Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Prírodovedecká fakulta

Lineárne programovanie v úlohách
Linear programming via problem solving

Katarína Cechlárová

Košice 2024

Lineárne programovanie v úlohách/ Linear programming via problem solving

Vysokoškolský učebný text

Autor:
prof. RNDr. Katarína Cechlárová, DrSc.
Prírodovedecká fakulta Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Recenzenti:

doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave

prof. Ioannis Mourtos
Department of management science and technology, Athens university of economics and business, Atény, Grécko

Dostupné od: 22.10.2024
Umiestnenie: www.unibook.upjs.sk

DOI: https://doi.org/10.33542/LPU-0352-4
ISBN 978-80-574-0352-4 (e-publikácia)

Predslov
Foreword

Nápad na dvojjazyčnú zbierku úloh poskytla kniha autorov Horst W. Hamacher a Kathrin Klamroth: Lineare Netzwerk-Optimierung / Linear and Network Optimization, Vieweg, 2000. Verím, že dvojjazyčná forma pomôže študentom lepšie si osvojiť štandardnú anglickú terminológiu lineárneho programovania a celkove zlepšiť jazykové kompetencie a súčasne text v materinskom jazyku im umožní lepšie sa sústrediť na odborné záležitosti.

Obsah vychádza z dlhoročných skúseností autorky s vyučovaním lineárneho programovania a poznania potrieb cvičení. Nevenujem sa teórii, tú sa študenti dozvedia na prednáškach a tiež si ju môžu naštudovať z množstva učebníc, ktorých výber uvádzam na konci publikácie. Cieľom bolo zefektívniť priebeh cvičení a poskytnúť študentom aj ďalší materiál na rozvíjanie svojich zručností.

Každá kapitola má niekoľko častí. ÚVODNÉ OTÁZKY pripomínajú študentom vedomosti potrebné pre prácu s danou témou, odpovede na ne obyčajne poskytuje príslušná prednáška. ZÁKLADNÉ ÚLOHY zodpovedajú tomu, čo sa spravidla robí na cvičení. Je užitočné, ak majú študenti tieto texty so sebou, hlavne ak ide o rozsiahlejšie zadania. Úlohy sú tu usporiadané tak, aby každá ďalšia osvetľovala nový aspekt preberanej témy. Nasledujú OTÁZKY NA ZAMYSLENIE – pomáhajú hlbšiemu pochopeniu a rozvoju tvorivého (matematického) myslenia. DOPLNKOVÉ ÚLOHY poskytujú materiál na získanie rutiny v riešení úloh. Pre niektoré úlohy sme dodali na záver VÝSLEDKY.

Na cvičeniach používame softvér CASSIM (Computer ASsisted SImplex Method) vyvinutý na našom pracovisku. Prvé kroky inicioval môj učiteľ Peter Butkovič, o vývoj ďalších verzií programu sa zaslúžili Juraj Andrássi, Jozef Džama, Pavol Široczki a iní. CASSIM odbremeňuje študenta (aj vyučujúceho, napríklad pri príprave úloh na písomku) od zdĺhavého prepočítavania tabuliek a umožňuje mu sústrediť sa na správny výber pivota, presvedčiť sa o možnosti cyklenia v simplexovej metóde a experimentovať s rôznymi anticyklickými pravidlami, meniť vstupné dáta a študovať rôzne prístupy k postoptimalizačnej analýze, riešiť parametrické úlohy atď. CASSIM využívame aj v ďalších predmetoch, vyučovaných na ÚMAT PF UPJŠ, kde sa využívajú postupy simplexovej metódy, napríklad v predmetoch Konvexná optimalizácia a Teória hier.

The idea of a bilingual problem collection came from the book Horst W. Hamacher and Kathrin Klamroth Lineare Netzwerk-Optimierung / Linear and Network Optimization (2000) published by Vieweg. I believe that using this form of a textbook can help students acquire the specialist terminology in the area as well as improve their general language competencies. The text in their mother tongue provides better opportunities for concentration on scientific aspects of the field.

The contents is based on long-term experience of the author with teaching linear programming and her knowledge of what the teacher and students need to effectively master the practice of the field. The text is not devoted to theory – this is the topic of lectures and students can also use many available textbooks; their sample is given at the end of this publication.

Each chapter consists of a few parts. WARM-UP QUESTIONS recall the knowledge necessary for the work with the topic; the answers are provided in the respective lecture. CORE EXERCISES correspond to what is usually done during tutorials, so I recommend having the text at hand, especially if the formulation of a task is longer. Here, the order of exercises is chosen so as to gradually clarify new aspects of the given topic. BRAIN TEASERS aim at gaining deeper understanding and developing creative mathematical thinking. ADDITIONAL PRACTICE provide material to acquire routine in problem solving. For some problems in each chapter we also provide RESULTS.

During tutorials we use our own software package CASSIM (Computer ASsisted SImplex Method). The first steps were initialized many years ago by my teacher Peter Butkovič, the development of further versions was enabled by Juraj Andrássi, Jozef Džama, Pavol Široczki and others. Thanks CASSIM, students (and also teachers, for example when preparing test papers) get rid of tedious recomputation of tables, and can instead concentrate on the choice of the pivot, discover cycling and experiment with various anticycling methods, modify the input data, study several approaches to post-optimality analysis, solve parametric problems, etc. CASSIM is utilized in other courses given by Institute of mathematics that use variants of simplex method, like Convex programming or Game theory.

K riešeniu reálnych úloh s množstvom premenných a ohraničení je však spravidla potrebné použiť softvér, ktorý neukazuje postupne vytvárané tabuľky, ale je zameraný hlavne na získanie výsledku. Andrej Gajdoš pripravil dva interaktívne Jupyter notebooky obsahujúce ilustračné príklady na riešenie úloh lineárneho i celočíselného programovania v jazyku Python. Prvý interaktívny dokument predstavuje prácu s balíkmi SciPy (vedecký Python - simplexová metóda, metódy vnútorného bodu; https://scipy.org/) a GEKKO (strojové učenie a optimalizácia pre dynamické systémy - celočíselné lineárne programovanie; https://gekko.readthedocs.io/en/latest/). Druhý Jupyter notebook ilustruje prácu s balíkom CVXPY (konvexná optimalizácia - metódy vnútorného bodu; https://www.cvxpy.org/). Uvedené interaktívne súbory je možné staticky prehliadať priamo v github úložisku https://github.com/gajdosandrej/LCO alebo je možné ich otvoriť a upravovať napr. vo voľne dostupnom prostredí Google Colab (https://colab.research.google.com/).

Na záver by som rada poďakovala všetkým, ktorí prispeli k vzniku tejto publikácie. Na príprave jej predošlej verzie sa v roku 2008 podieľala Vierka Borbeľová, ktorá navrhla aj TeX šablónu, pripomienkami prispeli Gabriel Semanišin, Andrej Gajdoš a Adam Marton. Recenzenti podrobne prečítali prvú verziu publikácie, odhalili viacero preklepov a prispeli zmysluplnými návrhmi - ďakujem. A samozrejme, vďaka patrí všetkým študentom, ktorí dávajú našej práci zmysel.

Chyby, ktoré sa v tejto publikácii vyskytujú, sú len moje. Budem vďačná za všetky upozornenia a pripomienky.

If one wants to solve a real problem that usually has a great number of variables and constraints, then it is necesssary to use another sotware, whose task is not to successively present the constructed tables, but is aimed in the first place at finding an optimal solution. Andrej Gajdoš prepared two interactive Jupyter notebooks with illustrative examples for solving linear as well as integer programs in Python. The first interactive document presents the work with packages SciPy (scientific Python - simplex method, interior point methods; https://scipy.org/) and GEKKO (machine learning and optimization for dynamic systems - integer linear programming; https://gekko.readthedocs.io/en/latest/). The second Jupyter notebook is devoted to the work with package CVXPY (convex optimization - interior point methods; https://www.cvxpy.org/). These interactive files can be statically browsed directly in the github repository https://github.com/gajdosandrej/LCO or it is possible to open and modify them for example in the freely available environment Google Colab (https://colab.research.google.com/).

Finally, I would like to thank all, who contributed to the birth of this teaching material. Vierka Borbeľová in 2008 helped with its first version and also designed its TeX template, Gabriel Semanišin, Andrej Gajdoš and Adam Marton provided useful remarks. The referees carefully read the first version of the text, found several typos and made meaningful suggestions - thank you! And of course, great thanks goes to our students, who make our work meaningful.

All errors in this publication are solely my responsibility. I am thankful for all comments and suggestions.

Košice, september/September 2024

Katarína Cechlárová

Obsah/Table of Contents

1. Úvod do lineárneho programovania
Introduction to linear programming

úvodné otázky

A1 V ktorých bodoch pretína priamka s rovnicou $ax_1 + bx_2 = c$ súradnicové osi?

A2 Aký rovinný útvar zodpovedá množine riešení lineárnej nerovnice $ax_1 + bx_2 \leq c$?

A3 Ako nahradíme jednu premennú x neohraničenú na znamienko dvoma nezápornými premennými?

A4 Čo to znamená, že dve sústavy rovníc alebo nerovností sú ekvivalentné?

A5 Aká sústava nerovností je ekvivalentná s rovnicou $ax_1 + bx_2 = c$?

warm-up questions

A1 Where does the line with equation $ax_1+bx_2=c$ cross the coordinate axes?

A2 Draw the solution set of the linear inequality $ax_1 + bx_2 \leq c$ in the plane.

A3 How can one replace a non-constrained variable x by two nonnegative variables?

A4 Explain the phrase: 'Two equation (inequality) systems are equivalent.'

A5 Which pair of inequalities is equivalent to the equality $ax_1 + bx_2 = c$?

základné úlohy

B2 Firma ABC dodáva na trh výrobok, ktorý montuje z troch dielcov A, B a C. Dielec A sa vyrába na stroji typu Atas, dielec B na stroji Batas a dielec C na stroji Catas. Firma má dve pobočky, každá má k dispozícii jeden stroj každého typu. Produktivita strojov (v dielcoch za hodinu) je uvedená v tabuľke. Takisto je známy týždňový fond pracovného času každej pobočky (v hodinách), ktorý sa rozdelí na jednotlivé jej stroje.
Firma ABC chce maximalizovať týždennú produkciu svojich výrobkov. Sformulujte (ale neriešte!) tento problém ako úlohu lineárneho programovania.

core exercises

B2 Company ABC supplies a product constructed from three parts A, B and C. Part A is produced on a machine of type Atas, part B on a machine of type Batas and part C on a machine Catas. The company has two branches and each has one machine of each type at its disposal. The productivities (in parts per hour) of the machines are given in the table below. Moreover, each branch has its own weekly work-time capacity (in hours) that can be divided between the machines in the branch.
Company ABC wants to maximize its production per one week. Formulate (but do not attempt to solve!) the problem as a linear program.

	prac. čas / work time	Atas	Batas	Catas
Pobočka 1/Branch 1	200	50	70	-
Pobočka 2/Branch 2	300	80	50	60

B1 Firma Lipo vyrába šalátové omáčky z majonézy, jogurtu, kyslej smotany a korenín. Ponúka dva druhy. Omáčka Supra obsahuje majonézu, jogurt a smotanu v pomere 1 : 2 : 2 a predáva sa v cene 5 €/liter. Omáčka Extra obsahuje iba majonézu a jogurt v pomere 2 : 1 a jej cena je 4 €/liter. Momentálne majú na sklade 10 litrov majonézy, 10 litrov jogurtu a 20 litrov smotany.

a) Koľko ktorej omáčky má firma Lipo vyrobiť, ak chce maximalizovať svoju tržbu? Zostavte úlohu LP a vyriešte ju graficky.

B1 Company Lipo produces two kinds of salad dressings from mayonnaise, yoghurt, cream and herbs. Dressing Supra contains mayonnaise, yoghurt and cream in proportions 1 : 2 : 2 and its price is 5€/liter. Dressing Extra contains only mayonnaise and yoghurt in proportion 2 : 1 and its price is 4€/liter. The company has currently 10 liters of mayonnaise, 10 liters of yoghurt and 20 liters of cream at its disposal.

a) How much of each dressing should Lipo produce so as to maximize its income? Formulate a linear program and solve it graphically.

b) Ak je možné predávat' aj nepoužitú majonézu, jogurt a smotanu, v cenách 3; 1,5 resp. 2,5 €/liter, akú úlohu bude riešit' firma Lipo tentoraz? Opät' nájdite riešenie graficky.

b) If it is possible to sold unused mayonnaise, yoghurt and cream for 3, 1.5 and 2.5 €/liter respectively, which problem will company Lipo solve now? Again, find a solution graphically.

Riešte nasledujúce úlohy LP graficky.

Solve the following LPs graphically.

B3

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

B4

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\to \max \\ 2x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

B5

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\to \min \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ -2x_1 + x_2 &\geq 2 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nasledujúce úlohy LP preveďte do štandardného a kanonického tvaru.

Transform the following LPs into their standard and canonical forms.

B6

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\to \min \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 4x_1 - 5x_2 &\geq 8 \\ 9x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= 7 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

B7

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 9x_3 &\to \max \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 &\geq 4 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 &\geq -4 \\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

B8 Preveďte nasledujúci problém na úlohu LP v štandardnom tvare.

B8 Transform the following problem into a standard form LP.

$$\begin{aligned} |x_1| + |x_2| + |x_3| &\to \max \\ |x_1| + |x_2| \qquad &\le 1 \\ |x_1| \qquad + |x_3| &= 3 \end{aligned}$$

OTÁZKY NA ZAMYSLENIE

C1 Zmení sa prípustná množina a optimálne riešenie $\mathbf{x}^{\text{opt}}$ úlohy LP, ak

a) zmeníme v ohraničeniach neostrú nerovnosť na ostrú?

b) zmeníme v ohraničeniach nerovnosť na rovnicu?

c) prenásobime účelovú funkciu nenulovou konštantou?

d) pripočítame k účelovej funkcii konštantu?

C2 V koľkých bodoch môže nadobúdať účelová funkcia optimum v úlohe LP?

C3 Zostavte úlohu LP, ktorá má iné optimálne riešenie, ak sú jej premenné ohraničené na znamienko a ak sú neohraničené.

C4 Zostavte úlohu LP s dvoma premennými, ktorej riešenie sa nezmení po vzájomnej výmene koeficientov účelovej funkcie.

C5 Aké podmienky má spĺňať zadanie úlohy LP s dvoma premennými, aby množinou optimálnych riešení bola úsečka?

C6 Akú (nutnú a/alebo postačujúcu) podmienku má spĺňať nové ohraničenie $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$, ak nechceme, aby sa po jeho pridaní do systému rovníc $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zmenila prípustná množina?

C7 Môžu byť v praktických úlohách

a) ohraničenia v tvare rovníc?

b) premenné neohraničené na znamienko?

Uveďte argumenty proti alebo nájdite vhodné príklady.

C8 Je možné riešiť graficky (v rovine) úlohu LP, ktorá má viac než 2 premenné?

C9 Rozhodnite, v ktorom z nasledujúcich prípadov závisí cena výrobku lineárne od jeho množstva. Nájdite vhodnú funkciu na vyjadrenie tejto závislostí.

BRAIN TEASERS

C1 Will the feasible set and the optimal solution $\mathbf{x}^{\text{opt}}$ of a LP change if

a) a weak inequality in constraints is replaced by a strong inequality?

b) an inequality in constraints is replaced by an equation?

c) the objective function is multiplied by a nonzero constant?

d) a nonzero constant is added to the objective function?

C2 In how many points can the objective function of a LP attain its optimum?

C3 Formulate a LP whose optimal solution changes when nonnegativity constraints of the variables are dropped.

C4 Write a LP with two variables whose optimal solution is unaffected when the objective function coefficients are swapped.

C5 Under which conditions is the set of optimal solutions of a LP with two variables a line segment?

C6 Suppose a new constraint $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$ is added to a system of equations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. What is a sufficient and/or necessary condition for the solution set to remain unchanged?

C7 Can a LP based on a real-life situation contain

a) equality constraints?

b) variables unrestricted in sign?

State arguments against or provide some examples.

C8 Can a LP with more than 2 variables be solved graphically in the plane?

C9 Decide, in which of the following cases the price of a product depends linearly on its quantity. Find suitable functions to express the dependences described below.

a) Jeden výrobok stojí 10 €, ale pri nákupe 100 kusov a viac je zľava 5%, pri nákupe 500 kusov a viac je zľava 10%.
b) Jeden výrobok stojí 100 €, ale každý desiaty kus je zadarmo.
c) Jeden výrobok stojí 10 €, ale ak zákazník zaplatí členský príspevok vo výške 300 €, môže nakupovať výrobky v cene 3 € za kus.

a) One item costs 10 €, but there is 5% discount when purchasing at least 100 items, and 10% discount when purchasing at least 500 items.
b) One item costs 100 €, but each tenth item is free.
c) One item costs 10 €, but if the customer pays a so-called membership fee 300 €, then she can buy products for 3 € per piece.

C10 Ukážte, ako nahradiť n neohraničených premenných $n+1$ nezápornými premennými.

C10 Show how to replace n unconstrained variables by $n+1$ nonnegative variables.

Doplnkové úlohy

additional practice

D1 Pekár Koláčik vyrába z múky a tuku dva druhy polotovarov: lístkové cesto a úsporné cesto. Požiadavky na suroviny a predajná cena jedného kilogramu sú uvedené v tabuľke.

D1 Baker Cookie produces from flour and butter two types of products: puff pastry and short-crust pastry. Consumption of ingredients and price per one kilogram are given in the table.

	Múka/Flour (g)	Tuk/Butter (g)	Cena/Price (€/kg)
Lístkové cesto/Puff pastry	500	400	5
Úsporné cesto/Short-crust pastry	700	200	3.5

Okrem toho pekár vyrába tri druhy buchiet, na 1 kg každého druhu sa spotrebuje 800 g lístkového cesta a 200 g náplne. Lekvárové buchty sa predávajú po 0,4 € za 100 g, čokoládové po 0,7 € a tvarohové po 0,5 €.
Sformulujte úlohu na určenie optimálneho výrobného plánu, ak má pekár k dispozícii 10 kg múky, 5 kg tuku, po 2 kg čokolády a tvarohu a lekvár kupuje po 1 € za kilogram. (Pozor na jednotky !)

