vety **4.14** injektívna, aj ona je injektívna.

D Definujme funkciu PísmenoPásky vzťahom

$$\mathtt{PísmenoPásky} = \mathtt{Člen}.$$

D Definujme funkciu PredChvostom vzťahom

$$\mathtt{PredChvostom} = \mathtt{IndexNajväčšiehoPrvočiniteľa}.$$

P Tieto ďalšie alternatívne pomenovania budeme používať výhradne v súvislosti s páskami.

V **18**

- Ak $y >$ PredChvostom(x), tak PísmenoPásky(x, y) $= 0$.
- Ak $x > 1$, tak PísmenoPásky(x, PredChvostom(x)) > 0.

Podľa definícií PredChvostom, PísmenoPásky a Člen a vety **3.12**.

V **19**

PísmenoPásky ∈ PRF.

Podľa definície PísmenoPásky a vety **4.17**.

V **20**

PredChvostom ∈ PRF.

Podľa definície PredChvostom a vety **3.14**.

D Definujme reláciu $\mathtt{JePáska}$ na množine $\mathbb{N}$ vzťahom

$$\mathtt{JePáska}(x) \leftrightarrow (\mathtt{JeTakmerNulováPostupnosť}(x) \wedge \forall i(\mathtt{PísmenoPásky}(x,i) \leq 1)).$$

V $\boxed{\mathbf{21}}$

$\mathtt{JePáska}(x)$ platí práve vtedy, keď existuje páska p taká, že $\mathtt{KódPásky}(p) = x$. Vtedy je takáto páska jediná a $p = (\mathtt{PísmenoPásky}(x,i) : i \in \mathbb{N})$.

→ Podľa definície JePáska platí $\mathtt{JeTakmerNulováPostupnosť}(x)$, takže podľa vety **4.15** existuje takmer nulová postupnosť p taká, že $\mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(p) = x$ a navyše $p = (\mathtt{Člen}(x,i) : i \in \mathbb{N})$. Podľa definície PísmenoPásky teda platí $p = (\mathtt{PísmenoPásky}(x,i) : i \in \mathbb{N})$.

Podľa definície JePáska pre každé i z $\mathbb{N}$ platí $p(i) = \mathtt{PísmenoPásky}(x,i) \leq 1$. Podľa definície relácie JeTakmerNulováPostupnosť platí $x > 0$. Ak $i > \mathtt{PredChvostom}(x)$, tak podľa vety **18** dostávame $0 = \mathtt{PísmenoPásky}(x,i) = p(i)$. Postupnosť p má teda len konečne veľa nenulových členov, a tie sú 1 čiže 1, podľa definície pásky je teda p páska.

Jedinosť p vyplýva z vety **17**.

← Dokážeme obe časti z pravej strany definície JePáska:

- Keďže p je páska, podľa definícií pásky a takmer nulovej postupnosti je p takmer nulová postupnosť. Podľa definície KódPásky platí $x = \mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(p)$. Podľa vety **4.15** potom platí $\mathtt{JeTakmerNulováPostupnosť}(x)$.
- Keďže p je páska, podľa definície pásky pre každé i z $\mathbb{N}$ platí $p(i) \leq 1$, a teda $\mathtt{PísmenoPásky}(x,i) \leq 1$.

V $\boxed{\mathbf{22}}$

$\mathtt{JePáska} \in \mathrm{PRR}$.

Najprv sublema:

1
$$\mathtt{JePáska}(x) \leftrightarrow (\mathtt{JeTakmerNulováPostupnosť}(x) \wedge$$
$$\wedge (\forall i \leq \mathtt{PredChvostom}(x))\mathtt{PísmenoPásky}(x,i) \leq 1).$$

$\mathtt{JePáska}(x)$,
akk $\mathtt{JeTakmerNulováPostupnosť}(x)$ a pre každé i z $\mathbb{N}$ platí $\mathtt{PísmenoPásky}(x,i) \leq 1$
(podľa definície JePáska),
akk $\mathtt{JeTakmerNulováPostupnosť}(x)$,
ak $i \leq \mathtt{PredChvostom}(x)$, tak $\mathtt{PísmenoPásky}(x,i) \leq 1$,
a ak $i > \mathtt{PredChvostom}(x)$, tak $\mathtt{PísmenoPásky}(x,i) \leq 1$,
akk $\mathtt{JeTakmerNulováPostupnosť}(x)$,
a ak $i \leq \mathtt{PredChvostom}(x)$, tak $\mathtt{PísmenoPásky}(x,i) \leq 1$
(vynechané tvrdenie je pravdivé podľa vety **18**).

Nech φ je formula na pravej strane ekvivalencie v subleme **1**. Potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine $\mathtt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{PredChvostom} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **20**.
  - $\mathtt{PísmenoPásky} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **19**.
- Skontrolujme všetky relácie so symbolmi v množine $\mathtt{RelációvéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{JeTakmerNulováPostupnosť} \in \mathrm{PRR}$ podľa vety **4.16**.
  - $\leq\ \in \mathrm{PRR}$ podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.4** o ohraničenej formule znamená, že $\mathtt{JePáska} \in \mathrm{PRR}$.

D Definujme funkciu $\texttt{PočetJednotiekNaPáske}$ vzťahom

$$\texttt{PočetJednotiekNaPáske}(x) = \sum_i \texttt{PísmenoPásky}(x, i).$$

V $\boxed{\textbf{23}}$

Nech p je páska. Potom $\texttt{PočetJednotiekNaPáske}(\texttt{KódPásky}(p)) = \texttt{PočetJednotiek}(p)$.

Nech $x = \texttt{KódPásky}(p)$. Potom platí:

$\texttt{PočetJednotiekNaPáske}(\texttt{KódPásky}(p))$,

$= \texttt{PočetJednotiekNaPáske}(x)$,

$= \sum_i \texttt{PísmenoPásky}(x, i)$
(podľa definície $\texttt{PočetJednotiekNaPáske}$),

$= \sum_i p(i)$
(podľa vety **21**),

$= |\{i \in \mathbb{N} : p(i) = 1\}|$
(lebo podľa definície pásky p obsahuje len nuly a jednotky, pričom nuly do súčtu neprispievajú a súčet jednotiek je rovný ich počtu),

$= |\{i \in \mathbb{N} : p(i) = 1\}|$,

$= \texttt{PočetJednotiek}(p)$
(podľa definície $\texttt{PočetJednotiek}$).

V $\boxed{\textbf{24}}$

$\texttt{PočetJednotiekNaPáske} \in \texttt{PRF}$.

Najprv sublema:

1 $\texttt{PočetJednotiekNaPáske}(x) = \sum_{i=0}^{\texttt{PredChvostom}(x)} \texttt{PísmenoPásky}(x, i)$.

$\texttt{PočetJednotiekNaPáske}(x)$,

$= \sum_i \texttt{PísmenoPásky}(x, i)$
(podľa definície $\texttt{PočetJednotiekNaPáske}$),

$= \sum_{i=0}^{\infty} \texttt{PísmenoPásky}(x, i)$,

$= \sum_{i=0}^{\texttt{PredChvostom}(x)} \texttt{PísmenoPásky}(x, i)$
(pretože ak platí $i > \texttt{PredChvostom}(x)$, tak podľa vety **18** platí $\texttt{PísmenoPásky}(x, i) = 0$).

Definujme funkciu f vzťahom $f = \texttt{Iterovanie}^1_{\texttt{Súčet}}(\texttt{PísmenoPásky})$. Podľa viet **1.15** a **19** potom platí $f \in \texttt{PRF}$ a podľa sublemy **1** a vety **1.13**

$$\texttt{PočetJednotiekNaPáske}(x) = f(x, \texttt{PredChvostom}(x)).$$

Nech α je term z pravej strany tohto vzťahu. Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{f, \texttt{PredChvostom}\}$, pričom platí:
  - $f \in \texttt{PRF}$.
  - $\texttt{PredChvostom} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **20**.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že platí $\texttt{PočetJednotiekNaPáske} \in \texttt{PRF}$.

Nasleduje konfigurácia:

D Definujme funkciu KódKonfigurácie z množiny Konfigurácie do množiny ℕ takto:
Ak K je konfigurácia, tak

$$\mathtt{KódKonfigurácie}(K) = \mathtt{KódTice}^3(\mathtt{Stav}(K), \mathtt{Hlava}(K), \mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(K))).$$

I Ak K je konfigurácia

s_3	0	1	1	1	$\boxed{0}$	1	1	0	0	⋯

tak $\mathtt{Stav}(K) = 3, \mathtt{Hlava}(K) = 4$ a $\mathtt{Páska}(K)$ je

0	1	1	1	0	1	1	0	0	⋯

a teda
$\mathtt{KódKonfigurácie}(K)$
$= \mathtt{KódTice}^3(3, 4, \mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(K))),$
$= \mathtt{KódTice}^3(3, 4, 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^1 \cdot 17^1),$
$= 2^3 \cdot (3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^{2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^1 \cdot 17^1}).$

V **25**

Funkcia KódKonfigurácie je injektívna.

Nech K^1 a K^2 sú konfigurácie. Potom platí:
$\mathtt{KódKonfigurácie}(K^1) = \mathtt{KódKonfigurácie}(K^2)$
(predpoklad s cieľom $K^1 = K^2$),
$\mathtt{KódTice}^3(\mathtt{Stav}(K^1), \mathtt{Hlava}(K^1), \mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(K^1))) =$
$= \mathtt{KódTice}^3(\mathtt{Stav}(K^2), \mathtt{Hlava}(K^2), \mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(K^2)))$
(pre obe j z $\{1, 2\}$ podľa definície KódKonfigurácie),
$\mathtt{Stav}(K^1) = \mathtt{Stav}(K^2), \mathtt{Hlava}(K^1) = \mathtt{Hlava}(K^2)$ a $\mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(K^1)) = \mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(K^2))$
(podľa vety **4.1**),
$\mathtt{Stav}(K^1) = \mathtt{Stav}(K^2), \mathtt{Hlava}(K^1) = \mathtt{Hlava}(K^2)$ a $\mathtt{Páska}(K^1) = \mathtt{Páska}(K^2)$
(podľa vety **17**),
$\langle \mathtt{Stav}(K^1), \mathtt{Hlava}(K^1), \mathtt{Páska}(K^1)\rangle = \langle \mathtt{Stav}(K^2), \mathtt{Hlava}(K^2), \mathtt{Páska}(K^2)\rangle,$
$K^1 = K^2$
(pre obe j z $\{1, 2\}$ podľa vety **1.2.11**).

D Definujme funkcie StavKonfigurácie, HlavaKonfigurácie a PáskaKonfigurácie z ℕ do ℕ vzťahmi:

- $\mathtt{StavKonfigurácie}(x) = \mathtt{Zložka}(x, 1).$
- $\mathtt{HlavaKonfigurácie}(x) = \mathtt{Zložka}(x, 2).$
- $\mathtt{PáskaKonfigurácie}(x) = \mathtt{Zložka}(x, 3).$

V **26**

Nech K je konfigurácia a $x = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$. Potom platí:
- $\mathtt{Zložka}(x, 1) = \mathtt{StavKonfigurácie}(x) = \mathtt{Stav}(K).$
- $\mathtt{Zložka}(x, 2) = \mathtt{HlavaKonfigurácie}(x) = \mathtt{Hlava}(K).$
- $\mathtt{Zložka}(x, 3) = \mathtt{PáskaKonfigurácie}(x) = \mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(K)).$

Podľa definícií KódKonfigurácie a zložiek kódu konfigurácie a vety **4.5** dostávame:

- $\mathtt{Stav}(K) = \mathtt{Zložka}(x, 1) = \mathtt{StavKonfigurácie}(x).$

- $\mathtt{Hlava}(K) = \mathtt{Zložka}(x, 2) = \mathtt{HlavaKonfigurácie}(x)$.
- $\mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(K)) = \mathtt{Zložka}(x, 3) = \mathtt{PáskaKonfigurácie}(x)$.

V $\boxed{27}$

- $\mathtt{StavKonfigurácie} \in \mathtt{PRF}$.
- $\mathtt{HlavaKonfigurácie} \in \mathtt{PRF}$.
- $\mathtt{PáskaKonfigurácie} \in \mathtt{PRF}$.

Nech nastáva jedna z možností:

- $f = \mathtt{StavKonfigurácie}$, $k = 1$.
- $f = \mathtt{HlavaKonfigurácie}$, $k = 2$.
- $f = \mathtt{PáskaKonfigurácie}$, $k = 3$.

Podľa príslušnej definície f potom $f(x) = \mathtt{Zložka}(x, k)$.

Nech α je term $\mathtt{Zložka}(x, k)$. Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\mathtt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x\}$.
- $\mathtt{FunkcioveSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\mathtt{Zložka}\}$, pričom $\mathtt{Zložka} \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **4.7**.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že $f \in \mathtt{PRF}$.

D Definujme reláciu $\mathtt{JeKonfigurácia}$ vzťahom

$$\mathtt{JeKonfigurácia}(x) \leftrightarrow (\mathtt{JeTica}(x) \land \mathtt{PočetZložiek}(x) = 3 \land \mathtt{JePáska}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(x))).$$

V $\boxed{28}$

$\mathtt{JeKonfigurácia}(x)$ platí práve vtedy, keď existuje konfigurácia K taká, že $x = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$.

$\mathtt{JeKonfigurácia}(x)$,

akk $\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 3$ a $\mathtt{JePáska}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(x))$
(podľa definície $\mathtt{JeKonfigurácia}$),

akk $\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 3$ a $\mathtt{JePáska}(\mathtt{Zložka}(x, 3))$
(podľa definície $\mathtt{PáskaKonfigurácie}$),

akk $\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 3$
a existuje páska p taká, že $\mathtt{Zložka}(x, 3) = \mathtt{KódPásky}(p)$
(podľa vety **21**),

akk $\mathtt{JeTica}(x)$, $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 3$,
existuje páska p taká, že $\mathtt{Zložka}(x, 3) = \mathtt{KódPásky}(p)$,
a existujú s a h z $\mathbb{N}$, že $\mathtt{Zložka}(x, 1) = s$ a $\mathtt{Zložka}(x, 2) = h$
(len sme označili isté hodnoty),

akk existujú s a h z $\mathbb{N}$ a páska p, že
$\mathtt{Zložka}(x, 1) = s$, $\mathtt{Zložka}(x, 2) = h$, $\mathtt{Zložka}(x, 3) = \mathtt{KódPásky}(p)$,
$\mathtt{JeTica}(x)$ a $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 3$,

akk existuje stav s, h z $\mathbb{N}$ a páska p, že
$\mathtt{Zložka}(x, 1) = s$, $\mathtt{Zložka}(x, 2) = h$, $\mathtt{Zložka}(x, 3) = \mathtt{KódPásky}(p)$,
$\mathtt{JeTica}(x)$ a $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 3$
(podľa definície stavu),

akk existuje konfigurácia K, stav s, h z $\mathbb{N}$ a páska p, že
$K = \langle s, h, p \rangle$, $\mathtt{Zložka}(x, 1) = s$, $\mathtt{Zložka}(x, 2) = h$, $\mathtt{Zložka}(x, 3) = \mathtt{KódPásky}(p)$,
$\mathtt{JeTica}(x)$ a $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 3$
(podľa definície konfigurácie),

akk existuje konfigurácia K, že
$\mathtt{Zložka}(x, 1) = \mathtt{Stav}(K)$, $\mathtt{Zložka}(x, 2) = \mathtt{Hlava}(K)$ a $\mathtt{Zložka}(x, 3) = \mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(K))$,

$\mathtt{JeTica}(x)$ a $\mathtt{PočetZložiek}(x) = 3$
(podľa definícií Stav, Hlava a Páska),

akk existuje konfigurácia K, že $x = \mathtt{KódTice}^3(\mathtt{Stav}(K), \mathtt{Hlava}(K), \mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(K)))$
(podľa vety **4.5**),

akk existuje konfigurácia K, že $x = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$
(podľa definície KódKonfigurácie).

V **29**

$\mathtt{JeKonfigurácia} \in \mathsf{PRR}$.

Nech φ je formula na pravej strane ekvivalencie v definícii JeKonfigurácia. Potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine $\mathtt{FunkcioveSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{PočetZložiek} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **4.6**.
  - $\mathtt{PáskaKonfigurácie} \in \mathsf{PRF}$ z vety **27**.
- Skontrolujme všetky relácie so symbolmi v množine $\mathtt{RelačnéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{JeTica} \in \mathsf{PRR}$ podľa vety **4.4**.
  - $\mathtt{JePáska} \in \mathsf{PRR}$ podľa vety **22**.
  - $= \in \mathsf{PRR}$ podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.4** o ohraničenej formule znamená, že $\mathtt{JeKonfigurácia} \in \mathsf{PRR}$.

Teraz už môžeme prejsť na vzťah inštrukcií a konfigurácií:

D Definujme reláciu InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou takto:

$$\mathtt{InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou}(x, y) \leftrightarrow (\mathtt{JeInštrukcia}(x) \wedge \mathtt{JeKonfigurácia}(y) \wedge$$
$$\wedge\, \mathtt{StarýStavInštrukcie}(x) = \mathtt{StavKonfigurácie}(y) \wedge$$
$$\wedge\, \mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(x) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y))).$$

V **30**

$\mathtt{InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou}(x, y)$ platí práve vtedy, keď existujú inštrukcia I a konfigurácia K také, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$ a I korešponduje s K.

$\mathtt{InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou}(x, y)$,

akk $\mathtt{JeInštrukcia}(x)$, $\mathtt{JeKonfigurácia}(y)$,
$\mathtt{StarýStavInštrukcie}(x) = \mathtt{StavKonfigurácie}(y)$ a $\mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(x) =$
$= \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y))$
(podľa definície InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácia K, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$,
$\mathtt{StarýStavInštrukcie}(x) = \mathtt{StavKonfigurácie}(y)$ a $\mathtt{StaréPísmenoInštrukcie}(x) =$
$= \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y))$
(podľa viet **4** a **28**),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácia K, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$,
$\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{Stav}(K)$ a $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(K)), \mathtt{Hlava}(K))$
(podľa viet **2** a **26**),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácia K, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$, $\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{Stav}(K)$ a $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = (\mathtt{Páska}(K))(\mathtt{Hlava}(K))$ (podľa vety **21**),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácia K, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$, $\mathtt{StarýStav}(I) = \mathtt{Stav}(K)$ a $\mathtt{StaréPísmeno}(I) = \mathtt{ČítanéPísmeno}(K)$ (podľa definície ČítanéPísmeno),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácia K, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$ a I korešponduje s K (podľa definície korešpondencie).

