UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH

Prírodovedecká fakulta

Kvantová teória poľa 1

Michal Hnatič a Tomáš Lučivjanský

Košice 2023

Kvantová teória poľa 1

Vysokoškolská učebnica

Autori:
prof. RNDr. Michal Hnatič, DrSc.
Prírodovedecká fakulta, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD.
Prírodovedecká fakulta, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Recenzenti:
prof. RNDr. Vladimír Lisý, DrSc.
Fakulta elektrotechniky a informatiky, Technická univerzita v Košiciach

doc. RNDr. Denis Horváth, PhD.
Centrum interdisciplinárnych biovied
Technologický a Inovačný park, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Technický redaktor:
Ján Buša

Umiestnenie: www.unibook.upjs.sk
Dostupné od: 15.05.2023

ISBN 978-80-574-0196-4 (e-publikácia)

Obsah

Predslov

Fundamentálnou súčasťou modernej fyziky je kvantová teória poľa. Ide o teóriu, ktorá položila základy fyziky častíc a vysokých energií. Dá sa povedať, že táto teória vznikla prirodzenou snahou o spojenie kvantovej mechaniky a špeciálnej teórie relativity. Viedla k netriviálnym objavom a priniesla mnoho inšpirácie na ďalší rozvoj teoretickej fyziky. Medzi inými spomeňme nezachovávajúci sa počet častíc, neustálu prítomnosť divergencií v poruchovej teórii, spojenie spinu so štatistikou, dráhové integrály, metódu renormalizačnej grupy, atď.

Prečo je dôležité sa s touto teóriou oboznámiť? Zhruba sa dá povedať, že sú na to dva hlavné dôvody. Prvým dôvodom je praktická skúsenosť. Vo viacerých oblastiach modernej fyziky - teória tuhých látok, štatistická fyzika, astrofyzika, kozmológia, fyzika častíc - sa na istej úrovni musíme stretnúť s opisom na základe polí. Mechanizmy a metódy kvantovej teórie poľa boli použité a rozvinuté a vykazujú známky univerzality. Ak sa ich raz naučíme, tak nám v budúcnosti ich aplikácia na iné modely nebude robiť problémy a zbytočné vrásky na čele. Na druhej strane možno túto teóriu považovať za istý druh kultúry a všeobecného rozhľadu. Ide o jednu z najpresnejších teórií vôbec a o teóriu, ktorá popisuje prírodu na fundamentálnej úrovni. Bez jej pochopenia je podľa nás veľmi ťažké oceniť krásu tohto sveta a jeho fyzikálnej interpretácie.

Táto učebnica je určená predovšetkým študentom prvého ročníka magisterského stupňa Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, hlavne v programoch jadrová fyzika a subjadrová fyzika a teoretická fyzika. Po mnohé roky boli tieto prednášky vedené jedným z autorov na tejto škole a prirodzene postupom času vznikla snaha dať tieto prednášky v tlačenej podobe študentom. V tejto učebnici sa zameriame hlavne na klasickú teóriu poľa, jej kvantovanie založené na operátorovom prístupe a zavedenie interakcií. Opis založený na funkcionálnom integrovaní, Feynmanovu diagramatickú techniku a pokročilejšie časti budú obsahom ďalšieho dielu učebnice. V tejto súvislosti chceme zdôrazniť, že vo viacerých moderných učebniciach kvantovej teórie poľa sa operátorový prístup používa v malej miere a je nahradený prístupom pomocou (funkcionálnych) dráhových integrálov. Je to pravdepodobne spôsobené časovými dôvodmi, nakoľko tento funkcionálny prístup vedie oveľa rýchlejšie k praktickým výpočtom. Na druhej strane si myslíme, že operátorový prístup je lepší z pedagogického hľadiska. Je totiž oveľa bližší k tradičnému kurzu kvantovej mechaniky, ktorý je často založený na Schrödingerovom alebo Heisenbergovom formalizme. Študenti preto môžu oveľa ľahšie sledovať tok myšlienok, ktoré viedli ku konštrukcii kvantovej teórie poľa a jej základných myšlienok.

Veríme, že študenti a ďalší záujemcovia o hlbšie pochopenie kvantovej teórie poľa, nájdu dostatočne veľa materiálu na inšpiráciu a rozšírenie si vlastných vedomostí. Podľa nášho názoru nevyhnutnou súčasťou čítania tejto učebnice je neustále overovanie a prepočítavanie si čiastkových výsledkov a výrazov, ktoré uvádzame. Bez vlastnej snahy a aktivity nemožno totiž žiaden predmet podobného charakteru zvládnuť na dostatočnej úrovni.

Za pripomienky, opravenie mnohých formálnych chýb a potrebnej spätnej väzbe sme vďační hlavne našim bývalým študentom Michalovi Rončíkovi, Marošovi Jevočinovi a Dávidovi Lorkovi.

Na Vaše prípadne otázky, komentáre a pripomienky sa tešíme! Zasielajte ich na hnatic@saske.sk alebo tomas.lucivjansky@upjs.sk.

Autori

Používané označenia

Latinské indexy i, j, k, atď. budú označovať indexy priestorových súradníc, ktoré môžu nadobúdať hodnoty $1, 2, 3$.

Grécke indexy $\mu, \nu, \ldots$ budú označovať indexy časovopriestorových súradníc $0, 1, 2, 3$, pričom x^0 označuje časovú súradnicu.

Vždy sa dodržiava tzv. Einsteinovo sumačné pravidlo, t.j. cez opakujúci sa index sa sčítava.

Kontravariantný metrický tenzor budeme písať v tvare $g^{\mu\nu}$. Výrazy g^μ_ν a δ^μ_ν budeme považovať za totožné.

Často budeme pracovať v prirodzených jednotkách, pre ktoré platí $\hbar = c = 1$.

Časopriestorová metrika $g_{\mu\nu}$ je diagonálna s elementami $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = = g_{33} = -1$.

Skalárny súčin budeme označovať bodkou "$\cdot$", pričom to, či sa jedná o skalárny súčin v Minkowského priestore, resp. v trojrozmernom Euklidovskom priestore, bude zrejmé z kontextu. Napr. $a_\mu b^\mu = a \cdot b = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$, $a^i b^i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Kontravariantný štvorgradient budeme označovať $\partial^\mu = (\partial_t, -\boldsymbol{\nabla})$. Na niektorých miestach explicitne zdôrazníme premennú, podľa ktorej derivujeme, t.j. $\partial_x \equiv \partial/\partial x$ alebo $\Box_y \equiv g^{\mu\nu} \partial^2/(\partial y^\mu \partial y^\nu)$.

D'Alembertov operátor je definovaný ako $\Box \equiv g^{\mu\nu}\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu = \partial^2/\partial t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2$, kde $\boldsymbol{\nabla}^2$ je Laplaceov operátor $\partial^2/\partial x^i \partial x^i$ a položili sme $c = 1$ (prirodzené jednotky).

Štvorrozmerný Leviho-Civitov tenzor $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ je definovaný ako totálne antisymetrický tenzor s $\varepsilon^{0123} = +1$.

Priestorové trojrozmerné vektory budeme označovať tučnými písmenami latinskej abecedy, napr. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{x}, \ldots$.

Jednotkový vektor budeme označovať strieškou nad daným vektorom. Napr. $\hat{\boldsymbol{r}} \equiv \equiv \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$.

Bodka nad veličinou bude označovať jej časovú deriváciu. Napr. $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.

Diracove matice γ_μ budú definované tak, že $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$. Ďalej $\gamma_5 = = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ a $\beta = \gamma^0$.

Jednotkovú maticu rozmeru $N \times N, N \in \mathbb{N}$ budeme označovať symbolom $\mathbb{1}_N$. Stopu matice A budeme zapisovať v tvare $\mathrm{Tr}\, A$.

Feynmanovu "slash" notáciu budeme namiesto prečiarknutého symbolu v tvare $\not{A} \equiv \gamma_\mu A^\mu$ písať pomocou striešky, t.j $\hat{A}$. Pri operácii s Diracovými spinormi sa často stretneme s diferenciálnym operátorom $\hat{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$. Na niektorých miestach sa stretneme s operátorovými výrazmi a tie síce tiež budeme označovať podobne. Z kontextu by ale malo byť vždy jasné, či sa jedná o operátor alebo príslušný objekt skonštruovaný z Diracovych matíc.

Heavisideova funkcia $\theta(x)$ a s ňou súvisiaca funkcia $\varepsilon(x)$ sú definované predpismi

$$\theta(x) = \begin{cases} +1 & \text{pre}\, x > 0, \\ 0 & \text{pre}\, x < 0. \end{cases} \qquad \varepsilon(x) = \begin{cases} +1 & \text{pre}\, x > 0, \\ -1 & \text{pre}\, x < 0. \end{cases}$$

Komplexne združenú, transponovanú a Hermitovsky združenú maticu k veličine Q budeme označovať Q^*, Q^T a $Q^\dagger = Q^{*T}$. Hermitovsky združený operátor k operátoru O označíme $O^\dagger$. Skratka $+H.z.$, resp. $+K.z.$ na konci rovnice bude indikovať Hermitovsky, resp. komplexne združený príspevok k predchádzajúcim členom. Veličiny s čiarou nad Diracovym spinorom ψ sú definované ako $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

Pod $-e$ budeme rozumieť náboj elektrónu, kde $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$C predstavuje hodnotu elementárneho náboja v SI jednotkách.

Pri diskutovaní elektromagnetického poľa budeme Maxwellove rovnice uvádzať v jednotkách SI sústavy.

Infinitezimálny element v trojrozmernom priestore budeme uvádzať v tvare d^3x. Štvorrozmerný infinitezimálny element časopriestoru budeme písať v tvare $\mathrm{d}x$, t.j. $\mathrm{d}x \equiv \mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3$.

Priama a inverzná Fourierova transformácia bude uvažovaná v nasledujúcej konvencii v Minkowského časopriestore

$$f(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^\alpha}\, \mathrm{e}^{-ik\cdot x} f(k), \quad f(k) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^\beta}\, \mathrm{e}^{ik\cdot x} f(x).$$

Na rôznych miestach využijeme rôzne definované normalizácie. Pripomíname len, že exponenty α a β sú viazané podmienkou $\alpha + \beta = d$.

Trojrozmernú Fourierovu transformáciu budeme zapisovať v tvare

$$f(t, \boldsymbol{x}) \propto \int \mathrm{d}^3k\, \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} f(t, \boldsymbol{k}), \quad f(t, \boldsymbol{k}) \propto \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} f(t, \boldsymbol{x}).$$

Podotýkame, že Fourierov obraz funkcie f budeme označovať tým istým písmenom, rozdiel bude len v označení argumentu.
Diracovu delta funkciu využijeme v nasledujúcej reprezentácii

$$\delta(x) \equiv \delta(x^0)\delta(k^1)\delta(x^2)\delta(x^3) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{-ik\cdot x}$$

resp. v trojrozmernom prípade

$$\delta(\boldsymbol{x}) \equiv \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3k \, \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

Pod $\mathcal{O}(n)$ budeme označovať príspevky n-tého a vyššieho rádu, ktoré často pri výpočtoch môžeme zanedbať. Z kontextu by malo byť vždy zrejmé, o aké malé veličiny sa jedná. Napr. diferencovateľná funkcia $f(x)$ má nasledujúci Taylorov rozvoj do druhého rádu $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2 + \mathcal{O}(3)$.

Pod komutátorom dvoch operátorov A a B budeme rozumieť výraz

$$[A, B] = [A, B]_- \equiv AB - BA$$

a pod antikomutátorom dvoch operátorov A a B zase výraz

$$\{A, B\} = [A, B]_+ \equiv AB + BA.$$

Symbol ■ bude označovať koniec ucelenej myšlienkovej časti textu (dôkazu, paragrafu, poznámky, a pod.).

Slovom Lagrangián budeme rozumieť kvôli stručnosti jednak Lagrangeovu funkciu a jednak Lagrangeovu hustotu. To, ktorý zmysel máme v danej vete na mysli, by mal byť čitateľovi jasný z kontextu. Analogicky postupujeme pri Hamiltonovej funkcii a hustote Hamiltoniánu.

Normálny súčin budeme označovať symbolom N(...) alebo : ... :, kde ... bude predstavovať nejaký operátorový výraz.

Kapitola 1

Relativistická teória polí

1.1 Zhrnutie špeciálnej teórie relativity

V tejto časti stručne zhrnieme základne fakty o špeciálnej teórii relativity. Hlavnú pozornosť budeme venovať istým aspektom, ktoré budeme neskôr potrebovať pri budovaní formalizmu kvantovej teórie poľa. V prípade, že sa javí tento úvod ako priveľmi krátky, tak na bližšie oboznámenie sa so špeciálnou teóriou relativity odporúčame knihy (E. F. Taylor & J. A. Wheeler, 2012) a (L. D. Landau & E. M. Lifschitz, 1975). Prvá z nich je mimoriadne vhodná na získanie potrebného fyzikálneho pohľadu do špeciálnej teórie relativity.

Einsteinov princíp relativity postuluje ekvivalenciu inerciálnych vzťažných sústav. Na rozdiel od Galileovho princípu relativity vedie k relatívnemu poňatiu priestoru a času. Ak označíme x^μ kontravariantný štvorvektor v nejakej inerciálnej sústave S a jemu odpovedajúci x'^μ v inej (inerciálnej) sústave S', tak musí platiť vzťah

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu, \tag{1.1.1}$$

resp.

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = g_{\rho\sigma}. \tag{1.1.2}$$

Výraz (1.1.1) predstavuje dĺžku nekonečne malého štvorvektora $\mathrm{d}x^\mu$. Na druhej strane z neho získanu rovnicu (1.1.2) interpretujeme ako nutnú podmienku na Lorentzovu transformáciu zo sústavy S do S'. V týchto výrazoch vystupuje veličina $g_{\mu\nu}$, ktorú nazývame metrický tenzor. Ten priamo určuje geometriu štvorpriestoru. V kvantovej teórii poľa bude podobne ako v špeciálnej teórii relativity reprezentovaný diagonálnou maticou

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; g^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.3)$$

Prvý stĺpec a prvý riadok nesú indexovú súradnicu 0. V celej práci uplatňujeme Einsteinovo sumačné pravidlo, podľa ktorého sa vždy sumuje cez index, ktorý sa v danom výraze vyskytuje dvakrát. Na takýto spôsob zápisu odporúčame zvyknúť si čo najskôr. V kvantovej teórii poľa je totiž nutné zjednodušovať si čo možno najviac sofistikovaný matematický formalizmus. Bez vhodného skrátenia a zefektívnenia zápisov by bolo veľmi zdĺhavé a nešikovné vôbec vykonávať nejaké dlhšie úpravy a odvodenia. Z našej skúsenosti vieme, že získaná prax sa vám môže zísť aj v iných oblastiach fyziky, napr. teoretická mechanika alebo teória elektromagnetického poľa. Vynaložená námaha sa vám teda určite vráti.

Pomocou metrického tenzoru vieme získať kovariantný vektor jednoduchým spôsobom a síce

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad (1.1.4)$$

kde samozrejme sumujeme cez dvojnásobné sa vyskytujúci index ν. Triviálnym dôsledkom (1.1.1) je invariancia skalárneho súčinu

$$x_\mu x^\mu = x_0^2 - \boldsymbol{x}^2 = g^{\mu\nu} x_\nu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu. \quad (1.1.5)$$

Podľa znamienka tohto výrazu rozlišujeme tri možné prípady

$$x_\mu x^\mu = \begin{cases} > 0 & \text{času-podobný}, \\ = 0 & \text{svetlu-podobný}, \\ < 0 & \text{priestoru-podobný}, \end{cases} \quad (1.1.6)$$

pre štvorvektor x^μ.

Pre úplnosť dodajme, že pre trojrozmerné vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ máme

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^i b^i = \delta_{ij} a^i b^j = a_i b_i, \quad (1.1.7)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerov delta symbol a predstavuje metriku v trojrozmernom Euklidovskom priestore. V oboch prípadoch máme dočinenia s vektormi, ktoré sú prvkami vektorového priestoru s $O(3)$ symetriou. Preto sa v nich skalárny súčin zachováva, čoho vyjadrením je (1.1.7).

Pripomíname, že sa pridržiavame konvencie, kedy kontravariantné vektory (obyčajné trojrozmerné vektory v Euklidovom priestore) píšeme s indexom hore, t.j. $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$. Z toho tiež vyplýva nasledovný zápis vektora v kontravariantnom, resp. kovariantom tvare

$$a^\mu = (a^0, \boldsymbol{a}), \quad a_\mu = (a_0, -\boldsymbol{a}). \quad (1.1.8)$$

Pritom platí, že časová zložka sa pri premiestňovaní nemení, t.j. $a^0 = a_0$. To možno priamočiaro dostať zo vzťahu (1.1.4).

Transformácie (1.1.1) majú špeciálnu vlastnosť a to, že nechávajú rýchlosť svetla invariantnú vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavach. Teda šírenie svetla musí spĺňať rovnicu

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right| = 1, \tag{1.1.9}$$

kde sme položili rýchlosť svetla $c = 1$. Túto konvenciu budeme uvažovať v celej práci, ak nebude uvedené inak.

Poznámka:

V kvantovej teórii poľa sa kvôli prehľadnosti často volí $\hbar = c = 1$. Efektívne to vedie na pozmenené vyjadrenie jednotiek fyzikálnych veličín

$$[\text{dĺžka}] = [\text{čas}], \quad [\text{energia}] = [\text{čas}]^{-1} = [\text{hmotnosť}], \tag{1.1.10}$$

ktoré plynú zo vzťahov pre energiu $E = \hbar\omega = mc^2$ a $c = 1$. Pritom $[\ldots]$ označuje fyzikálny rozmer príslušnej veličiny. Vidíme teda, že energia nám vo výpočtoch vychádza s rozmerom frekvencie, resp. hmotnosti. Podobne je tomu aj pri iných veličinách ako hybnosť, moment hybnosti, atď. Pri každom z výrazov by si čitateľ mal byť schopný dopočítať príslušný faktor, obsahujúci Planckovu konštantu $\hbar$ a rýchlosť svetla vo vákuu c. ■

Rovnicu (1.1.9) vieme prepísať aj do tvaru

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = (\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 = 0$$

a zároveň

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu = (\mathrm{d}t')^2 - (\mathrm{d}\boldsymbol{x}')^2 = 0,$$

čoho zjavným dôsledkom je $|\mathrm{d}\boldsymbol{x}'/\mathrm{d}t'| = 1$. Tým sme ukázali, že ak je rýchlosť svetla v nejakej sústave rovná c, tak jej musí byť rovná aj v inej, ktorá je s ňou spojená vhodnou Lorentzovou transformáciou.

Ľubovoľnú transformáciu z S do $S' : x^\mu \to x'^\mu$ možno predstaviť v tvare

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{1.1.11}$$

kde a^μ opisujú translácie v čase a priestore a matice $\Lambda^\mu{}_\nu$ musia vyhovovať podmienke

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}. \tag{1.1.12}$$

Prvky matice Λ závisia vo všeobecnosti na šiestich parametroch opisujúcich vzájomnú orientáciu a pohyb vzťažných sústav.

Ako sa pretransformuje vzťah (1.1.12) do kontravariantného tvaru? Vynásobme ho s výrazom $\Lambda^\kappa{}_\tau g^{\sigma\tau}$ a využime to, že matica $g_{\mu\nu}$ je inverzná sama k sebe, t.j. $g^{-1}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$. Dostaneme

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho(\Lambda^\nu{}_\sigma \Lambda^\kappa{}_\tau g^{\sigma\tau}) = \Lambda^\kappa{}_\rho = g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa}\Lambda^\mu{}_\rho \tag{1.1.13}$$

Túto rovnicu vynásobme s inverznou maticou k matici $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}$ a máme

$$\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\Lambda^{\kappa}{}_{\tau}g^{\sigma\tau} = g^{\nu\kappa}. \tag{1.1.14}$$

Transformácie (1.1.11) tvoria grupu. Ak vykonáme najskôr $x^{\mu} \to x'^{\mu}$ a následne na to $x'^{\mu} \to x''^{\mu}$, máme

$$x''^{\mu} = \overline{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}x'^{\rho} + \overline{a}^{\rho} = \overline{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{\rho}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\rho}) + \overline{a}^{\mu}. \tag{1.1.15}$$

Ten istý efekt je možné priamo dosiahnuť pomocou transformácie

$$x''^{\mu} = \overline{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu}x^{\nu} + (\overline{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}a^{\rho} + \overline{a}^{\mu}), \tag{1.1.16}$$

čo vlastne definuje skladanie nehomogénnych Lorentzových transformácií.

Vyšetrime teraz niektoré vlastnosti matíc Λ. Ak vezmeme determinant matice (1.1.12), tak dostaneme

$$(\det\Lambda)^2 = 1. \tag{1.1.17}$$

Z lineárnej algebry (P. Zlatoš, 2011) vieme, že táto podmienka zaručuje existenciu inverznej matice $(\Lambda^{\nu}{}_{\rho})^{-1}$ k matici $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$, ktorá sa vďaka (1.1.12) dá zapísať v užitočnom tvare

$$(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\nu} = g_{\nu\mu}g^{\rho\sigma}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \equiv \Lambda_{\nu}{}^{\rho}. \tag{1.1.18}$$

Grupa transformácií (1.1.11) sa zvykne označovať ako Poincarého grupa alebo nehomogénna Lorentzova grupa. Obsahuje niekoľko dôležitých podgrúp. Napríklad, ak v (1.1.11) položíme $a_{\mu} = 0$, tak dostaneme homogénnu Lorentzovu grupu. Z (1.1.17) vyplýva, že buď $\det\Lambda = +1$ alebo $\det\Lambda = -1$. Zjavne transformácie, pre ktoré $\det\Lambda = +1$, tvoria podgrupu, či už homogénnej alebo nehomogénnej Lorentzovej grupy. Ďalej z 00 zložky rovníc (1.1.12) a (1.1.14) plynie

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \Lambda^{i}{}_{0}\Lambda^{i}{}_{0} = 1 + \Lambda^{0}{}_{i}\Lambda^{0}{}_{i}, \tag{1.1.19}$$

kde index i beží cez hodnoty $1, 2, 3$. Vidíme, že môže nastať buď $\Lambda^0_0 \geqq +1$ alebo $\Lambda^0_0 \leqq -1$. Transformácie, pre ktoré platí $\Lambda^0_0 \geqq +1$, tvoria podgrupu.