Moreover, the baker produces three kinds of cakes. For 1 kg of each cake, he needs 800 g of puff pastry and 200 g of filling. Cakes with jam filling are sold for 0.4 € per 100 g, those with chocolate filling for 0.7 € and those with curd filling for 0.5 €. The baker has 10 kg of flour, 5 kg of butter, 2 kg of chocolate filling, 2 kg of curd in storage, and jam can be bought for 1 € per kilogram. Formulate a LP to determine an optimal production plan. (Choose the measurement units consistently!)

D2 Rafinéria Aztec vyrába dva druhy bezolovnatého benzínu Regular a Premium, ktoré predáva vo firemných čerpacích staniciach po \$12 resp. \$14 za barel. Oba druhy sa vyrábajú zmiešavaním domácich a dovozových rafinovaných ropných zmesí a musia spĺňať požiadavky, uvedené v prvej tabuľke. Údaje o dostupných ropných zmesiach obsahuje druhá tabuľka.

D2 Refinery Aztec produces two types of unleaded gasoline Regular and Premium that are sold in company's gasoline stations for \$12 and \$14 per barrel respectively. Both types are produced by mixing domestic and foreign refined oil mixtures and have to satisfy requirements listed in the first table. Information about available oil mixtures is in the second table.

	Minimálne oktánové číslo Minimal octane rating	Maximálny dopyt (barel/deň) Maximum demand (barrel/day)	Minimálna dodávka (barel/deň) Minimum supply (barrel/day)
Regular	88	10 000	5 000
Premium	93	2 000	500

	Oktánové číslo Octane rating	Zásoba (barel/deň) Storage (barrel/day)	Cena (\$/barel) Price (\$/barrel)
Domáce/Domestic	87	4 000	8
Dovozové/Foreign	98	6 000	15

Aký pomer jednotlivých ropných zmesí má firma Aztec použiť na výrobu benzínu Regular a Premium, ak chce maximalizovať svoj denný zisk? Zostavte úlohu LP!

What proportions of each oil mixture should refinery Aztec use for production of gasolines Regular and Premium if the aim is to maximize their daily profit? Formulate as a LP.

D3 Píla má na sklade 100 ks hranolov dĺžky 5 m a 50 ks hranolov dĺžky 6 m. Do predajne dodávajú hranoly v dĺžkach 4, 3 a 2 m. Ako má píla spracovať svoje zásoby dreva, ak:

a) chce maximalizovať tržbu, keď vie, že hranoly dĺžok 4, 3 a 2 m sa predávajú po 16, 10 a 4 €?

b) chce minimalizovať odpad?

c) predajňa odoberá len komplety pozostávajúce z 1 hranola dĺžky 4 m a po dvoch hranoloch dĺžok 3 a 2 m a píla chce maximalizovať počet dodaných kompletov?

D3 A saw-mill has 100 logs of length 5 m and 50 logs of length 6 m in storage. The saw-mill produces logs of lengths 4, 3 and 2 m. How should the saw-mill cut its logs if:

a) they want to maximize the revenue? The market prices of 4, 3 and 2 m logs are 16, 10 and 4 € respectively.

b) they want to minimize the waste?

c) the customer requests only packages consisting of 1 log of length 4 m, 2 logs of length 3 m and 2 logs of length 2 m. The aim now is to maximize the number of supplied packages?

.

D4 Rumpeľ, Marka a Ciášik si kúpili na Radvanskom jarmoku bicykel. Tešia sa mu, obzerajú ho, ale domov je ešte cesta ďaleká, rovných 30 kilometrov, a na bicykli sa smie naraz viezť len jeden! Ešte šťastie, že odkedy je Rumpeľ zbojníkom, nikto sa v tomto kraji neodváži kradnúť a tak bicykel je možné nechať kdekoľvek pri ceste bez dozoru. Chvíľu bude teda bicyklovať Rumpeľ a ostatní pôjdu pešo; potom Rumpeľ nechá bicykel pri ceste a poberie sa pešo ďalej. Zatiaľ príde k bicyklu Marka alebo Ciášik, jeden z nich nasadne na bicykel a druhý pôjde ďalej pešo a tak ďalej, a tak ďalej až domov.

a) Ako si majú Rumpeľ, Marka a Ciášik zorganizovať cestu, aby boli čo najskôr doma? Pri formulácii úlohy použite tabuľku rýchlostí.

b) Ak pripustíte, že niekto sa môže aj vracať, dostanete inú úlohu. Čo myslíte, je možné takto získať lepšie riešenie ako v prípade a)?

D4 Father, Mother and Son have bought a bicycle on Scarborough Fair. They enjoy it, look at it, but there is still a long way home, exactly 30 kilometers. However, only one of them can ride the bike at the same time! In this country, the bicycle can be safely left unattended anywhere by the roadside. Hence, Father rides for some time and the two others walk, then Father leaves the bike by the roadside and walks onward. Meanwhile, Mother or Son reaches the bike, either mounts it while the other continues walking so on, so on, till they get home.

a) How should Father, Mother and Son organize their transportation home to get there as fast as possible? Use the velocity table below.

b) If riding in the opposite direction is allowed, the problem will be different. Could this lead to a better solution than in case a)?

rýchlosť(km/hod) velocity (km/h)	pešo by foot	na bicykli by bike
Rumpeľ	10	40
Marka	6	12
Ciášik	4	28

Táto úloha bola publikovaná v článku/This problem was published in the paper : K. Cechlárová, On a problem of optimal transport organisation, Teaching Math. Appl. 24(4) 179-181 (2005).

V nasledujúcich úlohách LP graficky nájdite minimum aj maximum účelovej funkcie.

In the following LPs, find graphically the minimum as well as the maximum of the objective function.

D5

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\to \min(\max) \\ 3x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

D6

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 &\to \min(\max) \\ x_1 + 2x_2 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 &\ge 12 \\ x_1 + x_2 &\ge 8 \end{aligned}$$

D7

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\to \min(\max) \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\le 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\ge 0 \\ x_{1-3} &\ge 0 \end{aligned}$$

D8

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &\to \min(\max) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\ge 3 \\ x_{1-4} &\ge 0 \end{aligned}$$

D9 Na množine riešení sústavy nerovníc

D9 Consider the solution set of the given system.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 4 \\ 2x_1 - x_2 &\le 6 \\ -x_1 + 3x_2 &\le 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 12 \end{aligned}$$

nájdite graficky všetky prípustné riešenia, v ktorých sa nadobúdajú extremálne hodnoty nasledujúcich funkcií.

Find graphically all feasible solutions, where the following functions attain their extreme values.

a) $x_1 + x_2$ b) $x_1 - x_2$ c) $2x_1 + x_2$ d) $-2x_1 + x_2$

V nasledujúcich cvičeniach preveďte úlohy LP do štandardného a kanonického tvaru.

Transform the following LPs into their standard and cannonical forms.

D10

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &\to \max \\ x_1 - \ \ x_2 + 4x_3 &\le 6 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 &\ge 8 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

D11

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\to \max \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\ge 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &\le 4 \\ x_{3-4} &\ge 0 \end{aligned}$$

D12

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 &\to \max \\ x_1 + \ \ x_2 - \ \ \ x_3 &\ge 6 \\ x_{1,2} &\ge 0 \end{aligned}$$

D13

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 300 &\to \max \\ 2x_1 - 6x_2 - 5x_3 \qquad &\le 100 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 \qquad &\le 200 \\ 0 \le x_1 &\le 50 \\ x_2 &\ge -60 \\ x_3 &\ge 5 \end{aligned}$$

D14 Povedzte, prečo nie sú nasledujúce systémy ohraničení ekvivalentné.

D14 Why are the following constraint systems not equivalent?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 - x_2 &\le 10 \\ x_{1,2} &\ge 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ x_{1-3} &\ge 0 \end{aligned}$$

Preveďte nasledujúce problémy na úlohy LP v štandardnom tvare.

Transform the following problems into standard form LPs.

D15

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ &\to \max \\ |4x_1 + 3x_2 - 7x_3| &\le x_1 + x_2 + x_3 \\ x_{1-3} &\ge 0 \end{aligned}$$

D16

$$\begin{aligned} \min\{x_1 + 2x_2\,; 6x_2 + 12x_3\} &\to \max \\ -x_1 - 3x_2 + 23x_3 &\ge \max\{7x_1 + 2x_2, 5x_1 + x_2 + x_3\} \\ x_{1-3} &\ge 0 \end{aligned}$$

VÝSLEDKY / SOLUTIONS

B1 x_{ij} - počet hodín práce v pobočke i na stroji j/number of working hours in branch i for machine j $(i = 1, 2, j = A, B, C)$

$$\begin{array}{rcll} z & \to & \max & \\ x_{1A} + x_{1B} & \leq & 200 & \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} & \leq & 300 & \\ 50x_{1A} + 80x_{2A} & \geq & z & \\ 70x_{1B} + 50x_{2B} & \geq & z & \\ 60x_{2C} & \geq & z & \\ x_{ij} & \geq & 0 & i = 1, 2,\ j = A, B, C \\ z & \geq & 0 & \end{array}$$

B2 x_1, x_2 - množstvo/ quantity of Supra and Extra in liters

a)

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 4x_2 & \to & \max \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 & \leq & 10 \\ \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 & \leq & 10 \\ \frac{2}{5}x_1 & \leq & 20 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$\mathbf{x}^{\text{opt}} = (25, 0)^T, \qquad f^{\text{opt}} = 125$

b)

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 4x_2 + 3(10 - \frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{3}x_2) + & & \\ +1.5(10 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{3}x_2) + 2.5(20 - \frac{2}{5}x_1) & \to & \max \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 & \leq & 10 \\ \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 & \leq & 10 \\ \frac{2}{5}x_1 & \leq & 20 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$\mathbf{x}^{\text{opt}} = (25, 0)^T, f^{\text{opt}} = 165$

B3 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (1, \frac{3}{2})^T$

B4 The LP is unbounded.

B5 The LP is infeasible.

B8 $x = x^+ + x^-,\ x^+ \geq 0,\ x^- \geq 0,\ |x| = x^+ + x^-$

D2 x_{ij} - quantity of mixture i used for gasoline j in barrels, $i \in$ {Domestic, Foreign}, $j \in$ {Regular, Premium}. Octane rating is guaranteed by constraints:

$87x_{DR} + 98x_{ZR} \geq 88(x_{DR} + x_{ZR})$
$87x_{DP} + 98x_{ZP} \geq 93(x_{DP} + x_{ZP})$

D3 x_i - number of logs cut by plan No. i.

Rezný plán/Cutting plan	1	2	3	4	5	6	7
Dĺžka hranola/Length of log (m)	5	5	5	6	6	6	6
number of 4m logs	1	0	0	1	0	0	0
number of 3m logs	0	1	0	0	2	1	0
number of 2m logs	0	1	2	1	0	1	3
waste (m)	1	0	1	0	0	1	0

Constraints are the same for a), b), c):

$$\begin{array}{rcll} x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 100 & \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \leq & 50 & \\ x_i & \geq & 0 & \text{for all } i \\ x_i & - & \textit{integer} & \text{for all } i \end{array}$$

a) $16(x_1 + x_4) + 10(x_2 + 2x_5 + x_6) + 4(x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 + 3x_7) \to \max$
b) $x_1 + x_3 + x_6 \to \min$
c) $\min\{x_1 + x_4, \frac{x_2+2x_5+x_6}{2}, \frac{x_2+2x_3+x_4+x_6+3x_7}{2}\} \to \max$

D5 $\mathbf{x}^{\max} = (\frac{15}{4}, \frac{3}{4})^T$, unbounded below.

D6 Infeasible.

D7 $\mathbf{x}^{\max} = (4, 2, 0)^T, f^{\max} = 16; \mathbf{x}^{\min} = (0, 3, 3)^T, f^{\min} = 9$

D8 Infeasible.

D9 **a)** $\mathbf{x}^{\max} = (\frac{16}{5}, \frac{2}{5})^T$, unbounded below,
b) Unbounded (below and above)
c) $x^{\max} = (\frac{16}{5}, \frac{2}{5})$, unbounded below,
d) Unbounded above, $\mathbf{x}^{\min} \in \{(x_1, x_2)^T : x_2 = 2x_1 - 6,\ x_1 \in (-\infty, \frac{16}{5}\rangle\}$

D15 Pomôcka / Hint: $-x_1 - x_2 - x_3 \leq 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 \leq x_1 + x_2 + x_3$

D16 Táto úloha LP je vo všeobecnom tvare! / The following LP is in its general form!

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \max \\ z &\leq x_1 + 2x_2 \\ z &\leq 6x_2 + 12x_3 \\ -x_1 - 3x_2 + 23x_3 &\geq 7x_1 + 2x_2 \\ -x_1 - 3x_2 + 23x_3 &\geq 5x_1 + x_2 + x_3 \\ x_{1-3} &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Konvexné množiny
Convex sets

ÚVODNÉ OTÁZKY

A1 Definujte konvexnú množinu.

A2 Definujte krajný bod konvexnej množiny.

A3 Ako je definovaný konvexný obal množiny?

A4 Čo je to báza vektorového priestoru?

A5 Ako nájdeme súradnice vektora $\mathbf{x}$ v báze $\mathcal{B} = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}$?

A6 Aké podmienky musia spĺňať rozmery matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, aby v nej existovala báza?

A7 Kedy má sústava lineárnych rovníc s maticou A jediné riešenie?

A8 Za akých podmienok je možné rozšíriť systém vektorov $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{R}_m$ na bázu vektorového priestoru $\mathbb{R}_m$?

WARM-UP QUESTIONS

A1 Define a convex set.

A2 Define an extreme point of a convex set.

A3 Define the convex hull of a set.

A4 Define a basis of a vector space.

A5 How can one find the coordinates of a vector $\mathbf{x}$ in the basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}$?

A6 If a matrix $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ is to have a basis, which conditions must its dimensions fulfill?

A7 Under which conditions does a linear equation system with a matrix A admit a unique solution?

A8 Under which conditions is it possible to extend a system of vectors $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{R}_m$ to a basis of space $\mathbb{R}_m$?

ZÁKLADNÉ ÚLOHY

V nasledujúcich úlohách rozhodnite, pre aké hodnoty parametra λ je množina riešení sústavy nerovníc konvexná a nájdite konvexný obal v nekonvexných prípadoch. Pre získané konvexné množiny popíšte všetky krajné body.

CORE EXERCISES

In the following problems, for which values of parameter λ is the corresponding solution set of the inequality system convex? Find the convex hull in case of nonconvexity. For the obtained convex sets, determine all their extreme points.

B1

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ \lambda^2 x_1^2 + x_2^2 &\ge 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

B2

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\le 9 \\ (x_1 - 2)^2 + x_2^2 &\ge \lambda \end{aligned}$$

B3 Graficky zostrojte konvexný obal množiny bodov M a nájdite jeho krajné body.

B3 Find graphically the convex hull of the set M and its extreme points.

$$M = \{(0,0)^T, (1,1)^T, (-1,1)^T, (-2,2)^T, (1,4)^T, (0,3)^T, (-1,-1)^T, (2,5)^T, (-1,2)^T\}.$$

Body $(0,0)^T$ a $(-1,1)^T$ vyjadrite ako konvexné kombinácie krajných bodov.

Express points $(0,0)^T$ and $(-1,1)^T$ as convex combinations of the extreme points.

Sú dané vektory

Given are vectors

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

B4 Vyjadrite vektor $\mathbf{v}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Je vektor $\mathbf{v}$ ich konvexnou kombináciou?

B4 Express vector $\mathbf{v}$ as a linear combination of vectors $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Is vector $\mathbf{v}$ their convex combination?

B5 Vyjadrite ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vektory $\mathbf{w}, \mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$. Viete to urobiť jediným výpočtom?

B5 Expres vectors $\mathbf{w}, \mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ as linear combinations of vectors $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. What is the most efficient way of doing this?

B6 Považujte teraz za bázu nasledovné trojice vektorov a vyjadrite ostatné vektory ako ich lineárnu kombináciu.

B6 Consider now bases consisting of the following triples of vectors and express the remaining vectors as their linear combinations.

a) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{y}$ b) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}$ c) $\mathbf{u}_1, \mathbf{x}, \mathbf{t}$ d) $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}$

B7 K danej matici B nájdite maticu B^{-1} a vypočítajte $B^{-1}\mathbf{x}$, $B^{-1}\mathbf{y}$, $B^{-1}\mathbf{v}$, $B^{-1}\mathbf{w}$. Viete to urobiť jediným výpočtom?

B7 For the given matrix B find matrix B^{-1} and compute $B^{-1}\mathbf{x}$, $B^{-1}\mathbf{y}$, $B^{-1}\mathbf{v}$, $B^{-1}\mathbf{w}$. Again, what is the most efficient way of doing this?

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B8 Je daná úloha lineárneho programovania:

B8 Consider the following linear program

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 &\to \min \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 + x_5 + x_6 &= 2 \\ x_2 \qquad + x_4 + x_5 \qquad &= 1 \\ x_3 + x_4 \qquad - x_6 &= 3 \\ x_{1-6} &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Nájdite všetky jej bázické riešenia. O každom z nich rozhodnite, či je prípustné alebo neprípustné a vypočítajte v ňom hodnotu účelovej funkcie.

b) V danej matici ohraničení môže byť najviac $\binom{6}{3} = 20$ báz, ale niektoré trojice stĺpcov sú lineárne závislé, napr. (A_1, A_2, A_5). Navrhnite preto prehľadný spôsob prechádzania od jednej bázy k druhej, aby sa na žiadnu nezabudlo, a pritom aby sa zbytočne neskúmali lineárne závislé trojice stĺpcov.

a) Find all its basic solutions. For each one of them decide whether it is feasible or not and compute the corresponding value of the objective function.

b) In the given constraint matrix the maximum possible number of bases is $\binom{6}{3} = 20$, but some triples of columns are linearly dependent, e. g. (A_1, A_2, A_5). Suggest some easy-to-follow method to move from one basis to another one, so that none is omitted and moreover, no time is wasted on linearly dependent triples of columns.