V 31

Ak I je inštrukcia a K konfigurácia, tak $\mathtt{InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou}(\mathtt{KódInštrukcie}(I), \mathtt{KódKonfigurácie}(K))$ platí práve vtedy, keď I korešponduje s K.

→ Podľa vety **30** existujú inštrukcia J a konfigurácia L také, že $\mathtt{KódInštrukcie}(I) = \mathtt{KódInštrukcie}(J)$, $\mathtt{KódKonfigurácie}(K) = \mathtt{KódKonfigurácie}(L)$ a J korešponduje s L. Podľa vety **1** potom platí $J = I$ a podľa vety **25** platí $L = K$, takže I korešponduje s K.

← Vyplýva priamo z vety **30**.

V 32

$\mathtt{InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou} \in \mathrm{PRR}$.

Nech φ je formula na pravej strane ekvivalencie v definícii InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou. Potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x, y\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine $\mathtt{FunkcioveSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{StavKonfigurácie}, \mathtt{HlavaKonfigurácie}, \mathtt{PáskaKonfigurácie} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **27**.
  - $\mathtt{StarýStavInštrukcie}, \mathtt{StaréPísmenoInštrukcie} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **3**.
  - $\mathtt{PísmenoPásky} \in \mathrm{PRF}$ podľa vety **19**.
- Skontrolujme všetky relácie so symbolmi v množine $\mathtt{RelačnéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{JeInštrukcia} \in \mathrm{PRR}$ podľa vety **5**.
  - $\mathtt{JeKonfigurácia} \in \mathrm{PRR}$ podľa vety **29**.
  - $= \in \mathrm{PRR}$ podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.4** o ohraničenej formule znamená, že $\mathtt{InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou} \in \mathrm{PRR}$.

D Definujme reláciu InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu takto:

$$\mathtt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(x, y) \leftrightarrow (\mathtt{JeInštrukcia}(x) \land \mathtt{JeKonfigurácia}(y) \land$$
$$\land\, \mathtt{InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou}(x, y) \land$$
$$\land\, \neg(\mathtt{PosunInštrukcie}(x) = 0 \land \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y) = 0)).$$

V 33

$\mathtt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(x, y)$ platí práve vtedy, keď existujú inštrukcia I a konfigurácia K také, že $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$ a I je aplikovateľná na K.

$\mathtt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(x, y)$,

akk JeInštrukcia(x), JeKonfigurácia(y), InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou(x, y)
a neplatí zároveň PosunInštrukcie$(x) = 0$ a HlavaKonfigurácie$(y) = 0$
(podľa definície InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácia K, že $x =$ KódInštrukcie(I), $y =$ KódKonfigurácie(K),
InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou(x, y)
a neplatí zároveň PosunInštrukcie$(x) = 0$ a HlavaKonfigurácie$(y) = 0$
(podľa viet **4** a **28**),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácia K, že $x =$ KódInštrukcie(I), $y =$ KódKonfigurácie(K),
InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou(x, y) a neplatí zároveň Posun$(I) = 0$ a Hlava$(K) = 0$
(podľa viet **2** a **26**),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácia K, že $x =$ KódInštrukcie(I), $y =$ KódKonfigurácie(K),
I korešponduje s K a neplatí zároveň Posun$(I) = 0$ a Hlava$(K) = 0$
(podľa vety **31**),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácia K, že $x =$ KódInštrukcie(I), $y =$ KódKonfigurácie(K)
a I je aplikovateľná na K
(podľa definície aplikovateľnosti).

V **34**

Nech I je inštrukcia a nech K je konfigurácia. Potom platí InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu (KódInštrukcie(I), KódKonfigurácie(K)) práve vtedy, keď I je aplikovateľná na K.

→ Podľa vety **33** existujú inštrukcia J a konfigurácia L také, že KódInštrukcie$(I) =$ KódInštrukcie(J), KódKonfigurácie$(K) =$ KódKonfigurácie(L) a J je aplikovateľná na L. Podľa vety **1** potom platí $J = I$ a podľa vety **25** platí $L = K$, takže I je aplikovateľná na K.

← Vyplýva priamo z vety **33**.

V **35**

InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu $\in$ PRR.

Nech φ je formula na pravej strane ekvivalencie v definícii InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu. Potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- VoľnéPremennéVoFormule$(\varphi) = \{x, y\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine FunkcioveSymbolyVoFormule(φ):
  - PosunInštrukcie $\in$ PRF podľa vety **3**.
  - HlavaKonfigurácie $\in$ PRF podľa vety **27**.
- Skontrolujme všetky relácie so symbolmi v množine RelaciovéSymbolyVoFormule(φ):
  - JeInštrukcia $\in$ PRR podľa vety **5**.
  - JeKonfigurácia $\in$ PRR podľa vety **29**.
  - InštrukciaKorešpondujeSKonfiguráciou $\in$ PRR podľa vety **32**.
  - $= \in$ PRR podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.4** o ohraničenej formule znamená, že InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu $\in$ PRR.

D Definujme reláciu InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu takto:

$$\text{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(x, y, z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\text{JeInštrukcia}(x) \wedge \text{JeKonfigurácia}(y) \wedge \text{JeKonfigurácia}(z) \wedge$$
$$\wedge\ \text{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(x, y) \wedge$$

$$\wedge\, \mathtt{StavKonfigurácie}(z) = \mathtt{NovýStavInštrukcie}(x) \wedge$$
$$\wedge\, \mathtt{HlavaKonfigurácie}(z) + 1 = \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y) + \mathtt{PosunInštrukcie}(x) \wedge$$
$$\wedge\, \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y)) = \mathtt{NovéPísmenoInštrukcie}(x) \wedge$$
$$\wedge\, (\forall i)((i \neq \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y)) \rightarrow$$
$$\rightarrow \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), i) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), i))).$$

V $\boxed{\mathbf{36}}$

$\mathtt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(x, y, z)$, práve keď existujú inštrukcia I a konfigurácie K a L také, že platí $x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$, $z = \mathtt{KódKonfigurácie}(L)$ a I mení K na L.

$\mathtt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(x, y, z)$,

akk $\mathtt{JeInštrukcia}(x)$, $\mathtt{JeKonfigurácia}(y)$, $\mathtt{JeKonfigurácia}(z)$,
$\mathtt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(x, y)$,
$\mathtt{StavKonfigurácie}(z) = \mathtt{NovýStavInštrukcie}(x)$,
$\mathtt{HlavaKonfigurácie}(z) + 1 = \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y) + \mathtt{PosunInštrukcie}(x)$,
$\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y)) = \mathtt{NovéPísmenoInštrukcie}(x)$
a pre každé i z $\mathbb{N}$ rôzne od $\mathtt{HlavaKonfigurácie}(y)$ platí
$\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), i) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), i)$
(podľa definície $\mathtt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}$),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácie K a L, že
$x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$, $z = \mathtt{KódKonfigurácie}(L)$,
$\mathtt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(x, y)$,
$\mathtt{StavKonfigurácie}(z) = \mathtt{NovýStavInštrukcie}(x)$,
$\mathtt{HlavaKonfigurácie}(z) + 1 = \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y) + \mathtt{PosunInštrukcie}(x)$,
$\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y)) = \mathtt{NovéPísmenoInštrukcie}(x)$
a pre každé i z $\mathbb{N}$ rôzne od $\mathtt{HlavaKonfigurácie}(y)$ platí
$\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), i) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), i)$
(podľa viet **4**, **28** a opäť **28**),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácie K a L, že
$x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$, $z = \mathtt{KódKonfigurácie}(L)$,
$\mathtt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(x, y)$,
$\mathtt{Stav}(L) = \mathtt{NovýStav}(I)$,
$\mathtt{Hlava}(L) + 1 = \mathtt{Hlava}(K) + \mathtt{Posun}(I)$,
$\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(L)), \mathtt{Hlava}(K)) = \mathtt{NovéPísmeno}(I)$
a pre každé i z $\mathbb{N}$ rôzne od $\mathtt{Hlava}(K)$ platí
$\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(L)), i) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{KódPásky}(\mathtt{Páska}(K)), i)$
(podľa viet **2**, **26** a opäť **26**),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácie K a L, že
$x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$, $z = \mathtt{KódKonfigurácie}(L)$,
$\mathtt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(x, y)$,
$\mathtt{Stav}(L) = \mathtt{NovýStav}(I)$,
$\mathtt{Hlava}(L) + 1 = \mathtt{Hlava}(K) + \mathtt{Posun}(I)$,
$(\mathtt{Páska}(L))(\mathtt{Hlava}(K)) = \mathtt{NovéPísmeno}(I)$
a pre každé i z $\mathbb{N}$ rôzne od $\mathtt{Hlava}(K)$ platí $(\mathtt{Páska}(L))(i) = (\mathtt{Páska}(K))(i)$
(podľa viet **21** a opäť **21**),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácie K a L, že
$x = \mathtt{KódInštrukcie}(I)$, $y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K)$, $z = \mathtt{KódKonfigurácie}(L)$,
I je aplikovateľná na K,
$\mathtt{Stav}(L) = \mathtt{NovýStav}(I)$,
$\mathtt{Hlava}(L) + 1 = \mathtt{Hlava}(K) + \mathtt{Posun}(I)$,
$(\mathtt{Páska}(L))(\mathtt{Hlava}(K)) = \mathtt{NovéPísmeno}(I)$
a pre každé i z $\mathbb{N}$ rôzne od $\mathtt{Hlava}(K)$ platí $(\mathtt{Páska}(L))(i) = (\mathtt{Páska}(K))(i)$
(podľa vety **34**),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácie K a L, že
$x = \mathtt{KódInštrukcie}(I), y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K), z = \mathtt{KódKonfigurácie}(L)$,
I je aplikovateľná na K,
$\mathtt{Stav}(L) = \mathtt{NovýStav}(I)$,
$\mathtt{Hlava}(L) = \mathtt{Hlava}(K) + \mathtt{Posun}(I) - 1$,
$(\mathtt{Páska}(L))(\mathtt{Hlava}(K)) = \mathtt{NovéPísmeno}(I)$
a pre každé i z $\mathbb{N}$ rôzne od $\mathtt{Hlava}(K)$ platí $(\mathtt{Páska}(L))(i) = (\mathtt{Páska}(K))(i)$
(lebo z definície aplikovateľnosti I na K vyplýva, že $\mathtt{Hlava}(K) + \mathtt{Posun}(I) > 0$),

akk existujú inštrukcia I a konfigurácie K a L, že
$x = \mathtt{KódInštrukcie}(I), y = \mathtt{KódKonfigurácie}(K), z = \mathtt{KódKonfigurácie}(L)$
a I mení K na L
(podľa definície menenia).

V **37**

Nech I je inštrukcia a K a L sú konfigurácie. Potom $\mathtt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}$ $(\mathtt{KódInštrukcie}(I), \mathtt{KódKonfigurácie}(K), \mathtt{KódKonfigurácie}(L))$ práve vtedy, keď I mení K na L.

→ Podľa vety **36** existujú inštrukcia J a konfigurácie M a N, že $\mathtt{KódInštrukcie}(I) = \mathtt{KódInštrukcie}(J)$, $\mathtt{KódKonfigurácie}(K) = \mathtt{KódKonfigurácie}(M), \mathtt{KódKonfigurácie}(L) = \mathtt{KódKonfigurácie}(N)$ a J mení M na N. Podľa vety **1** potom $I = J$ a podľa vety **25** platí $K = M$ a $L = N$, takže I mení K na L.

← Vyplýva priamo z vety **36**.

V **38**

$\mathtt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu} \in \mathtt{PRR}$.

Najprv sublema:

1

$$\begin{gathered}
\mathtt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(x, y, z) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\mathtt{JeInštrukcia}(x) \wedge \mathtt{JeKonfigurácia}(y) \wedge \mathtt{JeKonfigurácia}(z) \wedge \\
\wedge \mathtt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(x, y) \wedge \\
\wedge \mathtt{StavKonfigurácie}(z) = \mathtt{NovýStavInštrukcie}(x) \wedge \\
\wedge \mathtt{HlavaKonfigurácie}(z) + 1 = \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y) + \mathtt{PosunInštrukcie}(x) \wedge \\
\wedge \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y)) = \\
= \mathtt{NovéPísmenoInštrukcie}(x) \wedge \\
\wedge (\forall i \leq \mathtt{Maximum}(\mathtt{PredChvostom}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y)), \\
\mathtt{PredChvostom}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z)))) \\
(i \neq \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y) \rightarrow \\
\rightarrow \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), i) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), i))).
\end{gathered}$$

Kvôli prehľadnosti zaveďme nasledujúce označenia:

- ψ bude formula

$$\begin{gathered}
\mathtt{JeInštrukcia}(x) \wedge \mathtt{JeKonfigurácia}(y) \wedge \mathtt{JeKonfigurácia}(z) \wedge \\
\wedge \mathtt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(x, y) \wedge \\
\wedge \mathtt{StavKonfigurácie}(z) = \mathtt{NovýStavInštrukcie}(x) \wedge \\
\wedge \mathtt{HlavaKonfigurácie}(z) + 1 = \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y) + \mathtt{PosunInštrukcie}(x) \wedge \\
\wedge \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y)) =
\end{gathered}$$

$= \mathtt{NovéPísmenoInštrukcie}(x)$.

- ξ bude formula $i \neq \mathtt{HlavaKonfigurácie}(y)$.
- $a = \mathtt{PredChvostom}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z))$.
- $b = \mathtt{PredChvostom}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y))$.
- $m = \mathtt{Maximum}(a, b)$.

Potom platí:

$\mathtt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(x, y, z)$,
akk ψ a pre všetky i z $\mathbb{N}$ z ξ vyplýva
  $\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), i) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), i)$
  (podľa definície $\mathtt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}$ pri zavedených označeniach),
akk ψ,
  ak $i \leq m$, tak z ξ vyplýva
  $\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), i) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), i)$,
  a ak $i > m$, tak z ξ vyplýva
  $\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), i) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), i)$,
akk ψ,
  ak $i \leq m$, tak z ξ vyplýva
  $\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), i) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), i)$,
  a ak $i > a$ a $i > b$, tak z ξ vyplýva
  $\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), i) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), i)$
  (lebo podľa definície $\mathtt{Maximum}$ platí $m \geq a$ a $m \geq b$),
akk ψ,
  ak $i \leq m$, tak z ξ vyplýva
  $\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), i) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), i)$,
  a ak $i > a$ a $i > b$, tak z ξ vyplýva $0 = 0$
  (podľa viet **18** a opäť **18**),
akk ψ, a ak $i \leq m$, tak z ξ vyplýva
  $\mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(z), i) = \mathtt{PísmenoPásky}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(y), i)$
  (vynechaná podmienka je triviálne pravdivá),
čo je prvá strana dokazovanej ekvivalencie.

Nech φ je formula na pravej strane ekvivalencie v subleme **1**. Potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x, y, z\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine $\mathtt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{StavKonfigurácie}, \mathtt{HlavaKonfigurácie}, \mathtt{PáskaKonfigurácie} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **27**.
  - $\mathtt{NovýStavInštrukcie}, \mathtt{PosunInštrukcie}, \mathtt{NovéPísmenoInštrukcie} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **3**.
  - $\mathtt{Súčet} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **1.6**.
  - $\mathtt{PísmenoPásky} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **19**.
  - $\mathtt{Maximum} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **1.12**.
  - $\mathtt{PredChvostom} \in \mathsf{PRF}$ podľa vety **20**.
- Skontrolujme všetky relácie so symbolmi v množine $\mathtt{RelačnéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{JeInštrukcia} \in \mathsf{PRR}$ podľa vety **5**.
  - $\mathtt{JeKonfigurácia} \in \mathsf{PRR}$ podľa vety **29**.
  - $\mathtt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu} \in \mathsf{PRR}$ podľa vety **35**.
  - $=, \leq, \neq \in \mathsf{PRR}$ podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.4** o ohraničenej formule znamená, že $\mathtt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu} \in$

PRR.

A môžeme prejsť ku (konečnému) výpočtu:

D Definujme funkciu KódKonečnéhoVýpočtu takto:
Ak V je konečný výpočet $(K_0, \dots, K_n)$, tak

$$\texttt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V) = \texttt{KódTice}^{n+1}(\texttt{KódKonfigurácie}(K_0), \dots, \texttt{KódKonfigurácie}(K_n)).$$

D Definujme funkciu PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu z ℕ do ℕ vzťahom

$$\texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu} = \texttt{PočetZložiek}.$$

D Definujme funkciu KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu z $\mathbb{N}^2$ do ℕ vzťahom

$$\texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu} = \texttt{Zložka}.$$

P Obe tieto alternatívne pomenovania budeme používať iba v súvislosti s konečnými výpočtami a ich konfiguráciami.

V 39

Nech $(K_0, \dots, K_n)$ je konečný výpočet. Potom platí:
- PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu(KódKonečnéhoVýpočtu($(K_0, \dots, K_n)$)) $= n + 1$.
- Pre i z $\{1, \dots, n+1\}$ platí KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu(KódKonečnéhoVýpočtu($(K_0, \dots, K_n)$), i) $=$ KódKonfigurácie(K_{i-1}).

- PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu(KódKonečnéhoVýpočtu($(K_0, \dots, K_n)$))
  = PočetZložiek(KódKonečnéhoVýpočtu($(K_0, \dots, K_n)$))
  (podľa definície PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu),
  = PočetZložiek(KódTice^{n+1}(KódKonfigurácie(K_0), …, KódKonfigurácie(K_n)))
  (podľa definície KódKonečnéhoVýpočtu),
  $= n + 1$
  (podľa vety **4.5**).
- KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu(KódKonečnéhoVýpočtu($(K_0, \dots, K_n)$), i)
  = Zložka(KódKonečnéhoVýpočtu($(K_0, \dots, K_n)$), i)
  (podľa definície KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu),
  = Zložka(KódTice^{n+1}(KódKonfigurácie(K_0), …, KódKonfigurácie(K_n)), i)
  (podľa definície KódKonečnéhoVýpočtu),
  = KódKonfigurácie(K_{i-1})
  (podľa vety **4.5**).

V 40

PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu ∈ PRF.

Podľa definície PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu a vety **4.6**.

V 41

KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu ∈ PRF.

Podľa definície KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu a vety **4.7**.