Podgrupa Lorentzovej grupy s $\det\Lambda = +1$ a $\Lambda^0_0 \geqq +1$ sa nazýva vlastná ortochrónna Lorentzova grupa. Žiadnou spojitou zmenou parametrov nie je možné prejsť od $\det\Lambda = +1$ k $\det\Lambda = -1$ a tiež od $\Lambda^0_0 \geqq +1$ k $\Lambda^0_0 \leqq -1$.

Ľubovoľnú Lorentzovu transformáciu vieme vyjadriť ako zloženie vlastnej ortochrónnej transformácie a jednej diskrétnej P, T alebo PT transformácie. Pritom P odpovedá priestorovej inverzii, T zase časovej inverzii a v maticovom tvare ich možno zapísať

$$P^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.1.20}$$

Tým pádom sa štúdium Lorentzovej grupy efektívne redukuje na analýzu vlastnej Lorentzovej grupy, priestorovej a časovej inverzie.

Často sa stretneme s diferenciálnymi operáciami. Základné vzťahy, ktoré budeme využívať, sú

$$\partial_\mu x^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = g^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu, \quad \partial^\mu x^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu}, \quad \partial_\mu x_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x^\mu} = g_{\mu\nu}. \quad (1.1.21)$$

1.2 Lagrangeov formalizmus

Klasické systémy s konečným počtom stupňov voľnosti f opisujeme pomocou Lagrangeovej funkcie L (na oboznámenie sa s klasickou mechanikou poslúžia učebnice (D. Tong, 2005; H. Goldstein, C. Poole & J. Safko, 2002; J. Kvasnica et al., 2004)). Vo všeobecnosti je L funkciou svojich zovšeobecnených súradníc $q \equiv \{q_i\}_{i=1}^f$, ich časových derivácií $\dot{q} \equiv \{\dot{q}_i\}_{i=1}^f$ a času t, t.j. $L = L(q, \dot{q}, t)$. Vieme, že fyzikálne systémy sa správajú tak, aby hodnota účinku S bola stacionárna, t.j. bola minimálna alebo typu sedlový bod. Na analýzu možných problémov doporučujeme veľmi prístupný článok (C. G. Gray & E. F. Taylor, 2007).

Samotný účinok S predstavuje časový integrál Lagrangeovej funkcie

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, L(q, \dot{q}, t). \quad (1.2.1)$$

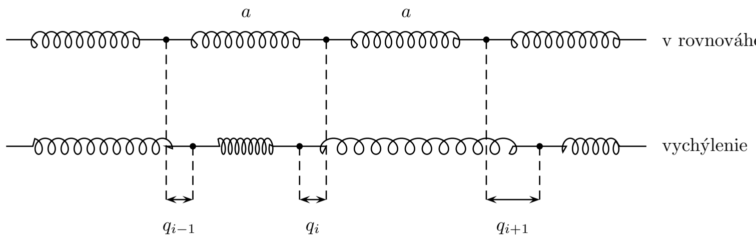
Variácia tohoto účinku sa pre fyzikálny pohyb rovná nule. To znamená, že musí platiť $\delta S = 0$, čo priamo vedie (H. Goldstein, C. Poole & J. Safko, 2002) na Eulerove-Lagrangeove rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, f. \quad (1.2.2)$$

1.3 Prechod od disktrétneho systému k spojitému

V klasickej mechanike sa stretávame nielen so systémami s konečným, resp. spočítaľne veľa stupňami voľnosti. Existujú fyzikálne systémy so spojitým rozložením hmoty, medzi najznámejšie patria hydrodynamika, elastické teleso a elektromagnetické pole. V takomto prípade úplný opis spočíva v zadaní daného poľa v každom bode priestoru. Hovoríme preto o poľovom prístupe. Matematicky ho je možné získať limitným prípadom z diskrétneho systému, v ktorom sa počet stupňov voľnosti limitne bude blížiť k nekonečnu.

Z motivačných dôvodov uvažujme nekonečne dlhú elastickú tyč. Ako sa ukáže, v tyči sa môže šíriť zvuk v pozdĺžnom smere, t.j. je možné šírenie malých elastických pozdĺžnych vĺn. Tyč si predstavíme ako nekonečný počet identických hmotných bodov o hmotnosti m, ktoré sú navzájom prepojené nehmotnou pružinou s tuhosťou k. Vizualizáciu tejto predstavy nájdeme na Obr. 1.1. Predpokladajme, že výchylky hmotných bodov môžu nastať len v horizontálnom smere. Ak označíme výchylku i-tej častice ako $q_i = q_i(t)$, tak celková kinetická energia je daná výrazom



Obr. 1.1: Disktrétny systém hmotných bodov navzájom spojených pružinami, ktorý predstavuje aproximáciu spojitej jednorozmernej elastickej tyče.

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m\dot{q}_i^2, \tag{1.3.1}$$

kde sumácia prebieha cez všetky hmotné body. Príslušná potenciálna energia je súčtom potenciálnych energií jednotlivých pružín (v dôsledku ich natiahnutia, resp. stlačenia)

$$V = \frac{1}{2}\sum_i k(q_{i+1} - q_i)^2. \tag{1.3.2}$$

Pomocou znalosti kinetickej a potenciálnej energie skonštruujeme Lagrangeovu funkciu

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_i \left[m\dot{q}_i^2 - k(q_{i+1} - q_i)^2\right], \tag{1.3.3}$$

ktorú vieme ďalej formálne prepísať do tvaru

$$L = \frac{1}{2}\sum_i a\left[\frac{m}{a}\dot{q}_i^2 - ka\left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a}\right)^2\right] \equiv \sum_i aL_i. \tag{1.3.4}$$

Parameter a predstavuje vzdialenosť medzi hmotnými bodmi v rovnovážnom stave. Použitím vzťahu (1.2.2) pre zovšeobecnenú súradnicu q_j dostaneme sústavu pohybových rovníc pre jednotlivé hmotné body

$$\frac{m}{a}\ddot{q}_j - ka\left(\frac{q_{j+1} - q_j}{a^2}\right) + ka\left(\frac{q_j - q_{j-1}}{a^2}\right) = 0. \tag{1.3.5}$$

Pri odvodení nesmieme zabudnúť na fakt, že dynamická premenná q_j sa nachádza presne v dvoch členoch sumy (1.3.2).

Tvar Lagrangiánu zvolený v (1.3.4) dovoľuje vykonať spojitú limitu $a \to 0$. Je zrejmé, že pri nej prechádza výraz m/a na lineárnu hustotu τ, t.j. hmotnosť na jednotku dĺžky. Tento fakt sa dá ukázať na základe priamočiarej úvahy. Uvažujme konečný systém pozostávajúci z N častíc. Označme $M = Nm$ celkovú hmotnosť a $d = Na$ celkovú dĺžku systému. Pri pevne danej dĺžke d vykonajme limitný prechod $a \to 0$. Dostaneme, že počet N sa musí škálovať ako $N \propto 1/a$. Vidíme potom, že pomer

$$\frac{m}{a} = \frac{M}{Na}$$

prechádza efektívne na konečnú hodnotu M/d, čo je dĺžková hustota systému.

Nie je ale úplne jasné, čo sa stane s výrazom obsahujúcim tuhosť pružiny k. Ak predpokladáme, že sa daná elastická tyč správa vždy podľa Hookovho zákona, tak potom je predĺženie tyče na jednotku dĺžky úmerné pôsobiacej sile, resp. napätiu, čo možno vyjadriť vzťahom

$$F = E\xi, \tag{1.3.6}$$

kde E je Youngov modul pružnosti a ξ je pomerné predĺženie. Predĺženie dĺžky a diskrétneho systému na jednotku dĺžky je dané výrazom $\xi = (q_{j+1} - q_j)/a$. Sila, ktorá spôsobí toto predĺženie tyče, je potom rovná

$$F = k(q_{j+1} - q_j) = ka\left(\frac{q_{j+1} - q_j}{a}\right). \tag{1.3.7}$$

Odtiaľ vidíme, že ka odpovedá Youngovmu modulu pružnosti spojitej tyče E (J. Kvasnica et al., 2004). Pri prechode od diskrétneho systému bodov k spojitému, prechádza index j (ktorý opisuje výchylku j-teho hmotného bodu) na spojitú súradnicu x. Namiesto súboru diskrétnych premenných $\{q_j(t)\}$ tak dostaneme spojitú, alebo tiež poľovú, premennú $q(t, x)$. Ďalej je zrejmé, že výraz

$$\frac{q_{i+1}(t) - q_i(t)}{a} = \frac{q(t, x + a) - q(t, x)}{a} \tag{1.3.8}$$

prechádza v limitnom prípade $a \to 0$ do tvaru derivácie

$$\lim_{a \to 0} \frac{q_{i+1}(t) - q_i(t)}{a} = \frac{\mathrm{d}q_i(t)}{\mathrm{d}x} \to \frac{\partial q(t, x)}{\partial x}. \tag{1.3.9}$$

Všimnime si, že sumácia cez všetky diskrétne hmotné body v Lagrangiáne (1.3.4) prejde do integrálu cez novú premennú x. Hranice integrálu sú samozrejme určené okrajmi danej tyče. Lagrangián (1.3.4) nadodúda tvar

$$L = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x \left[\tau \dot{q}^2 - E\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{1.3.10}$$

Analogickým spôsobom vieme postupovať aj pre pohybovú rovnicu (1.3.5). V limite $a \to 0$ upravíme jej posledné dva členy

$$\begin{aligned} \lim_{a \to 0} \frac{E}{a}\left[\left(\frac{q_{j+1} - q_j}{a}\right) + \left(\frac{q_j - q_{j-1}}{a}\right)\right] &\approx \lim_{a \to 0} \frac{E}{a}\left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x-a}\right] \\ &= E\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right), \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

kde sme zanedbali poruchy vyšších rádov. Preto pohybová rovnica elastickej tyče nadobúda tvar

$$\tau\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - E\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0. \tag{1.3.12}$$

Táto rovnica predstavuje hyperbolickú diferenciálnu rovnicu, ktorej riešeniami sú nedisipatívne vlny. Tie sa šíria s pevne danou rýchlosťou

$$v = \sqrt{\frac{E}{\tau}}. \tag{1.3.13}$$

Vieme, že všeobecné riešenie rovnice (1.3.12) sa dá predstaviť v tvare

$$q(t) = f(x - vt) + g(x + vt), \tag{1.3.14}$$

kde f a g sú diferencovateľné funkcie svojich argumentov. Konkrétny tvar týchto funkcií je obvykle determinovaný okrajovými a počiatočnými podmienkami.

Súhrnne môžeme konštatovať, že naznačený prechod od diskrétneho systému k spojitému je relatívne priamočiary. Dôležitá zmena nastáva pri interpretácii priestorovej súradnice x. V spojitej formulácii sa nejedná o dynamickú premennú, ale o spojitý index, ktorý nahrádza diskrétny parameter i. Tak ako každému i prináležala hodnota $q_i(t)$ (v danom čase t), tak každej spojitej (prípustnej) hodnote x odpovedá nejaká hodnota $q(t, x)$. Ak by sme mali dočinenia nie s jednorozmerným, ale napríklad trojrozmerným problémom, tak by $q = q(t, \boldsymbol{x})$ predstavovala funkciu až štyroch premenných. V tomto prípade by bolo možné celkový Lagrangián zapísať v tvare

$$L(t) = \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \int \mathrm{d}x_3\, \mathcal{L}(t, \boldsymbol{x}), \tag{1.3.15}$$

kde veličinu $\mathcal{L}$ intepretujeme ako hustotu Lagrangiánu.

Pre uvažované pozdĺžne kmity elastickej tyče je hustota Lagrangiánu jednoducho daná výrazom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\tau\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - E\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{1.3.16}$$

Neskôr uvidíme, že je výhodnejšie pracovať s hustotou Lagrangiánu $\mathcal{L}$ ako so samotným Lagrangiánom L. Ako sa ukazuje, hlavným dôvodom je explicitná relativistická kovariantnosť $\mathcal{L}$. V literatúre sa potom často Lagrangiánom označuje aj priamo hustota Lagrangiánu. Z kontextu by malo byť vždy zrejmé, o aký typ veličiny sa jedná.

1.4 Relativistická teória polí

Zo základných kurzov fyziky poznáme mnoho systémov obsahujúcich nekonečný počet stupňov voľnosti, napr. elektromagnetické pole, pole rýchlosti tekutiny, gravitačné pole, atď. Zároveň vieme, že ak neuvažujeme gravitačné efekty, tak fyzikálny opis musí byť invariantý vzhľadom na Lorentzove a nie Galileove transformácie.

Ďalej vo všeobecnosti sa dynamickou premennou stáva súbor n polí $\varphi_a = \varphi_a(t, \boldsymbol{x}); a = 1, \dots, n$. Aj v ďalšej diskusii budeme pod indexom a pri danej teórii rozumieť index, ktorý opisuje jednotlivé nezávislé zložky daného poľa. Stretneme sa napr. s tým, že a bude rozlišovať dve nezávislé zložky komplexného poľa, štyri zložky vektorového poľa, resp. spinorového poľa atď. Z kontextu danej teórie by malo byť vždy jasné, o aký typ zložiek ide.

Zo zápisu (1.2.1) je zrejmé, že Lagrangeova funkcia nemôže predstavovať vhodný objekt na štúdium relativistických vlasností. To vyplýva z toho, že čas je špeciálne vydelenou súradnicou a zo špeciálnej teórie relativity vieme, že časový diferenciál dt nie je Lorentzovsky invariantná veličina. Preto sa zavádza pojem hustoty Lagrangiánu $\mathcal{L}$ vzťahom

$$S = \int \mathrm{d}t \, L(t) = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{L}(t, \boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}x \, \mathcal{L}(x). \tag{1.4.1}$$

Z vlastností Lorentzových transformácii možno priamo odvodiť, že pri transformácii $x \to x' = \Lambda x$, sa infinitezimálny objemový element dx nemení

$$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x'^0 \wedge \mathrm{d}x'^1 \wedge \mathrm{d}x'^2 \wedge \mathrm{d}x'^3 = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \, \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3. \tag{1.4.2}$$

Výraz na pravej strane

$$\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

predstavuje Jacobián danej transformácie a pre lineárne transformácie typu $x'^i = a^i_k x^k$ je jednoducho rovný determinantu $|a^i_k|$. Hustota Lagrangiánu bude vo všeobecnosti funkciou polí a ich prvých derivácií $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x), x)$.

Postupujme podobne ako je tomu zvykom v teoretickej mechanike a odvoďme najskôr pohybové rovnice z požiadavky nulovosti variácie účinku

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int \mathrm{d}x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \delta\varphi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta(\partial_\mu \varphi_a) \right\} \\ &= \int \mathrm{d}x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \delta\varphi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta\varphi_a \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \right) \delta\varphi_a \right\}. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Druhý výraz na pravej strane vieme upraviť pomocou Gaussovej vety aplikovanej na plošný integrál cez nekonečnú plochu. Ak tradične predpokladáme, že polia v nekonečne vymiznú, tak tento člen môžeme zanedbať. Fyzikálne môžeme takúto úpravu zdôvodniť tým, že niečo fyzikálne zaujímavé sa odohráva iba v konečnej oblasti. Nakoniec po vyňatí variácie $\delta\varphi_a$ dostaneme

$$\delta S = \int \mathrm{d}x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \right) \right\} \delta\varphi_a. \tag{1.4.4}$$

Požadujeme, aby bol tento výraz pre ľubovoľné $\delta\varphi_a$ identicky rovný nule. To nastane práve vtedy, ak sú splnené rovnice

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\right) = 0; \quad a = 1, \ldots, n. \tag{1.4.5}$$

Tieto rovnice sú známe ako Eulerove-Lagrangeove rovnice a v teórii poľa sa s nimi stretávame veľmi často.

Pre spojite systémy je možné formulovať aj prostredníctvom Hamiltonovho formalizmu, podobne ako pre diskrétne systémy (H. Goldstein, C. Poole & J. Safko, 2002). Dá sa očakávať, že pridružené hybnosti pre spojitú teóriu (1.4.1) sú dané výrazom

$$\pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi_a)}. \tag{1.4.6}$$

Hustota Hamiltoniánu je zase daná vzťahom

$$\mathcal{H} = \pi_a\dot{\varphi}_a - \mathcal{L}. \tag{1.4.7}$$

1.5 Noetherovej veta

Aby nedochádzalo k zbytočným nedorozumeniam, vysvetlíme si najprv rozdiel medzi používanými transformáciami vo fyzike. Oba sú schematicky znázornené na Obr. 1.2 a 1.3. Na prvom z nich môžeme vidieť tzv. aktívnu transformáciu, kedy je súradnicový systém pevne zvolený a fyzikálny systém, ktorý študujeme, transformujeme do novej polohy. V prípade pasívnej transformácie je tomu naopak. Systém je v pokoji a študujeme ho z dvoch rôznych vzťažných sústav. Oba popisy sú fyzikálne rovnocenné, čo sa týka spôsobu získania výsledkov. V tejto práci sa budeme pridŕžať prvého z nich, t.j. aktívnej transformácie.

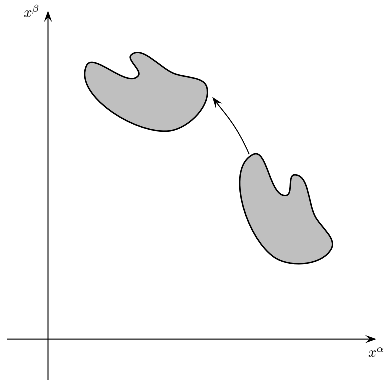
Dôležitú úlohu v modernej fyzike zohrávajú symetrie. Dá sa konštatovať, že v podstate celá časticová fyzika je na nich založená. Požiadavky Lorentzovskej kovariantnosti a rôznych kalibračných transformácii do značnej miery ohraničujú možný tvar modelov kvantovej teórie poľa. Vo fyzike sa stretávame s konečno-rozmernými Lieovymi grupami, ktoré nám popisujú správanie sa systému vzhľadom na nejakú zmenu systému.

Dôležitú matematickú vetu dokázala nemecká matematička Emmy Noether, ktorej kvalitatívnym obsahom je nasledujúca ekvivalencia

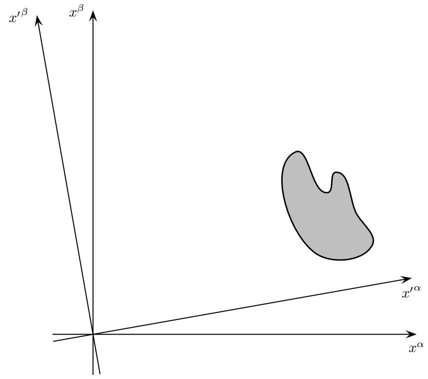
$$\boxed{\text{Noetherovej veta:} \quad \text{Symetrie} \longleftrightarrow \text{Zákony zachovania.}}$$

Tento vzťah vyjadruje to, že každej symetrii v prírode odpovedá nejaká zachovávajúca sa veličina. A naopak, ku každej zachovávajúcej sa veličine vieme nájsť symetriu vo fyzikálnych zákonoch. Napríklad, ak sú fyzikálne zákony invariantné vzhľadom na časové translácie, získame zákon zachovania energie. Základné zákony zachovania, s ktorými sa stretávame, sú uvedené v Tab. 1.1.

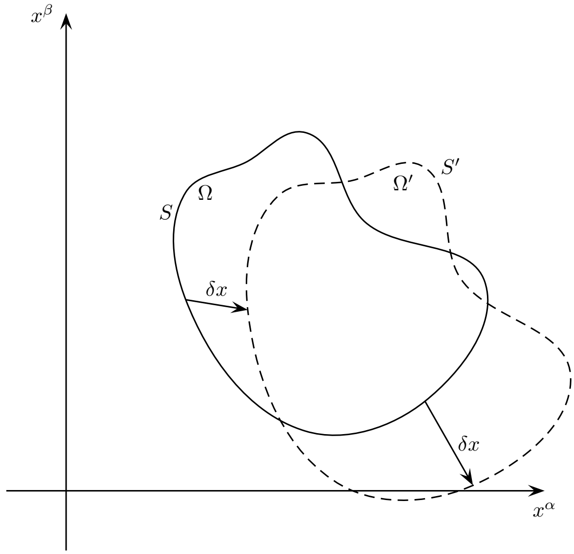
Matematicky je možné Noetherovej vetu (N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov,



Obr. 1.2: Kvalitatívne zobrazenie aktívnej transformácie, pri ktorej súradnicová sústava zostáva nemenná a fyzikálny systém sa istým spôsobom transformuje.



Obr. 1.3: Kvalitatívne zobrazenie pasívnej transformácie, pri ktorej sa súradnicová sústava mení a fyzikálny systém zostáva nemenný.



Obr. 1.4: Integračné oblasti v ľubovoľnej dvojrozmernej oblasti uvažované v transformácii účinku.

Symetria	Zákon zachovania
Časová translácia	Energie
Priestorové translácie	Hybnosti
Priestorové rotácie	Momentu hybnosti
Kalibračná transformácia	Náboja

Tabuľka 1.1: Zoznam symetrií a im príslušných zákonov zachovania.

1980) formulovať nasledovným spôsobom

> Ku každej konečnorozmernej parametrickej spojitej transformácii polí s n generátormi a zároveň zmene súradníc, ktorá zaručí, že variácia účinku je rovná nule, existuje práve n dynamických invariantov, t.j. kombinácií polí a ich derivácií, ktoré sa zachovávajú v čase.