OTÁZKY NA ZAMYSLENIE

C1 Rozhodnite, či je pravdivé nasledovné tvrdenie: Množina je konvexná práve vtedy, keď s každými dvoma svojimi bodmi obsahuje aj stred úsečky, ktorej sú koncovými bodmi.

C2 Nájdite príklad konvexnej množiny, ktorej všetky hraničné body sú krajné. Môže byť takáto množina neohraničená?

C3 Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenie: Ak A, B sú dve neprázdne konvexné množiny také, že $A \cup B$ je konvexná, tak $A \cap B \neq \emptyset$.

C4 Môže existovať degenerované bázické riešenie zodpovedajúce jedinej báze? Svoje tvrdenie odôvodnite.

C5 Dokážte alebo vyvráťte: Ak je každé bázické prípustné riešenie úlohy LP nedegenerované, tak táto úloha má jediné optimálne riešenie.

C6 Dokážte alebo vyvráťte: Ak má úloha LP jediné bázické prípustné riešenie, tak toto je jej jediným optimálnym riešením.

C7 Dá sa každé optimálne riešenie úlohy LP vyjadriť v tvare konvexnej kombinácie jej optimálnych bázických prípustných riešení? Platí predošlé tvrdenie v prípade, že

a) úloha má aspoň dve bázické prípustné riešenia,

b) prípustná množina je ohraničená?

C8 Rozhodnite o pravdivosti nasledujúceho tvrdenia: Ak má sústava ohraničení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$ riešenie, tak existuje taký vektor $\mathbf{c}$, že úloha LP $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$ za podmienok $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$ má optimálne riešenie.

BRAIN TEASERS

C1 'A set is convex if and and only if it contains the center of the line segment between each pair of its points.' Is this statement true?

C2 Find an example of a convex set where each boundary point is also an extreme point. Can such a set be unbounded?

C3 Prove or disprove the following statement: If A, B are two nonempty convex sets such that $A \cup B$ is a convex set, then $A \cap B \neq \emptyset$.

C4 Can a degenerate basic solution correspond to a unique basis? Give arguments for your statement.

C5 Prove or disprove: If each basic solution of a LP is nondegenerated then this LP has a unique optimal solution.

C6 Prove or disprove: If a LP has a unique basic feasible solution then this basic solution is its only optimal solution.

C7 Can each optimal solution of a LP be expressed as a convex conbination of optimal basic feasible solutions? Is the former statement true if

a) the problem has at least two basic feasible solutions,

b) the feasible set is bounded?

C8 'If constraints system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$ admits a solution, then there is a vector $\mathbf{c}$ such that LP $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$ subject to $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$ has an optimal solution.' Is this statement true?

DOPLNKOVÉ ÚLOHY

V nasledujúcich úlohách rozhodnite, či je množina riešení sústavy rovníc resp. nerovníc konvexná. Ak nie, nájdite jej konvexný obal a vyjadrite ho ako množinu riešení nejakej sústavy rovníc a/alebo nerovníc. Popíšte množiny krajných bodov týchto množín, resp. ich konvexných obalov.

ADDITIONAL PRACTICE

In the following problems decide whether the solution set of equation or inequality system is convex. If not, find its convex hull and express the convex hull as a solution set of some equation and/or inequality system. Find the sets of extreme points for these sets or their convex hulls, respectively.

D1

$$-e^{x_1} + x_2 \geq 0$$
$$-|x_1| + x_2 \geq 0$$

D2

$$-e^{x_1} + x_2 \leq 0$$
$$-|x_1| + x_2 \leq 0$$

D3

$$x_1 + |x_2| \geq 2$$
$$x_2 - x_1 \leq 1$$

D4

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$
$$x_1^2 + 4x_2^2 \geq 1$$

D5

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 - x_2^2 \leq 1$$

D6

$$2x_1 + x_2^2 \leq 6$$
$$x_1^2 + 2x_2 \geq 4$$

D7 Sformulujte vhodné podmienky pre reálne čísla a a b, aby úloha LP

D7 Formulate conditions for real numbers a and b so that the following LP

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\to \max \\ ax_1 + bx_2 &\leq 7 \\ x_{1-2} &\geq 0 \end{aligned}$$

a) mala jediné optimálne riešenie;

b) mala nekonečne veľa optimálnych riešení;

c) bola neprípustná;

d) bola prípustná, ale nemala optimálne riešenie.

a) has a unique optimal solution;

b) has infinitely many optimal solutions;

c) is infeasible;

d) is feasible but has no optimal solution.

V nasledujúcich úlohách LP nájdite všetky bázické riešenia. Rozhodnite, ktoré sú prípustné a ktoré degenerované a v každom z nich vypočítajte hodnotu účelovej funkcie.

Find all basic solutions for the following LPs. Decide which of them are feasible and which are degenerate and compute the corresponding values of the objective function.

D8

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \quad\quad &\to \min \\ 2x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 &= 4 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D9

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \min \\ -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 4 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D10

$$\begin{aligned} x_1+4x_2+5x_3+2x_4-6x_5 &\to \min \\ x_1-2x_2+2x_3-2x_4+2x_5 &= 6 \\ x_1+2x_2-2x_3-2x_4-2x_5 &= 8 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5 &= 4 \\ x_{1-5} &\geq 0 \end{aligned}$$

D11

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4-x_5+x_6 &\to \min \\ x_1+x_2-x_3-x_4-x_5+x_6 &= 8 \\ x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6 &= -2 \\ x_{1-6} &\geq 0 \end{aligned}$$

VÝSLEDKY / SOLUTIONS

B1 Konvexná pre / convex for $\lambda = 0$, nie konvexná inak / nonconvex otherwise.

B2 Konvexná pre / convex for $\lambda \leq 0$ and $\lambda = 25$, nekonvexná pre / nonconvex for $\lambda \in (0, 25)$, prázdna pre / empty for $\lambda > 25$

B3 $ex(conv(M)) = \{(-2,2)^T, (-1,-1)^T, (1,1)^T, (2,5)^T\}$
$(0,0)^T = \frac{1}{2}(-1,-1)^T + \frac{1}{2}(1,1)^T$
$(-1,1)^T = \frac{1}{2}(-2,2)^T + \frac{1}{4}(-1,-1)^T + \frac{1}{4}(1,1)^T$ (viac možností / several possibilities)

B4 $\mathbf{v} = -2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3$; nie je to konvexná kombinácia / it is not a convex combination

B5 $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$; $\mathbf{t} = -3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3$; $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{y} = -2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$
Všetky výsledky možno získať jediným výpočtom / All the results can be obtained within one computation.

B6 a) $\mathbf{v} = 6\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 4\mathbf{y}$; $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$; $\mathbf{t} = 5\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{y}$; $\mathbf{x} = -3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{y}$; $\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{y}$
b) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}$ sú lineárne závislé / are linearly dependent
c) $\mathbf{u}_1, \mathbf{x}, \mathbf{t}$ sú lineárne závislé / are linearly dependent
d) $\mathbf{u}_1 = -3\mathbf{x} - \mathbf{t}$; $\mathbf{u}_2 = -8\mathbf{x} + 2\mathbf{y} - 3\mathbf{t}$; $\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{t}$; $vv = -10\mathbf{x} + 2\mathbf{y} - 3\mathbf{t}$; $\mathbf{w} = -11\mathbf{x} + 2\mathbf{y} - 4\mathbf{t}$

B7 $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C4 Áno / Yes

C5 Nie / No

C6 Nie / No

C7 Nie / No, a) Nie / No b) Áno / Yes

C8 Áno / Yes

D1 Konvexná / Convex

D2 $conv(M) = \mathbb{R}_2$

D3 $conv(M) = \{(x_1,x_2)^T : x_2 - x_1 \leq 1\}$

D4 $conv(M) = \{(x_1,x_2)^T : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

D5 $conv(M) = \{(x_1,x_2)^T : x_1 + x_2 \leq 1\}$

D6 $conv(M) = \{(x_1,x_2)^T : 2x_1 + x_2^2 \leq 6\}$

D7 Napríklad / E. g.: a) $a = b = 1$, b) $a = 3, b = 5$, c) vždy prípustná / always feasible, d) $a = 0$

3. Simplexová metóda
The simplex method

Úvodné otázky

A1 Aké podmienky musí spĺňať prvok simplexovej tabuľky, aby mohol byť pivotom?

A2 Ako zistíme, že simplexová tabuľka je optimálna?

A3 Ako zistíme, že úloha LP je neohraničená?

A4 Ako zistíme, že úloha LP je neprí pustná?

Warm-up questions

A1 Describe how to choose a pivot in a simplex tableau.

A2 What is the optimality criterion for a simplex table?

A3 How will one learn that a LP is unbounded?

A4 How will one learn that a LP is infeasible?

Základné úlohy

Úlohy LP riešte simplexovou metódou.

Core exercises

Solve the following LPs by simplex method.

B1

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & - & 5x_2 & \to & \min \\ -x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \\ & & x_{1-2} & \geq & 0 \end{array}$$

B2

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & \to & \min \\ x_1 + \ \ x_2 + \qquad +x_4 & = & 4 \\ x_2 + \ x_3 \ - x_4 & = & 6 \\ x_{1-4} & \geq & 0 \end{array}$$

Nasledujúce úlohy LP riešte dvojfázovou simplexovou metódou (s pomocnou úlohou).

Solve the following LPs by the 2-phase simplex method (with auxiliary variables).

B3

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &\to \min \\ x_1 + \ x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_{1-3} &\geq 0 \end{aligned}$$

B4

$$\begin{array}{rcl} x_1 - \ x_2 + 3x_3 - 2x_4 & \to & \min \\ x_1 + \ x_2 \qquad\quad + \ x_4 & = & 1 \\ x_2 + \ x_3 - \ x_4 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 + \ x_3 \qquad\quad & = & 2 \\ x_{1-4} & \geq & 0 \end{array}$$

B5 Je daná takáto simplexová tabuľka

B5 Consider the following simplex tableau

B		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	6	0	-3	0	0	2	0	0
x_1	0	1	1	0	0	1	0	1
x_6	4	0	-1	0	2	2	1	1
x_3	1	0	0	1	1	-1	0	1

a) Je bázické prípustné riešenie prislúchajúce k tejto tabuľke optimálne?

b) Nájdite všetky optimálne riešenia pre túto úlohu.

a) Is the basic feasible solution corresponding to this simplex tableau optimal?

b) Find all optimal solutions for this problem.

OTÁZKY NA ZAMYSLENIE

C1 Ukážte, že podmienka "$\theta_o = 0$ pre každého možného pivota v simplexovej tabuľke"nie je postačujúcou pre optimalitu zodpovedajúceho bázického prípustného riešenia.

C2 Môže sa v priebehu výpočtu nezáporná relatívna cena stĺpca zmeniť na zápornú? Môže takáto zmena nastať v priebehu výpočtu viackrát?

C3 Je možné, aby sa hneď v nasledujúcom pivotovaní vrátil do bázy vektor, ktorý ju práve opustil? Zdôvodnite!

C4 Dokážte, že ak je pôvodná úloha LP prípustná, tak v optimálnej simplexovej tabuľke pomocnej úlohy sú relatívne ceny pre pomocné premenné, ktoré nie sú v optimálnej báze, rovné 1, a nulové pre všetky ostatné premenné.

BRAIN TEASERS

C1 Show that condition '$\theta_o = 0$ for each possible pivot in a simplex tableau' is not sufficient for optimality of the corresponding basic feasible solution.

C2 Is it possible for a relative cost of a column to change from positive to negative in the course of simplex computations? Can such a change occur during the computations more than once?

C3 Consider a variable that has just been removed from the basis. Can it return to the basis in the immediately following pivot operation? Support your statement by a suitable argument.

C4 Suppose that the original LP is feasible and consider the optimal simplex tableau of phase 1. Prove that the relative prices of auxiliary variables that are not in the optimal basis are equal to 1 and the relative prices of all other variables are equal to 0.

Doplnkové úlohy / additional practice

Nasledujúce úlohy riešte simplexovou metódou; ak treba, použite pomocnú úlohu.

Solve the following LPs by the simplex method; if necessary, use auxiliary variables.

D1

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\to \max \\ 2x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 &\le 5 \\ 4x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 &\le 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 8 \\ x_{1-3} &\ge 0 \end{aligned}$$

D2

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 &\to \max \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 1 \\ x_{1-5} &\ge 0 \end{aligned}$$

D3

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &\to \min \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D4

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + x_3 &\to \max \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad &\leq 10 \\ x_1 + 4x_2 \qquad &\leq 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 13 \\ x_{1-3} &\geq 0 \end{aligned}$$

D5

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_{1-2} &\geq 0 \end{aligned}$$

D6

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\to \min \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

D7

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 \qquad\qquad\qquad &\to \min \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &= 60 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 50 \\ x_{1-6} &\geq 0 \end{aligned}$$

D8

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &\to \max \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 7 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_{1-3} &\geq 0 \end{aligned}$$

D9

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 7x_4 &\to \min \\ 8x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &\leq 50 \\ 3x_1 + 5x_2 + \qquad 2x_4 &\leq 150 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 &\leq 100 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D10

$$\begin{aligned} 9x_2 + 2x_3 \qquad - x_5 \qquad &\to \max \\ x_1 - 3x_2 \qquad - 4x_4 \qquad + 2x_6 &= 60 \\ 2x_2 \qquad - x_4 - x_5 + 4x_6 &= -20 \\ x_2 + x_3 \qquad + 3x_6 &= 10 \\ x_{1-6} &\geq 0 \end{aligned}$$

D11

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &\to \min \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D12

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad - x_4 &\to \min \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 16 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D13

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 3x_3 &\to \min \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_{1-3} &\geq 0 \end{aligned}$$

D14

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\to \min \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 1 \\ -x_1 \qquad + 2x_3 &\geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_{1-3} &\geq 0 \end{aligned}$$

D15

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &\to \max \\ x_1 \qquad + x_3 - 4x_4 &= 2 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 9 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 21 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D16

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\to \min \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 20 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 10 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 40 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

VÝSLEDKY / SOLUTIONS

B1 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0,7)^T$

B2 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0,4,2,0)^T$

B3 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (\frac{9}{2},0,\frac{3}{2})^T$

B4 Neprípustná / Infeasible.

B5 a) Áno / Yes

b) úsečka medzi / segment between $\mathbf{x}^1 = (0,0,1,0,0,4,0)^T, \mathbf{x}^2 = (0,0,0,1,0,2,0)^T$

C1

B	0	0	0	0	-2	1
x_1	0	1	0	0	1	-1
x_2	1	0	1	0	-1	1
x_3	2	0	0	1	-1	2

C2 Áno / Yes. Áno / Yes.

C3 No.

D1 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (2,0,1)^T$

D2 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (2,1,0,0,0)^T$

D3 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (1,1,3,0)^T$

D4 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (\frac{9}{5},\frac{23}{10},\frac{7}{10})^T$

D5 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (24,16)^T$

D6 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (\frac{7}{2},-\frac{1}{2})^T$

D7 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (8,18,0,0,0,70)^T$

D8 Neohraničená / Unbounded.

D9 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0,0,50,0)^T$

D10 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (250,10,0,40,0,0)^T$

D11 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (19,8,0,0)^T$

D12 Neprípustná / Infeasible

D13 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0,\frac{21}{5},\frac{12}{5})^T$

D14 Neprípustná / Infeasible

D15 Neprípustná / Infeasible

D16 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (5,0,0,15)^T$

4. Zacyklenie v simplexovej metóde
Cycling in the simplex method

Úvodné otázky

A1 Kedy je vektor **x** lexikograficky menší ako vektor **y**?

A2 Ktorý vektor bude lexikografické minimum množiny?

A3 Kedy je úloha LP degenerovaná?

Warm-up questions

A1 When is a vector **x** lexicographically smaller than a vector **y**?

A2 Which vector is a lexicographic minimum of a set?

A3 When is a LP degenerate?

Základné úlohy

Vyriešte nasledujúce úlohy simplexovou metódou s využitím lexikografického anticyklického pravidla.

Core exercises

Solve the following LPs by simplex method using the lexicographic anticycling rule.

B1

$$\begin{aligned} -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\to \min \\ x_1 - x_2 - x_3 &\le 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\le 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 2 \\ x_{1-3} &\ge 0 \end{aligned}$$

B2

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 0 \\ -x_1 + x_3 &\le 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\le 1 \\ x_{1-3} &\ge 0 \end{aligned}$$

Ukážte, že simplexová metóda sa zacyklí pre úlohy B3 a B4, ak pivota vyberáme tak, že do bázy vstupuje stĺpec s a z bázy vystupuje riadok r taký, že

Show that Simplex Method cycles for problems B3 and B4 if the rules for choosing column s to enter the basis and row r to leave the basis are

$$c_s - z_s = \min\{c_j - z_j; j \in N\}$$

$$r = \min\left\{i; \frac{x_{i0}}{x_{is}} = \min\left\{\frac{x_{k0}}{x_{ks}}; \forall k : x_{ks} > 0\right\}\right\}.$$

Následne vyriešte tieto úlohy pomocou Blandovho anticyklického pravidla.

Subsequently, solve these LPs using the the Bland's anticyclic rule.

B3

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 12x_4 &\to \min \\ -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 &\le 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 2x_4 &\le 0 \\ x_{1-4} &\ge 0 \end{aligned}$$

B4

$$\begin{aligned} 20x_1 - 53x_2 - 41x_3 + 204x_4 &\to \min \\ 2x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 &\le 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 &\le 0 \\ -2x_1 + 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 &\le 1 \\ x_{1-4} &\ge 0 \end{aligned}$$

OTÁZKY NA ZAMYSLENIE

C1 Môže pri výbere pivota jednoduchým podielovým kritériom nastat' situácia, že výber pivota je nejednoznačný, hoci aktuálne bázické prípustné riešenie je nedegenerované?

C2 Ukážte, že simplexová metóda sa nemôže zacyklit', ak je v každom bázickom prípustnom riešení najviac jedna bázická zložka nulová.

BRAIN TEASERS

C2 When using the simple ratio test to choose a pivot, can the pivot determination be indefinite although the current basic feasible solution is non-degenerated?

C1 Show that the simplex method cannot cycle if at most one basic variable is equal zero in each basic feasible solution.