D Definujme funkciu PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu z ℕ do ℕ vzťahom

$$\texttt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x) = \texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x, 1).$$

V **42**

Nech je V konečný výpočet z konfigurácie K, pričom platí $\texttt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V) = x$. Potom

$$\texttt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x) = \texttt{KódKonfigurácie}(K).$$

Nech $V = (K_0, \dots, K_n)$, takže $K = K_0$. Potom platí:

$\texttt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x)$
$= \texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x, 1)$
(podľa definície PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu),
$= \texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(\texttt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V), 1)$,
$= \texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(\texttt{KódKonečnéhoVýpočtu}((K_0, \dots, K_n)), 1)$,
$= \texttt{KódKonfigurácie}(K_0)$
(podľa vety **39**),
$= \texttt{KódKonfigurácie}(K)$.

V **43**

$\texttt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu} \in \texttt{PRF}$.

Nech α je term z pravej strany rovnosti z definície PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu. Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x\}$.
- $\texttt{FunkciovéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}\}$, pričom platí:
  - $\texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **41**.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že $\texttt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu} \in \texttt{PRF}$.

D Definujme funkciu PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu vzťahom

$$\texttt{PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x) =$$
$$= \texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x, \texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x)).$$

V **44**

Nech je $(K_0, \dots, K_n)$ konečný výpočet a $\texttt{KódKonečnéhoVýpočtu}((K_0, \dots, K_n)) = x$. Potom

$$\texttt{PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x) = \texttt{KódKonfigurácie}(K_n).$$

$\texttt{PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x)$
$= \texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x, \texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x))$
(podľa definície PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu),
$= \texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(\texttt{KódKonečnéhoVýpočtu}((K_0, \dots, K_n)),$
$\texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(\texttt{KódKonečnéhoVýpočtu}((K_0, \dots, K_n))))$,
$= \texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(\texttt{KódKonečnéhoVýpočtu}((K_0, \dots, K_n)), n + 1)$
(podľa vety **39**),
$= \texttt{KódKonfigurácie}(K_n)$
(podľa vety **39**).

V **45**

$\texttt{PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu} \in \texttt{PRF}$.

Nech α je term z pravej strany rovnosti z definície PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu. Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine $\texttt{FunkcioveSymbolyVTerme}(\alpha)$:
  - $\texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu} \in \texttt{PRR}$ podľa vety **41**.
  - $\texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu} \in \texttt{PRR}$ podľa vety **40**.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že $\texttt{PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu} \in \texttt{PRF}$.

D Definujme reláciu $\texttt{JeKonečnýVýpočetNaStroji}$ vzťahom

$$\begin{gathered}
\texttt{JeKonečnýVýpočetNaStroji}(x,y) \leftrightarrow (\texttt{JeTica}(x) \wedge \texttt{JeStroj}(y) \wedge \\
\wedge ((\texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x) \geq 1) \\
\wedge (\forall i \leq \texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x)) \\
(i \geq 1 \rightarrow \texttt{JeKonfigurácia}(\texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x,i))) \wedge \\
\wedge (\forall i \leq \texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x)) \\
((i \geq 1 \wedge i < \texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x)) \rightarrow \\
\rightarrow (\exists j \leq \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y))(j \geq 1 \wedge \\
\wedge \texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y,j), \\
\texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x,i), \texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x,i+1))) \wedge \\
\wedge \neg(\exists j \leq \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y))(j \geq 1 \wedge \\
\wedge \texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y,j), \\
\texttt{PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x)))))).
\end{gathered}$$

V $\boxed{\textbf{46}}$

> $\texttt{JeKonečnýVýpočetNaStroji}(x,y)$ platí práve vtedy, keď existujú stroj T a konečný výpočet V na T taký, že $x = \texttt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V)$ a $y = \texttt{KódStroja}(T)$.

$\texttt{JeKonečnýVýpočetNaStroji}(x,y)$,

akk $\texttt{JeTica}(x)$, $\texttt{JeStroj}(y)$, $\texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x) \geq 1$,
pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x)\}$ platí
$\texttt{JeKonfigurácia}(\texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x,i))$,
pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x) - 1\}$
existuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y,j)$,
$\texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x,i), \texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x,i+1))$,
a neexistuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y,j)$,
$\texttt{PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x))$
(podľa definície $\texttt{JeKonečnýVýpočetNaStroji}$),

akk $\texttt{JeTica}(x)$, $\texttt{JeStroj}(y)$, $\texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x) \geq 1$,
pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x)\}$ platí
$\texttt{JeKonfigurácia}(\texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x,i))$,
pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x) - 1\}$
existuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y,j)$,
$\texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x,i), \texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x,i+1))$,
a neexistuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y,j)$,
$\texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x, \texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}(x)))$
(podľa definície $\texttt{PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}$),

akk $\texttt{JeTica}(x)$, $\texttt{JeStroj}(y)$, $\texttt{PočetZložiek}(x) \geq 1$,
pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetZložiek}(x)\}$ platí $\texttt{JeKonfigurácia}(\texttt{Zložka}(x, i))$,
pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetZložiek}(x) - 1\}$ existuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j),$
$\texttt{Zložka}(x, i), \texttt{Zložka}(x, i + 1))$,
a neexistuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j),$
$\texttt{Zložka}(x, \texttt{PočetZložiek}(x)))$
(podľa definícií $\texttt{PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu}$ a $\texttt{KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}$),

akk existujú n a $a_0, \dots, a_n$, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$, $\texttt{JeStroj}(y)$, $\texttt{PočetZložiek}(x) \geq 1$,
pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetZložiek}(x)\}$ platí $\texttt{JeKonfigurácia}(\texttt{Zložka}(x, i))$,
pre každé i z $\{1, \dots, \texttt{PočetZložiek}(x) - 1\}$ existuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j),$
$\texttt{Zložka}(x, i), \texttt{Zložka}(x, i + 1))$,
a neexistuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j),$
$\texttt{Zložka}(x, \texttt{PočetZložiek}(x)))$
(podľa vety **4.3**),

akk existujú n a $a_0, \dots, a_n$, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$, $\texttt{JeStroj}(y)$, $n + 1 \geq 1$,
pre každé i z $\{1, \dots, n + 1\}$ platí $\texttt{JeKonfigurácia}(\texttt{Zložka}(x, i))$,
pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ existuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j),$
$\texttt{Zložka}(x, i), \texttt{Zložka}(x, i + 1))$,
a neexistuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j), \texttt{Zložka}(x, n + 1))$
(podľa vety **4.5**),

akk existujú n a $a_0, \dots, a_n$, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$, $\texttt{JeStroj}(y)$,
pre každé i z $\{1, \dots, n + 1\}$ platí $\texttt{JeKonfigurácia}(\texttt{Zložka}(x, i))$,
pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ existuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j),$
$\texttt{Zložka}(x, i), \texttt{Zložka}(x, i + 1))$,
a neexistuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j), \texttt{Zložka}(x, n + 1))$
(vynechaná podmienka platí triviálne),

akk existujú n a $a_0, \dots, a_n$, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$, $\texttt{JeStroj}(y)$,
pre každé i z $\{1, \dots, n + 1\}$ platí $\texttt{JeKonfigurácia}(a_{i-1})$,
pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ existuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j), a_{i-1}, a_i)$,
a neexistuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j), a_n)$
(podľa viet **4.5**, opäť **4.5**, a opäť **4.5**),

akk existujú n a $a_0, \dots, a_n$, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$, $\texttt{JeStroj}(y)$,
pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ platí $\texttt{JeKonfigurácia}(a_i)$,
pre každé i z $\{0, \dots, n - 1\}$ existuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j), a_i, a_{i+1})$,
a neexistuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j), a_n)$
(posun indexov),

akk existujú n a $a_0, \dots, a_n$, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$, $\texttt{JeStroj}(y)$,
pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ existuje konfigurácia K_i, že $a_i = \texttt{KódKonfigurácie}(K_i)$,
pre každé i z $\{0, \dots, n - 1\}$ existuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j), a_i, a_{i+1})$,
a neexistuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j), a_n)$

(podľa vety **28**),

akk existujú n a a_0, ..., a_n, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$,
existuje stroj T, že $y = \texttt{KódStroja}(T)$,
pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ existuje konfigurácia K_i, že $a_i = \texttt{KódKonfigurácie}(K_i)$,
pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ existuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j), a_i, a_{i+1})$,
a neexistuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j), a_n)$
(podľa viet **15** a opäť **15**),

akk existujú n a a_0, ..., a_n, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$,
existuje stroj T, že $y = \texttt{KódStroja}(T)$, a inštrukcie I_1, ..., I_m, že $T = \{I_1, \dots, I_m\}$ a $I_1 < \dots < I_m$,
pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ existuje konfigurácia K_i, že $a_i = \texttt{KódKonfigurácie}(K_i)$,
pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ existuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j), a_i, a_{i+1})$,
a neexistuje j z $\{1, \dots, \texttt{PočetInštrukciíStroja}(y)\}$,
že $\texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{InštrukciaStroja}(y, j), a_n)$
(podľa definície Turingovho stroja, pričom bez ujmy na všeobecnosti sú jeho inštrukcie usporiadané reláciou $<$),

akk existujú n a a_0, ..., a_n, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$,
existuje stroj T, že $y = \texttt{KódStroja}(T)$, a inštrukcie I_1, ..., I_m, že $T = \{I_1, \dots, I_m\}$ a $I_1 < \dots < I_m$,
pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ existuje konfigurácia K_i, že $a_i = \texttt{KódKonfigurácie}(K_i)$,
pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ existuje j z $\{1, \dots, m\}$,
že $\texttt{InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu}(\texttt{KódInštrukcie}(I_j), a_i, a_{i+1})$,
a neexistuje j z $\{1, \dots, m\}$,
že $\texttt{InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu}(\texttt{KódInštrukcie}(I_j), a_n)$
(podľa vety **12**),

akk existujú n a a_0, ..., a_n, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$,
existuje stroj T, že $y = \texttt{KódStroja}(T)$, a inštrukcie I_1, ..., I_m, že $T = \{I_1, \dots, I_m\}$ a $I_1 < \dots < I_m$,
pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ existuje konfigurácia K_i, že $a_i = \texttt{KódKonfigurácie}(K_i)$,
pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ existuje j z $\{1, \dots, m\}$, že I_j mení K_i na K_{i+1},
a neexistuje j z $\{1, \dots, m\}$, že I_j je aplikovateľná na K_n
(podľa viet **37** a **34**),

akk existujú n a a_0, ..., a_n, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$,
existuje stroj T, že $y = \texttt{KódStroja}(T)$, a inštrukcie I_1, ..., I_m, že $T = \{I_1, \dots, I_m\}$ a $I_1 < \dots < I_m$,
pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ existuje konfigurácia K_i, že $a_i = \texttt{KódKonfigurácie}(K_i)$,
pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ platí $\texttt{Krok}(K_i, T) = K_{i+1}$
a $\texttt{Krok}(K_n, T)$ neexistuje
(podľa definícií Krok a opäť Krok),

akk existujú n a a_0, ..., a_n, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$,
existuje stroj T, že $y = \texttt{KódStroja}(T)$, a inštrukcie I_1, ..., I_m, že $T = \{I_1, \dots, I_m\}$ a $I_1 < \dots < I_m$,
pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ existuje konfigurácia K_i, že $a_i = \texttt{KódKonfigurácie}(K_i)$,
a $(K_0, \dots, K_n)$ je konečný výpočet na T (z K_0)
(podľa definície konečného výpočtu),

akk existujú n a a_0, ..., a_n, že $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$,
existuje stroj T, že $y = \texttt{KódStroja}(T)$, a $(K_0, \dots, K_n)$ je konečný výpočet na T
pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ existuje konfigurácia K_i, že $a_i = \texttt{KódKonfigurácie}(K_i)$,
(vynechaná zmienka o podobe stroja T je už irelevantná),

akk existujú n a a_0, ..., a_n, konfigurácie K_0, ..., K_n a stroj T,
že $y = \texttt{KódStroja}(T)$, $(K_0, \dots, K_n)$ je konečný výpočet na T,
pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ platí $a_i = \texttt{KódKonfigurácie}(K_i)$
a $x = \texttt{KódTice}^{n+1}(a_0, \dots, a_n)$,

akk existujú n a a_0, ..., a_n, konfigurácie K_0, ..., K_n a stroj T,
že $y = \texttt{KódStroja}(T)$, $(K_0, \dots, K_n)$ je konečný výpočet na T,

pre každé i z $\{0, \dots, n\}$ platí $a_i = \mathtt{KódKonfigurácie}(K_i)$
a $x = \mathtt{KódTice}^{n+1}(\mathtt{KódKonfigurácie}(K_0), \dots, \mathtt{KódKonfigurácie}(K_n))$,
akk existujú n, konfigurácie K_0, ..., K_n a stroj T,
že $y = \mathtt{KódStroja}(T)$, $(K_0, \dots, K_n)$ je konečný výpočet na T
a $x = \mathtt{KódTice}^{n+1}(\mathtt{KódKonfigurácie}(K_0), \dots, \mathtt{KódKonfigurácie}(K_n))$
(vynechaná zmienka o číslach a_0, ..., a_n je už irelevantná),
akk existujú n, konfigurácie K_0, ..., K_n a stroj T,
že $y = \mathtt{KódStroja}(T)$, $(K_0, \dots, K_n)$ je konečný výpočet na T
a $x = \mathtt{KódKonečnéhoVýpočtu}((K_0, \dots, K_n))$
(podľa definície KódKonečnéhoVýpočtu),
akk existujú stroj T a konečný výpočet V na T taký, že $x = \mathtt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V)$ a $y = \mathtt{KódStroja}(T)$
(len sme označili konečný výpočet $(K_0, \dots, K_n)$).

V **47**

JeKonečnýVýpočetNaStroji ∈ PRR.

Nech φ je formula na pravej strane ekvivalencie v definícii JeKonečnýVýpočetNaStroji. Potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x, y\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine $\mathtt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - PočetKonfiguráciíKonečnéhoVýpočtu ∈ PRF podľa vety **40**.
  - KonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu ∈ PRF podľa vety **41**.
  - PočetInštrukciíStroja ∈ PRF podľa vety **13**.
  - InštrukciaStroja ∈ PRF podľa vety **14**.
  - Súčet ∈ PRF podľa vety **1.6**.
  - PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu ∈ PRF podľa vety **45**.
- Skontrolujme všetky relácie so symbolmi v množine $\mathtt{RelačnéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - JeTica ∈ PRR podľa vety **4.4**.
  - JeKonfigurácia ∈ PRR podľa vety **29**.
  - JeStroj ∈ PRR podľa vety **16**.
  - InštrukciaMeníKonfiguráciuNaKonfiguráciu ∈ PRR podľa vety **38**.
  - InštrukciaJeAplikovateľnáNaKonfiguráciu ∈ PRR podľa vety **35**.
  - $<, \leq, \geq$ ∈ PRR podľa vety **2.3**.

To podľa vety **2.4** o ohraničenej formule znamená, že JeKonečnýVýpočetNaStroji ∈ PRR.

D Definujme funkciu VýsledokKonečnéhoVýpočtu vzťahom

$$\mathtt{VýsledokKonečnéhoVýpočtu}(x) = \mathtt{PočetJednotiekNaPáske}(\mathtt{PáskaKonfigurácie}(\mathtt{PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(x))).$$

V **48**

Nech je V konečný výpočet na stroji T z K, pričom $\mathtt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V) = x$. Potom

$$\mathtt{VýsledokKonečnéhoVýpočtu}(x) = \mathtt{Výsledok}(K, T).$$

Nech $V = (K_0, \dots, K_n)$. Potom podľa definície konečného výpočtu $K = K_0$ a platí:

Výsledok(K, T)
= PočetJednotiek(Páska(Koniec(K, T)))
(podľa definície Výsledok, keďže Koniec(K, T) existuje, a to podľa definície Koniec),
= PočetJednotiek(Páska(K_n))
(podľa definície Koniec),
= PočetJednotiekNaPáske(KódPásky(Páska(K_n)))
(podľa vety **23**),
= PočetJednotiekNaPáske(PáskaKonfigurácie(KódKonfigurácie(K_n)))
(podľa vety **26**),
= PočetJednotiekNaPáske(PáskaKonfigurácie(PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu(x)))
(podľa vety **44**),
= VýsledokKonečnéhoVýpočtu(x)
(podľa definície VýsledokKonečnéhoVýpočtu).

V **49**

VýsledokKonečnéhoVýpočtu $\in$ PRF.

Nech α je term z pravej strany rovnosti z definície VýsledokKonečnéhoVýpočtu. Potom podľa príslušných definícií platí:

- PremennéVTerme$(\alpha) = \{x\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine FunkciovéSymbolyVTerme(α):
  - PočetJednotiekNaPáske $\in$ PRF podľa vety **24**.
  - PáskaKonfigurácie $\in$ PRF podľa vety **27**.
  - PoslednáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu $\in$ PRF podľa vety **45**.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že VýsledokKonečnéhoVýpočtu $\in$ PRF.

Ešte potrebujeme aritmetizovať počiatočnú, takže blokovú, konfiguráciu:

D Definujme funkciu KódSlova z $\mathbb{N}^*$ do $\mathbb{N}$ takto:

$$\text{KódSlova}((x_1, \dots, x_n)) = \text{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n).$$

I Ak α je slovo 11001, tak platí:
KódSlova(α)
= KódTice^5(1, 1, 0, 0, 1),
= KódTice$^5(1, 1, 0, 0, 1)$,
$= 2^5 \cdot (3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^1)$.

V **50**

Nech $\alpha, \beta \in$ Slová. Potom platí:

$$\text{Konkatenácia}(\text{KódSlova}(\alpha), \text{KódSlova}(\beta)) = \text{KódSlova}(\alpha\beta).$$

Nech $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ a $\beta = (y_1, \dots, y_m)$. Potom platí:
KódSlova$(\alpha\beta)$
= KódSlova$((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$,
= KódTice$^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$
(podľa definície KódSlova),

$= \mathtt{Konkatenácia}(\mathtt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n), \mathtt{KódTice}^m(y_1, \dots, y_m))$
(podľa vety **4.8**),
$= \mathtt{Konkatenácia}(\mathtt{KódSlova}((x_1, \dots, x_n)), \mathtt{KódSlova}((y_1, \dots, y_m)))$
(podľa definície KódSlova a opäť podľa definície KódSlova),
$= \mathtt{Konkatenácia}(\mathtt{KódSlova}(\alpha), \mathtt{KódSlova}(\beta))$.