Dôkaz tvrdenia:

Budeme uvažovať infinitezimálnu zmenu súradníc (v aktívnom zmysle slova)

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \tag{1.5.1}$$

$$\varphi_a(x) \to \varphi'_a(x') = \varphi_a(x) + \Delta\varphi_a(x). \tag{1.5.2}$$

Variácie δx^μ a $\Delta\varphi_a$ možno podľa predpokladu vyjadriť pomocou n malých, lineárne nezávislých parametrov $\omega_s; s = 1, \ldots, n$ v tvare

$$\delta x^\mu = \sum_{s=1}^{n} X^\mu_{(s)} \delta\omega_s, \tag{1.5.3}$$

$$\Delta\varphi_a(x) = \sum_{s=1}^{n} \Psi_{a(s)} \delta\omega_s. \tag{1.5.4}$$

Pri indexe s sa môže, ale nemusí, jednať o tenzorový index. Zátvorkami pri indexe (s) chceme zdôrazniť fakt, že sa tu jedná o všeobecný index popisujúci dané transformačné vlastnosti teórie a chceme ho odlíšiť od indexu popisujúceho zložky štvorvektora, resp. zložiek poľa φ_a.

Pozorovania

- Výraz $\Delta\varphi_a$ predstavuje variáciu spôsobenú jednak samotnou zmenou poľa a jednak zmenou argumentu poľa $\varphi_a(x)$.
- Derivácia poľa sa mení podľa predpisu

$$\partial_\mu\varphi_a = \frac{\partial\varphi_a(x)}{\partial x^\mu} \to \partial'_\mu\varphi'_a(x') = \partial_\mu\varphi_a(x) + \Delta\partial_\mu\varphi_a(x). \tag{1.5.5}$$

V poslednom výraze nemôžeme zameniť poradie operácií Δ a ∂_μ, nakoľko Δ obsahuje aj príspevok od transformácie súradníc. Preto zaveďme variáciu δ, ktorá bude zodpovedná za variáciu spôsobenú zmenou tvaru. Definujme

$$\delta\varphi_a(x) \equiv \varphi'_a(x) - \varphi_a(x). \tag{1.5.6}$$

Potom platí, že

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_a(x) &= \varphi'_a(x) - \varphi_a(x) \\
&= \varphi_a(x - \delta x) + \Delta\varphi_a(x - \delta x) - \varphi_a(x) \\
&= \varphi_a(x) - (\partial_\mu\varphi_a)\delta x^\mu + \Delta\varphi_a(x) - \varphi_a(x) + \mathcal{O}(2) \\
&= \Delta\varphi_a(x) - (\partial_\mu\varphi_a)\delta x^\mu && (1.5.7) \\
&= [\Psi_{a(s)} - X^\mu_{(s)}\partial_\mu\varphi_a]\delta\omega_s, && (1.5.8)
\end{aligned}$$

kde sme použili vzťahy (1.5.3) a (1.5.4).

- Z definície (1.5.6) priamo vyplýva, že

$$[\delta, \partial_\mu] = 0. \tag{1.5.9}$$

Odtiaľ s použitím (1.5.7) dostávame

$$\delta\partial_\mu\varphi_a = \Delta\partial_\mu\varphi_a - \partial_\mu(\partial_\nu\varphi_a)\delta x^\nu. \tag{1.5.10}$$

Prejdime teraz k samotnému dôkazu a počítajme priamo variáciu účinku

$$\delta S = \int \mathrm{d}x'\, \mathcal{L}'(x') - \int \mathrm{d}x\, \mathcal{L}(x), \tag{1.5.11}$$

kde

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(\varphi'_a(x'), \partial'_\mu\varphi'_a(x')) = \mathcal{L}(x) + \Delta\mathcal{L}(x). \tag{1.5.12}$$

Výraz pre malú zmenu $\Delta\mathcal{L}$ plynie z dosadenia výrazov (1.5.2) a (1.5.5) za φ'_a a $\partial'_\mu\varphi'_a$, nasledovaný Taylorovým rozvojom

$$\Delta\mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}\Delta\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\Delta\partial_\mu\varphi_a + \mathcal{O}(2). \tag{1.5.13}$$

Pravú stranu upravme pomocou rovníc (1.5.7) a (1.5.10) do tvaru

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L}(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}(\partial_\mu\varphi_a)\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta(\partial_\mu\varphi_a) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\partial_\mu(\partial_\nu\varphi_a)\delta x^\nu \\
&= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta(\partial_\mu\varphi_a)\right] + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}(\partial_\mu\varphi_a) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_a)}\partial_\nu(\partial_\mu\varphi_a)\right]\delta x^\mu.
\end{aligned} \tag{1.5.14}$$

Oba výrazy v hranatých zátvorkách na pravej strane si teraz upravíme. Prvý výraz na pravej strane predstavuje variáciu $\delta\mathcal{L}$ a prepíšeme si ho ďalej použitím Eulerovej-Lagrangeovej rovnice (1.4.5) a vzťahu (1.5.9)

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta(\partial_\mu\varphi_a) \\ &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\right)\delta\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\partial_\mu(\delta\varphi_a) \\ &= \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta\varphi_a\right]. \end{aligned} \tag{1.5.15}$$

Druhý výraz na pravej strane rovnice (1.5.14) nie je nič iné ako totálny diferenciál hustoty Lagrangiánu

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}x^\mu}\delta x^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}(\partial_\mu\varphi_a)\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_a)}\partial_\nu(\partial_\mu\varphi_a)\delta x^\mu \\ &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}(\partial_\mu\varphi_a) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_a)}\partial_\nu(\partial_\mu\varphi_a)\right]\delta x^\mu. \end{aligned} \tag{1.5.16}$$

Preto konečný výraz pre $\Delta\mathcal{L}$ môžeme nakoniec vyjadriť v tvare

$$\Delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta\varphi_a\right] + \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}x^\mu}\delta x^\mu. \tag{1.5.17}$$

Tento výraz ďalej dosadíme do variácie účinku (1.5.11) a dostaneme

$$\delta S = \int \mathrm{d}x\,\left\{\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta\varphi_a\right] + \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}x^\mu}\delta x^\mu\right\} + \int \mathrm{d}x'\,\mathcal{L} - \int \mathrm{d}x\,\mathcal{L}. \tag{1.5.18}$$

Pri úprave rozdielu posledných dvoch členov potrebujeme ešte vyjadriť malý objemový element $\mathrm{d}x'$ pomocou $\mathrm{d}x$. Využijeme pritom približnú rovnosť (do prvého rádu)

$$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x'^0 \wedge \mathrm{d}x'^1 \wedge \mathrm{d}x'^2 \wedge \mathrm{d}x'^3 = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\mathrm{d}x \tag{1.5.19}$$

$$\approx [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)]\mathrm{d}x. \tag{1.5.20}$$

Po dosadení do (1.5.18) a krátkej úprave nakoniec máme

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \mathrm{d}x\,\left\{\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta\varphi_a\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\mu}\left(\mathcal{L}\delta x^\mu\right)\right\} \\ &= \int \mathrm{d}x\,\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta\varphi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu\right\}. \end{aligned} \tag{1.5.21}$$

Vystupujúce variácie si môžeme ešte prepísať pomocou infinitezimálnych parametrov ω_s použitím úvodných vzťahov (1.5.3) a (1.5.8)

$$\delta S = -\int \mathrm{d}x\,\partial_\mu[\mathcal{J}^\mu_{(s)}(s)]\delta\omega_s; \quad s = 1, \dots, n, \tag{1.5.22}$$

kde sme zaviedli Noetherovej prúdy $\mathcal{J}^{\mu}_{(s)}$ vzťahom

$$\mathcal{J}^{\mu}_{(s)}(x) \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_a)}[\Psi_{a(s)} - (\partial_{\nu}\varphi_a)X^{\nu}_{(s)}] - \mathcal{L}(x)X^{\mu}_{(s)}. \tag{1.5.23}$$

Z požiadavky nulovosti variácie δS (1.5.22) pre ľubovoľné variácie $\delta\omega_s$ (predpoklad Noetherovej vety) nakoniec dostávame, že štvordivergencie Noetherovej prúdov $\mathcal{J}^{\mu}_{(s)}$ sú nutne nulové, t.j. platí

$$\partial_{\mu}\mathcal{J}^{\mu}_{(s)} = 0. \tag{1.5.24}$$

■

Diskusia:

Získaná rovnica (1.5.24) predstavuje lokálny zákon zachovania pre istú fyzikálnu veličinu. Za týmto účelom uvažujme integrálny výraz

$$\int \mathrm{d}^3x\, \partial_{\mu}\mathcal{J}^{\mu}_{(s)} = 0, \tag{1.5.25}$$

ktorý platí pre ľubovoľný uzavretý trojrozmerný objem. Rozpíšeme ľavú stranu do zložiek a rozdelíme daný integrál do dvoch zložiek

$$\int \mathrm{d}^3x\, \partial_t\mathcal{J}^{0}_{(s)} + \int \mathrm{d}^3x\, \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}_{(s)} = 0. \tag{1.5.26}$$

Druhý výraz na ľavej strane prepíšeme pomocou Gaussovej vety do tvaru plošného integrálu s hranicami v nekonečnej vzdialenosti. Ak ďalej, ako zvyčajne uvažujeme tento integrál v nekonečne a predpokladáme dostatočne rýchly pokles polí, tak je tento výraz zanedbateľne malý. Dospejeme tak k rovnici

$$0 = \int \mathrm{d}^3x\, \partial_t\mathcal{J}^{0}_{(s)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{J}^{0}_{(s)}, \tag{1.5.27}$$

ktorá predstavuje zákon zachovania veličiny Q definovanej ako

$$Q \equiv \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{J}^{0}_{(s)}. \tag{1.5.28}$$

Schematicky je táto situácia zobrazená na Obr. 1.5. Z uvedeného vyplýva, že priestorové integrály časových zložiek Noetherovej prúdu vedú k zachovávajúcim sa veličinám v čase.

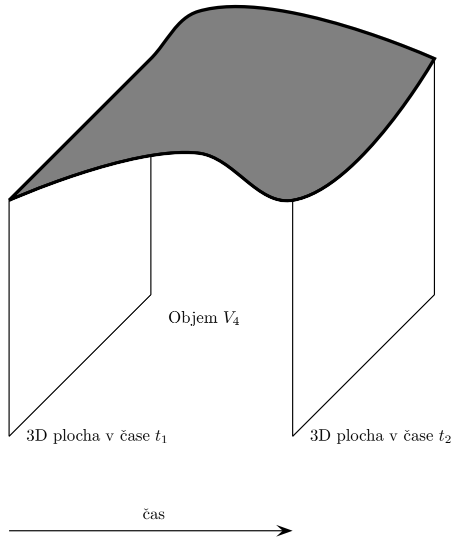
Poznámka:

Podotýkame, že veličiny $\mathcal{J}^{\mu}_{(s)}$ nie sú určené jednoznačne. Možno k nim vždy dodať antisymetrický výraz tvaru

$$\partial_{\nu}f^{\mu\nu}_{(s)}, \quad \text{s vlastnosťou } f^{\mu\nu}_{(s)} = -f^{\nu\mu}_{(s)} \tag{1.5.29}$$

a platnosť vzťahu (1.5.23) sa nezmení.

Taktiež sa často zvykne Noetherovej prúd označovať symbolom θ_{μ} namiesto $\mathcal{J}_{\mu}$. V prípadoch týkajúcich sa prúdu elektrických nabitých častíc sa tiež používa označenie j_{μ}.



Obr. 1.5: Zvolená integračná oblasť pri analýze výsledku (1.5.27). Dve priestorupodobné oblasti v časových okamihoch t_1 a t_2 vymedzujú istý objem v Minkowského časopriestore. Sivou farbou je kvalitatívne naznačená hranica v nekonečne medzi týmito danými plochami.

1.6 Tenzor energie-hybnosti

Uvažujme infinitezimálne malé časopriestorové posunutia (translácie) fyzikálneho systému. Môžeme ich opísať pomocou aktívnej transformácie danej predpisom

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu. \tag{1.6.1}$$

Pri tejto transformácii rolu parametrov $\delta\omega_s$ v (1.5.3) a (1.5.4) zohrávajú nekonečné malé posunutia δx^μ. Formálne potom možno indexy vo výraze (1.5.3) a sumáciu cez index s nahradiť nasledovným spôsobom

$$s \to \mu, \quad n \to 3, \quad \sum_{s=1}^{n} \to \sum_{\mu=0}^{3}, \quad X^\mu_{(s)} = X^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu.$$

Polia rôzneho druhu sa pri takýchto transláciách (1.6.1) transformujú podľa jednoduchého predpisu

$$\varphi'_a(x') = \varphi_a(x). \tag{1.6.2}$$

Preto teraz máme $\Psi_{a(s)} = 0$ v odpovedajúcom výraze (1.5.4). Z definičného vzťahu (1.5.23) odvodíme výraz pre Noetherovej prúd

$$\mathcal{J}^\mu{}_\nu \to T^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}(\partial_\nu\varphi_a) - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu. \tag{1.6.3}$$

Podotýkame, že v prvom člene sa sčítava cez dvakrát vystupujúci index a, ktorý je možné interpretovať ako multi-index reprezentujúci všetky polia príslušného modelu. Keďže tenzor $T^{\mu\nu}$ zohráva veľmi dôležitú úlohu, zavádza sa pre neho v literatúre nové označenie a nazývame ho tenzorom energie-hybnosti.

Priamym použitím pohybových rovníc sa dá ľahko ukázať, že naozaj je splnená rovnica

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{1.6.4}$$

ktorá vyjadruje lokálny zákon zachovania pre energiu a zložky hybnosti.

Štvorvektor celkovej hybnosti sa na základe úvah z prechádzajúcej časti dá zapísať v tvare

$$P^\mu \equiv \int \mathrm{d}^3x\, T^{0\mu}. \tag{1.6.5}$$

Nultá zložka P^0 predstavuje v teoretickej mechanike Hamiltonián študovaného systému.

1.7 Tenzor momentu hybnosti a tenzor spinu

Fyzikálne očakávame, že moment hybnosti súvisí s operáciami typu rotácie. Na rozdiel od trojrozmerného priestoru známeho z nerelativistickej mechaniky, máme v štvorrozmernom Minkowského časopriestore k dispozícii až šesť nezávislých rotácií. Tie pozostávajú jednak zo zvyčajných trojrozmerných rotácií a jednak z tzv. "boostov", pre ktoré je jedna z transformujúcich sa súradníc časová premenná. Inými slovami, môžeme tiež tvrdiť, že v štvorrozmernom časopriestore existuje celkovo šesť možností ako vybrať rovinu v ktorej dochádza k rotácii.

Vo všeobecnosti je tak potrebné zadať šesť nezávislých parametrov na opis ľubovoľnej rotácie. Na aplikáciu Noetherovej vety preto potrebujeme identifikovať šesť malých parametrov. Tri sú zrejmé - pôjde o tri malé uhlové parametre. Tri zvyšné odpovedajú trom malým rapiditám, ktoré určujú boost vo všeobecnom priestorovom smere.

Všeobecne možno infinitezimálne malé rotácie v Minkowského priestore predstaviť v tvare

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + x_\nu \delta\omega^{\mu\nu}, \quad \delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu}, \tag{1.7.1}$$

kde indexy μ, ν opisujú rotáciu v rovine $(x_\mu x_\nu)$. Ľahko sa možno presvedčiť o tom, že požiadavka invariantnosti $x^2 = x^\mu x_\mu$ vedie na uvedenú antisymetrickosť $\delta\omega^{\mu\nu}$.

Za nezávislé parametre volíme $\delta\omega^{\mu\nu}$, pre ktoré je $\mu < \nu$. Index (s) v definičnom vzťahu 1.5.4 je teraz dvojrozmerný a efektívne ho vo výrazoch pre Noetherovej prúd nahradíme podľa predpisu

$$(s) \to \mu\nu. \tag{1.7.2}$$

Nájdeme teraz výraz pre veličinu ${X^\mu}_{\alpha\beta}$ z (1.5.3)

$$\delta x^\mu = {X^\mu}_{(s)}\,\delta\omega_s = \frac{1}{2}{X^\mu}_{\alpha\beta}\,\delta\omega^{\alpha\beta}, \tag{1.7.3}$$

kde sme zaviedli faktor 1/2, aby nedochádzalo k viacnásobnému započítaniu daného príspevku. Všimnime si, že vďaka antisymetrickosti $\delta\omega^{\mu\nu}$ v dvojitej sume nevystupujú diagonálne členy, pre ktoré je $\alpha = \beta$. Spolu s výrazom (1.7.1) máme k dispozícii dva vzťahy pre δx^μ. Vieme preto nájsť explicitný výraz pre ${X^\mu}_{\alpha\beta}$. Začnime s (1.7.1) a upravujme

$$\begin{aligned}
x_\nu \delta\omega^{\mu\nu} &= x_\nu \delta\omega^{\alpha\nu} \delta^\mu_\alpha \\
&= \sum_{\alpha \leqq \nu} x_\nu \delta\omega^{\alpha\nu} \delta^\mu_\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha > \nu} x_\nu \delta\omega^{\alpha\nu} \delta^\mu_\alpha}_{\text{zameníme } \alpha \leftrightarrow \nu} = \sum_{\alpha \leqq \nu} [x_\nu \delta\omega^{\alpha\nu} \delta^\mu_\alpha + x_\alpha \delta\omega^{\nu\alpha} \delta^\mu_\nu] \\
&= \sum_{\alpha \leqq \nu} [x_\nu \delta^\mu_\alpha - x_\alpha \delta^\mu_\nu] \delta\omega^{\alpha\nu} \\
&= \frac{1}{2} \left[x_\nu \delta^\mu_\alpha - x_\alpha \delta^\mu_\nu\right] \delta\omega^{\alpha\nu},
\end{aligned} \tag{1.7.4}$$

odkiaľ porovnaním so všeobecným výrazom (1.7.3) máme

$${X^\mu}_{(\alpha\nu)} = x_\nu \delta^\mu_\alpha - x_\alpha \delta^\mu_\nu. \tag{1.7.5}$$

Tento vzťah možno prepísať aj do plne kontravariantného tvaru

$$X^{\mu(\alpha\nu)} = x^\nu g^{\mu\alpha} - x^\alpha g^{\mu\nu}. \tag{1.7.6}$$

Skalárne pole sa pri transformáciach (1.7.1) nemení. V kvantovej elektrodynamike sa neskôr stretneme s prípadom vektorového poľa (elektromagnetické pole fotónov), ktoré sa pri Lorentzovských rotáciách (1.7.1) transformuje podľa predpisu

$$\varphi'_\mu(x') = {\Lambda_\mu}^\nu \varphi_\nu(x) \approx \varphi_\mu(x) + \Delta\varphi_\mu, \tag{1.7.7}$$

$$\Delta\varphi_\mu = \frac{1}{2} A^\nu_{\mu\rho\sigma} \varphi_\nu(x) \delta\omega^{\rho\sigma}, \tag{1.7.8}$$

$$A^\nu_{\mu(\rho\sigma)} = g_{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma - g_{\mu\sigma}\delta^\nu_\rho, \quad (\rho < \sigma). \tag{1.7.9}$$

Tieto vzťahy vyplývajú priamo z faktu, že φ_μ musí predstavovať štvorvektorovú veličinu. Tým pádom sa musí transformovať rovnako ako štvorvektor x_μ, ktorého transformačné vlastnosti sme odvodili v (1.7.4).

Explicitný výraz pre funkciu Ψ potrebnú na konštrukciu variácie poľa (1.5.4) vyplýva z jednoduchého dosadenia (1.7.9) do (1.7.8). Po krátkej úprave máme

$$\delta\varphi_\mu = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\rho,\sigma} \Big[g_{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma - g_{\mu\sigma}\delta^\nu_\rho \Big] \varphi_\nu \delta\omega^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \Big[g_{\mu\rho}\varphi_\sigma - g_{\mu\sigma}\varphi_\rho \Big] \delta\omega^{\rho\sigma}, \tag{1.7.10}$$

odkiaľ porovnaním s výrazom (1.5.4) dostaneme

$$\Psi_{\mu(\rho\sigma)} = g_{\mu\rho}\varphi_\sigma - g_{\mu\sigma}\varphi_\rho, \tag{1.7.11}$$

kde pre úplnosť uvádzame zátvorky pri indexoch $\rho\sigma$. Pripomíname, že tieto indexy charakterizujú rovinu danej rotácie.