DOPLNKOVÉ ÚLOHY

Nasledujúce úlohy LP vyriešte simplexovou metódou s použitím lexikografického anticyklického pravidla.

ADDITIONAL PRACTICE

Solve the following LPs by simplex method using the lexicographic anticyclic rule.

D1

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + x_4 &\to \min \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &\le 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\le 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &\le 1 \\ x_{1-4} &\ge 0 \end{aligned}$$

D2

$$\begin{aligned} -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 &\to \min \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &\le 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\le 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &\le 1 \\ x_{1-4} &\ge 0 \end{aligned}$$

D3

$$\begin{aligned} -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &\to \min \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &\le 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &\le 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 1 \\ x_{1-4} &\ge 0 \end{aligned}$$

D4

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 6x_5 &\to \min \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &\le 2 \\ 3x_1 + \quad + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 &\le 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 - x_5 &\le 4 \\ x_{1-5} &\ge 0 \end{aligned}$$

VÝSLEDKY / SOLUTIONS

B1 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0,1,0)^T$

B2 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0,0,0)^T$

B3 Neohraničená / Unbounded

B4 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (2,0,1,0)^T$

D1 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0,0,1,0)^T$

D2 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (1,0,0,0)^T$

D3 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (1,0,0,0)^T$

D4 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0,\frac{15}{11},0,\frac{5}{11},\frac{6}{11})^T$

5. Dualita v lineárnom programovaní
Duality in linear programming

Úvodné otázky

A1 Napíšte primárno–duálnu dvojicu úloh LP, ak primárna úloha je v štandardnom tvare.

A2 Napíšte podmienky komplementarity pre symetrickú dvojicu úloh LP.

A3 Z ktorých stĺpcov optimálnej primárnej simplexovej tabuľky sa dá prečítať optimálne riešenie duálu?

Warm-up questions

A1 Write a primal-dual pair of LPs with the primal LP in the standard form.

A2 Write the complementarity conditions for a symmetric primal-dual pair of LPs.

A3 Take the optimal simplex tableau of a primal LP. Where can you find the optimal solution of the dual?

Základné úlohy

K nasledujúcim úlohám LP nájdite ich duály:

Core exercises

Find the duals for the following LPs.

B1

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\to \min\\
2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &\geq 6\\
-x_1 + 6x_2 + 4x_3 &\geq 8\\
x_{1-3} &\geq 0
\end{aligned}
$$

B2

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 4x_3 &\to \max\\
x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\geq 0\\
2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 6\\
x_1 - x_2 - x_3 &= 8\\
x_1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

B3 Nasledujúcu úlohu LP vyriešte simplexovou metódou a z optimálnej tabuľky prečítajte hneď aj riešenie duálu. Skontrolujte správnosť výsledku!

B3 Solve the following LP by the simplex method. Read the optimal solution of its dual from the optimal tableau. Verify the correctness of the result.

$$
\begin{aligned}
x_2 + 2x_4 &\to \min\\
x_1 + x_2 + 3x_4 &= 3\\
x_2 + x_3 + x_4 &= 4\\
x_{1-4} &\geq 0
\end{aligned}
$$

B4 K danej úlohe LP (P) nájdite jej duál (D) a k nemu opäť duál (DD). Ukážte, že (P) a (DD) sú ekvivalentné.

B4 For the given primal (P) find its dual (D) and for (D) its dual (DD). Show that (P) and (DD) are equivalent.

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\to \min\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 1\\
3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &\leq 6\\
x_{1-2} &\geq 0
\end{aligned}
$$

B5 Je daná úloha LP a jej prípustné riešenie $\mathbf{x}$. Ako jednoducho bez riešenia úlohy zistíte, že $\mathbf{x}$ nie je optimálne?

B5 A linear program (P) and its feasible solution $\mathbf{x}$ are given. How can one verify without solving (P) that $\mathbf{x}$ is not optimal?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\to \min \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &\geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_{1-3} &\geq 0 \end{aligned}$$

a) $\mathbf{x} = (4, 1, 1)^T$ b) $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$

B6 Overte, že vektor $\mathbf{x} = (1, 0, 1)^T$ je optimálnym riešením nasledujúcej úlohy a nájdite riešenie jej duálu.

B6 Verify that vector $\mathbf{x} = (1, 0, 1)^T$ is an optimal solution of the following LP. Then find the solution of its dual.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &\to \max \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_{1-3} &\geq 0 \end{aligned}$$

B6 Nasledujúcu úlohu (P) vyriešte tak, že zostrojíte jej duál (D), ten vyriešite graficky a pomocou vety o komplementarite nájdete z riešenia úlohy (D) riešenie zadanej primárnej úlohy (P).

B6 For the following LP (P) first formulate its dual (D), then solve (D) graphically and then using the complementarity conditions, find a solution of the original problem (P).

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 12x_3 &\to \min \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 &\geq 0 \\ x_{1-3} &\geq 0 \end{aligned}$$

B7 Zostrojte dvojice primárno-duálnych úloh (stačia dve premenné a dve ohraničenia) tak, že:

a) obe úlohy majú optimálne riešenie,
b) jedna úloha je neohraničená a druhá neprípustná,
c) obe úlohy sú neprípustné.

B7 Create a primal-dual pairs of LPs (two variables and two constraints are enough) so that:

a) both LPs have an optimal solution,
b) one problem is unbounded and the other infeasible,
c) both problems are infeasible.

OTÁZKY NA ZAMYSLENIE

V nasledujúcich problémoch predpokladajte, že je daná úloha LP v štandardnom tvare.

C1 Je pravda, že ak má úloha LP optimálne riešenie, ale nemá žiadne degenerované optimálne riešenie, tak jej duál má jediné optimálne riešenie?

C2 Je pravda, že ak úloha LP má degenerované optimálne riešenie, tak jej duál má vždy viac optimálnych riešení?

BRAIN TEASERS

For the following problems suppose that a LP in its standard form is given.

C1 'If a LP has an optimal solution but no degenerate optimal solution, then its dual has a unique optimal solution.' Is this statement true?

C2 'If a LP has a degenerate optimal solution, then its dual has more than one optimal solutions.' Is this statement true?

C3 Nech úloha LP má jediné optimálne riešenie. Vyplýva z toho, že duál má nedegenerované optimálne riešenie?

C4 Pomocou teórie duality dokážte, že úloha LP v tvare $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min, A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ má optimálne riešenie, ak

a) $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ a v matici A aspoň jeden riadok obsahuje len kladné prvky;

b) $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, A \geq \mathbf{0}$ a v každom stĺpci matice A existuje kladný prvok.

C5 Namerané dáta vyjadrujúce závislosť premennej $\mathbf{z}$ od $\mathbf{x}$ sú uložené ako dvojice $[x_i, z_i], i = 1, 2, ..., n$. Výskumník chce bodmi $[x_i, z_i]$ určiť priamku tak, aby súčet jej vertikálnych vzdialeností od daných bodov bol minimálny. Sformulujte tento problém ako úlohu LP. Prečo by bolo výhodnejšie riešiť jej duál?

C6 Ako je potrebné upraviť predpis pre prečítanie duálneho riešenia z optimálnej simplexovej tabuľky v prípade, keď sme účelovú funkciu primárnej úlohy pre zjednodušenie výpočtu prenásobili konštantou?

C3 Suppose a LP admits a unique optimal solution. Is this sufficient for its dual to have a nondegenerate optimal solution?

C4 By means of duality theory prove that a LP in the form $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min, A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ has an optimal solution if

a) $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ and at least one row in matrix A contains only positive elements;

b) $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, A \geq \mathbf{0}$ and each column of matrix A contains a positive element.

C5 The measured data representing the dependence of variable $\mathbf{z}$ on variable $\mathbf{x}$ are stored as pairs $[x_i, z_i], i = 1, 2, ..., n$. A researcher wants to determine a line such that the sum of its vertical distances from the given points is minimal. Formulate this problem as a LP. Why would it be more advantageous to solve its dual?

C6 Suppose that the objective function of the primal was multiplied by a constant. How is it necessary to adjust the rules for reading the dual optimal solution from the optimal primal simplex tableau?

Doplnkové úlohy

Nasledujúce úlohy LP vyriešte simplexovou metódou a z optimálnej tabuľky prečítajte hneď aj riešenie duálu. Skontrolujte správnosť výsledku!

Additional practice

Solve the following LPs by the simplex method and read the optimal solution of its dual from the optimal tableau. Verify the correctness of the obtained result.

D1

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 &\to \min\\
x_1 \qquad\quad + x_3 - x_4 \qquad &= 6\\
x_1 \qquad\qquad\quad + x_4 + x_5 &= 3\\
-x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 \qquad &= 5\\
x_{1-5} &\geq 0
\end{aligned}$$

D2

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &\to \min\\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 7\\
x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 24\\
x_{1-3} &\geq 0
\end{aligned}$$

D3

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &\to \min\\
x_1 - x_2 + x_3 &= 3\\
-x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8\\
x_{1-3} &\geq 0
\end{aligned}$$

Nasledujúce úlohy vyriešte tak, že zostrojíte ich duály, tie vyriešite a pomocou vety o komplementarite nájdete riešenie zadanej primárnej úlohy.

Solve the following LPs in three steps: 1. formulate the dual; 2. solve the dual; 3. using the complementarity theorem find a solution of the original primal LP.

D4

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 + 10x_4 + x_5 + 3x_6 &\to \min \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 - x_6 &\geq 1 \\ x_{1-6} &\geq 0 \end{aligned}$$

D5

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\to \max \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 1 \\ x_{1-5} &\geq 0 \end{aligned}$$

D6

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &\to \max \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\leq 1 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D7

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &\to \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 1 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D8

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\to \min \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 &\geq 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 &\leq 1 \\ x_{1-5} &\geq 0 \end{aligned}$$

VÝSLEDKY / SOLUTIONS

B5 $\mathbf{y}^{\text{opt}} = (1,0)^T$

B6 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (1,0,0)^T, \mathbf{y}^{\text{opt}} = (2,0)^T$

B8 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0,3,1,0)^T, \mathbf{y}^{\text{opt}} = (-1,0)^T$

B9 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (3,8,3,0,0)^T, \mathbf{y}^{\text{opt}} = (-2,1,-3)^T$

B10 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0,0,7)^T, \mathbf{y}^{\text{opt}} = (1,0)^T$

B11 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (14,11,0)^T, \mathbf{y}^{\text{opt}} = (1,-1)^T$

C1 No

C2 No

C5 $t \to \min$; to $|z_i - kx_i - q| \leq t$, $i = 1,2,\dots,n$, $t \geq 0, k, q$ ľubovoľné / arbitrary.

D2 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0,0,0)^T$

D3 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (2,1,0,0,0)^T$

D4 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0,1,0,0)^T$

D5 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (1,0,0,0)^T$

6. Ekonomická interpretácia duality
Economic interpretation of duality

Úvodné otázky

A1 Zopakujte si tvorbu duálnych úloh.

Základné úlohy

B1 Záhradník má na sklade dve zmesi trávových semien. Zmes I obsahuje 60% semena trávy nazývanej *bluegrass*, 10% semena anglického trávnika a stojí 8 €/kg. Zmes II obsahuje 20% trávového semena bluegrass, 50% anglického trávnika a stojí 6 €/kg. (Každá zmes navyše obsahuje iné typy semien a inertný materiál.) Kvalitné osiatie trávnika vyžaduje použiť aspoň 30 kg semena bluegrass a aspoň 26 kg anglického trávnika.

a) Akým spôsobom sa dá vyrobiť najlacnejšie osivo zo zmesí I a II, spĺňajúce uvedené požiadavky?
b) Sformulujte duálnu úlohu a nájdite jej interpretáciu.
c) Na základe tieňových cien vyčíslite, aký vplyv na cenu výsledného osiva bude mať zvýšenie požiadavky na obsah semena bluegrass o 1 kg.

B2 Papierne Green Paper sa zmluvne zaviazali produkovať mesačne minimálne 240 ton toaletného papiera a 280 ton novinového papiera. Vo výrobe sa používajú tri rôzne technológie. Pri prvom technologickom procese sa ako vstup vyžaduje čistá celulózová hmota, pri ďalších dvoch procesoch sa druhotne spracúva aj recyklovaný papier. Kvôli prísnym ekologickým predpisom musí Green Paper mesačne vykúpiť aspoň 60 ton recyklovaného papiera a zabezpečiť jeho druhotné spracovanie.
Každý proces trvá celú pracovnú smenu. Vstupy a výstupy pre jednotlivé výrobné procesy v tonách a výrobné náklady v eurách sú popísané v nasledujúcej tabuľke:

Warm-up questions

A1 Recall the formation of dual LPs.

Core exercises

B1 A gardener has two grass blends in storage. Blend I contains 60% of *bluegrass* seeds, 10% of English lawn seeds and its price is 8 €/kg. Blend II consists of 20% bluegrass seeds, 50% English lawn seeds and its price is 6 €/kg. (In addition, each blend contains other seed kinds and inert material.) To obtain lawn of good quality, it is necessary to use at least 30 kg of bluegrass seeds and at least 26 kg of English lawn seeds.

a) How to produce the cheapest seed blend that satisfies the above requirements from blends I and II?
b) Formulate the dual problem and find its interpretation.
c) Using shadow prices calculate the price of the optimal seed blend if the requirement for the amount of bluegrass seeds is increased by 1 kg.

B2 Paper-mill Green Paper have signed a contract to produce monthly at least 240 tons of toilet paper and 280 tons of newsprint. They use three various manufacturing technologies. The input for the first technological process is pure cellulose, the other two technologies utilize also recycled paper. Because of strict ecological regulations, Green Paper have to buy up and reuse monthly at least 60 tons of recycled paper.
Each process runs one whole working shift. Inputs and outputs for each manufacturing process in tons and cost of production in euros are listed in the following table:

proces / process	Spotreba recyklovaného papiera / Consumption of recycled paper (t)	Vyrobené množstvo za smenu / Produced amount per shift		Výrobné náklady / Cost of production (€)
		toal. papier / toilet paper (t)	novin. papier/ newsprint (t)	
1	0	6	8	500
2	2	12	12	1000
3	3	10	15	1400

a) Určte optimálny mesačný výrobný plán (t.j. koľkokrát sa má použiť ktorý výrobný proces), ktorý vyhovuje technologickým a legislatívnym obmedzeniam pri čo najnižších výrobných nákladoch.

b) Sformulujte duálnu úlohu a nájdite jej interpretáciu.

c) Z tabuľky je vidieť, že procesy, pri ktorých sa spracováva recyklovaný papier, sú pre Green Paper finančne nákladné. Predpokladajme, že Green Paper nájde malú spracovateľskú firmu, ktorá bude ochotná časť recyklovaného papiera spracovať namiesto nej. Akú sumu jej môže Green Paper zaplatiť, aby na tomto obchode neprerobil?

B3 Športový klub vyrába vo svojej lodenici dva typy športových člnov: dvojmiestne kanoe a turistický kajak. Člny sú strojovo lisované z polyetylénu a potom ručne upravované. Na jedno kanoe je potrebných 60 kg polyetylénu, 30 minút strojového času a 3 hodiny ručnej práce. Na výrobu kajaku sa spotrebuje 40 kg polyetylénu, 20 minút práce stroja a 5 hodín ručných úprav. Na nasledujúce 3 mesiace má lodenica k dispozícii 4 tony polyetylénu, 50 hodín strojového času a členovia klubu môžu stráviť 300 hodín pri ručnej úprave člnov. Predajná cena kanoe je 300€ a kajaku 250€.

a) Predpokladajme, že akékoľvek množstvo vyrobených člnov je možné predať. Navrhnite výrobný plán, ktorý za týchto podmienok zabezpečí lodenici maximálnu tržbu z predaja člnov.

b) Za akých podmienok sa oplatí lodenici dokúpiť ďalší polyetylén, ak chce zvýšiť svoju tržbu?

c) Oplatí sa klubu prenajať si ďalší strojový čas resp. zaplatiť externých pracovníkov, ak chce zvýšiť tržbu z predaja člnov?

OTÁZKY NA ZAMYSLENIE

C1 Ak má primárna úloh LP jediné optimálne riešenie, môže mať prislúchajúca duálna úloha viac optimálnych riešení? Čo sú potom tieňové ceny?

a) Determine an optimal monthly production plan (i. e., how many times each process should be used) that satisfies technological and legislative restrictions and achieves the lowest production cost.

b) Formulate the dual problem and find its interpretation.

c) According to the table, it is easy to see that processes utilizing recycled paper are very expensive for Green Paper. Suppose that Green Paper find a small firm with specialized equipment that can handle recycled paper for them. What price can Green Paper pay for such services so that they are still making some profit?

B3 A sports club produces in their shipyard two types of sport boats: a double canoe and a single kayak. Boats are machine moulded from polyethylene and then manually finished. To produce one canoe, 60 kg of polyethylene, 30 minutes of machine time and 3 hours of manual work are needed. For a kayak, 40 kg of polyethylene, 20 minutes of machine time and 5 hours of manual work are needed. In the comming 3 months, the shipyard has 4 tons of polyethylene, 50 hours of machine time and club members can spend 300 hours on manual work on boats. The price of a canoe is 300€ and the price of a kayak is 250€.

a) Suppose that any number of manufactured boats can be sold. Suggest a production plan that, subject to the above conditions, brings the maximal revenue for the shipyard.

b) In order to increase the revenue, the shipyard can buy more polyethylene. Subject to which conditions would it be profitable?

c) Would it be profitable for the club to rent more machine time or hire some external workers?

BRAIN TEASERS

C1 If a primal LP admits a unique optimal solution, can the corresponding dual LP admit several optimal solutions? What are then shadow prices?