V $\boxed{\mathbf{51}}$

Nech α je slovo.
- $\mathtt{KódPásky}(\alpha\mathtt{0}\!\to) = \mathtt{DoplnenýNulovýChvost}(\mathtt{KódSlova}(\alpha))$.
- Ak $\alpha = \varepsilon$ alebo α sa končí na 1, tak $\mathtt{OdobratýNulovýChvost}(\mathtt{KódPásky}(\alpha\mathtt{0}\!\to)) = \mathtt{KódSlova}(\alpha)$.

Nech $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$. Potom platí:

- $\mathtt{KódPásky}(\alpha\mathtt{0}\!\to)$
  $= \mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(\alpha\mathtt{0}\!\to)$
  (podľa definície KódPásky),
  $= \mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}((x_1, \dots, x_n)\mathtt{0}\!\to)$,
  $= \mathtt{DoplnenýNulovýChvost}(\mathtt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n))$
  (podľa vety **4.18**),
  $= \mathtt{DoplnenýNulovýChvost}(\mathtt{KódSlova}(x_1 \cdots x_n))$
  (podľa definície KódSlova),
  $= \mathtt{DoplnenýNulovýChvost}(\mathtt{KódSlova}(\alpha))$.
- Rozoberme oba prípady:
  - Nech α sa končí na 1.
    Potom platí:
    $\mathtt{OdobratýNulovýChvost}(\mathtt{KódPásky}(\alpha\mathtt{0}\!\to))$
    $= \mathtt{OdobratýNulovýChvost}(\mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(\alpha\mathtt{0}\!\to))$
    (podľa definície KódPásky),
    $= \mathtt{OdobratýNulovýChvost}(\mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}((x_1, \dots, x_n)\mathtt{0}\!\to))$,
    $= \mathtt{KódTice}^n(x_1, \dots, x_n)$
    (podľa vety **4.18**, lebo podľa predpokladu $x_n = \mathtt{1} = 1 > 0$),
    $= \mathtt{KódSlova}(x_1 \cdots x_n)$
    (podľa definície KódSlova),
    $= \mathtt{KódSlova}(\alpha)$.
  - Nech $\alpha = \varepsilon$.
    Potom platí:
    $\mathtt{OdobratýNulovýChvost}(\mathtt{KódPásky}(\alpha\mathtt{0}\!\to))$
    $= \mathtt{OdobratýNulovýChvost}(\mathtt{KódPásky}(\varepsilon\mathtt{0}\!\to))$,
    $= \mathtt{OdobratýNulovýChvost}(\mathtt{KódPásky}(\mathtt{0}\!\to))$
    (podľa vety **1.2.29**),
    $= \mathtt{OdobratýNulovýChvost}(\mathtt{KódTakmerNulovejPostupnosti}(\mathtt{0}\!\to))$
    (podľa definície KódPásky),
    $= \mathtt{OdobratýNulovýChvost}(\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathtt{Prvočíslo}(i)^0)$
    (podľa definícií $\mathtt{0}\!\to$ a KódTakmerNulovejPostupnosti),
    $= \mathtt{OdobratýNulovýChvost}(1)$,
    $= 1$
    (podľa definície OdobratýNulovýChvost),
    $= \mathtt{Prvočíslo}(0)^0$,
    $= \mathtt{KódTice}^0()$

(podľa definície $\texttt{KódTice}^0$),
$= \texttt{KódSlova}(\varepsilon)$
(podľa definície $\texttt{KódSlova}$),
$= \texttt{KódSlova}(\alpha)$.

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkciu $\texttt{PáskaBloková}^n$ vzťahom

$$\texttt{PáskaBloková}^n(x_1, \dots, x_n) = \texttt{KódPásky}(\texttt{BlokováPáska}^n(x_1, \dots, x_n)).$$

V $\boxed{\textbf{52}}$

Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom $\texttt{PáskaBloková}^n \in \texttt{PRF}$.

Dokážeme to indukciou:

1 Nech $\texttt{PáskaBloková}^0() = c$, kde $c \in \mathbb{N}$. Potom $\texttt{PáskaBloková}^0() = c = \texttt{Konštanta}_c^0()$, takže funkcie $\texttt{PáskaBloková}^0$ a $\texttt{Konštanta}_c^0$ so spoločným definičným oborom $\mathbb{N}^0$ sú totožné. Podľa vety **1.2** preto platí $\texttt{PáskaBloková}^0 \in \texttt{PRF}$.

2 Najprv sublema:

1
- $\texttt{Bloky}^0() = \varepsilon$.
- Ak $n > 0$, tak slovo $\texttt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)$ sa končí na $\texttt{1}$.

- $\texttt{Bloky}^0() = \varepsilon$ podľa definície $\texttt{Bloky}^0$.
- $\texttt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)$
  $= \texttt{Bloky}^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})\texttt{0Blok}(x_n)$
  (podľa definície $\texttt{Bloky}^n$, lebo $n > 0$),
  $= \texttt{Bloky}^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})\texttt{01}^{x_n+1}$
  (podľa definície $\texttt{Blok}$),
  $= \texttt{Bloky}^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})\texttt{01}^{x_n}\texttt{1}$.

Potom platí:
$\texttt{PáskaBloková}^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})$
$= \texttt{KódPásky}(\texttt{BlokováPáska}^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}))$
(podľa definície $\texttt{PáskaBloková}^{n+1}$),
$= \texttt{KódPásky}(\texttt{Bloky}^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})\texttt{0}\!\!\rightarrow)$
(podľa definície $\texttt{BlokováPáska}^{n+1}$),
$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{KódSlova}(\texttt{Bloky}^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})))$
(podľa vety **51**),
$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{KódSlova}(\texttt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\texttt{0Blok}(x_{n+1})))$
(podľa definície $\texttt{Bloky}^{n+1}$),
$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{Konkatenácia}(\texttt{KódSlova}(\texttt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)), \texttt{KódSlova}(\texttt{0Blok}(x_{n+1}))))$
(podľa vety **50**),
$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{Konkatenácia}$
$(\texttt{OdobratýNulovýChvost}(\texttt{KódPásky}(\texttt{Bloky}^n(x_1, \dots, x_n)\texttt{0}\!\!\rightarrow)), \texttt{KódSlova}(\texttt{0Blok}(x_{n+1})))$
(podľa vety **51** a sublemy **1**),
$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{Konkatenácia}$
$(\texttt{OdobratýNulovýChvost}(\texttt{KódPásky}(\texttt{BlokováPáska}^n(x_1, \dots, x_n))), \texttt{KódSlova}(\texttt{0Blok}(x_{n+1}))))$
(podľa definície $\texttt{BlokováPáska}^n$),
$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{Konkatenácia}(\texttt{OdobratýNulovýChvost}(\texttt{PáskaBloková}^n(x_1, \dots, x_n))),$
$\texttt{KódSlova}(\texttt{0Blok}(x_{n+1})))$
(podľa definície $\texttt{PáskaBloková}^n$),
$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{Konkatenácia}(\texttt{OdobratýNulovýChvost}(\texttt{PáskaBloková}^n(x_1, \dots, x_n))),$

$\texttt{KódSlova}(\texttt{01}^{x_{n+1}+1}))$
(podľa definície $\texttt{Blok}$),
$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{Konkatenácia}(\texttt{OdobratýNulovýChvost}(\texttt{PáskaBloková}^n(x_1, \dots, x_n))),$
$\texttt{KódTice}^{x_{n+1}+2}(\texttt{0}, \texttt{1}, \dots, \texttt{1}))$
(podľa definície $\texttt{KódSlova}$),
$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{Konkatenácia}(\texttt{OdobratýNulovýChvost}(\texttt{PáskaBloková}^n(x_1, \dots, x_n))),$
$\texttt{KódTice}^{x_{n+1}+2}(0, 1, \dots, 1)),$
$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{Konkatenácia}(\texttt{OdobratýNulovýChvost}(\texttt{PáskaBloková}^n(x_1, \dots, x_n))),$
$\texttt{Prvočíslo}(0)^{x_{n+1}+2} \cdot \texttt{Prvočíslo}(1)^0 \cdot \prod_{i=2}^{x_{n+1}+2} \texttt{Prvočíslo}(i)^1)$
(podľa definície $\texttt{KódTice}^{x_{n+1}+2}$),
$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{Konkatenácia}(\texttt{OdobratýNulovýChvost}(\texttt{PáskaBloková}^n(x_1, \dots, x_n))),$
$\texttt{Prvočíslo}(0)^{x_{n+1}+2} \cdot \prod_{i=2}^{x_{n+1}+2} \texttt{Prvočíslo}(i)),$
$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{Konkatenácia}(\texttt{OdobratýNulovýChvost}(\texttt{PáskaBloková}^n(x_1, \dots, x_n))),$
$\texttt{Prvočíslo}(0)^{x_{n+1}+2} \cdot \prod_{i=0}^{x_{n+1}} \texttt{Prvočíslo}(i+2))$
(posun indexov).

Definujme funkciu f vzťahom $f(x) = \texttt{Prvočíslo}(x+2)$. Nech α je term na pravej strane tejto rovnosti. Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x\}$.
- $\texttt{FunkcioéSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\texttt{Prvočíslo}, \texttt{Súčet}\}$, pričom platí:
  - $\texttt{Prvočíslo} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **3.5**.
  - $\texttt{Súčet} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **1.6**.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že $f \in \texttt{PRF}$.

Definujme funkciu h vzťahom $h = \texttt{Iterovanie}^0_{\texttt{Súčin}}(f)$, podľa vety **1.15** $h \in \texttt{PRF}$.
Potom dostávame

$$\texttt{PáskaBloková}^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) =$$
$$= \texttt{DoplnenýNulovýChvost}(\texttt{Konkatenácia}(\texttt{OdobratýNulovýChvost}(\texttt{PáskaBloková}^n(x_1, \dots, x_n))),$$
$$\texttt{Prvočíslo}(0)^{x_{n+1}+2} \cdot h(x_{n+1})).$$

Nech β je term na pravej strane tejto rovnosti. Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\beta) = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine $\texttt{FunkcioéSymbolyVTerme}(\beta)$:
  - $\texttt{DoplnenýNulovýChvost} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **4.19**.
  - $\texttt{Konkatenácia} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **4.9**.
  - $\texttt{OdobratýNulovýChvost} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **4.20**.
  - $\texttt{PáskaBloková}^n \in \texttt{PRF}$ podľa indukčného predpokladu.
  - $\texttt{Prvočíslo} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **3.5**.
  - $\texttt{Mocnina} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **1.8**.
  - $\texttt{Súčet} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **1.6**.
  - $\texttt{Súčin} \in \texttt{PRF}$ podľa vety **1.7**.
  - $h \in \texttt{PRF}$.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že $\texttt{PáskaBloková}^{n+1} \in \texttt{PRF}$.

D Definujme pre každé n z $\mathbb{N}$ funkciu $\texttt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n$ vzťahom

$$\texttt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n(x_1, \dots, x_n) = \texttt{KódTice}^3(0, 0, \texttt{PáskaBloková}^n(x_1, \dots, x_n)).$$

V **53**

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\texttt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n(x_1, \dots, x_n) = \texttt{KódKonfigurácie}(\texttt{NK}^n(x_1, \dots, x_n)).$$

$\texttt{KódKonfigurácie}(\texttt{NK}^n(x_1, \dots, x_n))$
$= \texttt{KódKonfigurácie}(\texttt{BK}_0^n(x_1, \dots, x_n))$
(podľa definície $\texttt{NK}^n$),

$= \texttt{KódTice}^3(\texttt{Stav}(\texttt{BK}_0^n(x_1, \dots, x_n)), \texttt{Hlava}(\texttt{BK}_0^n(x_1, \dots, x_n)), \texttt{KódPásky}(\texttt{Páska}(\texttt{BK}_0^n(x_1, \dots, x_n))))$
(podľa definície $\texttt{KódKonfigurácie}$),

$= \texttt{KódTice}^3(0, \texttt{Dĺžka}(\texttt{Bloky}^0()), \texttt{KódPásky}(\texttt{BP}^n(x_1, \dots, x_n)))$
(podľa vety **1.2.34**),

$= \texttt{KódTice}^3(0, 0, \texttt{KódPásky}(\texttt{BP}^n(x_1, \dots, x_n)))$
(podľa vety **1.2.25**),

$= \texttt{KódTice}^3(0, 0, \texttt{PáskaBloková}^n(x_1, \dots, x_n))$
(podľa definície $\texttt{PáskaBloková}^n$),

$= \texttt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n(x_1, \dots, x_n)$
(podľa definície $\texttt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n$).

V **54**

Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom $\texttt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n \in \texttt{PRF}$.

Nech α je term z pravej strany rovnosti z definície $\texttt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n$. Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{PremennéVTerme}(\alpha) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- $\texttt{FunkcioméSymbolyVTerme}(\alpha) = \{\texttt{KódTice}^3, \texttt{PáskaBloková}^n\}$, pričom platí:
  - $\texttt{KódTice}^3 \in \texttt{PRF}$ podľa vety **4.2**.
  - $\texttt{PáskaBloková}^n \in \texttt{PRF}$ podľa vety **52**.

To podľa vety **1.3** o terme znamená, že $\texttt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n \in \texttt{PRF}$.

Teraz by sme azda (vzhľadom na charakter tejto state) mohli očakávať tvrdenie, že (pre každý stroj T) je funkcia $\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T)$ tiež primitívne rekurzívna. To, žiaľ, ale i samozrejme, neplatí – stačí si uvedomiť, že všetky primitívne rekurzívne funkcie sú totálne, kým turingovsky vypočítateľná funkcia taká byť nemusí. V nasledujúcej stati preto triedu primitívne rekurzívnych funkcií rozšírime.

2.6 Rekurzívne funkcie

Množina tzv. *rekurzívnych funkcií* bude tiež vytvorená induktívnym spôsobom, dokonca základné funkcie budú úplne rovnaké. Zachováme aj zloženie a rekurziu, iba, prirodzene, rozšírime ich definičné obory. Navyše však pribudne nová metóda – *minimalizácia* (bez ohraničenia):

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Označme $\texttt{PrirodzenéFunkcie}^n$ množinu funkcií s hodnotami v $\mathbb{N}$, ktorých definičný obor je nejaká podmnožina $\mathbb{N}^n$.

P Z definície $\texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^n$ platí $\texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^n \subseteq \texttt{PrirodzenéFunkcie}^n$.

I $\texttt{Rozdiel}$ patrí do množiny $\texttt{PrirodzenéFunkcie}^2 \setminus \texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^2$, lebo $\mathrm{Dom}(\texttt{Rozdiel}) = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 : x \geq y\} \neq \mathbb{N}^2$.

D Nech $n, k \in \mathbb{N}$. Definujme zobrazenie $\texttt{Zloženie}^{n,k}$ z $(\texttt{PrirodzenéFunkcie}^n)^k \times \texttt{PrirodzenéFunkcie}^k$ do $\texttt{PrirodzenéFunkcie}^n$ takto:

Nech pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ platí $g_i \in \texttt{PrirodzenéFunkcie}^n$ a nech $h \in \texttt{PrirodzenéFunkcie}^k$. Nech f je taká, že pre každé x_1, ..., x_n z $\mathbb{N}$ platí:

- $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(f)$ práve vtedy, keď platí:
  - Pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ platí $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(g_i)$.
  - $\langle g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)\rangle \in \mathrm{Dom}(h)$.
- Ak $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(f)$, tak

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom $\texttt{Zloženie}^{n,k}(\langle g_1, \dots, g_k\rangle, h) = f$ a budeme hovoriť, že funkcia f vznikla *zložením* funkcií g_1, ..., g_k a h.

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Definujme zobrazenie $\texttt{Rekurzia}^n$ z množiny $\texttt{PrirodzenéFunkcie}^n \times \texttt{PrirodzenéFunkcie}^{n+2}$ do množiny $\texttt{PrirodzenéFunkcie}^{n+1}$ takto:

Nech $g \in \texttt{PrirodzenéFunkcie}^n$ a $h \in \texttt{PrirodzenéFunkcie}^{n+2}$. Nech f je taká, že pre každé x_1, ..., x_n z $\mathbb{N}$ platí:

- Nech $y \in \mathbb{N}$. Potom $\langle x_1, \dots, x_n, y\rangle \in \mathrm{Dom}(f)$ práve vtedy, keď platí:
  - $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(g)$.
  - Pre každé i také, že $i < y$, platí $\langle x_1, \dots, x_n, i, f(x_1, \dots, x_n, i)\rangle \in \mathrm{Dom}(h)$.
- **1** Ak $\langle x_1, \dots, x_n, 0\rangle \in \mathrm{Dom}(f)$, tak platí

$$f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n).$$

  2 Ak $y \in \mathbb{N}$ a $\langle x_1, \dots, x_n, y + 1\rangle \in \mathrm{Dom}(f)$, tak

$$f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)).$$

Potom $f = \texttt{Rekurzia}^n(g, h)$ a budeme hovoriť, že funkcia f vznikla *rekurziou* z funkcií g a h.

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Definujme zobrazenie $\texttt{Minimalizácia}^n$ z $\texttt{PrirodzenéFunkcie}^{n+1}$ do $\texttt{PrirodzenéFunkcie}^n$ takto:

Nech $g \in \texttt{PrirodzenéFunkcie}^{n+1}$. Nech f je taká, že pre každé x_1, ..., x_n z $\mathbb{N}$ platí:

$$f(x_1, \dots, x_n) \begin{cases} = \min\{y : (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0) \land (\forall i < y)\langle x_1, \dots, x_n, i\rangle \in \mathrm{Dom}(g)\}, \\ \qquad \text{ak } \{y : (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0) \land (\forall i < y)\langle x_1, \dots, x_n, i\rangle \in \mathrm{Dom}(g)\} \neq \emptyset, \\ \text{nie je definované} \\ \qquad \text{inak.} \end{cases}$$

Potom $f = \texttt{Minimalizácia}^n(g)$ a budeme hovoriť, že funkcia f vznikla *minimalizáciou* z funkcie g.