Vzťahy (1.7.5) a (1.7.11) dosadíme do všeobecného výrazu pre Noetherovej prúd (1.5.23) a upravujeme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}^{\mu}{}_{(\alpha\beta)} &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\rho)}\Psi_{\rho(\alpha\beta)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\rho)}(\partial_\nu\varphi_\rho)X^{\nu}{}_{(\alpha\beta)} - \mathcal{L}X^{\mu}{}_{(\alpha\beta)} \\
&= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\rho)}A^{\nu}_{\rho\alpha\beta}\varphi_\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\rho)}(\partial_\nu\varphi_\rho)[x_\beta\partial_\alpha\varphi_\rho - x_\alpha\partial_\beta\varphi_\rho] \\
&- \mathcal{L}[x_\alpha\delta^{\mu}_{\beta} - x_\beta\delta^{\mu}_{\alpha}] \\
&= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\rho)}A^{\nu}_{\rho\alpha\beta}\varphi_\nu + x_\beta\underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\rho)}(\partial_\alpha\varphi_\rho) - \delta^{\mu}_{\alpha}\mathcal{L}\right]}_{T^{\mu}{}_{\alpha}} \\
&+ x_\alpha\underbrace{\left[\mathcal{L}\delta^{\mu}_{\beta} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\rho)}(\partial_\beta\varphi_\rho)\right]}_{-T^{\mu}{}_{\beta}} \\
&= x_\beta T^{\mu}{}_{\alpha} - x_\alpha T^{\mu}{}_{\beta} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\rho)}A^{\nu}_{\rho(\alpha\beta)}\varphi_\nu.
\end{aligned}
\tag{1.7.12}
$$

Identifikovali sme pritom tenzor energie-hybnosti, ktorý bol odvodený v predchádzajúcej časti 1.6. ■

Diskusia:

1) Keďže skalárne pole má len jednu zložku a nevykazuje žiadnu vnútornú štruktúru, platí pre neho identicky $A^{\nu}_{\rho\alpha\beta} = 0$. Tenzor momentu hybnosti je potom jednoducho

$$M^{\mu}{}_{(\alpha\beta)} = x_\beta T^{\mu}{}_{\alpha} - x_\alpha T^{\mu}{}_{\beta}\,, \tag{1.7.13}$$

kde sme preoznačili Noetherovej prúd do zaužívaneho spôsobu zápisu $\mathcal{J} \to M$. V plne kontravariantnom tvare (1.7.13) nadobúda tenzor M tvar

$$M^{\mu(\alpha\beta)} = x^{\beta}T^{\mu\alpha} - x^{\alpha}T^{\mu\beta}. \tag{1.7.14}$$

Výraz (1.7.14) predstavuje po formálnej stránke analogickú štruktúru ako moment hybnosti $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ známy z teoretickej mechaniky. V oboch prípadoch sa jedná o antisymetrické výrazy skonštruované z polohového vektora a (štvor)hybnosti. Preto sa M v tvare (1.7.14) zvykne stotožňovať s orbitálnym momentom hybnosti poľa. Podľa diskusie Noetherovej vety (1.5.27) máme teraz lokálny zákon zachovania

$$\partial_\rho M^{\rho(\mu\nu)} = 0, \tag{1.7.15}$$

do ktorého dosadíme (1.7.14) a dostaneme

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}. \tag{1.7.16}$$

Zákon zachovania momentu hybnosti tak vedie na symetrickosť tenzora energie-hybnosti $T^{\mu\nu}$. Pri odvodení je nutné využiť už skôr získanú rovnicu (1.6.4), ktorá vyjadruje zákon zachovania pre $T^{\mu\nu}$.

2) Pre viaczložkové pole (vektorového alebo spinorového charakteru) obsahuje tenzor momentu hybnosti dva príspevky. Okrem orbitálneho momentu M obsahuje navyše aj výraz

$$S^{\mu}{}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\varphi_j A^j_{i\alpha\beta}, \tag{1.7.17}$$

kde indexy i, j slúžia na opis zložiek poľa a nie jeho priestorových súradníc. Hovoríme, že tenzor $S^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ charakterizuje polarizačné vlastnosti daného poľa. Dá sa ukázať, že (1.7.17) po skvantovaní je priamo zodpovedný za spinový moment hybnosti. Na zdôraznenie rozdielnej úlohy indexov i, j oproti α, β sme pozmenili definíciu štruktúry $A^{\nu}_{\mu\rho\sigma}$ z rovnice (1.7.8), kde sme explicitne uvažovali prípad vektorého poľa.

3) Priestorové hustoty orbitálneho a spinového momentu viaczložkového poľa sú dané výrazmi

$$M^{\alpha\beta} = \int \mathrm{d}^3x\, M^{\alpha\beta 0} = \int \mathrm{d}^3x\, [x^\beta T^{\alpha 0} - x^\alpha T^{\beta 0}], \tag{1.7.18}$$

$$S_{\alpha\beta} = \int \mathrm{d}^3x\, S^0{}_{\alpha\beta} = -\int \mathrm{d}^3x\, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi_i)} A^j_{i\alpha\beta}\varphi_j. \tag{1.7.19}$$

Z poslednej rovnice vieme skonštruovať duálny vektor pomocou Leviho-Civitovho tenzoru (pzr. A.1) 3. rádu

$$S_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}S_{jk}, \tag{1.7.20}$$

čo predstavuje trojrozmerný pseudovektor spinu. Podotýkame, že tento výraz (1.7.20) je nutné chápať ako zvyčajný trojpriestorový zápis v Euklidovskom priestore.

1.8 Vnútorné symetrie

Okrem časopriestorových transformácii sa v kvantovej teórii poľa stretávame aj s takými transformáciami, ktoré súvisia výhradne so zmenou poľa. Pri zvolenom označení vo formulácii Noetherovej vety v tvare (1.5.3) a (1.5.4) máme teraz na mysli také transformácie, pre ktoré je príslušná funkcia $X^{\mu}_{(s)}$ identicky rovná nule.

Známym príkladom z kvantovej mechaniky je globálna zmena fázy vlnovej funkcie. Pod globálnou sa má na mysli skutočnosť, že k zmene fázy dôjde v danom časovom okamihu naraz v celom priestore. V prípade, že sa globálna transformácia zamení na lokálnu, dochádza k vzniku netriviálnych členov v interakčnej časti Lagrangiánu. Podrobnejšie sa tomuto problému budeme venovať neskôr v časti 6.3.

Podobne ako v kvantovej mechanike uvažujme teraz model obsahujúci komplexné pole φ, t.j. $\varphi \in \mathbb{C}$. Komplexné pole možno chápať buď ako dvojicu reálnych polí (φ_1, φ_2) s tým, že $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, alebo ako dvojicu nezávislých komplexných polí $(\varphi, \overset{*}{\varphi})$. V oboch prípadoch je odpovedajúci počet stupňov voľnosti rovný dvom.

Z praktických dôvodov sa prikláňame skôr k druhému spôsobu a pod komplexným poľom budeme v tejto práci preto pracovať s dvojicou $(\varphi, \overset{*}{\varphi})$.

Ako obvykle predpokladáme, že Lagrangián danej teórie $\mathcal{L}$ je reálna veličina. Z toho vyplýva, že $\mathcal{L}$ môže byť skonštruovaný výhradne z bilineárnych výrazov tvaru $\overset{*}{\varphi}\varphi$ a ich derivácií. Takáto kombinácia je zjavne invariantná vzhľadom na úpravu

$$\overset{*}{\varphi}\varphi = \overset{*}{\varphi}\mathrm{e}^{-i\Lambda}\mathrm{e}^{i\Lambda}\varphi = (\mathrm{e}^{i\Lambda}\varphi)^*(\mathrm{e}^{i\Lambda}\varphi) = \overset{*}{\varphi}'\varphi', \tag{1.8.1}$$

kde $\Lambda \in \mathbb{R}$ a φ' označuje nové transformované pole. Očakávame teda, že Lagrangián $\mathcal{L}$ by mal byť invariantný vzhľadom na transformáciu

$$\varphi \to \varphi' = \mathrm{e}^{i\Lambda}\varphi, \quad \overset{*}{\varphi} \to \overset{*}{\varphi}' = \mathrm{e}^{-i\Lambda}\overset{*}{\varphi}. \tag{1.8.2}$$

Jej infinitezimálna verzia je

$$\varphi \to \varphi + i\varphi\Lambda, \quad \overset{*}{\varphi} \to \overset{*}{\varphi} - i\overset{*}{\varphi}\Lambda. \tag{1.8.3}$$

Keďže Λ je ľubovoľné reálne číslo, máme v princípe k dispozícii istú spojitú transformáciu a je tak na ňu možné aplikovať tvrdenie Noetherovej vety. Vzťahy (1.5.3) a (1.5.4) nadobudnú tvar

$$\delta x^\mu = 0, \quad \delta\varphi = \underbrace{i\varphi}_{\Psi}\Lambda, \quad \delta\overset{*}{\varphi} = \underbrace{-i\overset{*}{\varphi}}_{\overset{*}{\Psi}}\Lambda, \tag{1.8.4}$$

kde sme zdôraznili identifikáciu veličiny Ψ z výrazu (1.5.4). Dosadením do vzorca pre Noetherovej tok (1.5.23) ľahko odvodíme

$$\begin{aligned} \theta^\mu_{(s)} \to J^\mu &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\Psi_a = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\overset{*}{\varphi})}\overset{*}{\Psi} \\ &= i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\overset{*}{\varphi})}\overset{*}{\varphi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\varphi\right], \end{aligned} \tag{1.8.5}$$

kde prvá sumácia cez parameter a symbolizuje sumovanie cez všetky prípustné nezávislé polia modelu. V danom prípade máme k dispozícii zjavne dve nezávislé polia: φ a $\overset{*}{\varphi}$.

Z matematickej formulácie Noetherovej vety (1.5.24) ďalej vieme, že štvordivergencia prúdu J^μ je nulová

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{1.8.6}$$

Na základe záverečnej diskusie v časti 1.5 tvrdíme, že veličina Q definovaná predpisom

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, J^0(x) = i\int \mathrm{d}^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\overset{*}{\varphi})}\overset{*}{\varphi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)}\varphi\right] \tag{1.8.7}$$

sa zachováva. Ako sa neskôr presnejšie ukáže, je možné Q stotožniť s celkovým elektrickým nábojom častíc daného modelu. Podotýkame, že v kvantovej teórii poľa môže Q slúžiť aj na opis iných typov náboja, napr. baryónový náboj, podivný náboj, atď.

Poznámka:

- Symetrie pre ktoré platí, že $\psi \neq 0, X = 0$ zvykneme nazývať aj vnútornými symetriami.
- Q je zachovávajúca sa veličina, t.j. platí rovnica $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$.
- Vo výraze pre Q sa zatiaľ nikde nevyskytuje zmienka o elementárnom náboji e.
- Q predstavuje zatiaľ klasickú a nie kvantovú veličinu, keďže neobsahuje Planckovu konštantu $\hbar$.
- Z výrazu pre Q nie je zatiaľ zrejmé, že sa jedná o diskrétnu veličinu.
- Ak φ je reálne pole, t.j. $\varphi = \overset{*}{\varphi}$, tak jednoducho platí $Q = 0$.
- V prípade, že máme v modeli viacero komplexných polí, dochádza k zmene vzťahu (1.8.5) na

$$J^\mu = i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\overset{*}{\varphi}_a)}\overset{*}{\varphi}_a - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\varphi_a\right], \tag{1.8.8}$$

resp. vzťahu (1.8.7) na

$$Q = i\int \mathrm{d}^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\overset{*}{\varphi}_a)}\overset{*}{\varphi}_a - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi_a)}\varphi_a\right]. \tag{1.8.9}$$

V uvedených výrazoch index $a = 1, 2, \ldots$ prechádza cez jednotlivé nezávislé polia.

Kapitola 2

Neinteragujúce (voľné) polia

V tejto časti ilustrujeme zavedené teoretické postupy z prvej kapitoly na konkrétnych príkladoch klasických polí. Pre každé z polí uvedieme jeho Lagrangeovu formuláciu a odvodíme explicitné výrazy pre relevantné fyzikálne veličiny, ktoré budú neskôr potrebné pri formulácii im odpovedajúcich kvantových teórií. Taktiež vykonáme prepis získaných výrazov do Fourierovej reprezentácie, ktorá sa pri procese kvantovania ukazuje ako výhodná. Postupne sa zameriame na opis nasledujúcich voľných polí:

a) reálne skalárne pole,

b) komplexné skalárne pole,

c) vektorové pole,

d) elektromagnetické pole.

Podotýkame, že reálne častice nemôžu byť v princípe opísané voľnými poliami. Dospeli by sme k mnohým protirečeniam s experimentálne získanými výsledkami, napríklad k sporu s experimentom merajúcim magnetický moment elektrónu. Plný opis reálnych častíc musí nutne obsahovať interagujúce polia.

2.1 Lagrangeov formalizmus reálneho skalárneho poľa

Vo fyzike hrajú významnú rolu Lagrangeove funkcie, ktoré sú funkciami len polí a ich prvých derivácií. Priamym dôsledkom tohto predpokladu sú pohybové rovnice v tvare diferenciálnych rovníc nie vyššieho ako druhého rádu. Navyše sa tiež predpokladá, že Lagrangiány sú nanajvýš kvadratické funkcie svojich premenných. Pohybové rovnice potom sú nutne lineárne a homogénne a obvykle takéto rovnice vieme exaktne riešiť. Tým vlastne získame prvý náhľad do vlastností fyzikálneho modelu, ktorý chceme analyzovať. Dá sa konštatovať, že v princípe všetky fundamentálne modely vo fyzike vychádzajú z podobných úvah.

Najjednoduchším príkladom voľného poľa je jednokomponentné reálne pole $\varphi(x) = \varphi(t, \boldsymbol{x})$, ktoré sa pri Lorentzových transformáciách správa ako skalárna, resp. pseudoskalárna veličina. Reálne skalárne pole nám slúži na opis bezspinových neutrálnych častíc a Lagrangián takéhoto poľa je daný výrazom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2, \tag{2.1.1}$$

kde parameter m považujeme za hmotnostný parameter a kinetický člen sme zapísali v často používanom skrátenom zápise

$$(\partial\varphi)^2 \equiv (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi). \tag{2.1.2}$$

Pripomíname, že pracujeme v konvencii časticovej fyzike $\hbar = c = 1$.

Použitím Eulerových-Lagrangeových rovníc (1.4.5) odvodíme pohybovú rovnicu pre pole $\varphi = \varphi(x)$ v tvare

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0, \tag{2.1.3}$$

kde vystupuje diferenciálny d'Alembertov operátor $\Box = \partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2$ a daná rovnica je známa ako Kleinova-Gordonova rovnica (J. D. Bjorken & S. D. Drell, 1964; M. E. Peskin & D. V. Schroeder, 1995; N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1980). Pri jej odvodení sme využili dva pomocné vzťahy

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = m^2\varphi$$

a tiež vzťah

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi)}[(\partial_\alpha\varphi)(\partial^\alpha\varphi)] = \frac{1}{2}\frac{\partial(\partial_\alpha\varphi)}{\partial(\partial_\mu\varphi)}(\partial^\alpha\varphi) + \frac{(\partial_\alpha\varphi)}{2}\frac{\partial(\partial^\alpha\varphi)}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \\ &= \frac{1}{2}\delta^\alpha_\mu(\partial^\alpha\varphi) + \frac{(\partial_\alpha\varphi)}{2}g^{\mu\alpha} = \frac{1}{2}[(\partial^\mu\varphi) + (\partial^\mu\varphi)] \\ &= (\partial^\mu\varphi).\end{aligned}$$

Rozmerovo správnu pohybovú rovnicu je možné nájsť priamočiarym spôsobom. Po doplnení Planckovej konštanty $\hbar$ a rýchlosti svetla c dospejeme k rovnici

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi(x) = 0. \tag{2.1.4}$$

Podotýkame, že výraz

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc} \tag{2.1.5}$$

je známy aj ako Comptonova vlnová dĺžka. Efektívne ide o priestorovú škálu, na ktorej prestáva dávať dobrý zmysel interpretácia riešenia rovnice (2.1.4) ako jednočasticovej vlnovej funkcie.

Ďalej dosadením Lagrangiánu (2.1.1) do všeobecného vzťahu pre tenzor energie-hybnosti (1.6.3) dostávame

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{(\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = (\partial^\mu \varphi)(\partial^\nu \varphi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \tag{2.1.6}$$

Hustotu energie (Hamiltonián) skalárneho poľa je možno zapísať v tvare

$$\begin{aligned} T^{00} &= (\partial^0 \varphi)(\partial^0 \varphi) - \mathcal{L} = \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2 + (\partial^i \varphi)(\partial_i \varphi)\right] + \frac{m^2}{2}\varphi^2 \\ &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 && (2.1.7) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial_\mu \varphi) + \frac{m^2}{2}\varphi^2. && (2.1.8) \end{aligned}$$

Z predposledného výrazu je zjavná pozitívna definitnosť T^{00}. Všimnime si polohu sčítavacieho indexu v rovnici (2.1.8), ktorá implikuje očakávanú neinvariantnosť energie voči Lorentzovým transformáciám. Celková energia poľovej konfigurácia je potom daná integrálom

$$E = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 x \, \left[(\partial_\mu \varphi)(\partial_\mu \varphi) + m^2 \varphi^2\right]. \tag{2.1.9}$$

Ďalej vektor hustoty hybnosti T^{0i} je daný výrazom

$$T^{0i} = \dot{\varphi}(\partial^i \varphi), \tag{2.1.10}$$

ktorý dostávame z už odvodeného všeobecného výrazu (1.6.5). Zložky celkovej hybnosti $\boldsymbol{P}$ sú potom vyjadrené ako priestorové integrály

$$P^i = \int \mathrm{d}^3 x \, T^{0i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.1.11}$$

V trojrozmernej notácii možno posledný vzťah zapísať v tvare

$$\boldsymbol{P} = -\int \mathrm{d}^3 x \, \dot{\varphi} \boldsymbol{\nabla} \varphi. \tag{2.1.12}$$

Tenzor momentu hybnosti získame zo vzťahu (1.7.12). Je zrejmé, že v tomto prípade je tenzor momentu spinu nulový (skalárne pole nemá vnútornú štruktúru), a preto je tenzor momentu hybnosti daný výrazom

$$M^\mu{}_{\alpha\beta} = \partial^\mu \varphi (x_\beta \partial_\alpha \varphi - x_\alpha \partial_\beta \varphi) + \mathcal{L}(x_\alpha g^\mu_\beta - x_\beta g^\mu_\alpha). \tag{2.1.13}$$

Položením $\mu = 0$ v tomto vzťahu vidíme, že priestorová hustota momentu hybnosti, ktorá sa zachováva v čase, je

$$M^0{}_{\alpha\beta} = \dot{\varphi}(x_\beta \partial_\alpha \varphi - x_\alpha \partial_\beta \varphi) + \mathcal{L}(x_\alpha g^0_\beta - x_\beta g^0_\alpha). \tag{2.1.14}$$

2.1.1 Hybnostná reprezentácia

Z kvantovej mechaniky očakávame, že výhodnejší ako opis v priamom (konfiguračnom) priestore, je opis založený na hybnostnej reprezentácii. Fyzikálnym dôvodom je fakt, že v prípade voľnej častice sa jej dynamické charakteristiky ako energia a hybnosť zachovávajú. Ide v podstate o priamy dôsledok predpokladanej translačnej invariantnosti modelu. V teórii poľa je situácia veľmi podobná. Preto sa teraz zameriame na získanie Fourierových obrazov relevantných dynamických veličín. Za týmto účelom predstavme dané dynamické pole φ vo forme Fourierovho integrálu

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}k \, \mathrm{e}^{ik\cdot x} \tilde{\varphi}(k), \tag{2.1.15}$$

kde výraz v exponenciánej funkcii

$$k \cdot x = k^\mu x^\mu = k^0 x^0 - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} \tag{2.1.16}$$

predstavuje skalárny súčin a infinitezimálny element $\mathrm{d}k$ predstavuje štvorrozmerný objem $\mathrm{d}k^0 \mathrm{d}^3 k$ vo frekvenčno-hybnostnej reprezentácii. Jedným z dôsledkov reálnosti poľa φ je fakt, že jeho Fourierov obraz $\tilde{\varphi}$ musí spĺňať rovnicu

$$\overset{*}{\tilde{\varphi}}(k) = \tilde{\varphi}(-k). \tag{2.1.17}$$

Uvažujme komplexne združený výraz k rovnici (2.1.15)

$$\overset{*}{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}k \, \mathrm{e}^{-ik\cdot x} \overset{*}{\tilde{\varphi}}(k) \tag{2.1.18}$$

a vykonajme zámenu premenných podľa predpisu

$$k_\mu \to -k_\mu. \tag{2.1.19}$$

Keďže ale každú integračnú premennú v (2.1.15) integrujeme v rozsahu od $-\infty$ do $+\infty$, dostaneme

$$\overset{*}{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}k \, \mathrm{e}^{ik\cdot x} \overset{*}{\tilde{\varphi}}(-k). \tag{2.1.20}$$

Predpoklad reálnosti daného skalárneho poľa $\varphi(x) = \overset{*}{\varphi}(x)$ potom priamo vedie na uvedenú podmienku (2.1.17).

Dosaďme ďalej Fourierov rozvoj (2.1.15) do pohybovej rovnice (2.1.3). Postupne máme

$$\begin{aligned}
0 &= (\Box + m^2)\varphi(x) = [\partial_\mu \partial^\mu + m^2]\varphi(x) && (2.1.21)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}k \, \tilde{\varphi}(k)[\partial_\mu \partial^\mu + m^2]\mathrm{e}^{ik\cdot x} && (2.1.22)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}k \, \tilde{\varphi}(k)[ik^\mu \partial_\mu + m^2]\mathrm{e}^{ik\cdot x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}k \, \tilde{\varphi}(k)[-k^2 + m^2]\mathrm{e}^{ik\cdot x}, && (2.1.23)
\end{aligned}$$

kde $k^2 = (k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2$ je ekvivalent známeho relativistického vzťahu $E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ (v jednotkách $c = 1$). Z rovnice (2.1.23) vidíme, že Fourierov obraz poľa $\tilde{\varphi}(k)$ musí vyhovovať rovnici

$$(k^2 - m^2)\tilde{\varphi}(k) = 0. \tag{2.1.24}$$

Pre $k^2 \neq m^2$ máme $\tilde{\varphi}(k) = 0$. To nás prirodzeným spôsobom motivuje k prepisu $\tilde{\varphi}$ do vhodnejšieho tvaru

$$\tilde{\varphi}(k) = \delta(k^2 - m^2)\varphi(k). \tag{2.1.25}$$

Diracova delta funkcia na pravej strane zabezpečí splnenie relativistického vzťahu medzi "energiou" k^0, "hybnosťou" $\boldsymbol{k}$ a druhou mocninou hmotnosti m^2

$$k^2 - m^2 = (k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 - m^2 = 0. \tag{2.1.26}$$

Zápis (2.1.25) dosadíme do Fourierovej reprezentácie (2.1.15) a preintegrujeme cez frekvenčnú premennú k^0. Najskôr izolujme príslušnú časť

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^{3/2}}\, \mathrm{e}^{ik\cdot x}\delta(k^2 - m^2)\varphi(k) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \int \mathrm{d}k^0\, \mathrm{e}^{ik^0x^0}\delta(k^2 - m^2)\varphi(k^0, \boldsymbol{k}). \end{aligned} \tag{2.1.27}$$

Diracovu delta funkciu na pravej strane upravíme pomocou známeho vzťahu

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \tag{2.1.28}$$

kde $\{x_i\}_{i=1}^N$ je množina koreňov rovnice $f(x) = 0$. Pomocou tejto relácie ľahko nájdeme potrebný rozklad delta funkcie v (2.1.27)

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta((k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 - m^2) \tag{2.1.29}$$

$$= \frac{\delta(k^0 - \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2})}{2\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}} + \frac{\delta(k^0 + \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2})}{2\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}}. \tag{2.1.30}$$

Pre zjednodušenie odvodenia označme výraz $p^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ a rovnicu (2.1.27) ďalej upravujme

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \int \frac{\mathrm{d}k^0}{2p^0}\, \mathrm{e}^{ik^0x^0}[\delta(k^0 - p^0) + \delta(k^0 + p^0)]\varphi(k^0, \boldsymbol{k}) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2p^0(2\pi)^{3/2}}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}[\mathrm{e}^{ip^0x^0}\varphi(p^0, \boldsymbol{k}) + \mathrm{e}^{-ip^0x^0}\varphi(-p^0, \boldsymbol{k})]. \end{aligned} \tag{2.1.31}$$

V druhom výraze na pravej strane vykonajme zámenu argumentu $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$ (vplyv integračných hraníc zabezpečí, že celkové znamienko integrálneho výrazu sa nezmení) a preznačme $p^0 \to k^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$. Dospejeme tak k nasledujúcemu výrazu pre pole $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2k^0}\, [\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{e}^{ik^0x^0}\varphi(k^0, \boldsymbol{k}) + \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{e}^{-ik^0x^0}\varphi(-k^0, -\boldsymbol{k})]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{2k^0} \left[\mathrm{e}^{ik\cdot x}\varphi(k) + \mathrm{e}^{-ik\cdot x}\varphi(-k)\right]\big|_{k^0=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}}. \tag{2.1.32}$$

Vidíme, že v poslednom výraze nie je hodnota k_0 ľubovoľná, ale pevne určená hodnotou vektora $\boldsymbol{k}$. Ak nebude uvedené inak, ďalej v tomto texte budeme mať vždy na pamäti splnenie relativistického vzťahu $k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ medzi premennými k_0 a $\boldsymbol{k}$.