Doplnkové úlohy

D1 Firma Soft Drink pripravuje tri ovocné koncentráty na výrobu nealkoholických nápojov vo svojich troch pobočkách. Týždenné požiadavky na jednotlivé koncentráty (v hektolitroch) a prepravné náklady na jeden hektoliter koncentrátu od jednotlivých pobočiek do centrálnej výrobne firmy Soft Drink sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

	Prepravné náklady / Transport costs (€/hl) Koncentrát / Concentrate		
Pobočka / Branch	1	2	3
1	2	–	2.5
2	3	5	2
3	3	4	–
Požiadavky / Requests (hl)	1000	1200	3000

Pomlčky v tabuľke označujú, že daná pobočka príslušný koncentrát nedodáva. Dopravné náklady závisia od požadovanej prepravnej teploty a vzdialenosti pobočky od centrálnej výrobne. Týždenná produkcia pobočiek je limitovaná iba kapacitou ich plniacich liniek. Pre prvú pobočku je to v úhrne 1000 hl, pre druhú 2000 hl a pre tretiu 3000 hl.

a) Nájdite rozvozný plán, ktorý splní požiadavky na jednotlivé koncentráty a bude minimalizovať prepravné náklady.

b) Sformulujte duálnu úlohu a nájdite jej interpretáciu.

c) Nový výrobný riaditeľ Soft Drink-u prišiel s nápadom, že koncentráty by sa dali produkovať aj priamo v Soft Drink-u z ovocia, ktoré ponúkajú drobnopestovatelia na trhu v sídle firmy, a tak ušetriť na preprave. Akú sumu sa vyplatí Soft Drink-u investovať do takéhoto spôsobu získavania koncentrátov?

D2 Drevárska firma C+C vyrába a montuje u zákazníkov vstavané skrine. Obchody idú dobre a objednávky na najbližší mesiac prekračujú výrobné možnosti firmy. Za dodanie jednej skrine firma inkasuje 1000€. Avšak, najbližší mesiac má firma k dispozícii iba 1750 hodín pracovného fondu a 1032 montážnych sád drevených polotovarov. Každá skriňa vyžaduje 5 hodín práce, 3 montážne sady a jeden rám. Rámy je možné zostaviť ešte vo firme, čo si vyžaduje 2 hodiny práce a 1 montážnu sadu, alebo ich je možné kúpiť od dodávateľa hotové za 275€. Náklady na jednu hodinu práce robotníka sú 10€ a jedna montážna sada stojí 50€. Nijaké ďalšie náklady v súvislosti s výrobou skríň sa do zisku firmy priamo nepremietajú.

Additional practice

D1 Company Soft Drink has three branches that produce three kinds of fruit juice concentrate used for preparation of soft drinks. The following table presents weekly demand for each concentrate (in hectoliters) as well as transport costs per one hectoliter of a concentrate from each branch to the headquarters of Soft Drink.

Dashes in the table indicate that the corresponding branch does not supply the respective concentrate. Transport costs depend on the required transport temperature and the distance from the headquarters. Weekly production of the branches is limited only by capacities of filling lines. For the first branch, this capacity is 1000 hl, for the second one 2000 hl and for the third branch 3000 hl.

a) Find a distribution plan that satisfies the requirements for each concentrate while minimizing transport costs.

b) Formulate the dual problem and find its interpretation.

c) The new production manager of Soft Drink has an idea of producing concentrate directly in Soft Drink from fruits supplied on the local market by small farms and so save transport charges. How much should Soft Drink invest in this way of obtaining concentrates?

D2 Company C+C manufacture and assemble sliding door wardrobes for their customers. They are very successful and for the following month they have more orders than they are able to satisfy. A delivery of one wardrobe brings 1000€ revenue. However, for the following month, the company have at their disposal only 1750 working hours and 1032 sets of wooden semiproducts. Each wardrobe needs 5 hours of work, 3 sets and one frame. The company are able to produce frames itself using 2 hours of work and 1 set per one frame, or they can buy them for 275€ per piece. Hour's wages are 10€ and the price of one set is 50€. There are no other costs related to the manufacturing of sliding door wardrobes.

a) Ako si má firma naplánovať výrobu na nasledujúci mesiac, aby maximalizovala svoj zisk?

b) Firma zistila, že by ešte mohla dokúpiť ďalšie montážne sady u iného dodávateľa. Za akú cenu sa jej to vyplatí urobiť, ak chce zvýšiť svoj zisk?

c) Aké maximálne náklady na hodinu práce v nadčase by ešte pomohli firme zvýšiť zisk?

a) How should the company organize the production for the following month to obtain maximum profit?

b) It is possible to purchase additional sets from another supplier. What price would be profitable?

c) What are the maximum wages per one hour of overtime work that make this work profitable?

VÝSLEDKY / SOLUTIONS

B1 a) Použiť 35 kg prvej zmesi a 45 kg druhej. /Use 35 kg of the first blend and 45 kg of the second one.

c) Zvýšenie nákladov približne / Cost increase approximately 12,14 €.

B2 a) Druhý proces 7,5-krát, tretí 15-krát. / Second process 7.5-times, third process 15-times.

c) Maximálne 425 € za tonu. / Maximum 425 € per one ton.

B3 a) 50 kanoí a 30 kajakov / 50 canoes and 30 kayaks.

b) Maximálne 4,17 € za tonu polyetylénu / maximum 4.17 € per one ton of polyethylene.

c) Má to zmysel, ale najviac 16.67 € za hodinu /It is profitable, but for at most 16.67 € per one hour.

D1 a) 1000 hl koncentrátu 3 z prvej pobočky, 2000 koncentrátu 3 z druhej pobočky, 1000 hl koncentrátu 1 a 1200 hl koncentrátu 2 z tretej pobočky. / 1000 hl of concentrate 3 from the first branch, 2000 hl of concentrate 3 from the second branch, 1000 hl of concentrate 1 and 1200 hl of concentrate 2 from the third branch.

c) Maximálne nákupné ceny za hektoliter koncentrátov 1,2 a 3 sú 3 €, 4 € a 3,5 €. / Maximum acceptable prices pre one hectoliter of concentrates 1, 2 and 3 are 3 €, 4 € and 3.5 €, respectively.

D2 a) Premenné x_1, x_2 a x_3 označujú počet vyrobených skríň, vyrobených rámov a nakúpených rámov po rade. / Variables x_1, x_2 a x_3 represent the number of produced wardrobes, produced frames and bought frames, respectively.

Formulácia úlohy: / Problem formulation:

$$
\begin{aligned}
1000x_1 - 10(5x_1 + 2x_2) - 50(3x_1 + x_2) - 275x_3 \rightarrow &\quad \max \\
5x_1 + 2x_2 \leq &\quad 1750 \\
3x_1 + x_2 \leq &\quad 1032 \\
x_1 - x_2 - x_3 \leq &\quad 0 \\
x_{1-3} \geq &\quad 0
\end{aligned}
$$

Riešenie: vyrobiť 314 skríň, 90 rámov a kúpiť 224 rámov. / Solution: produce 314 wardrobes and 90 frames, buy 224 frames.

b) Najviac / At most 25€ za sadu / per set.

c) Najviac / At most 45€ za hodinu / per hour.

7. Revidovaná a duálna simplexová metóda
The revised and dual simplex method

Úvodné otázky

A1 Ako zistíme pri duálnej simplexovej metóde, že úloha je neohraničená?

A2 Ako zistíme pri duálnej simplexovej metóde, že úloha je neprípustná?

Warm-up questions

A1 How will you determine that a LP is unbounded when using the dual simplex method?

A2 How will you determine that a LP is infeasible when using the dual simplex method?

Základné úlohy

Nasledujúce úlohy LP riešte duálnou simplexovou metódou. Pre porovnanie vyriešte úlohu B1 aj primárnou simplexovou metódou.

Core exercises

Solve the following LPs by the dual simplex method. For comparison, solve problem B1 also by the primal simplex method.

B1

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &\geq 4 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

B2

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &\to \min \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\geq 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &\geq 3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\geq 4 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

Nasledujúce úlohy LP vyriešte revidovanou simplexovou metódou. Pre porovnanie vyriešte úlohu B3 aj klasickou simplexovou metódou.

Solve the following LPs by the revised simplex method. For comparison, solve problem B3 also by the classical primal simplex method.

B3

$$\begin{aligned} 2x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 + x_7 &\to \min \\ x_1 \qquad + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 &= 3 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 + x_7 &= 4 \\ x_{1-7} &\geq 0 \end{aligned}$$

B4

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 - 3x_6 &\to \min \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 - 2x_6 &= 4 \\ x_{1-6} &\geq 0 \end{aligned}$$

B5 Vyriešte úlohu revidovanou simplexovou metódou. Ako sa zmení optimálne riešenie, ak pridáte novú premennú x_4, ktorej koeficient v účelovej funkcii je -1 a zodpovedajúci stĺpec v matici ohraničení je $(2,1,-3)^T$?

B5 Solve the following LP by the revised simplex method. How does the optimal solution change after adding a new variable x_4 with the objective function coefficient -1 and the corresponding column in the constraint matrix equal to $(2,1,-3)^T$?

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\to \min \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad &\leq 4 \\ x_2 + 3x_3 &\leq 6 \\ x_{1-3} &\geq 0 \end{aligned}$$

B6 Firma Feri vyrába čistiace roztoky, ktoré pripravuje zmiešavaním účinnej látky a rozpúšťadla. Momentálne má na sklade 100 l účinnej látky a 500 l rozpúšťadla. Jej sortiment pozostáva z troch čistiacich roztokov s obsahom 10%, 20% a 30% účinnej látky, ktoré sa predávajú za ceny 1, 2 a 4 €/liter. Okrem toho je možné predávať samostatne rozpúšťadlo, v cene 0,5 €/liter.

a) Sformulujte ako úlohu LP problém určenia optimálneho výrobného plánu firmy Feri maximalizujúceho tržbu. Vyriešte túto úlohu simplexovou metódou.

b) Firma Feri usúdila, že tržba určená v časti a) je nedostačujúca, pretože na pokrytie svojich prevádzkových nákladov potrebuje prijať aspoň 3000 €. Rozhodla sa preto vyskúšať výrobu účinnejších čistiacich roztokov s tým, že zvýšenie koncentrácie účinnej látky v roztoku o 10% zvýši cenu čistiaceho prostriedku dvojnásobne. Určte, aké roztoky a v akých množstvách má firma Feri vyrábať, keď z ekologických dôvodov chce udržať podiel účinnej látky na čo najnižšej hodnote. Použite výsledok časti a) na pridávanie nových premenných a využite revidovanú simplexovú metódu.

B6 Company Feri produces cleaning liquids by mixing an active substance and a solvent. Currently, they have 100 l of the active substance and 500 l of the solvent in storage. Their product portfolio consists of three cleaning liquids containing 10%, 20% and 30% of active substance. Their prices are 1, 2 and 4 €/liter, respectively. It is also possible to sell the solvent independently for 0.5 €/liter.

a) Formulate as a LP the problem of determining an optimal production plan that maximizes the revenue for company Feri. Solve by the simplex method.

b) Company Feri has concluded that the revenue computed in part a) is not sufficient since for covering their operating costs they need at least 3000 €. Therefore, they have decided to produce some more efficient cleaning liquids. It is known that a 10% increase of the active substance concentration in the liquid doubles the price of the liquid. Determine what liquids and in what quantities should company Feri produce if for ecological reasons they want to keep the concentration of the active substance as low as possible. Use the results from part a) for adding new variables and use the revised simplex method.

OTÁZKY NA ZAMYSLENIE

C1 Je možné prečítať duálne riešenie z optimálnej tabuľky aj vtedy, ak sme používali duálnu simplexovú metódu?

C2 Predpokladajte, že sme pomocou revidovanej simplexovej metódy našli optimálne riešenie úlohy, vzniknutej z pôvodnej úlohy pridaním novej premennej. Nájdeme v optimálnej tabuľke aj riešenie duálu k modifikovanej úlohe?

BRAIN TEASERS

C1 Is it possible to find the dual solution from the optimal simplex tableau when the dual simplex method was used?

C2 Assume that the revised simplex method was used to find the optimal solution of the LP obtained by adding a new variabel to the original LP. Can you find the optimal solution of the dual of the new problem in the optimal simplex tableau?

Doplnkové úlohy / additional practice

Nasledujúce úlohy vyriešte duálnou simplexovou metódou.

Solve the following LPs by the dual simplex method.

D1

$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+5x_3 &\to \min \\ x_1+x_2+x_3 &\geq 6 \\ 2x_1-x_2+x_3 &\geq 8 \\ 3x_1+2x_2-x_3 &\geq 10 \\ x_{1-3} &\geq 0 \end{aligned}$$

D2

$$\begin{aligned} 2x_1+6x_2+3x_3+4x_4 &\to \min \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4 &\geq 4 \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4 &\geq 5 \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4 &\geq 3 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D3

$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+10x_3+15x_4+6x_5 &\to \min \\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 &\geq 12 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4-x_5 &\geq 16 \\ x_{1-5} &\geq 0 \end{aligned}$$

D4

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3+x_4+x_5 &\to \min \\ x_1-2x_2+3x_3+4x_4-x_5 &\geq 8 \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4-x_5 &\geq 6 \\ x_{1-5} &\geq 0 \end{aligned}$$

D5

$$\begin{aligned} 4x_1+5x_2+3x_3+2x_4 &\to \min \\ x_1+x_2+x_3+x_4 &\geq 1 \\ x_1+2x_2+x_3+2x_4 &\geq 2 \\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4 &\geq 2 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D6

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4+x_5 &\to \min \\ x_1-2x_2-x_3+x_4+x_5 &\geq 2 \\ -x_1-x_2+x_3-2x_4-x_5 &\geq 1 \\ x_1-x_2+x_3+2x_4+x_5 &\geq 4 \\ x_1+x_2+x_3-4x_4-x_5 &\geq 5 \\ x_{1-5} &\geq 0 \end{aligned}$$

D7

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 &\to \min \\ x_1 - \ \ x_2 - x_3 + x_4 - \ \ x_5 + x_6 &\geq 6 \\ x_1 + \ \ x_2 + x_3 + x_4 + \ \ x_5 + x_6 &\geq 7 \\ x_{1-6} &\geq 0 \end{aligned}$$

Nasledujúce úlohy vyriešte revidovanou simplexovou metódou.

Solve the following LPs by the revised simplex method.

D8

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ \ x_3 - \ \ x_4 - \ \ x_5 &\to \min \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 - \ \ x_5 &= 3 \\ x_1 - x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 2 \\ x_{1-5} &\geq 0 \end{aligned}$$

D9

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 &\to \min \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad + x_5 - x_6 &= 3 \\ x_1 \qquad + x_3 + \ \ x_4 - x_5 - x_6 &= 2 \\ x_1 + x_2 \qquad + \ \ x_4 + x_5 + x_6 &= 1 \\ x_{1-6} &\geq 0 \end{aligned}$$

D10

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &\to \max \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &\leq 4 \\ x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 &\leq 6 \\ x_{1-3} &\geq 0 \end{aligned}$$

D11

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &\to \min \\ x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 + x_4 &\leq 6 \\ x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 - x_4 &\leq 8 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D12

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\to \min \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 6 \\ x_1 + \ \ x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 2 \\ x_{1-6} &\geq 0 \end{aligned}$$

D13

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &\to \min \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - \ \ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 5 \\ x_{1-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

D14

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 &\to \min \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 + \ \ x_5 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 - 2x_5 &= 5 \\ x_{1-5} &\geq 0 \end{aligned}$$

VÝSLEDKY / SOLUTIONS

B1 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{9}{2})^T$ B2 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (7, 0, 11, 0)^T$ B3 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, 7, 0, 0, 0, 3, 0)^T$

B4 Neohraničená / Unbounded

B5 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (\frac{4}{3}, 0, 2)^T$ $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, 0, 6, 4)^T$

B6 x_1, x_2, x_3 - množstvá 10%, 20% a 30% roztokov; x_4 - množstvo riedidla
x_1, x_2, x_3 - amounts of 10%, 20% and 30% liquids; x_4 - amount of solvent

a) $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0.5x_4 \to \max$
$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 \leq 100$
$0{,}9x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}7x_3 + x_4 \leq 500$
$x_{1-4} \geq 0$
$\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, 0, \frac{1000}{3}, \frac{800}{3})^T$

b) Vyrobiť 200 litrov 50% roztoku a predať 400 litrov riedidla. Príjem je 3400 €.
Produce of 200 l of 50% liquid and sell 400 l of solvent. Income = 3400 €.

D1 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (6, 0, 0)^T$ D2 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (\frac{11}{7}, 0, 0, \frac{12}{7})^T$ D3 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (\frac{40}{3}, \frac{4}{3})^T$

D4 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (\frac{10}{9}, \frac{32}{9})^T$ D5 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, 0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ D6 Neprípustná / Infeasible

D7 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{13}{2}, 0, 0)^T$ D8 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, \frac{4}{3}, 0, \frac{5}{3}, 0)^T$ D9 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, 1, 2, 0, 0, 0)$

D10 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, 0, 4)^T$ D11 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, \frac{8}{3}, 0, 0)^T$ D12 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, 2, 0, 0, 0, 0)^T$

D13 $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (3, 0, 1, 0)^T$ D14 Neprípustná / Infeasible.

8. Postoptimalizačná analýza a parametrické programovanie Post-optimality analysis and parametric programming

Úvodné otázky

A1 Zopakujte si simplexovú metódu, kritériá optimality a neohraničenosti. Kedy je úloha LP neprípustná?

Základné úlohy

B1 V škole sa má v čase prázdnin uskutočniť rekonštrukcia 8 000 m^2 podlahy. Uvažuje sa o dvoch druhoch podlahoviny. Cena prvého druhu je 2 € na 1 m^2 a druhého 3 €, pričom oba druhy je možné kupovať v ľubovoľnom množstve a za odrezky sa neplatí. Priemerné mesačné výdavky na údržbu (čistenie, konzervácia a pod.) 1 m^2 podlahoviny prvého druhu budú 0,3 € a pre podlahovinu druhého druhu 0,15 €.

a) Koľko ktorej podlahoviny má riaditeľstvo školy vybrať, ak na nákup je plánovaných 21 000 € a náklady na neskoršiu údržbu majú byť čo najnižšie?

b) Školská správa znížila rozpočet na rekonštrukciu školy na 20 000 €. Bude potrebné meniť rozhodnutie o nákupe podlahoviny?

c) Až pri výbere konkrétnych vzorov v sklade sa zistilo, že podlahovinu druhého typu je potrebné navyše raz za pol roka špeciálne prebrúsiť, čo stojí 1.2 € na 1 m^2. Ako sa má zmeniť riešenie, aby boli dodržané vyššie sformulované požiadavky?

d) Riaditeľ školy si všimol, že v sklade majú ďalší druh podlahoviny, o ktorom sa pôvodne neuvažovalo. Zistil, že táto podlahovina stojí síce až 3.5 € na m^2, ale mesačné náklady na údržbu sú u nej len 0.2 €/m^2. Dosiahne riaditeľ výhodnejšie riešenie rekonštrukcie podlahy, ak využije aj túto podlahovinu?