V $\boxed{1}$

Nech $g \in \texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$ a $f \in \texttt{PrirodzenéFunkcie}^n$ pre nejaké n z $\mathbb{N}$. Potom platí $f = \texttt{Minimalizácia}^n(g)$ práve vtedy, keď pre každé x_1, ..., x_n z $\mathbb{N}$ platí

$$f(x_1, \dots, x_n) \begin{cases} = \min\{y : g(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}, & \text{ak } \{y : g(x_1, \dots, x_n, y) = 0\} \neq \emptyset, \\ \text{nie je definované} & \text{inak.} \end{cases}$$

Keďže podľa definície $\texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$ je podmienka $(\forall i < m)\langle x_1, \dots, x_n, i\rangle \in \mathrm{Dom}(g)$ splnená, platí

$$\{y : (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0) \wedge (\forall i < y)\langle x_1, \dots, x_n, i\rangle \in \mathrm{Dom}(g)\} = \{y : g(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}.$$

Z toho už podľa definície minimalizácie vyplýva dokazované tvrdenie.

I Všimnime si, že ak $\langle x_1, x_2\rangle \in \mathrm{Dom}(\texttt{Rozdiel})$, t. j. $x_1 \geq x_2$, a

$$g(x_1, x_2, y) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x_1 = x_2 + y, \\ 1 & \text{inak,} \end{cases}$$

tak platí

$$\texttt{Rozdiel}(x_1, x_2) = \min\{y : g(x_1, x_2, y) = 0\},$$

dokonca táto množina je jednoprvková. Naopak, ak $\langle x_1, x_2\rangle \notin \mathrm{Dom}(\texttt{Rozdiel})$, t. j. $x_1 < x_2$, tak neexistuje žiadne y také, že $x_1 = x_2 + y$, t. j. že $g(x_1, x_2, y) = 0$. Keďže funkcia g je totálna, podľa vety **1** platí $\texttt{Rozdiel} = \texttt{Minimalizácia}^2(g)$.

D $\texttt{RekurzívneFunkcie}$ (skrátene $\texttt{RF}$) bude najmenšia množina, pre ktorú platí:

1 **a** $\texttt{Nula} \in \texttt{RF}$.
  b $\texttt{Nasledovník} \in \texttt{RF}$.
  c $\texttt{Projekcia}_i^n \in \texttt{RF}$ pre každé n z $\mathbb{N}$ a i z $\{1, \dots, n\}$.

2 **a** Ak f, g_1, ..., g_k a h sú funkcie také, že pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ platí $g_i \in \texttt{RF}$ a $h \in \texttt{RF}$ a f vznikla zložením g_1, ..., g_k a h, tak aj $f \in \texttt{RF}$.
  b Ak f, g a h sú funkcie také, že $g \in \texttt{RF}$ a $h \in \texttt{RF}$ a f vznikla z g a h rekurziou, tak aj $f \in \texttt{RF}$.
  c Ak f a g sú funkcie také, že $g \in \texttt{RF}$ a f vznikla z g minimalizáciou, tak aj $f \in \texttt{RF}$.

Prvky množiny $\texttt{RF}$ budeme nazývať *rekurzívne funkcie*.

Vzhľadom na túto definíciu sa dajú očakávať takéto vzťahy:

V $\boxed{2}$

a Ak $f = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,k}(\langle g_1, \dots, g_k\rangle, h)$, tak $f = \texttt{Zloženie}^{n,k}(\langle g_1, \dots, g_k\rangle, h)$.
b Ak $f = \texttt{PrimitívnaRekurzia}^n(g, h)$, tak $f = \texttt{Rekurzia}^n(g, h)$.

a Keďže $f = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,k}(\langle g_1, \dots, g_k\rangle, h)$, podľa definície primitívneho zloženia sú všetky tieto funkcie totálne. Potom sú však splnené všetky podmienky definície toho, že $f = \texttt{Zloženie}^{n,k}(\langle g_1, \dots, g_k\rangle, h)$.

b Keďže $f = \texttt{PrimitívnaRekurzia}^n(g, h)$, podľa definície primitívnej rekurzie sú všetky tri funkcie totálne. Potom sú však splnené všetky podmienky definície toho, že $f = \texttt{Rekurzia}^n(g, h)$.

V $\boxed{3}$

$\texttt{PrimitívneRekurzívneFunkcie} \subseteq \texttt{RekurzívneFunkcie}$.

Dokážeme to štrukturálnou indukciou cez množinu PRF:

1 Podľa definície RF sú všetky základné funkcie rekurzívne.

2 **a** Ak $f = \texttt{PrimitívneZloženie}^{n,k}(\langle g_1, \dots, g_k\rangle, h)$, kde g_1, ..., g_k a h sú primitívne rekurzívne funkcie, tak podľa vety **2** platí $f = \texttt{Zloženie}^{n,k}(\langle g_1, \dots, g_k\rangle, h)$. Avšak podľa indukčného predpokladu pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ platí $g_i \in$ RF a platí $h \in$ RF, podľa definície RF teda $f \in$ RF.

b Ak $f = \texttt{PrimitívnaRekurzia}^{n}(g, h)$, kde g a h sú primitívne rekurzívne funkcie, tak podľa vety **2** platí $f = \texttt{Rekurzia}^{n}(g, h)$. Avšak podľa indukčného predpokladu platí $g \in$ RF a $h \in$ RF, podľa definície RF teda $f \in$ RF.

Aj pri minimalizácii uveďme pomôcku, ktorá nám umožní nebyť príliš viazaní podmienkami z definície:

V $\boxed{4}$ (*o minimalizácii*)

Nech $n \in \mathbb{N}$, a x_1, ..., x_n, y sú rôzne premenné. Nech φ je formula taká, že platí:

- φ je ohraničená.
- $\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y\}$.
- Ak $e \in \texttt{FunkcioveSymbolyVoFormule}(\varphi)$, tak $e \in$ PRF.
- Ak $r \in \texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\varphi)$, tak $r \in$ PRR.

Nech platí vzťah

$$f(x_1, \dots, x_n) \begin{cases} = \min\{y : \varphi\}, & \text{ak je minimovaná množina neprázdna,} \\ \text{nie je definované} & \text{inak.} \end{cases}$$

Potom $f \in$ RF.

Definujme reláciu q vzťahom $q(x_1, \dots, x_n, y) \leftrightarrow \neg\varphi$. Keďže sú splnené podmienky vety **2.4** o ohraničenej formule, platí $q \in$ PRR, a teda podľa definície PRR platí $\texttt{Indikátor}^{n+1}(q) \in$ PRF. Z toho podľa vety **3** dostávame, že $\texttt{Indikátor}^{n+1}(q) \in$ RF.

Keďže φ platí práve vtedy, keď neplatí $q(x_1, \dots, x_n, y)$, a teda podľa definície $\texttt{Indikátor}^{n+1}$ práve vtedy, keď $(\texttt{Indikátor}^{n+1}(q))(x_1, \dots, x_n, y) = 0$, dostávame

$$f(x_1, \dots, x_n) \begin{cases} = \min\{y : (\texttt{Indikátor}^{n+1}(q))(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}, & \text{ak je minimovaná množina neprázdna,} \\ \text{nie je definované} & \text{inak.} \end{cases}$$

Keďže podľa definície $\texttt{Indikátor}^{n+1}$ je táto funkcia totálna, podľa definície $\texttt{TotálnePrirodzenéFunkcie}^{n+1}$ a vety **1** platí $f = \texttt{Minimalizácia}^{n}(\texttt{Indikátor}^{n+1}(q))$. Keďže $\texttt{Indikátor}^{n+1}(q) \in$ RF, podľa definície RF dostávame $f \in$ RF.

I Funkcia Rozdiel patrí do množiny RF. Platí totiž

$$\texttt{Rozdiel}(x, y) \begin{cases} = \min\{z : x = \texttt{Súčet}(y, z)\}, & \text{ak } \{z : x = \texttt{Súčet}(y, z)\} \neq \emptyset, \\ \text{nedefinované} & \text{inak.} \end{cases}$$

Nech φ je formula $x = \texttt{Súčet}(y, z)$. Potom podľa príslušných definícií platí:

- $\texttt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x, y, z\}$.
- $\texttt{FunkcioveSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{\texttt{Súčet}\}$, pričom $\texttt{Súčet} \in$ PRF podľa vety **1.6**.
- $\texttt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\varphi) = \{=\}$, pričom $= \in$ PRR podľa vety **2.3**.

To podľa vety **4** o minimalizácii znamená, že naozaj Rozdiel $\in$ RF.

Môžeme teda ďalej pokračovať v duchu predchádzajúcej state, už však s rekurzívnymi funkciami.

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkciu $\mathtt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n$ vzťahom

$$\mathtt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n(x_1, \dots, x_n, t)$$

$$\begin{cases} = \mathtt{VýsledokKonečnéhoVýpočtu}(\min\{v : \mathtt{JeKonečnýVýpočetNaStroji}(v, t) \wedge \\ \quad \wedge \mathtt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(v) = \\ \quad = \mathtt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n(x_1, \dots, x_n)\}), \\ \quad \text{ak je minimovaná množina neprázdna,} \\ \text{nie je definované} \\ \quad \text{inak.} \end{cases}$$

V $\boxed{5}$

Nech T je Turingov stroj, $n \in \mathbb{N}$ a $t = \mathtt{KódStroja}(T)$. Potom pre každé x_1, ..., x_n platí buď

$$(\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T))(x_1, \dots, x_n) = \mathtt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n(x_1, \dots, x_n, t),$$

alebo obe hodnoty nie sú definované.

Nech M je množina

$$\{v : \mathtt{JeKonečnýVýpočetNaStroji}(v, t) \wedge$$
$$\wedge \mathtt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(v) =$$
$$= \mathtt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n(x_1, \dots, x_n)\}.$$

1 $v \in M$ práve vtedy, keď existuje konečný výpočet V na stroji T z konfigurácie $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ taký, že $v = \mathtt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V)$.

$v \in M$,
akk $\mathtt{JeKonečnýVýpočetNaStroji}(v, t)$
a $\mathtt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(v) =$
$= \mathtt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n(x_1, \dots, x_n)$
(podľa definície M),
akk existujú stroj S a konečný výpočet V na S, že $v = \mathtt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V)$ a $t = \mathtt{KódStroja}(S)$
a $\mathtt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(v) =$
$= \mathtt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n(x_1, \dots, x_n)$
(podľa vety **5.46**),
akk existuje konečný výpočet V na stroji T, že $v = \mathtt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V)$,
a $\mathtt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(v) =$
$= \mathtt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n(x_1, \dots, x_n)$
(lebo podľa vety **5.11** máme $S = T$),
akk existuje konečný výpočet V na stroji T z konfigurácie K, že $v = \mathtt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V)$
a $\mathtt{KódKonfigurácie}(K) = \mathtt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n(x_1, \dots, x_n)$
(podľa vety **5.42**, pričom K označuje počiatočnú konfiguráciu výpočtu V),
akk existuje konečný výpočet V na stroji T z konfigurácie K, že $v = \mathtt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V)$
a $\mathtt{KódKonfigurácie}(K) = \mathtt{KódKonfigurácie}(\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n))$
(podľa vety **5.53**),
akk existuje konečný výpočet V na stroji T z konfigurácie K, že $v = \mathtt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V)$
a $K = \mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$
(podľa vety **5.25**),
akk existuje konečný výpočet V na stroji T z konfigurácie $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$,
že $v = \mathtt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V)$.

Rozoberme dva prípady:

- Nech $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathrm{Dom}(\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T))$.
  Potom podľa definície $\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n$ existuje konečný výpočet V na stroji T z konfigurácie $\mathtt{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$. Nech $w = \mathtt{KódKonečnéhoVýpočtu}(V)$, w je potom podľa sublemy **1** a vety **1.2.20** jediným prvkom M, a teda i jej minimom. Platí teda:
  $\mathtt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n(x_1, \dots, x_n, t)$
  $= \mathtt{VýsledokKonečnéhoVýpočtu}(w)$
  (podľa definície $\mathtt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n$, keďže $w = \min M$),
  $= \mathtt{Výsledok}(\mathtt{NK}^n(x_1, \dots, x_n), T)$
  (podľa vety **5.48**),
  $= (\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T))(x_1, \dots, x_n)$
  (podľa definície $\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n$).
- Nech $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin \mathrm{Dom}(\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T))$.
  Potom podľa definície $\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n$ neexistuje konečný výpočet na stroji T z konfigurácie $\mathtt{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$. Podľa sublemy **1** potom $M = \emptyset$, a teda podľa definície $\mathtt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n$ hodnota $\mathtt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n(x_1, \dots, x_n, t)$ nie je definovaná.

V $\boxed{\mathbf{6}}$

$\boxed{\mathtt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n \in \mathtt{RF}.}$

Nech g je funkcia definovaná vzťahom

$$g(x_1, \dots, x_n, t) \begin{cases} = \min\{v : \mathtt{JeKonečnýVýpočetNaStroji}(v, t) \wedge \\ \qquad \wedge\, \mathtt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(v) = \\ \qquad = \mathtt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n(x_1, \dots, x_n)\}, \\ \qquad \text{ak je minimovaná množina neprázdna,} \\ \text{nie je definované} \\ \qquad \text{inak.} \end{cases}$$

Formulu

$$\mathtt{JeKonečnýVýpočetNaStroji}(v, t) \wedge$$
$$\wedge\, \mathtt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu}(v) =$$
$$= \mathtt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n(x_1, \dots, x_n)$$

označme φ. Potom podľa príslušných definícií platí:

- φ je ohraničená.
- $\mathtt{VoľnéPremennéVoFormule}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n, t, v\}$.
- Skontrolujme všetky funkcie so symbolmi v množine $\mathtt{FunkciovéSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{PočiatočnáKonfiguráciaKonečnéhoVýpočtu} \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **5.43**.
  - $\mathtt{KonfiguráciaNormalizovaná}^n \in \mathtt{PRF}$ podľa vety **5.54**.
- Skontrolujme všetky relácie so symbolmi v množine $\mathtt{RelácioveSymbolyVoFormule}(\varphi)$:
  - $\mathtt{JeKonečnýVýpočetNaStroji} \in \mathtt{PRR}$ podľa vety **5.47**.
  - $= \in \mathtt{PRR}$ podľa vety **2.3**.

To podľa vety **4** o minimalizácii znamená, že $g \in \mathtt{RF}$.

Zároveň však podľa definície $\texttt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n$ platí

$$\texttt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n(x_1,\dots,x_n,t)\begin{cases}= \texttt{VýsledokKonečnéhoVýpočtu}(g(x_1,\dots,x_n,t)),\\ \quad \text{ak } \langle x_1,\dots,x_n,t\rangle \in \mathrm{Dom}(g),\\ \text{nie je definované}\\ \quad \text{inak,}\end{cases}$$

kde $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(\texttt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n)$, lebo $\texttt{VýsledokKonečnéhoVýpočtu}$ je totálna funkcia, a to podľa viet **1.1** a **5.49**. Podľa definície zloženia teda platí

$$\texttt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n = \texttt{Zloženie}^{n+1,1}(\langle g\rangle, \texttt{VýsledokKonečnéhoVýpočtu}).$$

A keďže podľa viet **5.49** a **3** platí $\texttt{VýsledokKonečnéhoVýpočtu} \in \texttt{PRF} \subseteq \texttt{RF}$ a $g \in \texttt{RF}$, podľa definície RF platí $\texttt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n \in \texttt{RF}$.

V **7**

$\texttt{TuringovskéFunkcie} \subseteq \texttt{RekurzívneFunkcie}$.

Nech $f \in \texttt{TuringovskéFunkcie}$, teda podľa definície TuringovskéFunkcie existuje Turingov stroj T, ktorý počíta f. Nech n je počet argumentov f, potom podľa definície počítania $f = \texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T)$. Nech $t = \texttt{KódStroja}(T)$.

1 $f = \texttt{Zloženie}^{n,n+1}(\langle \texttt{Projekcia}_1^n,\dots,\texttt{Projekcia}_n^n,\texttt{Konštanta}_t^n\rangle,\texttt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n)$.

Ukážeme, že sú splnené podmienky definície zloženia:

- $\langle x_1,\dots,x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(f)$,

  akk $\langle x_1,\dots,x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T))$,

  akk $\langle x_1,\dots,x_n,t\rangle \in \mathrm{Dom}(\texttt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n)$
  (podľa vety **5**),

  akk $\langle \texttt{Projekcia}_1^n(x_1,\dots,x_n),\dots,\texttt{Projekcia}_n^n(x_1,\dots,x_n),\texttt{Konštanta}_t^n(x_1,\dots,x_n)\rangle$
  $\in \mathrm{Dom}(\texttt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n)$
  (pre každé i z $\{1,\dots,n\}$ podľa definície $\texttt{Projekcia}_i^n$ a podľa definície $\texttt{Konštanta}_t^n$),

  akk pre každé i z $\{1,\dots,n\}$ platí $\langle x_1,\dots,x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(\texttt{Projekcia}_i^n)$, $\langle x_1,\dots,x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(\texttt{Konštanta}_t^n)$
  a $\langle \texttt{Projekcia}_1^n(x_1,\dots,x_n),\dots,\texttt{Projekcia}_n^n(x_1,\dots,x_n),\texttt{Konštanta}_t^n(x_1,\dots,x_n)\rangle$
  $\in \mathrm{Dom}(\texttt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n)$
  (pridané podmienky sú splnené, lebo pre každé i z $\{1,\dots,n\}$ podľa definície $\texttt{Projekcia}_i^n$ je táto funkcia totálna a podľa definície $\texttt{Konštanta}_t^n$ je aj táto funkcia totálna).

- Nech $\langle x_1,\dots,x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T))$. Potom platí:

  $f(x_1,\dots,x_n)$

  $= (\texttt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T))(x_1,\dots,x_n)$,

  $= \texttt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n(x_1,\dots,x_n,t)$
  (podľa vety **5**),

  $= \texttt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n(\texttt{Projekcia}_1^n(x_1,\dots,x_n),\dots,\texttt{Projekcia}_n^n(x_1,\dots,x_n),$
  $\texttt{Konštanta}_t^n(x_1,\dots,x_n))$
  (pre každé i z $\{1,\dots,n\}$ podľa definície $\texttt{Projekcia}_i^n$ a podľa definície $\texttt{Konštanta}_t^n$).

Podľa definície RF pe každé i z $\{1,\dots,n\}$ platí $\texttt{Projekcia}_i^n \in \texttt{RF}$, podľa viet **1.2** a **3** platí $\texttt{Konštanta}_t^n \in \texttt{RF}$ a podľa vety **6** platí $\texttt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n \in \texttt{RF}$. Preto podľa definície RF a sublemy **1** platí $f \in \texttt{RF}$.