Ako sa neskôr ukáže pri procedúre kvantovania v kapitole 5, je výhodné výsledok (2.1.32) zapísať v tvare súčtu dvoch členov

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x), \tag{2.1.33}$$

ktoré sú definované

$$\varphi^\pm(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^{3/2}}\, \mathrm{e}^{\pm ik\cdot x}\delta(k^2 - m^2)\varphi^\pm(k), \quad \varphi^\pm(k) = \theta(k^0)\varphi(\pm k). \tag{2.1.34}$$

Člen φ^+ bude neskôr odpovedať kreačným operátorom a φ^- zase anihilačným operátorom.

Z reálnosti poľa φ sme odvodili podmienku (2.1.17), ktorá odpovedá podmienkam

$$(\varphi^+(k))^* = \varphi^-(k), \quad (\varphi^-(k))^* = \varphi^+(k). \tag{2.1.35}$$

Taktiež je možné nájsť inverzné vzťahy k vzťahom (2.1.34) pomocou funkcií $\varphi(x)$ a $\dot\varphi(x) = \partial_t\varphi(x)$

$$\varphi^\pm(k) = \int \frac{\mathrm{d}^3 x}{(2\pi)^{3/2}}\, \mathrm{e}^{\mp ik\cdot x}[k^0\varphi(x) \mp i\dot\varphi(x)]. \tag{2.1.36}$$

Kvôli zjednodušeniu neskoršieho prechodu ku kvantovým poliam je výhodné prepísať rozklad (2.1.32) do nového tvaru. Pre tento účel zaveďme nasledovné označenie

$$a^\dagger_{\boldsymbol{k}} \equiv \frac{\varphi^+(k)}{\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}}}, \quad a_{\boldsymbol{k}} \equiv \frac{\varphi^-(k)}{\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}}}, \quad E_{\boldsymbol{k}} = k^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}. \tag{2.1.37}$$

Potom máme

$$\varphi^-(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}}\, a_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{-ik\cdot x}, \quad \varphi^+(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}}\, a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{ik\cdot x}. \tag{2.1.38}$$

V takomto a podobných výrazoch je potrebné mať vždy na pämati, že $E_{\boldsymbol{k}}$ je pevne dané výrazom $E_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$. Súhrnne je tak skalárne pole možné predstaviť v tvare

$$\varphi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}} \left[a_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{-ik\cdot x} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{ik\cdot x}\right]. \tag{2.1.39}$$

Analogický druh zápisu budeme využívať aj pri analýze iných druhov polí (spinorové a vektorové).

2.1.2 Zložky tenzora energie-hybnosti v hybnostnej reprezentácii

Hustota energie je určená výrazom (2.1.7) a celková energia P^0 skalárneho poľa je preto daná príslušným priestorovým integrálom

$$P^0 = \int \mathrm{d}^3x\, T^{00} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, \left[\dot{\varphi}^2 + |\boldsymbol{\nabla}\varphi|^2 + m^2\varphi^2\right]. \tag{2.1.40}$$

Do tohto výrazu teraz dosadíme rozklad (2.1.33) a (2.1.38). Po roznásobení dostaneme

$$\begin{aligned} P^0 &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, [(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi) + m^2\varphi^2] \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, \{(\partial_\mu\varphi^+)(\partial_\mu\varphi^+) + 2(\partial_\mu\varphi^+)(\partial_\mu\varphi^-) + (\partial_\mu\varphi^-)(\partial_\mu\varphi^-) \\ &+ m^2(\varphi^+\varphi^+ + 2\varphi^+\varphi^- + \varphi^-\varphi^-)\}. \end{aligned} \tag{2.1.41}$$

Dá sa ukázať, že členy s rovnakými znamienkami v exponente dávajú nulový vklad. Použitím hybnostnej reprezentácie (2.1.38) napríklad máme

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^3x\, \{(\partial_\mu\varphi^+)(\partial_\mu\varphi^+) + m^2\varphi^+\varphi^+\} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k\, \mathrm{d}^3k'}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}'}}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}'} \mathrm{e}^{i(E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}'})x^0} (m^2 - k_\mu k'_\mu)\, \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')}}_{\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_{\boldsymbol{k}}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a^\dagger_{-\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{2iE_{\boldsymbol{k}}x_0} (m^2 - E^2_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{k}^2). \end{aligned} \tag{2.1.42}$$

Keďže ale vieme, že je splnený relativistický vzťah $E_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ vidíme, že získaný výraz (2.1.42) je identicky rovný nule. Tú istú úvahu možno použiť pre bilineárny výraz vzhľadom na φ^-. Na druhej strane, členy odpovedajúce štruktúre $\varphi^+\varphi^-$ dávajú nenulový vklad. Postupne upravujme nasledujúci integrál

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^3x\, \{(\partial_\mu\varphi^+)(\partial_\mu\varphi^-) + m^2\varphi^+\varphi^-\} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3x}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3k\, \mathrm{d}^3k'}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}'}}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}'} \mathrm{e}^{i(E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}'})x^0} \mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} [k_\mu k'_\mu + m^2] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k\, \mathrm{d}^3k'}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}'}}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}'} \mathrm{e}^{i(E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}'})x^0} [k_\mu k'_\mu + m^2] \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}^3x}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}}_{\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_{\boldsymbol{k}}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}\, \underbrace{[E^2_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{k}^2 + m^2]}_{2E^2_{\boldsymbol{k}}} \end{aligned}$$

$$= \int \mathrm{d}^3k \, E_{\boldsymbol{k}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}. \tag{2.1.43}$$

Nakoniec preto energia skalárneho poľa (2.1.42) nadobúda v hybnostnej reprezentácii tvar

$$P^0 = \int \mathrm{d}^3k \, E_{\boldsymbol{k}} \, a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}. \tag{2.1.44}$$

Rovnakým spôsobom vieme nájsť výraz pre priestorové zložky štvorhybnosti

$$P^i = \int \mathrm{d}^3x \, T^{0i} = \int \mathrm{d}^3k \, k^i a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}; \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.1.45}$$

Ak by sme pri odvodzovaní dodržiavali poradie súčinov a kvôli prehľadnosti písali k^0 namiesto $E_{\boldsymbol{k}}$, dospeli by sme ku kompaktnému výrazu

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3k \, k^\mu [a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}}]; \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{2.1.46}$$

Uvádzame ho z dôvodu jeho neskoršieho použitia pri kvantovaní teórie skálarneho poľa, kedy sa príslušné polia $\varphi^\pm$ nahradia odpovedajúcimi operátorovými výrazmi.

Získaný výsledok (2.1.46) je možné priamočiaro fyzikálne interpretovať v rámci reprezentácie obsadzovacích čísel známeho z nerelativistickej kvantovej mechaniky. Výraz $a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}$ tak predstavuje hustotu častíc v hybnostnom priestore s hybnosťou $\boldsymbol{k}$, energiou $E_{\boldsymbol{k}} = k^0$ a hmotnosťou $m = \sqrt{k_0^2 - \boldsymbol{k}^2}$. Zároveň platí, že dané častice sú bezspinové a nenabité.

2.2 Komplexné skalárne pole

Uvažujme teraz komplexné skalárne pole $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x); \varphi_{1,2} \in \mathbb{R}$, ktoré je plne popísané dvojicou svojich nezávislých zložiek $\varphi_{1,2}$. V konkrétnych výpočtoch je ale výhodnejšie pracovať s dvojicou polí φ a $\overset{*}{\varphi}$, kde symbol $*$ označuje operáciu komplexnej združenosti. Lagrangián takéhoto poľa má tvar

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \overset{*}{\varphi})(\partial^\mu \varphi) - m^2 \overset{*}{\varphi} \varphi. \tag{2.2.1}$$

Takto definovaný výraz je zjavne reálna veličina. Ďalej je zrejmé, že počet pohybových rovníc by mal odpovedať počtu stupňov voľnosti daného systému, ktorý je v danom prípade rovný dvom. Pri aplikácii vzorca pre Eulerove-Lagrangeove rovnice (1.4.5) je preto potrebné vziať do úvahy nezávislosť polí φ a $\overset{*}{\varphi}$. Získavame tak dvojicu rovníc

$$(\Box + m^2)\varphi = (\Box + m^2)\overset{*}{\varphi} = 0. \tag{2.2.2}$$

Tenzor energie-hybnosti sa získa priamym dosadením do všeobecného výrazu (1.6.3) s opäť reálnym výrazom

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \overset{*}{\varphi})(\partial_\nu \varphi) + (\partial_\nu \overset{*}{\varphi})(\partial_\mu \varphi) - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \tag{2.2.3}$$

Príslušné zložky štvorhybnosti (1.6.5) sú v explicitnom tvare rovné

$$T^{00} = (\partial_\mu \overset{*}{\varphi})(\partial_\mu \varphi) + m^2 \overset{*}{\varphi} \varphi, \tag{2.2.4}$$

$$T^{0i} = -\left[\frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x^0}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^0}\right]; \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.2.5}$$

V prípade prvého z týchto vzťahov sa sumuje cez sčítací index μ a vidíme, že sa nejedná o relativisticky invariantný výraz. Po rozpísaní do zložiek ale dostaneme očakávaný pozítivne definitný výraz pre celkovú energiu poľa

$$T^{00} = |\dot{\varphi}|^2 + |\boldsymbol{\nabla}\varphi|^2 + m^2|\varphi|^2. \tag{2.2.6}$$

Vďaka predpokladanej invariantnosti voči časovým transláciám sa tento výraz v literatúre stotožňuje s Hamiltoniánom.

Ako bolo naznačené v podkapitole 1.8, komplexné polia sa vyznačujú vnútornou symetriou, ktorej dôsledkom je existencia nenulového štvorvektora prúdu

$$J^\mu = i[\overset{*}{\varphi}(\partial^\mu \varphi) - (\partial^\mu \overset{*}{\varphi})\varphi]. \tag{2.2.7}$$

Ten teraz nebude nulový, pretože podľa predpokladu pole φ nie je totožné s poľom $\overset{*}{\varphi}$, t.j. $\varphi \neq \overset{*}{\varphi}$. Spinový moment je podobne ako pri reálnom skalárnom poli rovný nule.

Analogickým postupom ako bolo uvedené v kapitole 2.1 vieme všetky uvedené vzťahy prepísať do hybnostnej reprezentácie. Hlavný rozdiel spočíva v nutnosti zavedenia dvojnásobného počtu polí

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}k\, \delta(k^2 - m^2)\mathrm{e}^{\pm ik\cdot x}\varphi^\pm(\boldsymbol{k}), \tag{2.2.8}$$

$$\overset{*}{\varphi}{}^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}k\, \delta(k^2 - m^2)\mathrm{e}^{\pm ik\cdot x}\overset{*}{\varphi}{}^\pm(\boldsymbol{k}), \tag{2.2.9}$$

kde po vzore (2.1.34) zavedieme nové označenie

$$\varphi^\pm \equiv \frac{\varphi^\pm(k)}{\sqrt{2k^0}}, \quad \overset{*}{\varphi}{}^\pm \equiv \frac{\overset{*}{\varphi}{}^\pm(k)}{\sqrt{2k^0}}, \quad k^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}. \tag{2.2.10}$$

Poznámka:

Pole $\overset{*}{\varphi}{}^+(k)$ nepredstavuje komplexne združené k poľu $\varphi^+(k)$. Dá sa ale ukázať, že platí

$$(\varphi^+(k))^* = \overset{*}{\varphi}{}^-(k), \quad (\varphi^-(k))^* = \overset{*}{\varphi}{}^+(k). \tag{2.2.11}$$

Postupom naznačeným v predošlej časti 2.1.2 sa ďalej ukáže, že štvorhybnosť a celkový náboj sú v hybnostnej reprezentácii určené vzťahmi

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3k\, k^\mu\{\overset{*}{\varphi}{}^+(\boldsymbol{k})\varphi^-(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{\varphi}{}^-(\boldsymbol{k})\varphi^+(\boldsymbol{k})\}, \tag{2.2.12}$$

$$Q = \int \mathrm{d}^3k\, \{\overset{*}{\varphi}{}^+(\boldsymbol{k})\varphi^-(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{\varphi}{}^-(\boldsymbol{k})\varphi^+(\boldsymbol{k})\}. \tag{2.2.13}$$

Z týchto výrazov pre P^μ a Q plynú nasledujúce interpretácie bilineárnych členov:

- $\overset{*}{\varphi}{}^+(\boldsymbol{k})$ - kreačný operátor častíc s nábojom $+1$,

- $\varphi^-(\boldsymbol{k})$ - anihilačný operátor častíc s nábojom $+1$,
- $\overset{*}{\varphi}{}^-(\boldsymbol{k})$ - kreačný operátor častíc s nábojom -1,
- $\varphi^+(\boldsymbol{k})$ - anihilačný operátor častíc s nábojom -1.

Vo všetkých prípadoch má daná častica hybnosť $\boldsymbol{k}$, hmotnosť m a energiu $k^0 = = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$.

V literatúre sa môžeme stretnúť aj s iným označením, ktoré je zovšeobecním označenia z podkapitoly 2.1. V danom prípade sa zavádza preoznačenie

$$\overset{*}{\varphi}{}^+(\boldsymbol{k}) = a_{\boldsymbol{k}}^\dagger, \quad \varphi^-(\boldsymbol{k}) = a_{\boldsymbol{k}}, \quad \overset{*}{\varphi}{}^-(\boldsymbol{k}) = b_{\boldsymbol{k}}, \quad \varphi^+(\boldsymbol{k}) = b_{\boldsymbol{k}}^\dagger. \tag{2.2.14}$$

To vedie na nasledujúci prepis horeuvedených vzťahov

$$\varphi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}} \left[a_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-ik\cdot x} + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger \mathrm{e}^{ik\cdot x}\right], \tag{2.2.15}$$

$$\overset{*}{\varphi}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}} \left[a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \mathrm{e}^{-ik\cdot x} + b_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{ik\cdot x}\right], \tag{2.2.16}$$

$$Q = \int \mathrm{d}^3 k \left[a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}} - b_{\boldsymbol{k}}^\dagger b_{\boldsymbol{k}}\right], \tag{2.2.17}$$

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3 k \, k^\mu \left[b_{\boldsymbol{k}}^\dagger b_{\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}}\right]. \tag{2.2.18}$$

Podobne ako pre reálne skalárne pole aj tu výraz $E_{\boldsymbol{k}}$ predstavuje relativistický vzťah $\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$. Ďalej si všimnime akým spôsobom vstupujú do jednotlivých vzťahov jednotlivé kreačné a anihilačné výrazy. Napríklad v rozklade pre $\varphi(x)$ máme jednak $a_{\boldsymbol{k}}$ a jednak $b_{\boldsymbol{k}}^\dagger$. Uvedomme si, že oba tieto operátory efektívne znižujú celkový náboj. Uvidíme, že toto heuristické pozorovanie možno interpretovať ako interferenciu anihilovania častice s kreovaním antičastice.

Výrazy (2.2.13) a (2.2.17) sa síce líšia v celkovom znamienku, čo ale nie je fyzikálne relevantné. V danom prípade je dôležité len to, aby sa rozdiel medzi počtom častíc a im príslušných antičastíc zachovával v čase.

2.3 Piónové pole

Ako možnú netriviálnu aplikáciu komplexného poľa si uvedieme jeho použitie na popis piónov (π^0, π^+, π^-). Z experimentu je známe, že ich je možné popísať vo forme izospinového tripletu ako trojicu zložiek istého vnútorného vektorového priestoru. Z historických dôvodov sa tento priestor nazýva ako izospinový (D. Griffiths, 2008; N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1980; N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1983). Zvyčajne ich preto opisujeme pomocou trojkomponentnej poľovej funkcie. Existujú dve rôzne reprezentácie, ktoré sa zvyknú používať:

(i) trojica reálnych polí $\pi_i(x) \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3:$

$$\boldsymbol{\pi}(x) = \{\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x)\}; \tag{2.3.1}$$

(ii) trojica antizdružených komplexných polí $\varphi_{1,2} \in \mathbb{C}$:

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\}; \quad \varphi_2^* = \varphi_2, \quad \varphi_1^* = -\varphi_3. \tag{2.3.2}$$

Podotýkame, že označenie tučným písmom teraz odpovedá vektoru v abstraktnom (izospinovom) priestore a nejedná sa o zvyčajný trojrozmerný euklidovský priestor. Vzťah medzi reprezentáciami (i) a (ii) je možné ľahko nájsť

$$\varphi_1 = -\frac{\pi_1 - i\pi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 = \pi_3, \quad \varphi_3 = \frac{\pi_1 + i\pi_2}{\sqrt{2}}. \tag{2.3.3}$$

Ďalej experimentálne fakty vedú na požiadavku, aby bol Lagrangián pre voľné piónové pole invariantný vzhľadom na rotáciu v izospinovom priestore. V reprezentácii (2.3.1) má potom nasledujúci kompaktný tvar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\pi}) - \frac{m^2}{2}\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}, \tag{2.3.4}$$

kde teraz "·" predstavuje skalárny súčin v izospinovom priestore. Naopak pre voľbu (2.3.2) dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}})(\partial^\mu \boldsymbol{\varphi}) - \frac{m^2}{2}\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \boldsymbol{\varphi} \\ &= [(\partial_\mu \overset{*}{\varphi}_1)(\partial^\mu \varphi_1) - m^2 \overset{*}{\varphi}_1 \varphi_1] + \frac{1}{2}[(\partial_\mu \overset{*}{\varphi}_2)(\partial^\mu \varphi_2) - m^2 \overset{*}{\varphi}_2 \varphi_2],\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Izotopická invariancia Lagrangiánu (2.3.4) vedie k novému zákonu zachovania - pre izotopický spinový vektor $\boldsymbol{I}$. Dá sa ukázať, že zložka I_3 odpovedá elektrickému náboju (D. Griffiths, 2008; N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1980).

Uvažujme rotáciu o uhol α v rovine (12) v izospinovom priestore, ktorej explicitné vyjadrenie je

$$\pi_1' = \pi_1 \cos\alpha - \pi_2 \sin\alpha, \quad \pi_2' = \pi_1 \sin\alpha + \pi_2 \cos\alpha, \quad \pi_3' = \pi_3. \tag{2.3.6}$$

V reprezentácii (2.3.2) táto rotácia potom odpovedá transformácii

$$\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\varphi}' = \exp[-iT_3\alpha]\boldsymbol{\varphi}, \tag{2.3.7}$$

kde matica T_3 predstavuje diagonálnu maticu

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.3.8}$$

Na použitie Noetherovej vety nám postačí infinitezimálny tvar vzťahu (2.3.7)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}' &\approx (1 - iT_3\alpha)\boldsymbol{\varphi} \\ &= \boldsymbol{\varphi} - iT_3\boldsymbol{\varphi}\alpha.\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Z posledného vzťahu vidíme, že funkcia Ψ (pozri definičný vzťah (1.5.4)) je

$$\Rightarrow \Psi = -iT_3\boldsymbol{\varphi}. \tag{2.3.10}$$

Tento vzťah po zložkách predstavuje

$$\Psi_m = -i(T_3)_{mk}\varphi_k = -i(T_3)_{mm}\varphi_m. \tag{2.3.11}$$

Samozrejme v poslednom člene už nedochádza k sčítavaniu cez index m. Analogicky dospejeme k vzťahu $\overset{*}{\boldsymbol{\Psi}} = iT_3\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}$.