B2 Firma Fatran zabezpečuje dopravu lanovkami na vrch Kopčisko. Jednosedadlová lanovka je staršia a v rámci skúšobnej prevádzky po rekonštrukcii má zatiaľ prepravnú kapacitu 300 osôb za hodinu a lístok pre dospelého stojí 4 €. Deti majú 50% zľavu. Dvojsedadlová lanovka je modernejšia a za hodinu prepraví na Kopčisko 550 osôb. Lístok pre dospelého na ňu stojí 5 € a pre dieťa 3 €. Z bezpečnostných dôvodov však smie na dvojsedadlovej lanovke ísť dieťa len v sprievode dospelého.

Warm-up questions

A1 Recall the simplex method. When is a LP infeasible, optimal and unbounded?

Core exercises

B1 A reconstruction of 8 000 m^2 floor area at a school is planned. Two floor-board types are under consideration. The price of the first type is 2 €/m^2 and the price of the second type is 3 €/m^2. Any quantity of both types can be bought (waste is not charged). Average maintenance costs (cleaning, preservation etc.) per 1 m^2 of floor-board are 0.3 € for the first floor-board type and 0.15 € for the second one.

a) Which quantity of which floor-board type should the headmaster buy, if the planned expenses are 21 000 € and the subsequent maintenance costs should be minimal?

b) The school board decreased the budget to 20 000 €. Will it be necessary to modify the decision about floor-board purchase?

c) Only during the inspection in the warehouse it was found out that the second floor-board type needs fine grinding once in six months which costs 1.2€ per 1 m^2. How has the solution to be adjusted so that the formulated requirements are kept?

d) The headmaster noticed that one more floor-board type is available. Although its price is 3.5 € per m^2, the monthly maintenance costs are only 0.2 €/m^2. Can the floor reconstruction be done more economically using this floor-board type?

B2 Company Fatran provides cablecar transportation to Mount Kopcisko. The single cable car is older and it is after reconstruction. During the probationary period its transport capacity is 300 people per hour while the price of one adult ticket is 4 €. Children have 50%-discount. The modern two-seat cable car can transport 550 people per hour. An adult ticket is for 5 € and a ticket for a child costs 3 €. For security reasons, a child can travel on the two-seat cable car only if accompanied by an adult.

a) Ako má vedúci turistického zájazdu rozdeliť 300 dospelých a 500 detí na lanovky, aby náklady na lístky boli čo najnižšie a všetci účastníci zájazdu boli prepravení na Kopčisko?

b) Ako sa zmení formulácia a riešenie úlohy, ak si vedúci zájazdu zrazu uvedomil, že vzhľadom na nahustený program sa môžu na Kopčisko prepravovať len jednu hodinu?

c) Pre firmu Fatran je spolupráca s turistami natoľko dôležitá, že sa operatívne rozhodla vyhlásiť akčnú cenu detského lístka na staršej lanovke, a to 1 €. Ako to ovplyvní rozhodnutie vedúceho zájazdu?

d) Dispečer navyše usúdil, že skúšobná prevádzka na jednosedadlovej lanovke prebehla úspešne, a preto dnes môže zvýšiť jej prepravnú kapacitu na maximum, čo znamená, že môže prepraviť až 350 osôb za hodinu. Aký teda bude definitívny prepravný plán účastníkov zájazdu?

a) A tourist group consists of 300 adults and 500. How should their leader organize them so that the transportation costs would be minimal and all of them get to Mount Kopcisko?

b) The leader realized that due to a rich program the transportation to Mount Kopcisko can take at most one hour. How does this affect the formulation of the problem?

c) Company Fatran appreciate the cooperation with tourist groups. Hence they have decided to announce a special price 1 € for the older cable car child ticket. How will this influence the decision of the leader?

d) The transport supervisor concluded that the probationary period of the older cable car was successful and hence its transport capacity can be increased to the maximum 350 people per hour. After this decision, what will be the final transportation plan of the group?

Riešte nasledujúce úlohy parametrického programovania pre uvedené hodnoty parametra λ.

Solve the following parametric programs for the given ranges of parameter λ.

B3 $\lambda \in \langle -10, 10\rangle$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\to \min \\ x_1 + x_2 &\le 6 + \lambda \\ 2x_1 - x_2 &\le 4 - \lambda \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

B4 $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (2+\lambda)x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 &\to \min \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\le 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

B5 $\lambda \in \langle -6, 6\rangle$

$$\begin{aligned} 2x_1 - (1+\lambda)x_2 &\to \min \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 + \lambda \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 - \lambda \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

B6 $\lambda \in \langle -5, 5\rangle$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\to \min \\ x_1 + \lambda x_2 &\le 2 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 &\ge 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

OTÁZKY NA ZAMYSLENIE

C1 Nech $\mathbb{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$, λ je reálne číslo a nech $\mathbf{x}^*$ je optimálne riešenie úlohy $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max,\ \mathbf{x} \in \mathbb{M}$.

a) Za akých podmienok je vektor $\mathbf{x}^*$ optimálnym riešením úlohy

$$\lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$
$$\mathbf{x} \in \mathbb{M}\,?$$

b) Označme symbolom $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ vektor, ktorý má všetky zložky rovné jednej. Za akých podmienok je $\mathbf{x}^*$ optimálnym riešením úlohy

$$(\mathbf{c} + \lambda\mathbf{1})^T\mathbf{x} \to \max$$
$$\mathbf{x} \in \mathbb{M}\,?$$

BRAIN TEASERS

C1 Let $\mathbb{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$, λ be a real number and $\mathbf{x}^*$ be an optimal solution of program $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max,\ \mathbf{x} \in \mathbb{M}$.

a) Under which conditions is vector $\mathbf{x}^*$ an optimal solution of LP

b) Denote by $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ the vector with all its entries equal to one. Under which conditions is $\mathbf{x}^*$ an optimal solution of LP

Doplnkové úlohy

D1 Podnik vyrába výrobky V1, V2 a V3 a na ich výrobu potrebuje polotovary P1, P2 a P3. Zásoby polotovarov, spotreba jednotlivých polotovarov (v kusoch) na jeden kus každého z výrobkov V1, V2, V3 a zisk z predaja výrobkov sú popísané v nasledujúcej tabuľke:

ADDITIONAL PRACTICE

D1 The company produces products V1, V2 and V3. For their production semiproducts P1, P2 and P3 are used. Semiproducts availability, their consumption (in pieces) per one piece of each product V1, V2, V3, and the profit from selling the products are in the following table:

Polotovar	Spotreba na výrobok / Consumption per piece			Zásoby
Semiproduct	V1	V2	V3	Availability
P1	2	1	1	80
P2	4	0	2	50
P3	0	1	1	40
Zisk/Profit	8 €	1 €	12 €	-

a) Stanovte výrobný program, ktorý maximalizuje zisk z predaja a pritom spotreba polotovarov nepresiahne množstvo zásob.

b) Zistilo sa, že v skutočnosti má podnik na sklade polotovary v množstvách 60, 30 a 80 kusov. Ako treba upraviť výrobný plán?

a) Determine a production plan maximizing the profit on condition that the need of semiproducts does not exceed their availability.

b) In reality, the semiproducts are available in quantities 60, 30 and 80. How should the production plan be adjusted?

D2 Pekáreň vyrába ako doplnkový sortiment zákusky a cukrovinky, pričom pri tejto výrobe používa oriešky a čokoládu, z ktorých si môže robiť iba obmedzené zásoby. Spotreba týchto surovín na jedno balenie a zisk z jedného balenia zákuskov a cukroviniek sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

D2 The bakery produces cakes and sweets using nuts and chocolate. The available amounts of nuts and chocolate are limited. Consumption of nuts and chocolate (in kilograms) per one package and the profit from one package of cakes and sweets are in the following table:

	Oriešky / Nuts (g)	Čokoláda / Chocolate (g)	Zisk / Profit (€)
Zákusky/Cakes	100	120	10
Cukrovinky/Sweets	250	60	9

a) Určte optimálny výrobný plán (maximalizujúci zisk) za predpokladu, že v sklade je 90 kg orieškov a 60 kg čokolády a celú produkciu je možné predať.

b) Ako je potrebné upraviť výrobný plán, ak treba navyše zohľadniť, že pri výrobe jedného balenia zákuskov sa spotrebuje 25 kWh elektrickej energie, pri výrobe cukroviniek 10 kWh a firma má z mesačného limitu k dispozícii už iba 120 kWh energie?

c) Jedna z cukrárok navrhla vedúcemu pekárne, že by mohli vyrábať ešte orieškové špice. Na jedno balenie tejto lahôdky sa spotrebuje 20 kg orieškov, žiadna čokoláda a 20 kWh elektrickej energie, ale zisk môže byť až 15 € za kus. Povedie zavedenie tohto výrobku k zvýšeniu celkového zisku pekárne?

D3 Firma Chemona produkuje dve umelé hnojivá Natrit a Phosphorit. Prvé z nich sa predáva po 20 €/kg a druhé po 30 €/kg. Bázickou zložkou oboch hnojív je zemina (50 % pre Natrit a 75 % pre Phosphorit), ktorej skladovacie kapacity má firma obmedzené. Navyše, vzhľadom na nepružnosť dodávateľa je zeminu možné nakupovať vždy len na začiatku mesiaca. Ostatné zložky hnojív vie firma dopĺňať plynule. Pri produkcii 1 kg Natritu dochádza k znečisteniu 10 litrov vody a pri výrobe 1 kg Phosphoritu k znečisteniu 12 litrov vody.

a) Aké množstvo Natritu a Phosphoritu má firma v priebehu mesiaca vyrobiť, aby dosiahla maximálny výnos, keď na sklade je v súčasnosti podľa odhadu skladníka 600 kg zeminy a v čističke môže spracovať nanajvýš 1200 l znečistenej vody mesačne?

b) O koľko sa mohol pomýliť skladník pri odhade zásob zeminy, aby získaný výrobný plán zostal optimálny?

Riešte nasledujúce úlohy parametrického programovania pre uvedené hodnoty parametra λ.

a) Determine an optimal production plan maximizing profit provided that they have 90 kg of nuts and 60 kg of chocolate and the whole production can be sold.

b) For the production of one cake package, 25 kWh of electric power are needed, for one sweets package 10 kWh. How should the production plan be adjusted if the company has this month only 120 kWh of electric power at their disposal?

c) The manager considers the production of nut pikes. Per one package of this delicacy, 20 kg of nuts, no chocolate and 20 kWh of electric power are needed, and the profit is 15 € per package. Will the introduction of nut pikes into production increase the profit of the bakery?

D3 Company Chemona produces two types of fertilizers Natrit and Phosphorit. The prices are 20 €/kg for the first one and 30 €/kg for the second one. The major component of both fertilizers is soil (50 % for Natrit and 75 % for Phosphorit) but the company has a limited storage capacity for it. Moreover, soil can be purchased only at the beginning of each month. Other fertilizers components can be purchased continuously. When producing 1 kg of Natrit, 10 liters of water are polluted, and for 1 kg of Phosphorit 12 liters.

a) What amounts of Natrit and Phosphorit can the company produce in a month to maximize its revenue if 600 kg of soil are available and their sewerage plant can treat at most 1200 l of polluted water per month?

b) In which range of soil availability remains the computed production plan optimal?

Solve the following parametric programs for the given ranges of parameter λ.

D4 $\lambda \in \langle -2, 2 \rangle$

$$
\begin{aligned}
(1+\lambda)x_1 + (1-\lambda)x_2 + (2-\lambda)x_3 &\to \min \\
x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 &\le 6 \\
2x_1 - \quad x_2 + \quad x_3 &\le 9 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

D5 $\lambda \in \langle -2, 2 \rangle$

$$\begin{array}{rrrrl}
(1-\lambda)x_1 + & (2-\lambda)x_2 + & (3-2\lambda)x_3 + & (1+2\lambda)x_4 & \to \min \\
x_1 - & 2x_2 + & x_3 - & x_4 & \leq 0 \\
2x_1 + & 3x_2 - & x_3 + & 2x_4 & \leq 5 \\
-x_1 + & 2x_2 - & 3x_3 - & 3x_4 & \leq 5 \\
 & & & x_{1-4} & \geq 0
\end{array}$$

D6 $\lambda \in \langle -2, 8 \rangle$

$$\begin{aligned}
\lambda x_1 - x_2 &\to \min \\
3x_1 - x_2 &\geq 5 \\
2x_1 + x_2 &\leq 3
\end{aligned}$$

D7 $\lambda \in \langle -2, \frac{6}{5} \rangle$

$$\begin{array}{rrrrl}
(-1+\lambda)x_1 + & (-2+\lambda)x_2 + & (-3+2\lambda)x_3 - & (1+2\lambda)x_4 & \to \max \\
x_1 - & 2x_2 + & x_3 - & x_4 & \leq 2\lambda \\
2x_1 + & 3x_2 - & x_3 + & 2x_4 & \leq 5-\lambda \\
-x_1 + & 2x_2 - & 3x_3 - & 3x_4 & \leq 5 \\
 & & & x_{1-4} & \geq 0
\end{array}$$

D8 Predajňa FARBY-LAKY práve dostala faxovú ponuku dvoch druhov kvalitných lakov na drevo. Lesklý lak sa má predávať po 8 €/kg, ale cena matného bola nečitateľná. Vzhľadom na bezpečnostné predpisy sa v predajni nesmie skladovať viac ako 100 kg lakov a navyše vedúci vie, že matného laku sa nepredá nikdy viac ako lesklého. Koľko ktorého laku má vedúci objednať, ak chce maximalizovať tržbu a očakáva, že cena matného laku sa nebude od ceny lesklého líšiť viac ako o 20%?

D9 Firma Patatas vlastní dve multifunkčné linky na výrobu zemiakových polotovarov. Prvá linka vyrobí za smenu 2 t hranolkov a po jednej tone krokiet a lupienkov, druhá linka vyrobí po jednej tone hranolkov a krokiet a dve tony lupienkov. Náklady na jednu smenu práce prvej linky sú 300 €, pre druhú linku je to 500 €. Momentálne má firma Patatas potvrdené objednávky na 10 t hranolkov, 8 t krokiet a 12 t lupienkov s tým, že jeden z odberateľov má záujem o ďalšie lupienky v množstve najviac 10 t a sľúbil oznámiť presné množstvo v najbližšom čase. Ako si má firma Patatas rozdeliť prácu na svoje dve linky, ak sa chce pripraviť na všetky možné eventuality a v každom prípade minimalizovať svoje náklady?

B7 A store has just received an offer for two high-class enamels. The price of glossy enamel is 8 €/kg, but the price of the mat one is unreadable. Because of the safety regulations, there can be at most 100 kg of enamels in store. Moreover, the manager knows that the demand for mat enamel is always lower than that of the glossy enamel. What quantities of enamels should the manager order if he wants to maximize the revenue, and he expects the price of the mat enamel not to differ from the price of glossy enamel by more than 20%?

B6 The Patatas company have two workshops. During one shift the first workshop produces 2 t of French fries, 1 t of croquettes and 1 t of chips. The second workshop produces 1 t of French fries, 1 t of croquettes and 2 t of chips per shift. Production costs per one shift are 300 € for the first workshop and 500 € for the second one. At present, Patatas have orders for 10 t of French fries, 8 t of croquettes and 12 t of chips. A new customer wants to buy some chips, but at the moment he is not able to state the precise amount (this will be known soon), he only promised not to demand more than 10 t. How should Patatas organize their production if they want to be prepared for all alternatives but still minimize their costs?

VÝSLEDKY / SOLUTIONS

B1 a) 3000 m^2 prvej podlahoviny, 5000 m^2 druhej / 3000 m^2 first floor-board, 5000 m^2 second one.
b) 4000 m^2 oboch podlahovín / of both floor-board types.
c) Použi iba prvú podlahovinu / Use only the first floor-board.
d) Tretia podlahovina sa neoplatí. / The third type is no worth consideration.

B3

λ	$\mathbf{x}^{\text{opt}}$	f^{opt}
$\langle -10, -6)$	neprípustná/infeasible	
$\langle -6, 4\rangle$	$(0, 0)^T$	0
$\langle 4, 10\rangle$	$(0, \lambda - 4)^T$	$2\lambda - 8$

B4

λ	$\mathbf{x}^{\text{opt}}$	f^{opt}
$\langle -\infty, 2\rangle$	$(4, 0, 0)^T$	$8 + 4\lambda$
$\langle -2, 1\rangle$	$(0, 0, 0)^T$	0
$\langle 1, \infty\rangle$	$(0, 3, 0)^T$	$3 - 3\lambda$

D1 a) 12,5 kusov V1 a 40 kusov V2 / 12,5 pieces of V1 and 40 pieces of V2.
b) 35 kusov V2 a 25 kusov V3 / 35 pieces of V1 and 25 pieces of V2.

D2 a) 5 balení zákuskov / cake packages.
b) 4 balenia zákuskov a 2 balenia cukroviniek / 4 cake packages and 2 sweets packages.
c) 2 balenia zákuskov a 3,15 balení špisov / 2 cake packages and 3.15 packages of nut pikes.

D3 a) 100 kg Phosphorit.
b) Zásoba zeminy má byť aspoň 75 kg /Soil storage has to be at least 75 kg.