2.7 Vzťah rekurzívnych a turingovsky vypočítateľných funkcií

Spomeňme si, že našou pôvodnou motiváciou pre niekoľko predchádzajúcich statí prvej kapitoly bolo zjednotiť kódovanie vstupov a výstupu Turingovho stroja. Pravdaže, nebudeme už hovoriť o *počítaní* (tento pojem sme už predsa rezervovali na niečo iné), ale o *regulárnom počítaní*. Navyše budeme pracovať len s úplnými a poloúplnými strojmi:

D Hovoríme, že úplný Turingov stroj T *regulárne počíta* funkciu f s n argumentmi, ak pre každú n-ticu prirodzených čísel $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ platí, že výpočet na T z $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ je konečný práve vtedy, keď $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathrm{Dom}(f)$, a v takom prípade

$$\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \overset{T}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)).$$

D Funkciu f z podmnožiny $\mathbb{N}^n$ pre nejaké n z $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{N}$ nazývame *regulárne turingovská*, ak existuje úplný Turingov stroj T, ktorý ju regulárne počíta.

Množinu všetkých regulárne turingovských funkcií označíme `RegulárneTuringovskéFunkcie`.

V $\boxed{1}$

$\boxed{\texttt{RegulárneTuringovskéFunkcie} \subseteq \texttt{TuringovskéFunkcie}.}$

Nech $f \in$ `RegulárneTuringovskéFunkcie`. To podľa definície `RegulárneTuringovskéFunkcie` znamená, že existuje úplný stroj T, ktorý ju regulárne počíta. Nech n je počet argumentov funkcie f. Ukážeme, že (úplný) stroj U definovaný

$$U = \texttt{Sekvencia}^4(T, \texttt{VymažSledBlokov}^{n+1}_{0,n}, \texttt{PosuňSa}_{\mathsf{R}}, \texttt{ZmeňPísmeno}_{\mathtt{0}})$$

počíta funkciu f. (Definícia je korektná podľa viet **1.9.11**, **1.7.3** a **1.7.1**.)

Rozlíšime dva prípady:

- Nech $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathrm{Dom}(f)$.

  1 $\boxed{\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \overset{U}{\dashrightarrow} \mathsf{KNS}(1, \mathtt{001}^{f(x_1,\dots,x_n)}\mathtt{0}\!\rightarrow)}$

  Postupne platí:

  $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$

  $\overset{T}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$
  (podľa definície regulárneho počítania, lebo $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathrm{Dom}(f)$),

  $\overset{\texttt{VymažSledBlokov}^{n+1}_{0,n}}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^1(f(x_1, \dots, x_n)) = \mathsf{BK}^1_0(f(x_1, \dots, x_n))$
  (podľa vety **1.9.12** a definície NK^1),

  $= \mathsf{KNS}(0, \mathtt{01}^{f(x_1,\dots,x_n)+1}\mathtt{0}\!\rightarrow) = \mathsf{KNS}(0, \mathtt{011}^{f(x_1,\dots,x_n)}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
  (podľa vety **1.2.33**),

  $\overset{\texttt{PosuňSa}_{\mathsf{R}}}{\dashrightarrow} \mathsf{KNS}(1, \mathtt{011}^{f(x_1,\dots,x_n)}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
  (podľa vety **1.7.5**),

  $\overset{\texttt{ZmeňPísmeno}_{\mathtt{0}}}{\dashrightarrow} \mathsf{KNS}(1, \mathtt{001}^{f(x_1,\dots,x_n)}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
  (podľa vety **1.7.2**).

  Zhrnutím podľa vety **1.5.13** dostávame požadované tvrdenie.

  Potom platí:

  $f(x_1, \dots, x_n)$

  $= |\{i \in \mathbb{N} : (\mathtt{001}^{f(x_1,\dots,x_n)}\mathtt{0}\!\rightarrow)(i) = \mathtt{1}\}|,$

  $= \texttt{PočetJednotiek}(\mathtt{001}^{f(x_1,\dots,x_n)}\mathtt{0}\!\rightarrow)$
  (podľa definície `PočetJednotiek`),

  $= \texttt{PočetJednotiek}(\mathsf{Páska}(\mathsf{KNS}(1, \mathtt{001}^{f(x_1,\dots,x_n)}\mathtt{0}\!\rightarrow)))$

(podľa definícií KNS a Páska),

$= \mathtt{PočetJednotiek}(\mathtt{Páska}(\mathtt{KPS}(\mathtt{KNS}(1, \mathtt{001}^{f(x_1,\dots,x_n)}\mathtt{0}\rightarrow), \mathtt{MS}(U))))$
(podľa definície KPS),

$= \mathtt{PočetJednotiek}(\mathtt{Páska}(\mathtt{Koniec}(\mathtt{NK}^n(x_1,\dots,x_n), U)))$
(podľa sublemy **1** a definície $\overset{U}{\dashrightarrow}$),

$= \mathtt{Výsledok}(\mathtt{NK}^n(x_1,\dots,x_n), U)$
(podľa definícií Výsledok a Koniec, pretože existuje $\mathtt{Koniec}(\mathtt{NK}^n(x_1,\dots,x_n), U)$, a to podľa sublemy **1** a definície $\overset{U}{\dashrightarrow}$),

$= (\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(U))(x_1,\dots,x_n)$
(podľa definície $\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n$, lebo výpočet na U z $\mathtt{NK}^n(x_1,\dots,x_n)$ je konečný, a to podľa definície Koniec, pretože existuje $\mathtt{Koniec}(\mathtt{NK}^n(x_1,\dots,x_n), U)$, a to podľa sublemy **1** a definície $\overset{U}{\dashrightarrow}$).

- Nech $\langle x_1,\dots,x_n\rangle \notin \mathrm{Dom}(f)$.
  Potom podľa definície regulárneho počítania je výpočet na T z $\mathtt{NK}^n(x_1,\dots,x_n)$ nekonečný. Podľa vety **1.5.13** je tento výpočet nekonečným výpočtom na stroji U. To však podľa definície $\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n$ znamená, že hodnota $(\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(U))(x_1,\dots,x_n)$ tiež nie je definovaná, t. j. $\langle x_1,\dots,x_n\rangle \notin \mathrm{Dom}(\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(U))$.

Platí teda $\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(U) = f$, takže podľa definície počítania stroj U počíta funkciu f. Podľa definície TuringovskéFunkcie dostávame požadované tvrdenie.

Teraz ukážeme, že všetky rekurzívne funkcie sú regulárne turingovsky vypočítateľné:

V $\boxed{2}$

$\mathtt{Nula} \in \mathtt{RegulárneTuringovskéFunkcie}$.

Podľa viet **1.9.17** a **1.9.18** platí $\mathtt{NK}^0() \overset{\mathtt{VložNulovýBlok}_0^0}{\dashrightarrow} \mathtt{NK}^1(0)$, čiže podľa definícií Nula a regulárneho počítania stroj $\mathtt{VložNulovýBlok}_0^0$ regulárne počíta funkciu Nula. Podľa definície RegulárneTuringovskéFunkcie dostávame požadované tvrdenie.

V $\boxed{3}$

$\mathtt{Nasledovník} \in \mathtt{RegulárneTuringovskéFunkcie}$.

Nech $T = \mathtt{Sekvencia}^2(\mathtt{SkopírujVybranýBlok}_1^1, \mathtt{InkrementujVybranýBlok}_2^2)$. Potom podľa viet je stroj T **1.9.13** a **1.9.15** a definície $\mathtt{Sekvencia}^2$ úplný.

Ďalej platí:

$\mathtt{NK}^1(x)$

$\overset{\mathtt{SkopírujVybranýBlok}_1^1}{\dashrightarrow} \mathtt{NK}^2(x, x)$
(podľa vety **1.9.14**),

$\overset{\mathtt{InkrementujVybranýBlok}_2^2}{\dashrightarrow} \mathtt{NK}^2(x, x+1)$
(podľa vety **1.9.16**).

Podľa vety **1.5.13** tak máme $\mathtt{NK}^1(x) \overset{T}{\dashrightarrow} \mathtt{NK}^2(x, x+1)$. Podľa definícií Nasledovník a regulárneho počítania teda stroj T regulárne počíta funkciu Nasledovník. Podľa definície RegulárneTuringovskéFunkcie dostávame požadované tvrdenie.

V $\boxed{4}$

Ak $n \in \mathbb{N}$ a $i \in \{1,\dots,n\}$, tak $\mathtt{Projekcia}_i^n \in \mathtt{RegulárneTuringovskéFunkcie}$.

Podľa viet **1.9.13** a **1.9.14** $\mathtt{NK}^n(x_1,\dots,x_n) \overset{\mathtt{SkopírujVybranýBlok}_i^n}{\dashrightarrow} \mathtt{NK}^{n+1}(x_1,\dots,x_n,x_i)$, podľa definícií $\mathtt{Projekcia}_i^n$

a regulárneho počítania teda stroj $\mathtt{SkopírujVybranýBlok}_i^n$ regulárne počíta funkciu $\mathtt{Projekcia}_i^n$. To už podľa definície $\mathtt{RegulárneTuringovskéFunkcie}$ znamená požadované tvrdenie.

V $\boxed{5}$ (*simulácia zloženia*)

Nech $n, k \in \mathbb{N}$ a $f = \mathtt{Zloženie}^{n,k}(\langle g_1, \dots, g_k\rangle, h)$, pričom g_1, ..., g_k a h sú regulárne turingovské funkcie. Potom aj f je regulárne turingovská funkcia.

Pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ podľa definície $\mathtt{RegulárneTuringovskéFunkcie}$ existuje úplný stroj G_i regulárne počítajúci funkciu g_i a opäť podľa definície $\mathtt{RegulárneTuringovskéFunkcie}$ existuje úplný stroj H regulárne počítajúci funkciu h.

Nech x_1, ..., x_n sú ľubovoľné prirodzené čísla. Kvôli prehľadnosti pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ označme y_i hodnotu $g_i(x_1, \dots, x_n)$ (ak existuje) a z hodnotu $h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$ čiže $h(y_1, \dots, y_k)$, t. j. podľa definície zloženia $f(x_1, \dots, x_n)$ (ak existuje).

Nech pre každé i z $\{0, \dots, k\}$ platí

$$K_i = \mathsf{NK}^{i+n}(y_1, \dots, y_i, x_1, \dots, x_n),$$

špeciálne $K_0 = \mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$.

Nech platí:

- $A_i = \mathtt{Sekvencia}^2(\mathtt{AplikujZaBlokmi}_{i-1}^{G_i}, \mathtt{VymeňSledyBlokov}_{i-1,n;\,i+n-1,1}^{i+n})$, kde $1 \le i \le k$.
- $B = \mathtt{Sekvencia}^k(A_1, \dots, A_k)$.
- $C = \mathtt{Sekvencia}^3(\mathtt{VymeňSledyBlokov}_{0,k;\,k,n}^{k+n}, \mathtt{AplikujZaBlokmi}_n^H, \mathtt{VymažSledBlokov}_{n,k}^{n+k+1})$.

Nech $F = \mathtt{Sekvencia}^2(B, C)$.

1 Stroj F je úplný.

Postupne platí:

pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ je A_i úplný
(podľa viet **1.9.19** a **1.9.9** a definície $\mathtt{Sekvencia}^2$),

B je úplný
(podľa definície $\mathtt{Sekvencia}^k$),

C je úplný
(podľa viet **1.9.9**, **1.9.19** a **1.9.11** a definície $\mathtt{Sekvencia}^3$),

F je úplný
(podľa definície $\mathtt{Sekvencia}^2$).

2 Nech $i \in \{1, \dots, k\}$.

- Ak $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(g_i)$, tak $K_{i-1} \xrightarrow{A_i} K_i$.
- Ak $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \notin \mathrm{Dom}(g_i)$, tak výpočet na A_i z K_{i-1} je nekonečný.

Rozoberme oba prípady:

- Nech $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(g_i)$.

  Potom platí:

  $K_{i-1} = \mathsf{NK}^{i-1+n}(y_1, \dots, y_{i-1}, x_1, \dots, x_n)$,

  $\xrightarrow{\mathtt{AplikujZaBlokmi}_{i-1}^{G_i}} \mathsf{NK}^{i+n}(y_1, \dots, y_{i-1}, x_1, \dots, x_n, y_i)$

  (podľa vety **1.9.20**, keďže podľa definície regulárneho počítania a predpokladu $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(g_i)$ platí $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{G_i} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y_i)$),

  $\xrightarrow{\mathtt{VymeňSledyBlokov}_{i-1,n;\,i+n-1,1}^{i+n}} \mathsf{NK}^{i+n}(y_1, \dots, y_i, x_1, \dots, x_n) = K_i$

  (podľa vety **1.9.10**).

Zhrnutím podľa vety **1.5.13** teda dostávame požadované tvrdenie.

- Nech $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin \mathrm{Dom}(g_i)$.

  Potom platí:

  výpočet na G_i z $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ je nekonečný
  (podľa definície regulárneho počítania),

  výpočet na $\mathtt{AplikujZaBlokmi}_{i-1}^{G_i}$ z $\mathsf{NK}^{i-1+n}(y_1, \dots, y_{i-1}, x_1, \dots, x_n)$ čiže z K_{i-1} je nekonečný
  (podľa vety **1.9.20**, lebo $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin \mathrm{Dom}(g_i)$),

  výpočet na A_i z K_{i-1} je nekonečný
  (podľa vety **1.5.13**).

3

- Ak pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ platí $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathrm{Dom}(g_i)$, tak $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \overset{B}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{n+k}(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n)$.
- V opačnom prípade je výpočet na B z $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ nekonečný.

- Dokazované tvrdenie platí podľa sublemy **2** a vety **1.5.13**.
- Dokazované tvrdenie platí podľa sublemy **2** a vety **1.5.13**.

4

- Ak $\langle y_1, \dots, y_k \rangle \in \mathrm{Dom}(h)$, tak $\mathsf{NK}^{n+k}(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n) \overset{C}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{k+1}(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_n))$.
- Ak $\langle y_1, \dots, y_k \rangle \notin \mathrm{Dom}(h)$, tak výpočet na stroji C z konfigurácie $\mathsf{NK}^{n+k}(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n)$ je nekonečný.

- Nech $\langle y_1, \dots, y_k \rangle \in \mathrm{Dom}(h)$.

  Potom platí:

  $\mathsf{NK}^{k+n}(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n)$

  $\overset{\mathtt{VymeňSledyBlokov}_{0,k;k,n}^{k+n}}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{n+k}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$
  (podľa vety **1.9.10**),

  $\overset{\mathtt{AplikujZaBlokmi}_n^H}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{n+k+1}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k, z)$
  (podľa vety **1.9.20**, keďže podľa definície regulárneho počítania a predpokladu $\langle y_1, \dots, y_k \rangle \in \mathrm{Dom}(h)$ platí $\mathsf{NK}^k(y_1, \dots, y_k) \overset{H}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{k+1}(y_1, \dots, y_k, z)$),

  $\overset{\mathtt{VymažSledBlokov}_{n,k}^{n+k+1}}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, z) = \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$
  (podľa vety **1.9.12**).

  Zhrnutím podľa vety **1.5.13** dostávame požadované tvrdenie.

- Nech $\langle y_1, \dots, y_k \rangle \notin \mathrm{Dom}(h)$.

  Potom platí:

  výpočet na stroji H z $\mathsf{NK}^k(y_1, \dots, y_k)$ je nekonečný
  (podľa definície regulárneho počítania),

  výpočet na stroji $\mathtt{AplikujZaBlokmi}_n^H$ z $\mathsf{NK}^{n+k}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ je nekonečný
  (podľa vety **1.9.20**),

  $\mathsf{NK}^{k+n}(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n) \overset{\mathtt{VymeňSledyBlokov}_{0,k;k,n}^{k+n}}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{n+k}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$
  (podľa vety **1.9.10**),

  výpočet na C z $\mathsf{NK}^{k+n}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ je nekonečný
  (podľa vety **1.5.13**).

5

- Ak $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathrm{Dom}(f)$, tak $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \overset{F}{\dashrightarrow} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$.
- Ak $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin \mathrm{Dom}(f)$, tak výpočet na F z $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ je nekonečný.

Podľa definície zloženia platí, že $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathrm{Dom}(f)$ práve vtedy, keď pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ platí $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$

$\in \mathrm{Dom}(g_i)$ a $\langle y_1, \dots, y_k \rangle \in \mathrm{Dom}(h)$. Požadované tvrdenie potom v oboch prípadoch dostávame podľa vety **1.5.13** a sublem **3** a **4**.

Sublemy **1** a **5** však podľa definícií regulárneho počítania a zloženia znamenajú, že stroj F regulárne počíta funkciu f, a teda podľa definície `RegulárneTuringovskéFunkcie` platí $f \in$ `RegulárneTuringovskéFunkcie`.

I Predpokladajme, že platí:

- $h(a, b, c, d) = d(a + ab)$.
- $g_1(x, y, z) = xyz$.
- $g_2(x, y, z) = 2x + 3z$.
- $g_3(x, y, z) = y + x$.
- $g_4(x, y, z) = 6$.
- $f(x, y, z) = 6(xyz + xyz(2x + 3z))$.

Podľa definície zloženia vieme, že $f = \mathtt{Zloženie}^{3,4}(\langle g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle, h)$. Predpokladajme, že máme k dispozícii (úplné) stroje G_1, G_2, G_3, G_4 a H, ktoré postupne regulárne počítajú funkcie g_1, g_2, g_3, g_4 a h.
Ukážme dôležité konfigurácie výpočtu hodnoty $f(3, 4, 2)$ podľa vety **5** (včítane označení):

			$\mathsf{NK}^3(3, 4, 2)$ čiže K_0	
B	A_1	$\mathtt{AplikujZaBlokmi}_0^{G_1}$	$\mathsf{NK}^4(3, 4, 2, 24)$	výpočet y_1 čiže $g_1(3, 4, 2)$
		$\mathtt{VymeňSledyBlokov}_{0,3;3,1}^4$	$\mathsf{NK}^4(24, 3, 4, 2)$ čiže K_1	odloženie medzivýsledku
	A_2	$\mathtt{AplikujZaBlokmi}_1^{G_2}$	$\mathsf{NK}^5(24, 3, 4, 2, 12)$	výpočet y_2 čiže $g_2(3, 4, 2)$
		$\mathtt{VymeňSledyBlokov}_{1,3;4,1}^5$	$\mathsf{NK}^5(24, 12, 3, 4, 2)$ čiže K_2	odloženie medzivýsledku
	A_3	$\mathtt{AplikujZaBlokmi}_2^{G_3}$	$\mathsf{NK}^6(24, 12, 3, 4, 2, 7)$	výpočet y_3 čiže $g_3(3, 4, 2)$
		$\mathtt{VymeňSledyBlokov}_{2,3;5,1}^6$	$\mathsf{NK}^6(24, 12, 7, 3, 4, 2)$ čiže K_3	odloženie medzivýsledku
	A_4	$\mathtt{AplikujZaBlokmi}_3^{G_4}$	$\mathsf{NK}^7(24, 12, 7, 3, 4, 2, 6)$	výpočet y_4 čiže $g_4(3, 4, 2)$
		$\mathtt{VymeňSledyBlokov}_{3,3;6,1}^7$	$\mathsf{NK}^7(24, 12, 7, 6, 3, 4, 2)$ čiže K_4	odloženie medzivýsledku
C		$\mathtt{VymeňSledyBlokov}_{0,4;4,3}^7$	$\mathsf{NK}^7(3, 4, 2, 24, 12, 7, 6)$	výmena vstupov a medzivýsledkov
		$\mathtt{AplikujZaBlokmi}_3^{H}$	$\mathsf{NK}^8(3, 4, 2, 24, 12, 7, 6, 1872)$	výpočet z čiže $h(24, 12, 7, 6)$
		$\mathtt{VymažSledBlokov}_{3,4}^8$	$\mathsf{NK}^4(3, 4, 2, 1872)$	vymazanie medzivýsledkov

To zodpovedá požadovanému výsledku, lebo $f(3, 4, 2) = 6 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 + 3 \cdot 2)) = 1872$.