Keďže sa jedná o vnútornú symetriu, tak odpovedajúci výraz X vo formulácii Noetherovej vety (1.5.3) je identicky rovný nule. Následne je preto možné zapísať vďaka vzťahu (1.5.23) Noetherovej tok

$$\theta^\mu(x) = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\Psi_i. \tag{2.3.12}$$

Je teraz výhodné použiť Lagrangián (2.3.5) s tým, že sa uváži nezávislosť polí $\varphi_1, \overset{*}{\varphi}_1$ a φ_2. Vo výsledku potom možno spätne zaviesť pole φ_3 vzťahom $\varphi_3 = -\overset{*}{\varphi}_1$. Po zložkách preto vieme (2.3.12) zapísať v tvare

$$\begin{aligned}\theta^\mu \to J^\mu(x) &= i\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}(x)T_3\partial^\mu\boldsymbol{\varphi}\\ &= i\overset{*}{\varphi}_i(x)(T_3\partial^\mu\boldsymbol{\varphi})_i\\ &= i\overset{*}{\varphi}_i(x)(T_3)_{im}\partial^\mu\varphi_m.\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Celkový náboj je potom

$$Q = I_3 = i\int \mathrm{d}^3x\,[\overset{*}{\varphi}_1\dot{\varphi}_1 - \overset{*}{\varphi}_3\dot{\varphi}_3]. \tag{2.3.14}$$

Pole $\varphi_2 = \pi_3$ neprispieva k hodnote Q, zatiaľčo polia φ_1 a φ_3 zjavne prispievajú opačnými znamienkami. Odtiaľ tak plynie identifikácia

$$\varphi_1 \sim \pi^+, \quad \varphi_2 \sim \pi^0, \quad \varphi_3 \sim \pi^-. \tag{2.3.15}$$

2.4 Vektorové pole

Vektorové pole $U^\mu = U^\mu(x)$ pozostáva podobne ako iné vektory v špeciálnej teórie relativity zo štyroch zložiek U_0, U_1, U_2 a U_3, pričom každá z nich je funkciou časopriestorových súradníc. Tieto zložky sa musia samozrejme transformovať ako kovariantný štvorvektor. Pri Lorentzových transformáciách

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \quad \delta x_\mu = \omega_{\mu\nu}x^\nu, \quad \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0.$$

sa preto vektorové pole U_μ transformuje podľa predpisu

$$U'_\mu(x') = U_\mu(x) + \delta U_\mu, \quad \delta U^\mu = \omega^{\mu\nu}U_\nu(x).$$

Na základe toho, čo sme si uviedli o skalárnom poli v časti 2.1 by sme naivne mohli očakávať, že Lagrangián vektorového poľa je daný výrazom

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu U^\nu)(\partial^\mu U_\nu) + \frac{m^2}{2} U_\mu U^\mu. \tag{2.4.1}$$

Zjavne oba členy predstavujú Lorentzove skaláry a Lagrangián vlastne predstavuje kovariantný súčet štyroch Lagrangiánov. Dá sa priamočiaro ukázať, že tento Lagrangián povedie na Kleinovu-Gordonovu rovnicu pre každú zložku $U_\mu; \mu = = 0, 1, 2, 3$. Zároveň sa z neho dajú odvodiť dynamické premenné, ktoré by predstavovali kovariantné zovšeobecnenia odpovedajúcich výrazov pre skalárne pole. Ukazuje sa ale, že táto voľba nepovedie na pozitívne definitný výraz pre energiu. Časová zložka U_0 spôsobí existenciu záporných členov. Na odstránenie tohto problému sa postuluje dodatočná podmienka

$$\partial_\mu U^\mu = 0, \tag{2.4.2}$$

ktorá sa z hľadiska štruktúry javí ako jediná možná, ktorá je jednak Lorentzovsky invariantná a lineárna vzhľadom na zložky vektorového poľa. Efektívne sa tým redukuje počet nezávislých zložiek zo štyroch na tri a takéto pole potom opisuje častice so spinom 1. V skutočnosti sa preto pracuje s Lagrangiánom, ktorý automaticky vyhovuje podmienke (2.4.2). Ten je možno formulovať v tvare

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} U_\mu U^\mu, \quad H^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu U^\nu - \partial^\nu U^\mu. \tag{2.4.3}$$

Tento Lagrangián sa líši od Lagrangiánu (2.4.1) prítomnosťou výrazu

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu U_\nu)(\partial^\nu U^\mu).$$

<u>Poznámka:</u>

Pri konštrukcii vektorového poľa so spinom jedna možno postupovať aj iným spôsobom. Predpokladajme Lagrangián vo všeobecnom tvare

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\alpha(\partial_\mu U_\nu)(\partial^\mu U^\nu) - \frac{1}{2}\beta(\partial_\mu U_\nu)(\partial^\nu U^\mu) - \frac{1}{2} m^2 U_\mu U^\mu - J_\mu U^\mu, \tag{2.4.4}$$

kde α, β a m^2 sú nejaké konštanty a J_μ je vonkajší prúd, ktorý by mohol principiálne závisieť na poli U^μ (inak ako lineárne, lebo tento člen sme už vzali do úvahy). Pomocou (1.4.5) odvodíme Eulerove-Lagrangeove rovnice pre U_μ

$$\alpha \Box U_\mu + \beta \partial_\mu (\partial_\nu U^\nu) + m^2 U_\mu = -J_\mu.$$

Štvordivergencia tejto rovnice dáva

$$(\alpha + \beta)\Box(\partial_\lambda U^\lambda) + m^2 \partial_\lambda U^\lambda = -\partial_\lambda J^\lambda, \tag{2.4.5}$$

ktorú možno interpretovať ako pohybovú rovnicu pre skalárne pole $\varphi = \partial_\lambda U^\lambda$ s hmotnosťou $m^2/(\alpha + \beta)$ a zdrojom $\partial_\lambda J^\lambda/(\alpha + \beta)$. Ak je ale cieľom konštrukcia modelu výhradne pre častice so spinom 1 a nie spinom nula, tak je potrebné zbaviť sa módu $\partial_\lambda U^\lambda$. Voľba $\alpha = -\beta$ zabezpečí, že sa skalárna časť $\partial_\lambda U^\lambda$ vyjadrí pomocou vonkajších prúdov ako $-\partial_\lambda J^\lambda/m^2$. Nakoniec možno konštantu α úplne eliminovať z teoretického popisu predefinovaním poľa $U_\mu \to U_\mu/\alpha$. Preto môžeme jednoducho položiť $\alpha = -\beta = 1$ v navrhnutom Lagrangiáne (2.4.4) a dostať

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 U_\mu U^\mu - J_\mu U^\mu, \tag{2.4.6}$$

kde

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu. \tag{2.4.7}$$

■

Hoci majú Lagrangiány (2.4.1) a (2.4.3) na prvý pohľad rôzne tenzory energie-hybnosti, momentu hybnosti atď., je možné ukázať, že rozdiely medzi týmito výrazmi vymiznú, ak sa správne zoberú do úvahy pohybové rovnice a dodatočná podmienka (2.4.2).

Z diskusie o skalárnom poli už vieme, že komplexné polia popisujú nabité častice a reálne polia neutrálne. V ďalšom sa zameriame na prípad komplexného vektorového poľa, pričom je jasné, že pri analýze reálneho poľa by sme dostali rozdielne výsledky iba pri výrazoch pre prúd a náboj.

Uvažujme teda Lagrangián komplexného vektorového poľa v tvare

$$\mathcal{L} = -(\partial^\mu \overset{*}{U}_\nu)(\partial_\mu U^\nu) + m^2 \overset{*}{U}_\mu U^\mu \tag{2.4.8}$$

spolu s doplňujúcimi podmienkami

$$\partial_\mu U^\mu \equiv \partial U = 0, \quad \partial_\mu \overset{*}{U}^\mu \equiv \partial \overset{*}{U} = 0. \tag{2.4.9}$$

Pomocou Eulerových-Lagrangeových rovníc (1.4.5) odvodíme pohybové rovnice

$$(\Box + m^2)U_\mu(x) = 0, \quad (\Box + m^2)\overset{*}{U}_\mu(x) = 0. \tag{2.4.10}$$

Postupujeme ďalej a vypočítame tenzor energie-hybnosti

$$T_{\mu\nu} = -\left[(\partial^\mu \overset{*}{U}_\alpha)(\partial_\nu U^\alpha) + (\partial^\nu \overset{*}{U}_\alpha)(\partial_\mu U^\alpha)\right] - g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \tag{2.4.11}$$

štvorvektor prúdu

$$J_\mu = -i\left[\overset{*}{U}_\alpha(\partial_\mu U^\alpha) - (\partial_\mu \overset{*}{U}_\alpha)U^\alpha\right] \tag{2.4.12}$$

a nakoniec tenzor spinového momentu

$$S^{\nu(\mu\sigma)} = \left[\overset{*}{U}^\sigma(\partial^\nu U^\mu) + (\partial^\nu \overset{*}{U}^\mu)U^\sigma - \overset{*}{U}^\mu(\partial^\nu U^\sigma) - (\partial^\nu \overset{*}{U}^\sigma)U^\mu\right]. \tag{2.4.13}$$

Položením $\nu = 0$ v rovnici (2.4.11) získame výrazy pre hustotu štvorhybnosti

$$T^{00} = -(\partial_\mu \overset{*}{U}_\nu)(\partial_\mu U^\nu) - m^2 \overset{*}{U}_\mu U^\mu,$$

$$T^{0k} = (\partial^0 \overset{*}{U}_\mu)(\partial^k U^\mu) + (\partial^k \overset{*}{U}_\mu)(\partial^0 U^\mu), \quad k = 1,2,3. \tag{2.4.14}$$

Podobne z výrazov 2.4.12 a (2.4.13) dostaneme hustotu náboja

$$J^0 = -i\left[\overset{*}{U}_\mu(\partial^0 U^\mu) - (\partial^0 \overset{*}{U}_\mu)U^\mu\right] \tag{2.4.15}$$

a priestorovú hustotu zložiek vektora spinu

$$S_i = \frac{\varepsilon_{ikl}}{2}\int \mathrm{d}^3x\, S^0_{kl}, \tag{2.4.16}$$

$$S^0_{kl} = \overset{*}{U}_l(\partial^0 U_k) + (\partial^0 \overset{*}{U}_k)U_l - \overset{*}{U}_k(\partial^0 U_l) - (\partial^0 \overset{*}{U}_l)U_k. \tag{2.4.17}$$

Nezabudnime na implicitnú sumáciu cez indexy k a l v (2.4.16).

2.4.1 Hybnostná reprezentácia

Na ďalší postup potrebujeme prepísať dynamické premenné do hybnostnej reprezentácie. Základné vzťahy predstavujú zovšeobecnenie výrazov, s ktorými sme sa stretli pri skalárnom poli

$$U_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{ik\cdot x}\delta(k^2 - m^2)U_\mu(k), \tag{2.4.18}$$

$$\overset{*}{U}_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{ik\cdot x}\delta(k^2 - m^2)\overset{*}{U}_\mu(k). \tag{2.4.19}$$

Dané polia rozložíme na časti s kladnou a zápornou energiou (frekvenciou)

$$U_\mu(x) = U^+_\mu(x) + U^-_\mu(x), \quad \overset{*}{U}_\mu(x) = \overset{*}{U}{}^+_\mu(x) + \overset{*}{U}{}^-_\mu(x). \tag{2.4.20}$$

Po preintegrovaní cez premennú k^0, dostaneme trojrozmerné hybnostné integrály

$$U^\pm_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2k^0}}\, \mathrm{e}^{\pm ik\cdot x}\, U^\pm_\mu(\boldsymbol{k}), \tag{2.4.21}$$

$$\overset{*}{U}{}^\pm_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2k^0}}\, \mathrm{e}^{\pm ik\cdot x}\, \overset{*}{U}{}^\pm_\mu(\boldsymbol{k}). \tag{2.4.22}$$

Zaviedli sme pritom analogické skrátené zápisy ako pri skalárnom poli v (2.1.38). Expliticne teda máme

$$U^\pm_\mu(\boldsymbol{k}) = \frac{U^\pm_\mu(k)}{\sqrt{2k^0}}, \qquad \overset{*}{U}{}^\pm_\mu(\boldsymbol{k}) = \frac{\overset{*}{U}{}^\pm_\mu(k)}{\sqrt{2k^0}}, \tag{2.4.23}$$

$$U^\pm_\mu(k) = \theta(k^0)U_\mu(\pm k), \qquad \overset{*}{U}{}^\pm_\mu(k) = \theta(k^0)\overset{*}{U}_\mu(\pm k), \tag{2.4.24}$$

kde energia je opäť viazaná očakávaným relativistickým vzťahom $k^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$. Podmienka komplexného združenia nadobúda tvar

$$(U_\mu(k))^* = \overset{*}{U}_\mu(-k), \quad (U^\pm_\mu(k))^* = \overset{*}{U}{}^\mp_\mu(k). \tag{2.4.25}$$

Po dosadení rozloženia (2.4.22) do výrazov (2.4.14), (2.4.15) a (2.4.17) a preintegrovaní cez priestorovú premennú d^3x, dostaneme štvorvektor energie-hybnosti

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3x\, T^{0\mu} = -\int \mathrm{d}^3k\, k^\mu \left[\overset{*}{U}{}^{-}_{\alpha}(\boldsymbol{k})U^{+\alpha}(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{U}{}^{+}_{\alpha}(\boldsymbol{k})U^{-\alpha}(\boldsymbol{k})\right], \quad (2.4.26)$$

celkový náboj

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, J^0 = -\int \mathrm{d}^3k \left[\overset{*}{U}{}^{+}_{\mu}(\boldsymbol{k})U^{-\mu}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{U}{}^{-}_{\mu}(\boldsymbol{k})U^{+\mu}(\boldsymbol{k})\right] \quad (2.4.27)$$

a vektor spinu

$$\boldsymbol{S} = i\int \mathrm{d}^3k \left[\overset{*}{\boldsymbol{U}}{}^{+}(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{U}^{-}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{\boldsymbol{U}}{}^{-}(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{U}^{+}(\boldsymbol{k})\right]. \quad (2.4.28)$$

Dá sa ukázať, že spin (2.4.28) nezávisí na čase, čo je dôsledkom symetrie tenzora energie-hybnosti (2.4.11).

Použitím podmienky (2.4.9) vo vzťahu pre štvorhybnosť (2.4.26) pozorujeme, že člen s indexom $\alpha = 0$ nie je pozitívne definitný. Teda vo všeobecnosti nevieme zabezpečiť, aby bola celková energia pozitívna veličina. Tento problém sa vyrieši pri naložení (ako už bolo spomenuté) dodatočnej podmienky (2.4.9), ktorá v hybnostnom priestore nadobúda tvar

$$k^\mu U^{\pm}_{\mu}(\boldsymbol{k}) = 0, \quad k^\mu \overset{*}{U}{}^{\pm}_{\mu}(\boldsymbol{k}) = 0. \quad (2.4.29)$$

Tieto rovnice nám vlastne hovoria, že jednotlivé zložky poľa U_μ nie sú nezávislé. S pomocou (2.4.29) vyjadríme časovú zložku U_0 pomocou priestorových

$$U^{\pm}_{0}(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{k^0}k^n U^{\pm}_{n}(\boldsymbol{k}), \quad \overset{*}{U}{}^{\pm}_{0}(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{k^0}k^n \overset{*}{U}{}^{\pm}_{n}(\boldsymbol{k}). \quad (2.4.30)$$

Následne výrazy dosadíme do pravej strany rovnice (2.4.26) a získaný kvadratický výraz upravíme

$$-\overset{*}{U}{}^{\pm}_{\mu}(\boldsymbol{k})U^{\mp\mu}(\boldsymbol{k}) = \overset{*}{U}{}^{\pm}_{n}(\boldsymbol{k})U^{\mp}_{n}(\boldsymbol{k}) - \frac{1}{(k^0)^2}\left(k^m \overset{*}{U}{}^{\pm}_{m}(\boldsymbol{k})\right)\left(k^n U^{\mp}_{n}(\boldsymbol{k})\right). \quad (2.4.31)$$

Tento výraz je možné diagonalizovať s pomocou vhodnej voľby súradnicového systému v $\boldsymbol{k}-$priestore

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{e}_1 a_1(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{e}_2 a_2(\boldsymbol{k}) + \frac{\boldsymbol{k}}{|k|}\frac{k^0}{m}a_3(\boldsymbol{k}), \quad (2.4.32)$$

ktorú interpretujeme ako rozloženie na longitudinálnu (pozdĺžnu) a transverzálnu (priečnu) zložku vzhľadom na hybnosť $\boldsymbol{k}$. Jednotkové vektory $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$ sú ortogonálne s vektorom $\boldsymbol{k}$. Spĺňajú teda relácie

$$(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_s) = \delta_{rs}, \quad (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{k}) = 0; \quad r, s = 1, 2. \quad (2.4.33)$$

Dosadením (2.4.32) do (2.4.31), získame

$$-\overset{*}{U}{}^{\pm}_{\mu}(\boldsymbol{k})U^{\mp\mu}(\boldsymbol{k}) = \overset{*}{a}{}^{\pm}_{n}(\boldsymbol{k})a^{\mp}_{n}(\boldsymbol{k}). \tag{2.4.34}$$

Využitím tohto prepisu v rovniciach pre štvorhybnosť (2.4.26) a náboj (2.4.27) dospievame nakoniec k diagonálnym výrazom

$$P^{\mu} = \int \mathrm{d}^3k\, k^{\mu} \left[\overset{*}{a}{}^{+}_{n}(\boldsymbol{k})a^{-}_{n}(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{a}{}^{-}_{n}(\boldsymbol{k})a^{+}_{n}(\boldsymbol{k})\right], \tag{2.4.35}$$

$$Q = \int \mathrm{d}^3k\, \left[\overset{*}{a}{}^{+}_{n}(\boldsymbol{k})a^{-}_{n}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{a}{}^{-}_{n}(\boldsymbol{k})a^{+}_{n}(\boldsymbol{k})\right]. \tag{2.4.36}$$

Pritom je explicitne zrejmé, že sa v prípade energie jedná o pozitívne definitný výraz. Cez priestorový index n sa v týchto výrazoch samozrejme sumuje.

2.4.2 Spin vektorového poľa

Aby sme si objasnili vzťah medzi amplitúdami a zavedenými v rozklade (2.4.32) a spinovými premennými, analyzujme projekciu spinového vektora na smer vlnového vektora. Dosadíme (2.4.32) do výrazu pre vektor spinu (2.4.28)

$$S_3 \sim \left[\overset{*}{a}{}^{+}_{1}(\boldsymbol{k})a^{-}_{2}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{a}{}^{+}_{2}(\boldsymbol{k})a^{-}_{1}(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{a}{}^{-}_{2}(\boldsymbol{k})a^{+}_{1}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{a}{}^{-}_{1}(\boldsymbol{k})a^{+}_{2}(\boldsymbol{k})\right]. \tag{2.4.37}$$

Takto získaný výraz možno diagonalizovať pomocou lineárnej transformácie

$$\begin{aligned}
a^{\pm}_{1} &= \frac{b^{\pm}_{1} + b^{\pm}_{2}}{\sqrt{2}}, \qquad & a^{\pm}_{2} &= \frac{b^{\pm}_{1} - b^{\pm}_{2}}{i\sqrt{2}}, \qquad & a^{\pm}_{3} &= b^{\pm}_{3},\\
\overset{*}{a}{}^{\pm}_{1} &= \frac{\overset{*}{b}{}^{\pm}_{1} + \overset{*}{b}{}^{\pm}_{2}}{\sqrt{2}}, & \overset{*}{a}{}^{\pm}_{2} &= i\frac{\overset{*}{b}{}^{\pm}_{1} - \overset{*}{b}{}^{\pm}_{2}}{\sqrt{2}}, & \overset{*}{a}{}^{\pm}_{3} &= \overset{*}{b}{}^{\pm}_{3},
\end{aligned} \tag{2.4.38}$$

ktorá navyše nemení diagonálny tvar P_{μ} a Q. Súhrnne máme pre komplexné vektorové pole tieto výrazy

$$P^{\mu} = \int \mathrm{d}^3k\, k^{\mu} \left[\overset{*}{b}{}^{-}_{n}(\boldsymbol{k})b^{+}_{n}(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{b}{}^{+}_{n}(\boldsymbol{k})b^{-}_{n}(\boldsymbol{k})\right], \tag{2.4.39}$$

$$Q = \int \mathrm{d}^3k \left[\overset{*}{b}{}^{+}_{n}(\boldsymbol{k})b^{-}_{n}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{b}{}^{-}_{n}(\boldsymbol{k})b^{+}_{n}(\boldsymbol{k})\right], \tag{2.4.40}$$

$$S_3 \sim \left[\overset{*}{b}{}^{+}_{1}(\boldsymbol{k})b^{-}_{1}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{b}{}^{-}_{1}(\boldsymbol{k})b^{+}_{1}(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{b}{}^{-}_{2}(\boldsymbol{k})b^{+}_{2}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{b}{}^{+}_{2}(\boldsymbol{k})b^{-}_{2}(\boldsymbol{k})\right]. \tag{2.4.41}$$

Interpretácia kvadratických výrazov obsahujúcich amplitúdy $\overset{*}{b}{}^{\pm}$ a $b^{\pm}$ je priamočiara. Možno ich považovať za hustotu stredného počtu častíc s danou hodnotou energie, hybnosti, náboja a projekcie spinu na smer pohybu. Veličina $\overset{*}{b}{}^{-}_{2}(\boldsymbol{k})b^{+}_{2}(\boldsymbol{k})$ napríklad predstavuje hustotu častíc s hybnosťou $\boldsymbol{k}$, energiou k^0, nábojom -1 a projekciou spinu na smer $\boldsymbol{k}$ rovnú $+1$, veličina $\overset{*}{b}{}^{-}_{3}(\boldsymbol{k})b^{+}_{3}(\boldsymbol{k})$ zase predstavuje hustotu častíc s hybnosťou $\boldsymbol{k}$, energiou k^0, nábojom -1 a projekciou spinu na smer $\boldsymbol{k}$ rovnú 0, atď.