D4

λ	$\mathbf{x}^{\text{opt}}$	f^{opt}
$\langle -2, 1\rangle$	$(\frac{9}{2}, 0, 0)^T$	$\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\lambda$
$\langle -1, 1\rangle$	$(0, 0, 0)^T$	0
$\langle 1, \frac{3}{2}\rangle$	$(0, 6, 0)^T$	$6 - 6\lambda$
$(\frac{3}{2}, 2\rangle$	neohr. /unbounded	

D5

λ	$\mathbf{x}^{\text{opt}}$	f^{opt}
$\langle -2, -\frac{1}{2}\rangle$	$(0, 0, 0, \frac{5}{2})^T$	$\frac{5}{2} + 5\lambda$
$\langle -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\rangle$	$(0, 0, 0, 0)^T$	0
$\langle \frac{4}{3}, \frac{13}{8}\rangle$	$(\frac{10}{7}, \frac{5}{7}, 0, 0)^T$	$\frac{20}{7} - \frac{15}{7}\lambda$
$\langle \frac{13}{8}, 2\rangle$	$(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, 0)^T$	$\frac{30}{4} - \frac{20}{4}\lambda$

D6

λ	$\mathbf{x}^{\text{opt}}$	f^{opt}
$\langle -2, 3)$	$(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})^T$	$\frac{8}{5}\lambda + \frac{1}{5}$
3	$(\frac{8}{5}\mu, -\frac{1}{5}\mu - (1 - \mu)5)^T$, $\mu \in \langle 0, 1\rangle$	5
$(3, 8\rangle$	neohr. /unbounded	

D7

λ	$\mathbf{x}^{\text{opt}}$	f^{opt}
$\langle -2, -\frac{5}{3}\rangle$	$(0, -5, -3\lambda, 0)$	$10 + 4\lambda - 6\lambda^2$
$\langle -\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}\rangle$	$(0, 0, 0, \frac{5}{2} - \frac{\lambda}{2})$	$-\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\lambda + \lambda^2$
$\langle -\frac{1}{2}, 0\rangle$	$(0, 0, 0, -2\lambda)$	$2\lambda + 4\lambda^2$
$\langle 0, 1\rangle$	$(0, 0, 0, 0)$	0
$\langle 1, \frac{6}{5}\rangle$	$(\frac{5}{2} - \frac{\lambda}{2}, 0, 0, 0)$	$-\frac{5}{2} + 3\lambda - \frac{\lambda^2}{2}$

D8 Ak je matný lak lacnejší ako lesklý, objednaj 100 kg lesklého laku, inak 50 kg z oboch lakov.
If the mat enamel is cheaper, order 100 kg of the glossy enamel, otherwise 50 kg of both types.

D9

λ	$\mathbf{x}^{\text{opt}}$	f^{opt}
$\langle 0, 2\rangle$	$(4 - \lambda, 4 + \lambda)^T$	$32 + 2\lambda$
$\langle 2, 8\rangle$	$(\frac{8}{3} - \frac{\lambda}{3}, \frac{14}{3} + \frac{2\lambda}{3})^T$	$\frac{94}{3} + \frac{7}{3}\lambda$
$\langle 8, 10\rangle$	$(0, 6 + \frac{\lambda}{2})^T$	$30 + \frac{5}{2}\lambda$

9. Celočíselné lineárne programovanie
Integer linear programming

Úvodné otázky

A1 Aký je vzťah medzi riešeniami úlohy celočíselného LP a riešeniami jej relaxácie?

Základné úlohy

B1 Nábytkársky podnik vyrába stoly a stoličky. Na stôl sú potrebné $4\,\mathrm{m}^3$ a na stoličku $3\,\mathrm{m}^3$ dreva. Drevo sa dá nakúpiť po 20 €/m^3, pričom podnik môže zakúpiť $1\,000\,\mathrm{m}^3$. Na výrobu čiastočne dokončeného stola sú potrebné 3 hodiny práce, pričom na jeho úplné dokončenie treba ďalšie 4 hodiny práce. Na výrobu čiastočne dokončenej stoličky sú potrebné 3 hodiny práce, pričom na jej úplné dokončenie treba ďalšie 3 hodiny práce. K dispozícii je 8 000 hodín práce, ktorá už bola zaplatená. Predajná cena za nedokončený stôl je 140 €, za dokončený stôl 260 €, za nedokončenú stoličku 120 € a za dokončenú stoličku 220 €. Zostavte úlohu celočíselného lineárneho programovania, ktorá maximalizuje zisk z výroby stolov a stoličiek.

B2 V neveľkej oblasti leží 5 miest a okresný úrad parlament musí rozhodnúť, v ktorých z nich má postaviť požiarne stanice. Chcú ich postaviť minimálny počet pri splnení podmienky, že každé mesto bude dosiahnuteľné od nejakej požiarnej stanice do 15 minút. Časy medzi mestami (v minútach) sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

Warm-up questions

A1 What is the relation between solutions of integer LP and solutions of its relaxation?

Core exercises

B1 A company manufacture tables and chairs. To produce a table, $4\,\mathrm{m}^3$ of timber is needed and $3\,\mathrm{m}^3$ for a chair. The price of timber is 20 €/m^3 and at most $1\,000\ \mathrm{m}^3$ of timber can be provided. Work requirements per one semi-finished table are 3 hours, to entirely finish a table another 4 hours are needed. To produce a semi-finished chair, 3 work hours are needed, and another 3 hours to finish it entirely. The company have 8 000 work hours at their disposal. The selling price of a semi-finished table is 140 € and that of a finished table 260 €, price of a semi-finished chair is 120 € and of a finished chair 220 €. Formulate an integer linear program to maximize the profit from production of tables and chairs.

B2 In a rather small area there are 5 cities. Local authorities have to decide in which ones to build firehouses. They want to build a minimal possible number of firehouses on condition that each city will be achievable in 15 minutes from some firehouse. Travel times between cities (in minutes) are listed in the following table:

	mesto 1 city 1	mesto 2 city 2	mesto 3 city 3	mesto 4 city 4	mesto 5 city 5	mesto 6 city 6
mesto/city 1	0	10	20	30	30	20
mesto/city 2	10	0	25	35	20	10
mesto/city 3	20	25	0	15	30	20
mesto/city 4	30	35	15	0	15	25
mesto/city 5	30	20	30	15	0	14

Zostavte úlohu CLP, ktorú môže okresný úrad použiť na nájdenie minimálneho počtu požiarnych staníc.

B3 Poštový úrad potrebuje v rôzne dni rôzne počty zamestnancov pri priehradkách: v pondelok 16 zamestnancov, v utorok 13, v stredu 14, vo štvrtok 15, v piatok 16, v sobotu 16 a v nedeľu 10. Títo zamestnanci musia byť zamestnaní na plný úväzok a odborové pravidlá vyžadujú, aby každý zamestnanec pracoval päť po sebe nasledujúcich dní, po ktorých bude mať dva dni voľna. Zostavte úlohu CLP, ktorú môže poštový úrad využiť na optimalizáciu počtu zamestnancov.

Formulate an ILP that can be used by the local authorities for finding a minimal number of firehouses.

B3 For fluent service of a post office different daily numbers of operators are required: on Monday 16 operators, on Tuesday 13, on Wednesday 14, on Thursday 15, on Friday 16, on Saturday 16 and on Sunday 10. Operators have to be full-time employees. Moreover, according an agreement with the labour union, each employee works five consecutive days and subsequently has two days off. Formulate an ILP that can be used by the post office to minimize the number of staff members.

B4 Stavebná firma získala zákazku na rekonštrukciu strechy historickej budovy. Pre plynulú prácu tesárov je potrebné každý týždeň zabezpečiť prísun 350 ks dvojmetrových trámov a 950 ks krátkych podpier. Rezanie trámov a výrobu podpier vie firma zabezpečiť vo vlastnej stolárskej dielni na dvoch strojoch A a B. Na obsluhu každého zo strojov sú potrební dvaja kvalifikovaní stolári s rovnakou hodinovou mzdou. Ako polotovar sa v dielni používa dvojmetrová guľatina štandardizovaného priemeru. Najprv sa vždy vyreže maximálne možné množstvo trámov a potom sa zo zvyšku guľatiny narežú podpery. Počty vyrobených trámov a podpier na strojoch A a B z jedného kusa guľatiny a čas jeho spracovania sa líšia. Dielňa má 16 kusov guľatiny. Koľko kusov guľatiny sa má na každom zo strojov spracovať, aby sa minimalizovali mzdové náklady?

B4 A construction company has won a contract to reconstruct the roof of a historical building. To ensure smooth work of workers, it is necessary to provide them weekly with 350 pieces of two-meter timber and 950 pieces of short braces. Timber cutting and brace production can be performed in company's workshop by two machines A and B. Two competent carpenters with the same wage rate are needed for handling each machine. The workshop uses two-meter logs of standardized diameter as a semiproduct. The following table presents the processing time of one log and the number of produced timbers and braces on machines A and B. The company obtains 16 logs weekly. How should the log processing be organized so that the total wage costs are minimal?

Stroj Machine	Čas spracovania (hod.) Processing time (h)	Počet vyrobených trámov Number of produced timbers	Počet vyrobených podpier Number of produced braces
A	3	20	60
B	4	30	80

Otázky na zamyslenie

C1 Predpokladajme, že optimum relaxácie danej úlohy CLP sa dosahuje v bode, ktorého súradnice sú všetky celočíselné. Je tento bod optimom aj pôvodnej úlohy CLP?

C2 Zostrojte úlohu CLP, ktorá má konečne veľa prípustných riešení, zatiaľ čo jej relaxácia je neohraničená.

C3 Nájdite úlohu CLP, ktorá má optimálne riešenie a pritom jej relaxácia je neohraničená.

Brain teasers

C1 Given an ILP, suppose the optimal value of its relaxation is attained at a point with all coordinates integral. Is this point the optimum of the original problem?

C2 Construct an ILP with finitely many feasible solutions while its relaxation is unbounded.

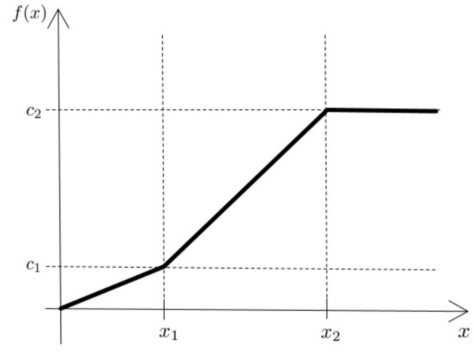
C3 Find an ILP that has an optimum solution but its relaxation is unbounded.

Doplnkové úlohy

D1 Linearizujte danú účelovú funkciu zavedením celočíselných premenných a lineárnych ohraničení.

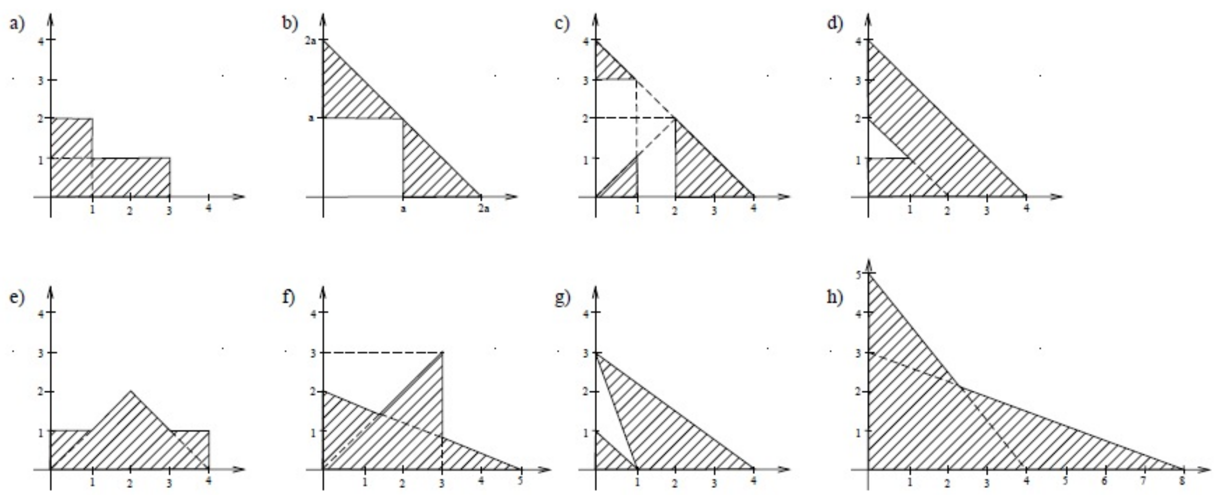
Additional practice

D1 Linearize the given objective function by introducing integer variables and linear constraints.



D2 Vyjadrite pomocou lineárnych nerovností a celočíselných (binárnych) premenných nekonvexné množiny a) - h).

D2 Express the following nonconvex sets a) - h) using linear inequalities and integral (binary) variables.



D3 Pašerák unesie batoh hmotnosti maximálne 30kg. Pašovať môže 6 predmetov s hmotnosťami 4, 5, 6, 7, 8 a 9 kg, ktoré mu vynesú zisk 18, 17, 19, 20, 25 a 30 €. Ako si má pašerák naložiť batoh, ak chce maximalizovať svoj zisk a predmety nemôže deliť?

D3 A smuggler is able to carry a knapsack weighing at most 30kg. He can smuggle 6 various articles of weights 4, 5, 6, 7, 8 and 9 kg with a gain of 18, 17, 19, 20, 25 and 30 €, respectively. How should the smuggler pack his knapsack to maximize his gain if articles cannot be divided?

D4 Riaditeľ nemocnice rieši problém navrhnúť zostavu izieb pre novú kliniku. Sú prípustné jedno, dvoj- a trojlôžkové izby. Celkový počet izieb nemá prekročiť 70 a počet lôžok nemá byť menší ako 100. Podiel jednolôžkových izieb má byť medzi 15% a 30%. Plošné výmery pre jedno, dvoj a trojlôžkové izby sú 10, 14 a 17 m^2. Každý pacient v dvoj- alebo trojlôžkovej izbe vyžaduje 80% času pomocného personálu oproti pacientovi v jednolôžkovej izbe. Zisk (pre nemocnicu) z jedného lôžka je nepriamo úmerný počtu lôžok v izbe, v ktorej je umiestnené. Sformulujte úlohu celočíselného lineárneho programovania, ak cieľom je

a) maximalizovať celkový zisk;
b) minimalizovať požiadavky na prácu pomocného personálu;
c) maximalizovať priemerný zisk na jedno lôžko;
d) minimalizovať potrebnú plošnú výmeru.

D4 The hospital director wants to determine the mix of rooms in a new building. There are three types of rooms: single, twin and triplets. The total number of rooms should be at most 70 and the total number of beds at least 100. The percentage of single-bed rooms should be between 15 and 30. The floor areas required for the three types of rooms are 10, 14 and 17 m^2, respectively. Each patient in a twin or a triplet room requires the use of 80% of the man-hours of the nonmedical personnel needed by a patient in a single room. The profit (to the hospital) from a bed is inversely proportional to the number of beds in the room where it is situated. Formulate an ILP if the objective is

a) maximize the total profit;
b) minimize the requirement of nonmedical personnel man-hours;
c) maximize the average profit per bed;
d) minimize the total floor space needed at the facility.

D5 Spoločnosť vyrábajúca člny musí schváliť výrobný plán na nasledujúce štyri kvartály. Má zákazky na 40 člnov v prvom štvrťroku, 60 člnov v druhom štvrťroku, 70 člnov v treťom štvrťroku a 30 člnov vo štvrtom štvrťroku. Požadované člny musí vyrobiť načas. Na začiatku roku je na sklade 10 člnov. V úvode každého kvartálu sa spoločnosť musí rozhodnúť, koľko člnov vyrobí v tomto štvrťroku. Spoločnosť dokáže každý štvrťrok vyrobiť 40 člnov po 360 €, pričom tieto člny sú vyrobené počas riadneho pracovného času. Člny však môžu byť vyrobené aj počas nadčasov, lenže v tomto prípade ich výroba stojí 405 € za kus. Ak má spoločnosť na sklade nejaké člny ešte aj na konci štvrťroku, tak ich preskladovanie stojí 180 € za každý jeden čln. Zostavte úlohu CLP, ktorá bude minimalizovať náklady spoločnosti za obdobie nasledujúcich štyroch štvrťrokov.

D5 A company manufacturing boats have to take decision about the production plan for the next four quarters. They have orders for 40 boats in the first quarter, 60 boats in the second quarter, 70 boats in the third quarter and 30 boats in the fourth quarter. Demanded boats have to be finished on time. At the beginning of the year, the company have 10 boats at storage. At the beginning of each quarter, the company have to take decision about the number of boats to produce during that quarter. The company is able to produce during the regular working time 40 boats per quarter with cost 360 €. However, they are also able to manufacture boats during overtime but for 405 €per a piece. Storage charges for boats left at the storage at the end of a quarter are 180 € per each boat. Formulate an ILP that finds a cost-minimizing production plan for the following four quarters.

D6 Poisťovňa odhaduje, že počas prvého polroka bude potrebovať nasledujúce počty osobných počítačov: v januári 9, vo februári 5, v marci 7, v apríli 9, v máji 10 a v júni 6. Počítače možno prenajať na obdobie jedného mesiaca za 200 eúr, na obdobie dvoch mesiacov za 350 eúr a na obdobie troch mesiacov za 450 eúr. Zostavte úlohu CLP minimalizujúcu náklady za nájom počítačov. Môžete predpokladať, že ak sa počítač prenajme na obdobie prekračujúce koniec júna, tak sa náklady proporcionálne prepočítajú. Napríklad, ak sa počítač prenajme na tri mesiace na začiatku mája, tak jeho nájomné bude $\frac{2}{3}.450 = 300$ eúr.

D6 An insurance company requires for the upcoming six months the following numbers of computers: 9 in January, 5 in February, 7 in March, 9 in April, 10 in May and 6 in June. Computers can be rented for a one-month period per 200 euros, for a two-month period per 350 euros and for a three-month period per 450 euros. Formulate an ILP minimizing the rent costs of computers. If computers are rented for a period exceeding the end of June, the rent costs are proportionally calculated. For example, if computers are rented for a three-month period at the beginning of May, then the rent costs will be $\frac{2}{3}.450 = 300$ euros.