V $\boxed{6}$ (*simulácia rekurzie*)

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $f = \mathtt{Rekurzia}^n(g, h)$, pričom g a h sú regulárne turingovské funkcie. Potom aj f je regulárne turingovská funkcia.

Podľa definície `RegulárneTuringovskéFunkcie` existuje úplný stroj G regulárne počítajúci funkciu g a opäť podľa definície `RegulárneTuringovskéFunkcie` existuje úplný stroj H regulárne počítajúci funkciu h.
Nech $x_1, \dots, x_n$ a y sú ľubovoľné prirodzené čísla. Pre každé i z $\{0, \dots, y\}$ označme z_i hodnotu $f(x_1, \dots, x_n, i)$ (ak existuje). Z definície rekurzie potom platí:

1 $z_0 = g(x_1, \dots, x_n)$ (ak z_0 existuje).

2 Pre každé i z $\{0, \dots, y - 1\}$ platí $z_{i+1} = h(x_1, \dots, x_n, i, z_i)$ (ak z_i a z_{i+1} existujú).

Nech pre každé i z $\{0, \dots, y\}$ také, že z_i existuje, platí

$$K_i = \mathsf{NK}^{n+3}(y, x_1, \dots, x_n, i, z_i).$$

Nech platí:

- $A = \mathtt{Sekvencia}^3(\mathtt{VymeňSledyBlokov}_{0,n;n,1}^{n+1}, \mathtt{AplikujZaBlokmi}_1^G, \mathtt{VložNulovýBlok}_{n+1}^{n+2})$.
- $B = \mathtt{Sekvencia}^3(\mathtt{AplikujZaBlokmi}_1^H, \mathtt{VymažSledBlokov}_{n+2,1}^{n+4}, \mathtt{InkrementujVybranýBlok}_{n+2}^{n+3})$.
- $C = \mathtt{Cyklus}(\mathtt{PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý}_{1,n+2}^{n+3} \odot B)$.
- $D = \mathtt{VymažSledBlokov}_{0,1}^{n+3}$.

Nech $F = \mathtt{Sekvencia}^3(A, C, D)$,

1 Stroj F je úplný.

Postupne platí:

A je úplný
(podľa viet **1.9.9**, **1.9.19** a **1.9.17** a definície $\mathtt{Sekvencia}^3$),

B je úplný
(podľa viet **1.9.19**, **1.9.11** a **1.9.15** a definície $\mathtt{Sekvencia}^3$),

$\mathtt{PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý}^{n+3}_{1,n+2} \odot B$ je poloúplný
(podľa viet **1.9.21** a **1.5.19**),

C je úplný
(podľa vety **1.5.24**),

D je úplný
(podľa vety **1.9.11**),

F je úplný
(podľa definície $\mathtt{Sekvencia}^3$).

2
- Ak z_0 existuje, tak $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y) \xrightarrow{A} K_0$.
- Ak z_0 neexistuje, tak výpočet na stroji A z konfigurácie $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y)$ je nekonečný.

- Nech z_0 existuje.
  To znamená, že $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathrm{Dom}(g)$. Potom platí:
  $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y)$
  $\xrightarrow{\mathtt{VymeňSledyBlokov}^{n+1}_{0,n;n,1}} \mathsf{NK}^{n+1}(y, x_1, \ldots, x_n)$
  (podľa vety **1.9.10**),
  $\xrightarrow{\mathtt{AplikujZaBlokmi}^{G}_{1}} \mathsf{NK}^{n+2}(y, x_1, \ldots, x_n, z_0)$
  (podľa vety **1.9.20**, keďže podľa definície regulárneho počítania a toho, že $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathrm{Dom}(g)$, platí $\mathsf{NK}^{n}(x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow{G} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, z_0)$),
  $\xrightarrow{\mathtt{VložNulovýBlok}^{n+2}_{n+1}} \mathsf{NK}^{n+3}(y, x_1, \ldots, x_n, 0, z_0) = K_0$
  (podľa vety **1.9.18**).
  Zhrnutím podľa vety **1.5.13** teda dostávame požadované tvrdenie.
- Nech z_0 neexistuje.
  To znamená, že $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin \mathrm{Dom}(g)$. Potom platí:
  výpočet na G z $\mathsf{NK}^{n}(x_1, \ldots, x_n)$ je nekonečný
  (podľa definície regulárneho počítania),
  výpočet na $\mathtt{AplikujZaBlokmi}^{G}_{1}$ z $\mathsf{NK}^{n+1}(y, x_1, \ldots, x_n)$ je nekonečný
  (podľa vety **1.9.20**, lebo $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin \mathrm{Dom}(g)$),
  výpočet na A z $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y)$ je nekonečný
  (podľa viet **1.9.10** a **1.5.13**).

3 Nech z_i existuje.
- Ak z_{i+1} existuje, tak $K_i \xrightarrow{B} K_{i+1}$.
- Ak z_{i+1} neexistuje, výpočet na stroji B z konfigurácie K_i je nekonečný.

- Nech z_{i+1} existuje.
  To znamená, že $\langle x_1, \ldots, x_n, i, z_i \rangle \in \mathrm{Dom}(h)$. Potom platí:
  $K_i = \mathsf{NK}^{n+3}(y, x_1, \ldots, x_n, i, z_i)$,

$\xrightarrow{\texttt{AplikujZaBlokmi}_1^H}$ $\mathsf{NK}^{n+4}(y, x_1, \dots, x_n, i, z_i, z_{i+1})$
(podľa vety **1.9.20**, keďže podľa definície regulárneho počítania a toho, že $\langle x_1, \dots, x_n, i, z_i \rangle \in \mathrm{Dom}(h)$, platí $\mathsf{NK}^{n+2}(x_1, \dots, x_n, i, z_i) \xrightarrow{H} \mathsf{NK}^{n+3}(x_1, \dots, x_n, i, z_i, z_{i+1})$),

$\xrightarrow{\texttt{VymažSledBlokov}_{n+2,1}^{n+4}}$ $\mathsf{NK}^{n+3}(y, x_1, \dots, x_n, i, z_{i+1})$
(podľa vety **1.9.12**),

$\xrightarrow{\texttt{InkrementujVybranýBlok}_{n+2}^{n+3}}$ $\mathsf{NK}^{n+3}(y, x_1, \dots, x_n, i+1, z_{i+1}) = K_{i+1}$
(podľa vety **1.9.16**).

Zhrnutím podľa vety **1.5.13** už dostávame požadované tvrdenie.

- Nech z_{i+1} neexistuje.
  To znamená, že $\langle x_1, \dots, x_n, i, z_i \rangle \notin \mathrm{Dom}(h)$. Potom platí:
  výpočet na H z $\mathsf{NK}^{n+2}(x_1, \dots, x_n, i, z_i)$ je nekonečný
  (podľa definície regulárneho počítania),
  výpočet na $\texttt{AplikujZaBlokmi}_1^H$ z $\mathsf{NK}^{n+3}(y, x_1, \dots, x_n, i, z_i)$ je nekonečný
  (podľa vety **1.9.20**, lebo $\langle x_1, \dots, x_n, i, z_i \rangle \notin \mathrm{Dom}(h)$),
  výpočet na B z K_i je nekonečný
  (podľa vety **1.5.13**).

4 Nech z_0 existuje.
- Ak pre každé i z $\{1, \dots, y\}$ existuje z_i, tak $K_0 \xrightarrow{C} K_y$.
- V inom prípade je výpočet na stroji C z konfigurácie K_0 nekonečný.

- Nech pre každé i z $\{1, \dots, y\}$ existuje z_i. Potom podľa vety **1.9.22** a sublemy **3** sú splnené podmienky vety **1.5.26**. Podľa nej dostávame $K_0 \xrightarrow{C} K_y$.
- Nech existuje i z $\{1, \dots, y\}$ také, že z_i neexistuje, bez ujmy na všeobecnosti nech je to najmenšie také (podľa predpokladu platí $i > 0$). Potom podľa vety **1.9.22** a sublemy **3** sú splnené podmienky vety **1.5.26**. Podľa nej je výpočet na C z K_0 nekonečný.

5 $K_y \xrightarrow{D} \mathsf{NK}^{n+2}(x_1, \dots, x_n, y, z_y)$.

Dokazované tvrdenie platí podľa vety **1.9.12**, keďže $K_y = \mathsf{NK}^{n+3}(y, x_1, \dots, x_n, y, z_y)$.

6
- Ak pre každé i z $\{0, \dots, y\}$ existuje z_i, tak $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y) \xrightarrow{F} \mathsf{NK}^{n+2}(x_1, \dots, x_n, y, z_y)$.
- V opačnom prípade je výpočet na F z $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)$ nekonečný.

- Nech pre každé i z $\{0, \dots, y\}$ existuje z_i.
  Podľa vety **1.5.13** a sublem **2**, **4** a **5** potom dostávame požadované tvrdenie.
- V opačnom prípade máme dve možnosti:
  - Ak neexistuje z_0, prvá časť výpočtu (na stroji A) je podľa sublemy **2** nekonečná, a teda podľa vety **1.5.13** je výpočet na F z $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)$ nekonečný.
  - Ak existuje z_0 a i z $\{1, \dots, y\}$ je najmenšie také, že z_i neexistuje, druhá časť výpočtu (na stroji C) je podľa sublemy **4** nekonečná, a teda podľa vety **1.5.13** je výpočet na F z $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)$ nekonečný.

Sublemy **1** a **6** však podľa definícií regulárneho počítania a rekurzie znamenajú, že stroj F regulárne počíta funkciu f, a teda podľa definície `RegulárneTuringovskéFunkcie` už $f \in$ `RegulárneTuringovskéFunkcie`.

I Všimnime si, že ak $g(a) = 1$ (t. j. $g = \texttt{Konštanta}_1^1$) a $h(a, b, c) = ca$, tak platí:

1 $\texttt{Mocnina}(x_1, 0) = x_1^0 = 1 = g(x_1)$.

2 $\texttt{Mocnina}(x_1, y+1) = x_1^{y+1} = x_1^y \cdot x_1 = \texttt{Mocnina}(x_1, y) \cdot x_1 = h(x_1, y, \texttt{Mocnina}(x_1, y))$.

Podľa definície rekurzie vieme, že $\mathtt{Mocnina} = \mathtt{Rekurzia}^1(g, h)$. Predpokladajme, že máme k dispozícii stroje G a H, ktoré postupne regulárne počítajú funkcie g a h.
Ukážme dôležité konfigurácie výpočtu hodnoty $\mathtt{Mocnina}(2, 3)$ podľa vety **6** (včítane označení):

			$\mathsf{NK}^2(2,3)$	
A		$\mathtt{VymeňSledyBlokov}^2_{0,1;1,1}$	$\mathsf{NK}^2(3,2)$	odloženie hranice
		$\mathtt{AplikujZaBlokmi}^G_1$	$\mathsf{NK}^3(3,2,1)$	výpočet z_0 čiže $g(2)$
		$\mathtt{VložNulovýBlok}^3_2$	$\mathsf{NK}^4(3,2,0,1)$ čiže K_0	vytvorenie počítadla
C		$\mathtt{PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý}^4_{1,3}$	$\mathsf{NK}^4(3,2,0,1)$	porovnanie hranice a počítadla: ešte
	B	$\mathtt{AplikujZaBlokmi}^H_1$	$\mathsf{NK}^5(3,2,0,1,2)$	výpočet z_1 čiže $h(2,0,1)$
		$\mathtt{VymažSledBlokov}^5_{3,1}$	$\mathsf{NK}^4(3,2,0,2)$	vymazanie už nepotrebného z_0
		$\mathtt{InkrementujVybranýBlok}^4_3$	$\mathsf{NK}^4(3,2,1,2)$ čiže K_1	inkrementácia počítadla
		$\mathtt{PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý}^4_{1,3}$	$\mathsf{NK}^4(3,2,1,2)$	porovnanie hranice a počítadla: ešte
	B	$\mathtt{AplikujZaBlokmi}^H_1$	$\mathsf{NK}^5(3,2,1,2,4)$	výpočet z_2 čiže $h(2,1,2)$
		$\mathtt{VymažSledBlokov}^5_{3,1}$	$\mathsf{NK}^4(3,2,1,4)$	vymazanie už nepotrebného z_1
		$\mathtt{InkrementujVybranýBlok}^4_3$	$\mathsf{NK}^4(3,2,2,4)$ čiže K_2	inkrementácia počítadla
		$\mathtt{PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý}^4_{1,3}$	$\mathsf{NK}^4(3,2,2,4)$	porovnanie hranice a počítadla: ešte
	B	$\mathtt{AplikujZaBlokmi}^H_1$	$\mathsf{NK}^5(3,2,2,4,8)$	výpočet z_3 čiže $h(2,2,4) = 8$
		$\mathtt{VymažSledBlokov}^5_{3,1}$	$\mathsf{NK}^4(3,2,2,8)$	vymazanie už nepotrebného z_2
		$\mathtt{InkrementujVybranýBlok}^4_3$	$\mathsf{NK}^4(3,2,3,8)$ čiže K_3	inkrementácia počítadla
		$\mathtt{PrvýVybranýBlokJeVäčšíNežDruhý}^4_{1,3}$	$\mathsf{NK}^4(3,2,3,8)$	porovnanie hranice a počítadla: už nie
D		$\mathtt{VymažSledBlokov}^4_{0,1}$	$\mathsf{NK}^3(2,3,8)$	vymazanie už nepotrebnej hranice

To zodpovedá požadovanému výsledku, že $\mathtt{Mocnina}(2, 3) = 8$.

V **7** (*simulácia minimalizácie*)

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $f = \mathtt{Minimalizácia}^n(g)$, pričom g je regulárne turingovská funkcia. Potom aj f je regulárne turingovská funkcia.

Podľa definície $\mathtt{RegulárneTuringovskéFunkcie}$ existuje úplný stroj G regulárne počítajúci funkciu g.
Nech x_1, ..., x_n sú ľubovoľné prirodzené čísla. Kvôli prehľadnosti pre každé i z $\mathbb{N}$ nech z_i je hodnota $g(x_1, \dots, x_n, i)$ (ak existuje).
Nech pre každé i z $\mathbb{N}$ také, že z_i existuje, platí

$$K_i = \mathsf{NK}^{n+2}(x_1, \dots, x_n, i, z_i).$$

Nech platí:

- $A = \mathtt{Sekvencia}^2(\mathtt{VložNulovýBlok}^n_n, G)$.
- $B = \mathtt{Sekvencia}^3(\mathtt{VymažSledBlokov}^{n+2}_{n+1,1}, \mathtt{InkrementujVybranýBlok}^{n+1}_{n+1}, G)$.
- $C = \mathtt{Cyklus}(\mathtt{VybranýBlokJeKladný}^{n+2}_{n+2} \odot B)$.
- $D = \mathtt{VymažSledBlokov}^{n+2}_{n+1,1}$.

Nech $F = \mathtt{Sekvencia}^3(A, C, D)$.

1 Stroj F je úplný.

Postupne platí:
A je úplný
(podľa vety **1.9.17**, toho, že G je úplný, a definície $\mathtt{Sekvencia}^2$),
B je úplný
(podľa viet **1.9.11** a **1.9.15**, toho, že G je úplný, a definície $\mathtt{Sekvencia}^3$),
$\mathtt{VybranýBlokJeKladný}^{n+2}_{n+2} \odot B$ je poloúplný
(podľa viet **1.9.23** a **1.5.19**),
C je úplný
(podľa vety **1.5.24**),

D je úplný
(podľa vety **1.9.11**),
F je úplný
(podľa definície Sekvencia[3]).

2
- Ak z_0 existuje, tak $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{A} K_0$.
- Ak z_0 neexistuje, tak výpočet na stroji A z konfigurácie $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ je nekonečný.

- Nech z_0 existuje.
  To znamená, že $\langle x_1, \dots, x_n, 0\rangle \in \mathrm{Dom}(g)$. Potom platí:
  $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$
  $\xrightarrow{\mathtt{VložNulovýBlok}^n_n} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0)$
  (podľa vety **1.9.18**),
  $\xrightarrow{G} \mathsf{NK}^{n+2}(x_1, \dots, x_n, 0, z_0) = K_0$
  (podľa definície regulárneho počítania, lebo $\langle x_1, \dots, x_n, 0\rangle \in \mathrm{Dom}(g)$).
  Zhrnutím podľa vety **1.5.13** teda dostávame požadované tvrdenie.
- Nech z_0 neexistuje.
  To znamená, že $\langle x_1, \dots, x_n, 0\rangle \notin \mathrm{Dom}(g)$. Potom platí:
  výpočet na G z $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0)$ je nekonečný
  (podľa definície regulárneho počítania, lebo $\langle x_1, \dots, x_n, 0\rangle \notin \mathrm{Dom}(g)$),
  $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\mathtt{VložNulovýBlok}^n_n} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0)$
  (podľa vety **1.9.18**),
  výpočet na A z $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ je nekonečný
  (podľa vety **1.5.13**).