Ako neskôr ukážeme, kvantovanie vektorového poľa povedie na kreačný operátor častíc $\overset{*}{b}{}^{+}_{2}(\boldsymbol{k})$ s energiou k^0, hybnosťou $\boldsymbol{k}$, nábojom $+1$, projekciou spinu -1, zatiaľčo amplitúda $b_2^-(\boldsymbol{k})$ sa stane anihilačným operátorom pre častice s rovnakými charakteristikami. Odtiaľ na základe (2.4.32),(2.4.38) a (2.4.41) môžeme tvrdiť, že amplitúdy $a_{1,2}$ odpovedajú lineárnej polarizácii a $b_{1,2}$ zase kruhovej. Komplexné vektorové pole tak slúži na opis nabitých častíc s hmotnosťou $m = (k_0^2 - \boldsymbol{k}^2)^{1/2}$ a tromi možnými projekciami spinu na smer pohybu, ktoré odpovedajú hodnotám $+1, -1$ a 0.

2.5 Elektromagnetické pole

V prípade voľného elektromagnetického poľa (bez prítomnosti viazaných nábojov a prúdov) nadobúdajú Maxwellove rovnice (A. N. Vasil'ev, 2011; L. D. Landau & E. M. Lifschitz, 1975) nasledujúci symetrický tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} &= -\partial_t \boldsymbol{B}, \qquad & \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} &= \partial_t \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} &= 0, & \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} &= 0, \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

kde sme pre jednoduchosť zápisu položili rýchlosť svetla $c = 1$. Elegantnejší zápis vieme dosiahnuť zavedením štvorpotenciálu

$$A^\mu = (\varphi, \boldsymbol{A}). \tag{2.5.2}$$

Polia $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ sa dajú vyjadriť pomocou A^μ nasledovným spôsobom

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \partial_t \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}. \tag{2.5.3}$$

Heuristické úvahy nás nabádajú ku konštrukcii antisymetrického tenzora druhého rádu. Ten je daný jednoducho rozdielom derivácií štvorpotenciálu

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.5.4}$$

a nazývame ho tenzor elektromagnetického poľa.

Ľahko odvodíme vzťahy medzi vektormi $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ a zložkami tenzora $F_{\mu\nu}$. Najprv si všimnime, že platí

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\varphi \right)_i = -E^i. \tag{2.5.5}$$

Pre čisto priestorové zložky tenzora $F^{\mu\nu}$ zase postupne dostávame

$$\begin{aligned} F^{ij} &= \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i \\ &= -(g^i_m g^j_n - g^i_n g^j_m)\partial_m A^n \\ &= -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}\partial_m A^n = -\varepsilon^{ijk} B^k, \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

kde sme využili vlastnosti Leviho-Civitovho symbolu, ktoré sú zhrnuté v A.1. Podotýkame, že v daných výrazoch (2.5.6) pracujeme s trojrozmernými vektormi, a preto je poloha indexov v Leviho-Civitovom symbole irelevantná.

Vzťah (2.5.6) ďalej prenásobime výrazom ε^{mij}, využijeme (A.1.4), a tým dospejeme k

$$\varepsilon^{mij} F^{ij} = -\varepsilon^{mij}\varepsilon^{ijk} B^k = -2\delta^m_k B^k = -2B^m. \tag{2.5.7}$$

Zložky tenzora elektromagnetického poľa sú tak v nasledujúcom vzťahu s fyzikálnami poliami $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$

$$E^n = (\boldsymbol{E})_n = -F_{n0}, \quad B^m = (\boldsymbol{B})_m = -\frac{1}{2}\varepsilon_{mns}F_{ns}. \tag{2.5.8}$$

V maticovom zápise potom daný tenzor $F^{\mu\nu}$ nadobúda tvar

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.9}$$

Jeho plne kovariantná verzia je zase daná

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.10}$$

Pri tomto odvodení postačí použiť známe pravidlo špeciálnej teórie relativity, ktoré nám hovorí, že pri znížení časového indexu nedochádza k zmene znamienka, ale pri znížení priestorového áno.

Maxwellove rovnice sú kompaktným spôsobom obsiahnuté dvojicou rovníc

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.5.11}$$
$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0. \tag{2.5.12}$$

Prvá z rovníc obsahuje v prítomnosti zdrojov elektromagnetického poľa na pravej strane zdrojový člen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \tag{2.5.13}$$

kde vystupuje štvorvektor prúdu $J^\mu = (\rho, \boldsymbol{J})$.

Rovnica (2.5.12) je triviálne splnená vďaka antisymetrickosti tenzora $F_{\mu\nu}$. Naopak, zo vzťahu (2.5.11) vyplýva pohybová rovnica

$$\Box A_\mu - \partial_\mu\partial_\nu A^\nu = 0. \tag{2.5.14}$$

Poznámka:

Vzťah (2.5.12) je známy aj ako Bianchiho identita a zvykne sa zapisovať v ekvivalentnom tvare

$$\partial_{[\sigma}F_{\mu\nu]} = 0, \tag{2.5.15}$$

kde naznačená indexová operácia predstavuje operáciu plnej antisymetrizácie, t.j. platí

$$\partial_{[\sigma}F_{\mu\nu]} = \frac{1}{3!}\Big(\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} - \partial_\sigma F_{\nu\mu} - \partial_\mu F_{\sigma\nu} - \partial_\nu F_{\mu\sigma}\Big).$$

Priamočiaro sa dá ukázať korešpondencia

$$\partial_{[\lambda}F_{\mu\nu]} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \quad \partial_t\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}, \tag{2.5.16}$$

resp.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0, \quad \partial_t\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}. \tag{2.5.17}$$

Na odvodenie hustoty Lagrangiánu elektromagnetického poľa využijeme Hamiltonov extremálny princíp. Za týmto účelom vynásobme rovnicu (2.5.11) (infinitezimálne malou) variáciou $\delta A_\mu = \delta A_\mu(x)$. O tej predpokladáme, že vymizne pre pevne zvolené časové okamihy t_1 a t_2. Výsledný výraz preintegrujeme cez príslušnú časopriestorovú oblasť a upravujeme

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}x\, \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}\delta A_\nu = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}x\, F^{\mu\nu}\delta\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = \\
&= -\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}x\, F^{\mu\nu}\delta\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}x\, F^{\nu\mu}\delta\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}}_{\mu\longleftrightarrow\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}x\, F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4}\delta\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

kde sme využili zvyčajné postupy ako metóda per partes, zámenu variácie s deriváciou, pripočítanie člena so zamenenými indexmi a antisymetrickosť tenzora elektromagnetického poľa $F_{\mu\nu}$. Hustota Lagrangiánu pre voľné elektromagnetické pole je preto daná výrazom

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{2.5.19}$$

Po dosadení za $F^{\mu\nu}$ vieme získať aj ekvivalentné výrazy

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A^\mu - \partial_\mu A^\nu)\partial^\nu A^\mu = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2). \tag{2.5.20}$$

V prípade prítomnosti vonkajších zdrojov elektromagnetického poľa nadobudne Lagrangián tvar

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu. \tag{2.5.21}$$

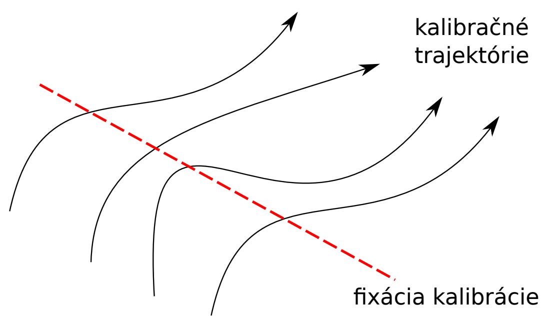
Pre podrobnejšie oboznámenie sa s teóriou elektromagnetického poľa doporučujeme (A. N. Vasil'ev, 2011; L. D. Landau & E. M. Lifschitz, 1975).

2.5.1 Kalibračná invariancia

Potenciál A_ν nie je určený jednoznačne. Maxwellove rovnice zostanú v platnosti pri zámene

$$A_\nu(x) \to A'_\nu(x) = A_\nu(x) + \partial_\nu \lambda(x), \tag{2.5.22}$$

kde $f(x)$ je dostatočne hladká funkcia. Taktiež je zrejmé, že táto zámena nezmení ani hodnotu tenzora elektromagnetického poľa (2.5.4). Tým pádom nemôžu byť zmenené ani fyzikálne polia $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$, ktoré sú v princípe merateľné. Hovoríme, že dynamický opis elektromagnetického poľa založený na A_ν obsahuje nefyzikálny (nepozorovateľný) stupeň voľnosti. Na prvý pohľad sa môže zdať, že máme dočinenia s nekonečným počtom symetrií - pre každú vhodne zvolenú funkciu $\lambda(x)$ máme nejaký druh symetrie. Naivné použitie Noetherovej vety by nás mohlo viesť k tvrdeniu, že elektromagnetické pole vykazuje nekonečné mnoho zákonov zachovania. V skutočnosti je ale potrebné kalibračnú symetriu (invarianciu) chápať ako redundantný opis. Ľubovoľné dva stavy, ktoré je možné prepojiť vhodnou transformáciou (2.5.22) sú fyzikálne plne ekvivalentné. Inými slovami, odpovedajú tej istej fyzikálnej situácii. Mohlo by sa zdať, že je potom výhodnejšie vrátiť sa k pôvodným fyzikálnym poliam $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ a pracovať radšej s nimi. V kvantovej mechanike sa ale ukazuje (napr. Aharonov-Bohmov efekt), že fundamentálnu rolu zohráva štvorpotenciál A_μ.



Obr. 2.1: Kalibračná transformácia elektromagnetického poľa.

Schematicky vieme danú situáciu znázorniť graficky, viď Obr. 2.1. Jednotlivé krivky odpovedajú rôznym riešeniam Maxwellových rovníc. Pritom všetky stavy na danej trajektórii sú navzájom prepojené vhodnou kalibračnou transformáciou 2.5.22. Aby sme nezarátavali daný typ riešenia viackrát, potrebujeme z každého možného riešenia vybrať vhodného reprezentanta. Formálne potom hovoríme o voľbe kalibrácie. Musíme teda definovať presnú podmienku, podľa ktorej volíme daného reprezentanta. Rôzne voľby potom korešpondujú s rôznymi kalibráciami. Vo fyzike sa často používa Lorentzova kalibrácia

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{2.5.23}$$

resp. Coulombova (radiačná)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0. \tag{2.5.24}$$

Občas sa môžeme stretnúť ešte s kalibráciou založenou na podmienke

$$n_\mu A^\mu = n \cdot A = 0, \tag{2.5.25}$$

kde n^μ je pevne daný štvorvektor. Podľa jeho charakteru hovoríme o

- $n^2 < 0$: axiálnej kalibrácii,
- $n^2 = 0$: svetelnej kalibrácii,
- $n^2 > 0$: časovej kalibrácii.

V teórii elektromagnetického poľa sa najčastejšie používa tzv. Lorentzova podmienka $\partial \cdot A = 0$, ktorá istým spôsobom obmedzuje možné potenciály. Táto podmienka ale vedie pri kanonickom kvantovaní k problémom (N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1980; N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1983).

Neskôr budeme predpokladať, že fundamentálne veličiny (na ktoré je potrebné naložiť komutačné vzťahy) sú polia A_ν. Potom z Lagrangiánu (2.5.20) pomocou (1.4.6) odvodíme, že "časová" hybnosť je nulová $\pi_0(x) = 0$. Inými slovami, Lagrangián $\mathcal{L}$ nezávisí na $\dot{A}_0$ a dané pole A_0 nemôže byť považované za dynamickú premennú teórie. Inak povedané, mali by sme byť schopní vyjadriť A_0 pomocou ostatných zložiek štvorpotenciálu. Dosaďme do rovnice $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ vyjadrenie elektrického poľa (2.5.3) a získame

$$\boldsymbol{\nabla}^2 A^0 + \boldsymbol{\nabla} \cdot \partial_t \boldsymbol{A} = 0. \tag{2.5.26}$$

Táto rovnica má po formálnej stránke tvar Poissonovej rovnice, a preto vieme priamo napísať jej riešenie

$$A_0(t, \boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^3 x' \, \frac{\boldsymbol{\nabla} \cdot \partial_t \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x})}{4\pi |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}. \tag{2.5.27}$$

Teda A_0 je v danom časovom okamihu plne určene priestorovými zložkami $\boldsymbol{A}$.

Problém s rovnicou (2.5.11) spočíva tiež v tom, že v nej vystupujúci diferenciálny operátor $g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu$ nie je invertovateľný. Rozoberme toto tvrdenie podrobnejšie, pričom využijeme metódu Greenovej funkcie (dodatok A.2). Hľadáme teraz Greenovu funkciu $G^{\mu\nu}(x, x')$, ktorá vyhovuje rovnici

$$(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu) G^{\nu\rho}(x, x') = -g_\mu^\rho \delta(x - x'). \tag{2.5.28}$$

Diracovu delta funkciu aj hľadanú Greenovu funkciu predstavíme vo Fourierovej reprezentácii

$$\delta(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}k \, \mathrm{e}^{ik \cdot (x - x')}, \tag{2.5.29}$$

$$G^{\nu\rho}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}k \, \mathrm{e}^{ik \cdot (x - x')} G^{\nu\rho}(k). \tag{2.5.30}$$

Pri poslednom vzťahu využívame časopriestorovú translačnú invarianciu, ktorú možno objasniť nasledovným spôsobom

$$G^{\nu\rho}(x, x') = G^{\nu\rho}(x + a, x' + a) \quad a = \text{ľubovoľný štvorvektor } a$$

$$
\begin{aligned}
&\text{voľme } a = -x' \\
&= G^{\nu\rho}(x - x', 0) \\
&\equiv G^{\nu\rho}(x - x').
\end{aligned}
$$

Vidíme, že priamym dôsledkom translačnej invariancie je to, že Greenova funkcia je efektívne funkciou len rozdielu $x-x'$ a nie osobitne dvoch nezávislých premenných x a x'. Dosadením $\Box e^{ik\cdot x} = -k^2 e^{ik\cdot x}$ do (2.5.28) dostaneme algebraickú rovnicu

$$
(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) G^{\nu\rho}(k) = g_\mu^\rho. \tag{2.5.31}
$$

Zavedieme dôležité projekčné operátory

$$
P_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad L_{\mu\nu}(k) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \tag{2.5.32}
$$

kde P budeme nazývať priečnym operátorom a L pozdĺžnym operátorom. Ak nebude uvedené inak, tak argumentom takýchto operátorov bude vždy štvorvektor k. Tieto ich názvy sú motivované vlastnosťami

$$
\begin{aligned}
P_{\mu\nu} P^{\nu\rho} &= P_\mu^\rho, & L_{\mu\nu} L^{\nu\rho} &= L_\mu^\rho, & P_{\mu\nu} L^{\nu\rho} &= 0, \\
P_{\mu\nu} k^\nu &= 0, & L_{\mu\nu} k^\nu &= k_\mu, & P_{\mu\nu} + L_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{2.5.33}
$$

kde sme pre vynechali závislosť projekčných operátorov na hybnosti k. Napríklad prvý z týchto vzťahov sa dá dokázať postupnými úpravami

$$
\begin{aligned}
P_{\mu\nu} P^{\nu\rho} &= \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \left(g^{\nu\rho} - \frac{k^\nu k^\rho}{k^2} \right) \\
&= g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} g^{\nu\rho} - \frac{k^\nu k^\rho}{k^2} g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \frac{k^\nu k^\rho}{k^2} \\
&= g_\mu^\rho - \frac{k_\mu k^\rho \nu}{k^2} - \frac{k_\mu k^\rho}{k^2} + \frac{k_\mu k^\rho k^2}{k^4} \\
&= g_\mu^\rho - \frac{k_\mu k^\rho}{k^2} = P_\mu^\rho.
\end{aligned}
$$

Analogicky by sa postupovalo pri dôkazoch zvyšných vzťahov.

Pri hľadaní riešenia (2.5.31) predpokladajme riešenie v tvare

$$
G^{\nu\rho}(k) = A(k) P^{\nu\rho}(k) + B(k) L^{\nu\rho}(k) \tag{2.5.34}
$$

a hľadajme neznáme koeficienty $A = A(k)$ a $B = B(k)$. Použitím vzťahov (2.5.33) dospejeme k rovnici

$$
A(k) k^2 P_\mu^\rho(k) = g_\mu^\rho = P_\mu^\rho(k) + L_\mu^\rho(k), \tag{2.5.35}
$$

ktorú zjavne nie je možné splniť.

Z uvedenej analýzy Greenovej funkcie vo Fourierovej reprezentácii plynie často používané tvrdenie, podľa ktorého možno operáciu $(k^2)^{-1}$ interpretovať ako integrálny operátor. Formálne potom píšeme

$$
\frac{1}{k^2} A_\nu(k) \sim \int \mathrm{d}y \, G(x-y) A_\nu(y), \tag{2.5.36}
$$

kde $G(x)$ je Greenova funckia pre d'Alembertov operátor

$$\Box G(x) = \delta(x). \tag{2.5.37}$$

Okrem problému s neinvertovateľnosťou diferenciálneho operátora $g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu$ máme ďalší, ktorý súvisí s tým, že dynamický opis založený na poli A_ν obsahuje nefyzikálny stupeň voľnosti. Na objasnenie tejto záležitosti si zavedieme funkciu $\chi(x)$ predpisom

$$\partial^\nu A_\nu \equiv \partial \cdot A = \chi(x) \tag{2.5.38}$$

a preštudujeme ju pomocou Fourierovej reprezentácie. Štvorpotenciál A_ν v tejto reprezentácii je

$$A_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}k \, \mathrm{e}^{ik\cdot x} A_\nu(k). \tag{2.5.39}$$

Vďaka tomu vieme kalibračnú transformáciu (2.5.22) zapísať v tvare

$$A_\nu(k) \to A'_\nu(k) = A_\nu(k) + ik_\nu \lambda(k), \tag{2.5.40}$$

kde vystupuje Fourierov obrazu $\lambda(k)$ funkcie $\lambda(x)$. Rozložme štvorpotenciál $A_\nu(k)$ na jeho priečne a pozdĺžne zložky

$$A_\nu(k) = A^\perp_\nu(k) + A^\parallel_\nu(k), \quad A^\perp_\nu(k) = P_{\mu\nu}(k)A^\mu(k), \quad A^\parallel_\nu(k) = L_{\mu\nu}(k)A^\mu(k). \tag{2.5.41}$$

Následne využitím vlastností projekčných operátorov (2.5.33) dostaneme dve rovnice

$$k^\nu A^\perp_\nu(k) = 0, \quad k^\nu A^\parallel_\nu(k) = k_\mu A^\mu(k) = k \cdot A(k). \tag{2.5.42}$$

Označme $k \cdot A(k) \equiv \chi(k)$, čo ale nie je nič iné ako Fourierov obraz funkcie $\chi(x)$ z rovnice (2.5.38). Zložka $A^\parallel_\nu$ teda priamo súvisí s funkciou χ a ich vzájomný vzťah možno zapísať nasledovne

$$A^\parallel_\nu(k) = L_{\nu\mu}(k)A^\mu(k) = \frac{k_\nu}{k^2}\chi(k). \tag{2.5.43}$$

Aplikujme projekčné operátory na rovnicu kalibračnej transformácie (2.5.40) a získame tak dve transformačné relácie

$$\begin{aligned}
L_{\nu\alpha} :& A'^{\parallel}_\alpha(k) = A^\parallel_\alpha(k) + iL_{\nu\alpha}k^\nu \lambda(k) \\
& \frac{k_\alpha}{k^2}\chi'(k) = \frac{k_\alpha}{k^2}\chi(k) + ik_\alpha \lambda(k) \quad / : k_\alpha \quad / \times k^2 \\
& \chi'(k) = \chi(k) + ik^2\lambda(k) && (2.5.44) \\
P_{\nu\alpha} :& A'^{\perp}_\alpha(k) = A^\perp_\alpha(k) + P_{\nu\alpha} i k^\nu \lambda(k) \\
& A'^{\perp}_\alpha(k) = A^\perp_\alpha(k). && (2.5.45)
\end{aligned}$$

Z týchto odvodení vidíme, že priečna zložka $A_\mu^\perp(k)$ sa pri kalibračnej transformácii nemení. Podobne si všimnime, že kalibračne invariantný tenzor $F_{\mu\nu}$ definovaný v (2.5.4) nezávisí na pozdĺžnej zložke $A_\mu^\parallel$ (teda na χ). Preto ani Lagrangián $\mathcal{L}$ (2.5.19) na nej nezávisí. Na základe uvedených pozorovaní môžeme tvrdiť, že nefyzikálny stupeň voľnosti súvisí s $\chi(k)$. Možno tiež konštantovať, že fyzikálne stavy odpovedajúce konfiguráciám poľa A_μ a $A_\mu + \partial_\mu \lambda$ sú totožné.

Poznámka:

Pohybovú rovnicu (2.5.14) vieme prepísať do tvaru

$$\underbrace{(\Box g_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu)}_{K_{\nu\mu}^\perp} A^\mu = 0. \tag{2.5.46}$$

Z tohto zápisu je zrejmé, že diferenciálny operátor $K_{\nu\mu}^\perp$ je vo Fourierovom obraze úmerný priečnemu projekčnému operátoru $P_{\nu\mu}$. Odtiaľ je zrejmé prečo sme daný diferenciálny operátor nevedeli invertovať. ■

Ako sme už spomenuli, vykazuje Lagrangián $\mathcal{L}$ z hľadiska Hamiltonovho formalizmu istú špecifickú vlastnosť. Z teoretickej mechaniky vieme (H. Goldstein, C. Poole & J. Safko, 2002), že v Hamiltonovom prístupe zohrávajú kľúčovú rolu zovšeobecnené (kanonické) hybnosti. Pre elektromagnetické pole je ale kanonická hybnosť π_0 nulová. Korektná konštrukcia Hamiltonovho formalizmu je pritom pre teóriu dôležitá, nakoľko tvorí základ metódy kanonického kvantovania (pozri kap. 4) a z praktického hľadiska vedie na formuláciu poruchového počtu. Takéto Lagrangiány sa zvyknú označovať ako singulárne (N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1983; S. Weinberg, 1995) a časť ich nedostatkov je možné odstrániť naložením dodatočnej väzby (S. Weinberg, 1995). Základným bodom tohto prístupu je uvažovať pozmenený Lagrangián. Jednou z možností je nasledujúca voľba

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a}{2} (\partial \cdot A)^2, \tag{2.5.47}$$

kde sa k Lagrangiánu (2.5.19) pridala vhodná skalárna veličina. Parameter a predstavuje nejaké reálne číslo. V princípe sa na dodaný člen dá nazerať ako na Lagrangeov multiplikátor. Všimnime si tiež, že voľba nenulovej hodnoty pre a vedie na Lagrangián, ktorý nie je kalibračne invariantný.