D7 Firma prevádzkuje sieť poradenských miest, zaoberajúcu sa inštaláciou počítačových systémov. V priebehu nasledujúcich piatich mesiacov bude potrebovať technikov, ktorí odpracujú 6 000 hodín v prvom mesiaci, 7 000 hodín v druhom mesiaci, 8 000 hodín v treťom mesiaci, 9500 hodín vo štvrtom mesiaci a 11 500 hodín v piatom mesiaci. Na začiatku prvého mesiaca pracuje vo firme 50 technikov, pričom každý technik môže pracovať nanajvýš 160 hodín za mesiac. Aby firma pokryla rastúci dopyt, potrebuje vyškoliť nových technikov. Vyškolenie nového technika trvá jeden mesiac a na jeho vzdelávanie je potrebných 50 hodín pracovného času už vyškoleného technika. Každý vyškolený technik dostáva plat 2000 € za mesiac, a to aj vtedy, keď pracuje menej ako 160 hodín. Školený pracovník dostáva plat 1000 € za mesiac. Na konci každého mesiaca odíde z firmy 5% technikov do softvérovej spoločnosti. Zostavte úlohu CLP, ktorej riešenie bude firme minimalizovať mzdové náklady a zabezpečí pokrytie dopytu na nasledujúcich päť mesiacov.

D7 A company operates a consultants network concerned with installation of computer systems. Within the following five months, they will need their technicians to work 6 000 during the first month, 7 000 hours during the second month, 8 000 hours in the third month, 9 500 hours in the fourth one and 11 500 hours in the fifth month. At the beginning of the first month, the company employs 50 technicians and each technician can work at most 160 hours per a month. To meet the demand, the company need to train new technicians. A training of a new technician lasts one month and it requires 50 hours of working time of an already trained technician. Each already trained technician has wage of 2000 € per month, no matter if he works 160 hours or less. A technician in training has a wage of 1000 € per month. At the end of each month, 5% of all technicians leave because they take a job in a software company. Formulate an ILP that minimizes the wage costs of the company and satisfies the demand for the following five months.

D8 Plavecký klub East má 12 plavcov. Každý plavec môže plávať hociktorým zo štyroch plaveckých štýlov: motýlik, kraul, prsia a znak. Plavec j prepláva štýlom i 50 metrov za t_{ij} sekúnd. Predpokladajme, že všetky t_{ij} sú dané.
Rozdeľte plavcov do troch tímov po štyroch plavcov, tak aby sa mohli zúčastniť štafetových pretekov na 200 m. Štafeta pozostáva zo štyroch 50 metrových úsekov, pričom každý úsek musí preplávať iný plavec iným štýlom. *Celkový čas* tímu v štafete je súčet časov jeho členov na jednotlivých úsekoch.

a) Klub chce násjť tím, ktorý dosiahne najlepší celkový čas. Sformulujte úlohu CLP.

b) Klub sa chystá na stretnutie s iným klubom, ktorého 3 polohové štafetové tímy majú časy t_1, t_2 a t_3. Po skončení pretekov sa všetkých šesť družstiev zoradí podľa dosiahnutých časov a pridelia sa im body 8, 6, 4, 3, 2 a 1 podľa umiestnenia. Celkový bodový zisk klubu je rovný súčtu bodov jeho jednotlivých tímov. Ako má plavecký klub rozdeliť svojich plavcov do tímov, aby vyhral stretnutie?

D8 The East Club has 12 swimmers. There are four types of swimming strokes: back, breast, butterfly and freestyle. t_{ij} denotes the time in seconds that the jth swimmer needs to cover 50 meters using stroke type i, and all the t_{ij} are given.
Group the swimmers into three teams of four swimmers each, to compete in a 200 meter relay. The relay consists of four legs (50 meters each), in each leg a different stroke type has to be used and a different member of the team must be nominated. The *total time* of a team in the relay is the sum the times achieved in each legs.

a) Formulate an ILP to find the best team (i. e., the one that with the smallest total time).

b) The East Club will meet with the West Club whose three teams have total times t_1, t_2 and t_3. After the meeting, all the six teams are ranked according to their total times. The points given to the teams in positions 1 to 6 in this ranking are 8, 6, 4, 3, 2 1, respectively. The score of a club is the sum of the points of its three teams. Assign the swimmers of the East Club to win the meeting.

D9 *Latinský štvorec* rádu n je štvorcová matica rádu n obsahujúca čísla $1, 2, \ldots, n$ tak, že každé sa vyskytuje v každom riadku a stĺpci práve raz.

a) Sformulujte problém nájdenia latinského štvorca rádu n ako problém nájdenia prípustného riešenia úlohy CLP.

D9 *A latin square* of order n is a square matrix of order n, its entries are $1, 2, \ldots, n$ and each number appears exactly once in each row and column.

a) Formulate the problem of finding a latin square of order n as the problem of finding a feasible solution of an ILP.

b) Latinský štvorec sa nazýva *diagonálny*, ak čísla na uhlopriečke sú navzájom rôzne. Sformulujte problém nájdenia diagonálneho latinského štvorca rádu n ako problém nájdenia prípustného riešenia úlohy CLP.

c) Dva latinské štvorce rádu n $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ sú *ortogonálne*, ak usporiadané dvojice (a_{ij}, b_{ij}) sú navzájom rôzne. Sformulujte problém nájdenia dvojice ortogonálnych latinských štvorcov rádu n ako problém nájdenia prípustného riešenia úlohy CLP.

b) A latin square is called *diagonal*, if each number appears exactly once in each diagonal. Formulate the problem of finding a diagonal latin square of order n as the problem of finding a feasible solution of an ILP.

c) Two latin squares of order n $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ are *orthogonal*, if ordered pairs (a_{ij}, b_{ij}) are mutually different. Formulate the problem of finding a pair of orthogonal latin squares of order n as a problem of finding a feasible solution of an ILP.

10. Algoritmy pre celočíselné lineárne programovanie
Algorithms for integer linear programming

Úvodné otázky

A1 Akým predpisom je definovaný Gomoryho rez?

Warm-up questions

A1 What inequality defines a Gomory cut?

Základné úlohy

Nasledujúce úlohy CLP riešte Gomoryho zlomkovým algoritmom.

Core exercises

Solve the following ILPs by the Gomory's cutting plane algorithm.

B1

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\to \max \\ 4x_1 + 2x_2 &\le 13 \\ -x_1 + \ \ x_2 &\le 2 \\ x_{1-2} &\ge 0, \text{ celé / integer} \end{aligned}$$

B2

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\to \min \\ 2x_1 + 4x_2 &\ge 1 \\ 4x_1 + 6x_2 &\le 3 \\ x_{1-2} &\ge 0, \text{ celé / integer} \end{aligned}$$

Nasledujúce úlohy CLP riešte metódou vetiev a hraníc.

Solve the following ILPs using branch and bound algorithm.

B3

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\to \min \\ 2x_1 + \ \ x_2 &\le 5 \\ -4x_1 + 4x_2 &\le 5 \\ x_{1-2} &\ge 0, \text{ celé / integer} \end{aligned}$$

B4

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\to \max \\ 3x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 &\le 15 \\ x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 &\le 8 \\ x_{1-3} &\ge 0, \text{ celé / integer} \end{aligned}$$

Otázky na zamyslenie

C1 Čo sa stane, ak sa Gomoryho algoritmus rezných nadrovín aplikuje na taký problém CLP, ktorého relaxácia má prípustné (neceločíselné) riešenie ale žiadne prípustné celočíselné riešenie?

Brain teasers

C1 What will happen if the cutting planes algorithm is applied to an ILP whose corresponding LP relaxation has a feasible nonintegral solutions but no feasible integral solutions?

C2 Skúste zostrojiť iný typ reznej nadroviny (odlišnej od Gomoryho).

C2 Try to create another cutting plane (different from the one of Gomory).

Doplnkové úlohy

Additional practice

Nasledujúce úlohy CLP riešte Gomoryho zlomkovým algoritmom.

Solve the following ILPs by the Gomory's cutting planes algorithm.

D1

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\to \max \\ x_1 + 3x_2 &\le 4 \\ 2x_1 - \ \ x_2 &\le 6 \\ x_{1-2} &\ge 0,\ \text{celé / integer} \end{aligned}$$

D2

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &\to \min \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 7 \\ 3x_1 - 5x_2 &\le 15 \\ x_{1-2} &\ge 0,\ \text{celé / integer} \end{aligned}$$

D3

$$\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 &\to \max \\ 6x_1 + 7x_2 &\le 10 \\ 8x_1 + 4x_2 &\le 16 \\ x_{1-2} &\ge 0,\ \text{celé / integer} \end{aligned}$$

D4

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 &\to \min \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\le 20 \\ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 &\le 16 \\ x_{1-3} &\ge 0,\ \text{celé / integer} \end{aligned}$$

D5

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 6x_4 &\to \min \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 &\le 8 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 &\le 10 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 &\le 18 \\ x_{1-4} &\ge 0,\ \text{celé / integer} \end{aligned}$$

D6

$$\begin{aligned} 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 9x_4 + 2x_5 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 &\le 24 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 + 8x_5 &\le 35 \\ x_{1-5} &\ge 0,\ \text{celé / integer} \end{aligned}$$

D7

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 9x_4 + 2x_5 &\to \max \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 &\leq 24 \\
2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 8x_5 &\leq 35 \\
x_{1-5} &\geq 0,\ \text{celé / integer}
\end{aligned}
$$

Nasledujúce úlohy CLP riešte metódou vetiev a hraníc.

Solve the following ILPs using the branch and bound algorithm.

D8

$$
\begin{aligned}
8x_1 + 15x_2 &\to \max \\
10x_1 + 21x_2 &\leq 156 \\
2x_1 + x_2 &\leq 22 \\
x_{1-2} &\geq 0,\ \text{celé / integer}
\end{aligned}
$$

D9

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 13x_2 &\to \max \\
2x_1 + 9x_2 &\leq 40 \\
11x_1 - 8x_2 &\leq 82 \\
x_{1-2} &\geq 0,\ \text{celé / integer}
\end{aligned}
$$

D10

$$
\begin{aligned}
9x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\to \max \\
x_1 + x_2 - x_3 &\leq 5 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 8 \\
x_{1-3} &\geq 0,\ \text{celé / integer}
\end{aligned}
$$

VÝSLEDKY / SOLUTIONS

B1	$\mathbf{x}_L^{opt} = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})^T$, $f_L^{opt} = 12$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (1,3)^T$, $f_I^{opt} = 10$.
B2	$\mathbf{x}_L^{opt} = (\frac{3}{4}, \frac{0}{)}^T$, $f_L^{opt} = -\frac{3}{2}$,	CLP neprípustná / ILP infeasible.
B3	$\mathbf{x}_L^{opt} = (\frac{5}{4}, \frac{5}{2})^T$, $f_L^{opt} = -\frac{15}{4}$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (1,2)^T$, $f_I^{opt} = -3$.
B4	$\mathbf{x}_L^{opt} = (\frac{23}{4}, \frac{9}{8}, 0)^T$, $f_L^{opt} = -\frac{229}{8}$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (5,1,1)^T$, $f_I^{opt} = 28$.
D1	$\mathbf{x}_L^{opt} = (\frac{22}{7}, \frac{2}{7})^T$, $f_L^{opt} = \frac{74}{7}$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (3,0)^T$, $f_I^{opt} = 9$.
D2	$\mathbf{x}_L^{opt} = (0, \frac{7}{3})^T$, $f_L^{opt} = -\frac{14}{3}$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (0,2)^T$, $f_I^{opt} = -4$.
D3	$\mathbf{x}_L^{opt} = (0, \frac{10}{7})^T$, $f_L^{opt} = \frac{80}{7}$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (0,1)^T$, $f_I^{opt} = 8$.
D4	$\mathbf{x}_L^{opt} = (0, 0, \frac{20}{3})^T$, $f_L^{opt} = -20$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (0,0,6)^T$, $f_I^{opt} = -18$.
D5	$\mathbf{x}_L^{opt} = (0, 0, \frac{2}{9}, \frac{50}{9})^T$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (0,0,1,4)^T$.
D6	$\mathbf{x}_L^{opt} = (0, \frac{107}{3}, \frac{71}{3}, 0, 0)^T$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (0,35,23,0,0)^T$.
D7	$\mathbf{x}_L^{opt} = (\frac{35}{2}, 0, 0, 0, 0)^T$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (16,1,0,0,0)^T$.
D8	$\mathbf{x}_L^{opt} = (\frac{153}{16}, \frac{23}{8})^T$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (9,3)^T$.
D9	$\mathbf{x}_L^{opt} = (\frac{46}{5}, \frac{12}{5})^T$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (2,4)^T$.
D10	$\mathbf{x}_L^{opt} = (0, \frac{23}{2}, 0)^T$,	$\mathbf{x}_I^{opt} = (1,9,0)^T$.

Záverečný projekt
The final project

Úloha o diéte je jedna z prvých reálne riešených úloh lineárneho programovania. Jej podstata spočíva v návrhu zloženia jedálneho lístka pre ľudí alebo krmnej dávky pre zvieratá tak, aby boli splnené požiadavky zdravej výživy a zároveň aby bol zostavený jedálniček najlacnejší možný.

Vašou úlohou bude získať dostatok podkladových dát, zostaviť a vyriešiť matematický model a správne interpretovať získané výsledky. Navrhnite zloženie jedálneho lístka pre Vami vybraný typ osoby (mladý športujúci muž, tehotná alebo dojčiaca žena, duševne pracujúci večne vystresovaný manažér ap.) Podrobnejšie požiadavky na vypracovanie zadania sú nasledovné.

- Získajte dáta o odporúčaných výživových dávkach jednotlivých zložiek stravy, obsahu živín v jednotlivých druhoch potravín a ich cenách. Môžete vychádzať z internetových zdrojov, časopisov, kníh, alebo vlastného prieskumu, nezabudnite však presne citovať každý použitý zdroj.

- Zvoľte si nutrienty a dostatočne pestrý zoznam potravín. Zostavte úlohu lineárneho programovania na nájdenie najlacnejšieho „správneho“ jedálneho lístka. Úlohu vyriešte pomocou softvéru podľa vlastného výberu.

- Získaný optimálny jedálny lístok bude s najväčšou pravdepodobnosťou veľmi málo pestrý. Vysvetlite, prečo je to tak. Upravte svoju úlohu, najlepšie pridaním vhodných ohraničení, aby ste v optimálnom riešení dostali viac druhov potravín. Vysvetlite filozofiu navrhnutých úprav a ich účinnosť pri dosiahnutí požadovaného cieľa. Vyriešte novú úlohu a interpretujte získané riešenie.

- Spracujte projekt vo vhodnom formáte tak a prezentujte ho pred spolužiakmi a vyučujúcimi na záverečnom stretnutí v semestri.

The diet problem belongs to first practically solved linear programs. The idea is to find a diet for a person or for animals that fulfils the requirements of a healthy nutrition and simultaneously its cost is as small as possible.

Your task is to collect enough data, construct and solve a mathematical model and correctly interpret the obtained results. Propose a diet for a kind of person you choose (a physically active young man, a pregnant or breast-feeding woman, mentally working manager under constant stress, etc.) A more detailed requirements are as follows.

- Collect the necessary data concerning the recommended quantities of various nutrients in the diet, and their contents in various types of food, and food prices. You can use any type of sources: internet pages, books, periodicals or your own research, but never forget to precisely cite the use source.

- Decide which nutrients to consider and prepare a sufficiently rich list of various meals. Construct a linear program to find a cheapest diet fulfilling the recommendations. Solve this program using some software of your choice.

- The obtained diet will most probably be very monotone. Explain why is it so. Modify your linear program by adding suitable new constraints to get more different items in your diet. Explain the idea of these changes and their efficiency in obtaining your goal. Solve the new linear program and interpret the new solution.

- Prepare a presentation of your project in an attractive format and show the results of your work to your colleagues and teachers.

Odporúčaná literatúra
Recommended literature

Existuje veľa kníh, kde sa možno dočítať o lineárnom programovaní. Tento zoznam preto v žiadnom prípade nemá ambíciu byť úplným, skôr môže študentov nasmerovať na publikácie s rozličným zameraním.

Najprv uvedieme klasické knihy, ktoré existujú aj v slovenskej verzii.

There are many books devoted to linear programming. Therefore this list has no ambitions to be complete, it should rather mke the students aware of publications with various highligts.

First we mention some classical books that exist also in a Slovak version.

- G. B. Dantzig: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press; 10^{th} edition, 1998 (Lineárne programovanie a jeho rozvoj, SNTL, 1966)
- S. I. Gass: Linear Programming: Methods and Applications, Dover Books on Computer Science, 5^{th} edition, 2003 (Lineárne programovanie, metódy a aplikácie, SNTL 1972)

Viem len o jednej monografii slovenských a českých autorov v našich jazykoch:

I know only one monograph by Slovak and Czech authors written in our languages:

- J. Plesník, – J. Dupačová – M. Vlach: Lineárne programovanie, 1990

Stručné kapitoly venované lineárnemu programovaniu sa často nachádzajú aj v učebniciach a monografiách, ktoré sú primárne venované kombinatorickej optimalizácii alebo teórii hier. Medzi moje obľúbené patria:

Brief chapters denoted to linear programming can often be found in textbooks and monographs that have as their primary topic combinatorial optimalization or game theory. Here are a few I like:

- Ch. Papadimitriou – K. Steiglitz: Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity, Prentice Hall, 1984
- B. Korte – J. Vygen, Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, Springer, 2018
- D. C. Vella, Invitation to Linear Programming and Game Theory, Cambridge University Press, 2021)

Napokon niekoľko kníh, kde je dôraz kladený na spracovanie úloh lineárneho programovania rôznymi softvérovými nástrojmi:

Finally a selection of books where the emphasis is put on solving problems of linear programming by verious software tools:

- J. M. Sallan – O. Lordan – V. Fernandez, Modeling and Solving Linear Programming with R, OmniaScience, 2015
- A. Wiese, A practical guide to linear and integer programming: ... with Python and Microsoft Excel, Independently published, 2023
- R.J. Vanderbei, Linear Programming: Foundations and Extensions, Springer; 5^{th} edition, 2020

Lineárne programovanie v úlohách/ Linear programming via problem solving
Vysoko školský učebný text

Autor: prof. RNDr. Kataríına Cechlárová, DrSc.

Vydavateľ: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Vydavateľstvo ŠafárikPress

Rok vydania: 2024
Počet strán: 58
Rozsah: 3,42 AH
Vydanie: prvé

DOI: https://doi.org/10.33542/LPU-0352-4
ISBN 978-80-574-0352-4 (e-publikácia)