3
Nech z_i existuje.
- Ak z_{i+1} existuje, tak $K_i \xrightarrow{B} K_{i+1}$.
- Ak z_{i+1} neexistuje, tak výpočet na stroji B z konfigurácie K_i je nekonečný.

- Nech z_{i+1} existuje.
  To znamená, že $\langle x_1, \dots, x_n, i+1\rangle \in \mathrm{Dom}(g)$. Potom platí:
  $K_i = \mathsf{NK}^{n+2}(x_1, \dots, x_n, i, z_i)$,
  $\xrightarrow{\mathtt{VymažSledBlokov}^{n+2}_{n+1,1}} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, i)$
  (podľa vety **1.9.12**),
  $\xrightarrow{\mathtt{InkrementujVybranýBlok}^{n+1}_{n+1}} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, i+1)$
  (podľa vety **1.9.16**),
  $\xrightarrow{G} \mathsf{NK}^{n+2}(x_1, \dots, x_n, i+1, z_{i+1}) = K_{i+1}$
  (podľa definície regulárneho počítania, lebo $\langle x_1, \dots, x_n, i+1\rangle \in \mathrm{Dom}(g)$).
  Zhrnutím podľa vety **1.5.13** teda dostávame požadované tvrdenie.
- Nech z_{i+1} neexistuje.
  To znamená, že $\langle x_1, \dots, x_n, i+1\rangle \notin \mathrm{Dom}(g)$. Potom platí:
  výpočet na G z $\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, i+1)$ je nekonečný
  (podľa definície regulárneho počítania, lebo $\langle x_1, \dots, x_n, i+1\rangle \notin \mathrm{Dom}(g)$),
  $K_i = \mathsf{NK}^{n+2}(x_1, \dots, x_n, i, z_i) \xrightarrow{\mathtt{VymažSledBlokov}^{n+2}_{n+1,1}} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, i)$
  (podľa vety **1.9.12**),

$\mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, i) \xrightarrow{\texttt{InkrementujVybranýBlok}^{n+1}_{n+1}} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, i+1)$
(podľa vety **1.9.16**),

výpočet na B z K_i je nekonečný
(podľa vety **1.5.13**).

4
- Ak existuje y také, že $z_y = 0$ a pre každé i z $\{0, \dots, y-1\}$ platí $z_i > 0$, tak $K_0 \xrightarrow{C} K_y$.
- V inom prípade je výpočet na stroji C z konfigurácie K_0 nekonečný.

- Nech existuje y z $\mathbb{N}$ také, že $z_y = 0$ a pre každé i z $\{0, \dots, y-1\}$ platí $z_i > 0$. Potom podľa vety **1.9.24** a sublemy **3** sú splnené podmienky vety **1.5.26**. Podľa nej máme $K_0 \xrightarrow{C} K_y$.
- V inom prípade máme dve možnosti:
  - Nech existuje y z $\mathbb{N}$ také, že z_y neexistuje a pre každé i z $\{0, \dots, y-1\}$ platí $z_i > 0$. Potom podľa vety **1.9.24** a sublemy **3** sú splnené podmienky vety **1.5.26**. Podľa nej je však výpočet na C z K_0 nekonečný.
  - Nech pre každé i z $\mathbb{N}$ platí $z_i > 0$. Potom podľa vety **1.9.24** a sublemy **3** sú splnené podmienky vety **1.5.26**. Podľa nej je však výpočet na C z K_0 nekonečný.

5 Ak z_i existuje, tak $K_i \xrightarrow{D} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, i)$.

Podľa vety **1.9.12**, keďže $K_i = \mathsf{NK}^{n+2}(x_1, \dots, x_n, i, z_i)$.

6
- Ak existuje y, že $z_y = 0$, a z $i < y$ vyplýva $z_i > 0$, tak $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{F} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, z_y)$.
- V opačnom prípade je výpočet na F z $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ nekonečný.

- Podľa vety **1.5.13** a sublem **2**, **4** a **5** platí $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{F} \mathsf{NK}^{n+1}(x_1, \dots, x_n, z_y)$.
- Rozoberme dva prípady:
  - Nech neexistuje z_0.
    Podľa sublemy **2** potom je výpočet na A z $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ nekonečný, takže podľa vety **1.5.13** je aj výpočet na F z $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ nekonečný.
  - Nech existuje z_0.
    Podľa predpokladu potom nie je pravda, že existuje y z $\mathbb{N}$ také, že $z_y = 0$ a pre každé i z $\{0, \dots, y-1\}$ platí $z_i > 0$. Podľa sublemy **4** je potom výpočet na C z K_0 nekonečný, a keďže podľa sublemy **2** platí $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{A} K_0$, podľa vety **1.5.13** je aj výpočet na F z $\mathsf{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ nekonečný.

Sublemy **1** a **6** podľa definícií regulárneho počítania a minimalizácie znamenajú, že stroj F regulárne počíta funkciu f, a teda podľa definície `RegulárneTuringovskéFunkcie` $f \in$ `RegulárneTuringovskéFunkcie`.

I Vieme už, že `Rozdiel` $=$ `Minimalizácia`$^2(g)$, kde

$$g(a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{ak } a = b + c, \\ 1 & \text{inak.} \end{cases}$$

Predpokladajme teda, že máme k dispozícii stroj G, ktorý regulárne počíta funkciu g. Ukážme dôležité konfigurácie výpočtu hodnoty `Rozdiel`$(5, 2)$ podľa vety **7** (včítane označení):

			$\mathtt{NK}^2(5,2)$	
A		$\mathtt{VložNulovýBlok}_2^2$	$\mathtt{NK}^3(5,2,0)$	vytvorenie budúceho výsledku
		G	$\mathtt{NK}^4(5,2,0,1) = K^0$	výpočet z_0 čiže $g(5,2,0)$
C		$\mathtt{VybranýBlokJeKladný}_4^4$	$\mathtt{NK}^4(5,2,0,1)$	porovnanie z_0 s nulou: ešte
	B	$\mathtt{VymažSledBlokov}_{3,1}^4$	$\mathtt{NK}^3(5,2,0)$	vymazanie už nepotrebného z_0
		$\mathtt{InkrementujVybranýBlok}_3^3$	$\mathtt{NK}^3(5,2,1)$	inkrementácia budúceho výsledku
		G	$\mathtt{NK}^4(5,2,1,1) = K^1$	výpočet z_1 čiže $g(5,2,1)$
		$\mathtt{VybranýBlokJeKladný}_4^4$	$\mathtt{NK}^4(5,2,1,1)$	porovnanie z_1 s nulou: ešte
	B	$\mathtt{VymažSledBlokov}_{3,1}^4$	$\mathtt{NK}^3(5,2,1)$	vymazanie už nepotrebného z_1
		$\mathtt{InkrementujVybranýBlok}_3^3$	$\mathtt{NK}^3(5,2,2)$	inkrementácia budúceho výsledku
		G	$\mathtt{NK}^4(5,2,2,1) = K^2$	výpočet z_2 čiže $g(5,2,2)$
		$\mathtt{VybranýBlokJeKladný}_4^4$	$\mathtt{NK}^4(5,2,2,1)$	porovnanie z_2 s nulou: ešte
	B	$\mathtt{VymažSledBlokov}_{3,1}^4$	$\mathtt{NK}^3(5,2,2)$	vymazanie už nepotrebného z_2
		$\mathtt{InkrementujVybranýBlok}_3^3$	$\mathtt{NK}^3(5,2,3)$	inkrementácia budúceho výsledku
		G	$\mathtt{NK}^4(5,2,3,0) = K^3$	výpočet z_3 čiže $g(5,2,3)$
		$\mathtt{VybranýBlokJeKladný}_4^4$	$\mathtt{NK}^4(5,2,3,0)$	porovnanie z_3 s nulou: už nie
D		$\mathtt{VymažSledBlokov}_{3,1}^4$	$\mathtt{NK}^3(5,2,3)$	vymazanie už nepotrebného z_3

To zodpovedá požadovanému výsledku, že $\mathtt{Rozdiel}(5,2) = 3$.

V **8**

$\mathtt{RekurzívneFunkcie} \subseteq \mathtt{RegulárneTuringovskéFunkcie}$.

Tvrdenie dokážeme štrukturálnou indukciou podľa definície RF:

1 Podľa viet **2**, **3** a **4** je každá základná rekurzívna funkcia regulárne turingovsky vypočítateľná.

2 **a** Nech $f = \mathtt{Zloženie}^{n,k}(\langle g_1, \dots, g_k\rangle, h)$, kde $n, k \in \mathbb{N}$ a g_1, ..., g_k a h sú rekurzívne. Podľa indukčných predpokladov sú potom g_1, ..., g_k a h regulárne turingovsky vypočítateľné, teda podľa vety **5** je aj f regulárne turingovsky vypočítateľná.

b Nech $f = \mathtt{Rekurzia}^n(g, h)$, kde $n \in \mathbb{N}$ a g a h sú rekurzívne. Podľa indukčných predpokladov sú potom g a h regulárne turingovsky vypočítateľné, teda podľa vety **6** je aj f regulárne turingovsky vypočítateľná.

c Nech $f = \mathtt{Minimalizácia}^n(g)$, kde $n \in \mathbb{N}$ a g je rekurzívna. Podľa indukčného predpokladu je potom g regulárne turingovsky vypočítateľná, teda podľa vety **7** je aj f regulárne turingovsky vypočítateľná.

V **9**

$\mathtt{RekurzívneFunkcie} \subseteq \mathtt{TuringovskéFunkcie}$.

Tvrdenie je dôsledkom viet **8** a **1**.

V **10**

$\mathtt{RekurzívneFunkcie} = \mathtt{TuringovskéFunkcie}$.

Jedna inklúzia je tvrdenie vety **9** a druhá tvrdenie vety **6.7**.

Tieto výsledky nám okrem iného dávajú odpoveď na to, či existuje nejaká nerekurzívna funkcia: Stačí si uvedomiť, že už len indikátorových funkcií s jedným vstupom je nespočítateľne veľa (každá totiž kanonicky zodpovedá inej podmnožine $\mathbb{N}$), kým všetkých rekurzívnych (čiže turingovských) je len spočítateľne veľa (lebo každá je počítaná nejakým Turingovým strojom a tie sú kódované prirodzenými číslami). Z toho vyplýva, že nerekurzívnych funkcií je dokonca podstatne viac než rekurzívnych. Zatiaľ sme sa však (paradoxne?) so žiadnou nestretli. V ďalšej stati to napravíme – a uvedený príklad nebude len tak hocijaký. Obsahovo totiž úzko súvisí s práve preberanou problematikou Turingových strojov.

2.8 Problém zastavenia sa Turingovho stroja

Všimnime si, že by sa nám náramne hodila existencia algoritmu, ktorý by (v konečnom čase) vedel rozhodnúť, či sa výpočet na danom Turingovom stroji pre daný vstup skončí alebo nie. V druhom prípade by sme totiž nepotrebovali tento stroj vôbec spúšťať, pretože výsledok by nám bol už vopred známy. Tým by sme eliminovali potenciálne „nebezpečenstvo" nekonečného výpočtu, lebo v oboch prípadoch by sme plnú informáciu o výsledku výpočtu dostali v konečnom čase. Boli by sme teda schopní v istom zmysle nekonečno redukovať na konečno. Žiaľ, ako ukazujú nasledujúce dve vety, takáto redukcia nie je možná – žiadny takýto algoritmus neexistuje. Zdôraznime, že pri dôkaze prvej z nich sa používa (ako obvykle pri podobných paradoxných príkladoch v rôznych oblastiach matematiky) príslušne upravená geniálna Cantorova myšlienka diagonalizácie, keď hrá istý objekt dvojjedinú úlohu.

D Nech $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkciu $\texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n$ z $\mathbb{N}^{n+1}$ do $\mathbb{N}$ vzťahom

$$\texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} 1, & \text{ak existuje stroj } T\text{, že } \texttt{KódStroja}(T) = y \\ & \text{a existuje } \texttt{Koniec}(\texttt{NK}^1(x_1, \dots, x_n), T), \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

V $\boxed{\mathbf{1}}$

Nech $n \in \mathbb{N}^+$. Potom $\texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n \notin \texttt{RekurzívneFunkcie}$.

Nech $\texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n \in \texttt{RF}$. Definujme funkciu f vzťahom:

$$f(x_1, \dots, x_n) \begin{cases} = 0, & \text{ak } \texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(x_1, \dots, x_n, x_1) = 0, \\ \text{nie je definované} & \text{inak.} \end{cases}$$

1 $f \in \texttt{RF}$.

Všimnime si, že ak podmienka $\texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(x_1, \dots, x_n, x_1) = 0$ z prvého prípadu v definícii f platí, množina $\{y : \texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(x_1, \dots, x_n, x_1) = 0\}$ je rovná $\mathbb{N}$, je teda neprázdna a jej minimum je 0. Naopak, ak táto podmienka neplatí, táto množina je prázdna. Platí preto

$$f(x_1, \dots, x_n) \begin{cases} = \min\{y : \texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(x_1, \dots, x_n, x_1) = 0\}, \\ \qquad \text{ak } \{y : \texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(x_1, \dots, x_n, x_1) = 0\} \neq \emptyset, \\ \text{nie je definované} \\ \qquad \text{inak.} \end{cases}$$

Nech

$$g(x_1, \dots, x_n, y) = \texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(x_1, \dots, x_n, x_1),$$

čiže pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ podľa definície $\texttt{Projekcia}_i^{n+1}$

$$g(x_1, \dots, x_n, y) = \texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n$$
$$(\texttt{Projekcia}_1^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y), \dots, \texttt{Projekcia}_n^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y), \texttt{Projekcia}_1^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)).$$

Podľa definícií $\texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n$ a pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ $\texttt{Projekcia}_i^{n+1}$ sú tieto funkcie totálne a všetky patria do $\texttt{RF}$ (prvá podľa predpokladu a zvyšné podľa definície $\texttt{RF}$). Keďže podľa definície zloženia platí

$$g = \texttt{Zloženie}^{n+1,n+1}$$
$$(\langle \texttt{Projekcia}_1^{n+1}, \dots, \texttt{Projekcia}_n^{n+1}, \texttt{Projekcia}_1^{n+1} \rangle, \texttt{PreVstupSaStrojZastaví}^n),$$

aj g je totálna a podľa definície $\texttt{RF}$ platí $g \in \texttt{RF}$.
Navyše podľa definícií f a g máme

$$f(x_1, \dots, x_n) \begin{cases} = \min\{y : g(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}, & \text{ak } \{y : g(x_1, \dots, x_n, y) = 0\} \neq \emptyset, \\ \text{nie je definované} & \text{inak.} \end{cases}$$

Podľa vety **6.1** a definície $\texttt{RF}$ teda platí $f = \texttt{Minimalizácia}^n(g) \in \texttt{RF}$.

Podľa sublemy **1** a vety **7.10** máme $f \in \mathtt{TuringovskéFunkcie}$, podľa definície $\mathtt{TuringovskéFunkcie}$ teda $f = \mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T)$ pre nejaký stroj T. Nech $t = \mathtt{KódStroja}(T)$.

2
$$f(x_1, \dots, x_n) \begin{cases} = \mathtt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n(x_1, \dots, x_n, t), \\ \qquad \text{ak } \mathtt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(x_1, \dots, x_n, t) = 1, \\ \text{nie je definované} \\ \qquad \text{inak.} \end{cases}$$

- Podmienka $\mathtt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(x_1, \dots, x_n, t) = 1$ podľa definícií $\mathtt{PreVstupSaStrojZastaví}^n$ a $\mathtt{Koniec}$ znamená, že výpočet na stroji T z konfigurácie $\mathtt{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ je konečný. V takom prípade podľa vety **6.5** dostávame platnosť $f(x_1, \dots, x_n) = \mathtt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n(x_1, \dots, x_n, t)$.
- Podmienka $\mathtt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(x_1, \dots, x_n, t) = 0$ podľa definícií $\mathtt{PreVstupSaStrojZastaví}^n$ a $\mathtt{Koniec}$ znamená, že výpočet na stroji T z konfigurácie $\mathtt{NK}^n(x_1, \dots, x_n)$ je nekonečný, a teda podľa definície $\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n$ hodnota $(\mathtt{FunkciaPočítanáStrojom}^n(T))(x_1, \dots, x_n)$ čiže $f(x_1, \dots, x_n)$ nie je definovaná.

Zo sublemy **2** špeciálne dostávame

$$f(t, \dots, t) \begin{cases} = \mathtt{VýsledokVýpočtuNaStroji}^n(t, \dots, t, t), \\ \qquad \text{ak } \mathtt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(t, \dots, t, t) = 1, \\ \text{nie je definované} \\ \qquad \text{inak,} \end{cases}$$

na druhej strane však podľa definície f platí

$$f(t, \dots, t) \begin{cases} = 0, & \text{ak } \mathtt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(t, \dots, t, t) = 0, \\ \text{nie je definované} & \text{inak.} \end{cases}$$

Tieto dva vzťahy sú však v rozpore:

- Ak $\mathtt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(t, \dots, t, t) = 1$, tak podľa prvého vzťahu $f(t, \dots, t)$ je definované, ale podľa druhého nie.
- Ak $\mathtt{PreVstupSaStrojZastaví}^n(t, \dots, t, t) = 0$, tak podľa prvého vzťahu $f(t, \dots, t)$ nie je definované, ale podľa druhého áno.

Tento spor znamená, že funkcia $\mathtt{PreVstupSaStrojZastaví}^n$ nie je rekurzívna.

V $\boxed{2}$

Nech $n \in \mathbb{N}^+$. Potom $\mathtt{PreVstupSaStrojZastaví}^n \notin \mathtt{TuringovskéFunkcie}$.

Tvrdenie vyplýva z viet **1** a **7.10**.

Inými slovami – problém, či sa výpočet na danom Turingovom stroji pri danom vstupe zastaví, nie je algoritmicky rozhodnuteľný. Uvedomme si, že to znamená principiálnu nedostatočnosť algoritmického čiže mechanického chápania sveta. Ešte ktorá iná oblasť ľudského ducha vie dokázať svoju obmedzenosť?

Register

Teória vypočítateľnosti
Vysokoškolská učebnica

Autori: doc. RNDr. Ľubomír Antoni, PhD.
prof. RNDr. Stanislav Krajči, PhD.

Vydavateľ: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Vydavateľstvo ŠafárikPress

Rok vydania: 2023
Počet strán: 294
Rozsah: 13,95 AH
Vydanie: prvé

ISBN 978-80-574-0284-8 (e-publikácia)