Z Lagrangiánu (2.5.47) pomocou Eulerovych-Lagrangeovych rovníc (1.4.5) odvodíme pohybovú rovnicu v tvare

$$\Box A_\mu - (1 + a) \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = 0. \tag{2.5.48}$$

Prederivovaním podľa ∂^μ získame rovnicu pre už zavedenú funkciu $\chi(x)$ z (2.5.38)

$$\Box(\partial \cdot A) - (1 + a) \Box(\partial \cdot A) = 0. \tag{2.5.49}$$

Za predpokladu $a \neq 0$ máme

$$\Box(\partial \cdot A) = \Box \chi = 0. \tag{2.5.50}$$

Tento vzťah zostáva v platnosti aj v prítomnosti nenulovej pravej strany J^μ (prítomnosť zdrojov elektromagnetického poľa). Ide o dôsledok rovnice kontinuity $\partial_\mu J^\mu = 0$, ktorá predstavuje lokálny zákon zachovania elektrického náboja. Funkcia χ teda nezávisí nielen na $A^\perp$ ale ani na vonkajších zdrojoch elektromagnetického poľa.

Dodatočný člen v (2.5.47) predstavuje istú väzbu a tak fixuje kalibráciu. Napriek tomu ale zostáva v platnosti tvrdenie, že Lagrangián a pohybové rovnice sú invariantné voči istým transformáciám. Tie majú ale teraz obmedzenejší charakter

$$A_\nu \to A'_\nu(x) = A_\nu(x) + \partial_\nu f_0(x), \tag{2.5.51}$$

pričom funkcia f_0 musí predstavovať riešenie vlnovej rovnice $\Box f_0(x) = 0$.

Aká je hlavná výhoda fixácie kalibrácie? Ukážeme teraz, že na rozdiel od operátora v rovnici (2.5.11) je operátor rovnice (2.5.48) invertovateľný. Vďaka dodatočnému členu máme pozmenený diferenciálny operátor

$$K_{\mu\nu} = \Box g_{\mu\nu} - (1+a)\partial_\mu\partial_\nu, \tag{2.5.52}$$

ktorý sa jednoducho prepíše do Fourierovej reprezentácie

$$K_{\mu\nu} = k^2 g_{\mu\nu} - (1+a)k_\mu k_\nu = k^2 P_{\mu\nu} - ak^2 L_{\mu\nu}. \tag{2.5.53}$$

Opäť predpokladáme inverzný operátor $K^{-1}_{\mu\nu}$ v tvare $AP^{\mu\nu} + BL^{\mu\nu}$, pričom využijeme vzťahy (2.5.33). Postupne dostávame

$$\begin{aligned}\delta^\rho_\mu &= P^\rho_\mu + L^\rho_\mu = 1\cdot P^\rho_\mu + 1\cdot L^\rho_\mu \\ &= K_{\mu\nu}(K^{-1})^{\nu\rho} = Ak^2 P^\rho_\mu - Bak^2 L^\rho_\mu.\end{aligned} \tag{2.5.54}$$

Odkiaľ z priameho porovnania plynie

$$A(k) = \frac{1}{k^2}, \quad B(k) = -\frac{1}{ak^2}. \tag{2.5.55}$$

Hľadaný inverzný operátor je tak vo Fourierovej reprezentácii daný výrazom

$$K^{-1}_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2}P_{\mu\nu}(k) - \frac{1}{ak^2}L_{\mu\nu}(k). \tag{2.5.56}$$

Na rozdiel od predchádzajúcej analýzy vidíme, že fixácia kalibrácie dovoľuje nájsť Greenovu funkciu pre daný problém.

Podotýkame, že samotné fyzikálne výsledky (napr. účinné rozptyly) nemôžu závisieť od voľby kalibrácie. Pri konkrétnych výpočtoch sa ale zvyknú najčastejšie používať dva typy kalibrácie:

a) Feynmanova kalibrácia $a = -1$:

$$K_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}k^2. \tag{2.5.57}$$

b) Landauova kalibrácia $a = +\infty$:

$$K_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}. \tag{2.5.58}$$

V ďalšom budeme pracovať vo Feynmanovej kalibrácii. V nej možno najprv Lagrangián prepísať nasledovným spôsobom

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial \cdot A)^2 \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{2}\partial_\nu[A_\mu(\partial^\mu A^\nu) - A^\nu(\partial_\mu A^\mu)].\end{aligned} \tag{2.5.59}$$

Posledný člen na pravej strane má tvar štvordivergencie $\partial_\mu(\cdots)$. Po preintegrovaní cez celý priestor preto tento člen nedáva príspevok do celkového účinku $\mathcal{S} = \int \mathrm{d}x\, \mathcal{L}$. Efektívne preto nemá vplyv na pohybové rovnice a môžeme ďalej pracovať s jednoduchším Lagrangiánom

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu). \tag{2.5.60}$$

Spôsobom naznačeným v kapitolách 1.4 a 1.5, postupne z tohto Lagrangiánu vieme odvodiť relevantné dynamické veličiny

- pohybové (Eulerove-Lagrangeove) rovnice

$$\Box A_\mu = 0. \tag{2.5.61}$$

- Tenzor energie-hybnosti

$$T_{\mu\nu} = -(\partial_\mu A^\alpha)(\partial_\nu A_\alpha) - g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{2.5.62}$$

- Hustotu energie (Hamiltonián teórie)

$$T^{00} = -\frac{1}{2}[\dot{A}_\alpha \dot{A}^\alpha + (\partial_n A^\alpha)(\partial_n A_\alpha)]. \tag{2.5.63}$$

- Hustotu hybnosti

$$T^{0i} = -(\dot{A}^\alpha)(\partial^i A_\alpha). \tag{2.5.64}$$

- Tenzor spinového momentu

$$S^{\tau(\nu\mu)} = A^\mu(\partial^\tau A^\nu) - A^\nu(\partial^\tau A^\mu). \tag{2.5.65}$$

Priestorovú hustotu spinu zavádzame pomocou časovej zložky tenzora (2.5.65)

$$S^{0(\mu\nu)} = \int \mathrm{d}^3x\, (A^\mu \dot{A}^\nu - A^\nu \dot{A}^\mu). \tag{2.5.66}$$

Celkový spin je potom možné vypočítať integrovaním cez celý priestor

$$S^{\mu\nu} \equiv \int \mathrm{d}^3x\, S^{0(\mu\nu)} = \int \mathrm{d}^3x\, (A^\nu \dot{A}^\mu - A^\mu \dot{A}^\nu). \tag{2.5.67}$$

Trojrozmerný vektor spinu sa potom definuje vzťahom

$$S_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}S^{jk}, \tag{2.5.68}$$

ktorý je možné upraviť

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\int \mathrm{d}^3x\, S^{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\int \mathrm{d}^3x\,[A^k\dot{A}^j - \underbrace{A^j\dot{A}^k}_{j\leftrightarrow k}] \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\int \mathrm{d}^3x\, A^k\dot{A}^j - \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\int \mathrm{d}^3x\, A^k\dot{A}^j \\ &= \varepsilon_{ijk}\int \mathrm{d}^3x\, \dot{A}^j A^k. \end{aligned}$$

Vo vektorovom označení odpovedá vektorovému súčinu

$$\boldsymbol{S} = \dot{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{A}. \tag{2.5.69}$$

Pri tejto príležitosti pripomíname Fermiho myšlienku týkajúcu sa kalibrácie. Priamym dôsledkom pohybových rovníc (2.5.61) je vlnová rovnica pre $\chi = \partial_\mu A^\mu$, t.j. $\Box\chi = 0$. Ak predpokladáme, že v počiatočnom okamihu $t = 0$ sú navyše splnené podmienky

$$\chi(t=0) = 0, \quad \partial_t\chi(t=0) = 0, \tag{2.5.70}$$

tak nutne $\chi = 0$ v každom ďalšom časovom okamihu t. Teda Lorentzova kalibračná podmienka $\partial_\mu A^\mu = 0$ je v tomto prístupe splnená dynamicky. Tým sa dosiahne plná ekvivalencia (2.5.61) s Maxwellovými rovnicami.

Poznámka:
Všimnime si, že elektromagnetické pole je príkladom reálneho vektorového poľa. Z diskusie v častiach 2.2 a 2.4 nás preto neprekvapí, že po skvantovaní identifikujeme častice elektromagnetického poľa ako nenabité častice so spinom 1 (fotóny).

2.5.2 Hybnostná reprezentácia

Analogickým postupom ako pri skalárnom poli, rozložíme pole $A_\nu(x)$ na súčet módov s kladnou a zápornou frekvenciou

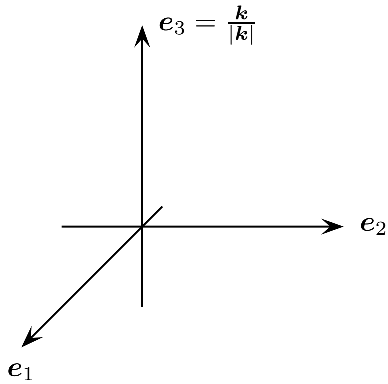
$$A_\nu(x) = A_\nu^+(x) + A_\nu^-(x), \tag{2.5.71}$$

kde

$$A_\nu^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2k_0}}\mathrm{e}^{\pm ik\cdot x}A_\nu^\pm(\boldsymbol{k}). \tag{2.5.72}$$

Teraz ale vystupuje v menovateli $k_0 = |\boldsymbol{k}|$, keďže hmotnosť fotónu je nulová. Celková enegia elektromagnetického poľa je daná priestorovým integrálom z výrazu (2.5.63). Vo Fourierovej reprezentácii nadobúda tvar

$$E = \int \mathrm{d}^3x\, T^{00}$$



Obr. 2.2: Zobrazenie voľby vektorov pre rozloženie potenciálu elektromagnetického poľa v hybnostnom priestore.

$$= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3k\, k^0 [A^{+\nu}(k)A^-_\nu(k) + A^-_\nu(k)A^{+\nu}(k)]. \tag{2.5.73}$$

Vektor celkovej hybnosti sa zase dá zapísať ako

$$P^i = \int \mathrm{d}^3k\, k^i \{-A^+_\mu(\boldsymbol{k})A^{-\mu}(\boldsymbol{k})\}. \tag{2.5.74}$$

V prípade Hamiltoniánu nie je zrejmé, že sa jedná o pozitívne definitnú veličinu. Na vyjasnenie tohto problému zavedieme lokálny systém súradníc v hybnostnom priestore. V ňom rozložíme pole $A_\nu(k)$ podľa predpisu

$$A^\pm_\nu(k) = a^\pm_1(k)\epsilon^1_\nu + a^\pm_2(k)\epsilon^2_\nu + a^\pm_3(k)\epsilon^3_\nu + a^\pm_0(k)\epsilon^0_\nu, \tag{2.5.75}$$

kde napr. e^1_ν predstavuje zložku vektora $\boldsymbol{e}^1$ v smere ν. Explicitne sú tieto vektory dané výrazmi

$$\boldsymbol{\epsilon}^0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{2.5.76}$$

Tieto vektory volíme pritom takým spôsobom, aby bol smer vektora $\boldsymbol{\epsilon}^3$ stotožnený so smerom vektora $\boldsymbol{k}$ (v danom bode hybnostného priestoru). Graficky je táto situácia znázornená na Obr. 2.2. Dosadením rozkladu (2.5.75) do bilineárnych výrazov vystupujúcich v (2.5.73) a (2.5.74) a krátkej úprave dostaneme

$$A^+_\mu(\boldsymbol{k})A^{-\mu}(\boldsymbol{k}) = g^{\mu\nu}a^+_\mu(\boldsymbol{k})a^-_\nu(\boldsymbol{k}). \tag{2.5.77}$$

Ďalej vidíme, že naložením Lorentzovej podmienky (2.5.23) na (2.5.75) dostaneme dva vzťahy

$$k^\mu A^+_\mu(\boldsymbol{k}) = 0, \quad k^\mu A^-_\mu(\boldsymbol{k}) = 0.$$

Tie v danom lokálnom systéme súradníc prejdú na

$$|\boldsymbol{k}|a_3^{\pm}(\boldsymbol{k}) - k^0 a_0^{\pm}(\boldsymbol{k}) = 0.$$

Keďže ale pre fotón platí $|\boldsymbol{k}| = k^0$, odvodíme

$$a_3^{+}(\boldsymbol{k})a_3^{-}(\boldsymbol{k}) - a_0^{+}(\boldsymbol{k})a_0^{-}(\boldsymbol{k}) = 0. \tag{2.5.78}$$

Ako možno tento vzťah interpretovať? Hovoríme, že Lorentzova podmienka je ekvivalentná požiadavke, aby stredný počet fotónov v pozdĺžnom (longitudinálnom) smere $a_3^{+}a_3^{-}$ bol rovný strednému počtu "časových" fotónov $a_0^{+}a_0^{-}$. Im odpovedajúce príspevky sa potom v štvorhybnosti navzájom vyrušia. Použitie získaného vzťahu (2.5.78) v rozklade (2.5.77) vedie na

$$-A_\mu^{+}(\boldsymbol{k})A^{-\mu}(\boldsymbol{k}) = \sum_{s=1,2} a_s^{+}(\boldsymbol{k})a_s^{-}(\boldsymbol{k}). \tag{2.5.79}$$

Následne získame výraz pre štvorhybnosť v hybnostnej reprezentácii

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3k\, k^\mu \{-A_\mu^{+}(\boldsymbol{k})A^{-\mu}(\boldsymbol{k})\} = \sum_{s=1,2} \int \mathrm{d}^3k\, k^\mu a_s^{+}(\boldsymbol{k})a_s^{-}(\boldsymbol{k}). \tag{2.5.80}$$

Explicitne vidíme, že sa v prípade časovej zložky jedná o pozitívne definitnú veličinu.

Zvyčajným postupom je možné odvodiť vzťah pre operátor spinu

$$S_i = \varepsilon_{ijk} \int \mathrm{d}^3x\, S^0_{jk},$$

$$\boldsymbol{S} = i \int \mathrm{d}^3k\, \left[\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{k})\right] = i\varepsilon_{ijk} \int \mathrm{d}^3k\, \boldsymbol{\epsilon}^i a_j^{+}(\boldsymbol{k})a_k^{-}(\boldsymbol{k}), \tag{2.5.81}$$

ktorý sa podľa Noetherovej vety zachováva v čase ako dôsledok symetrie tenzora energie-hybnosti $T^{\mu\nu}$. Projekcia spinu na smer pohybu fotónu odpovedá zložke

$$S_3 \sim i(a_1^{+}(\boldsymbol{k})a_2^{-}(\boldsymbol{k}) - a_2^{+}(\boldsymbol{k})a_1^{-}(\boldsymbol{k})). \tag{2.5.82}$$

Tento výraz je možné diagonalizovať zavedením amplitúd $b_1^{\pm}, b_2^{\pm}$ podobne ako sme to vykonali pri vektorovom poli (2.4.38), čoho výsledkom je prepis

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3k\, k^\mu \left[b_1^{+}(\boldsymbol{k})b_1^{-}(\boldsymbol{k}) + b_2^{+}(\boldsymbol{k})b_2^{-}(\boldsymbol{k})\right], \tag{2.5.83}$$

$$S_3 \sim \left[b_1^{+}(\boldsymbol{k})b_1^{-}(\boldsymbol{k}) - b_2^{+}(\boldsymbol{k})b_2^{-}(\boldsymbol{k})\right]. \tag{2.5.84}$$

Odtiaľ možno vyvodiť pozorovanie, že výrazy

$$b_i^{+}(\boldsymbol{k})b_i^{-}(\boldsymbol{k}) \quad (i = 1, 2)$$

predstavujú stredný počet častíc s nulovou hmotnosťou, hybnosťou $\boldsymbol{k}$, energiou $\boldsymbol{k}^0$, ktorých priemet spinu na smer pohybu (daný vektorom $\boldsymbol{k}$) je buď $+1(i = 1)$ alebo $-1(i = 2)$. Tieto častice identifikujeme s fotónmi.

Kapitola 3

Diracov formalizmus

Dôležitá trieda častíc je tvorená tzv. fermiónovskými časticami, skrátene fermiónmi. Ako vieme z prednášok z kvantovej mechaniky a štatistickej fyziky ich významnou črtou je vzájomné odpudzovanie kvantovej povahy, ktoré je vyjadrené známym Pauliho princípom. V tejto časti sa zameriame na opis Diracovho formalizmu, ktorý slúži práve na fundamentálny opis kvantových polí fermiónovskej povahy.

Budeme vychádzať z podobného prístupu ako sa závadza spinová premenná v nerelativistickej kvantovej mechanike, kde sa ukazuje, že spinor sa transformuje podľa reprezentácie grupy trojrozmerných rotácií. Iný historickejší prístup k Diracovej rovnici je možné nájsť v prílohe C.

3.1 Úvod

Fundamentálne fyzikálne teórie sú vybudované zväčša na niekoľkých dobre zdôvodniteľných predpokladoch. Ich fyzikálny obsah je častokrát motivovaný experimentom, heuristickými a symetrickými úvahami. Kvantová elektrodynamika, ktorej sa v tejto práci venujeme najviac, sa dá považovať za fundamentálnu teóriu, nakoľko je postavená na spojení dvoch významných fyzikálnych teórii: špeciálnej teórie relativity a kvantovej mechaniky. Očakávame preto, že fundamentálne pohybové rovnice kvantovej elektrodynamiky by mali byť kovariantné vzhľadom na prípustné relativistické transformácie. Čo to presne znamená, ak požadujeme, aby bola istá rovnica relativisticky kovariantná? Hrubo povedané - ak v nejakej vzťažnej sústave platí rovnica $D\varphi(x) = 0$ (D je obvykle nejaký diferenciálny operátor), tak po vykonaní rotácie alebo transformácie typu boost do inej vzťažnej sústavy bude transformované pole $\varphi'(x')$ vyhovovať formálne rovnako vyzerajúcej rovnici $D'\varphi(x') = 0$ (D' je transformovaný operátor D). Hovoríme, že daná rovnica je kovariantná a je potom zrejmé, že pozorovatelia v oboch sústavách pozorujú "rovnakú" fyziku. Pri takýchto a podobných úvahách je výhodné používať Lagrangeov formalizmus, keďže Lagrangián predstavuje skalár Lorentzových transformácii. Dá sa ľahko ukázať, že pohybové rovnice odvodené z Lorentzovsky invariantného Lagrangiánu sú kovariantné.

Pre konkrétnosť analyzujme najprv prípad skalárneho poľa, ktorý bol zavedený v kapitole 2.1. Pri aktívnej transformácii dochádza k nasledujúcej zámene súradníc a poľa

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \varphi(x) \to \varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x). \tag{3.1.1}$$

Explicitne overme, že táto transformácia nezmení tvar daného Lagrangiánu $\mathcal{L} = (\partial\varphi)^2/2 - m^2\varphi^2/2.$ zavedenom v (2.1.1). Hmotnostný člen sa transformuje jednoducho

$$\frac{1}{2}m^2\varphi^2(x) \to \frac{1}{2}m^2\varphi^2(\Lambda^{-1}x). \tag{3.1.2}$$

Pri transformácii kinetického členu sa zamerajme najskôr na to, akým spôsobom sa transformuje derivácia skalárneho poľa. Postupne dostávame

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\varphi(x) \to \partial_\mu(\varphi(\Lambda^{-1}x)) &= \left| x' \equiv \Lambda^{-1}x, \quad \partial'_\mu = \partial/\partial x'^\mu \right| \\
&= (\partial_\mu x'^\nu)(\partial'_\nu \varphi(x')) \\
&= \partial_\mu \left[(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho x^\rho\right](\partial_\nu\varphi)(x') \\
&= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho g^\rho_\mu (\partial_\nu\varphi)(x') \\
&= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu (\partial_\nu\varphi)(x'),
\end{aligned}$$

kde sme vhodným spôsobom zaviedli transformované čiarkované súradnice. Podotýkame pre úplnosť, že ako súradnice x tak aj x' sa vzťahujú na ten istý súradnicový systém.

Využime odvodený vzťah na transformáciu kinetického členu

$$\begin{aligned}
(\partial\varphi)^2 = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi \to g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi'(x))(\partial_\nu\varphi'(x)) \\
&= g^{\mu\nu}\left[(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\partial_\rho\varphi\right]\left[(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu\partial_\sigma\varphi\right](\Lambda^{-1}x) \\
&= g^{\rho\sigma}(\partial_\rho\varphi)(\partial_\sigma\varphi)(\Lambda^{-1}x) \\
&= (\partial\varphi)^2(\Lambda^{-1}x),
\end{aligned}$$

kde sme využili známu vlastnosť Lorentzových transformácií (1.1.12). Vidíme, že pri Lorentzovej transformácii (3.1.1) sa Lagrangián reálneho skalárneho poľa transformuje podľa predpisu

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x). \tag{3.1.3}$$

Ak sa uvažujú vlastné Lorentzove transformácie Λ, pre ktoré platí (1.1.17), vidíme ďalej, že príslušný elementárny objem $\mathrm{d}x' = |\Lambda|\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$ sa nemení. Dôležitým dôsledkom týchto úvah je fakt, že účinok $\mathcal{S} = \int \mathcal{L}\mathrm{d}x$ je nutne Lorentzovsky invariantná veličina.

Na lepšie pochopenie uvedených úvah sa presvedčíme, že pohybová rovnica pre skalárne pole sa naozaj vyznačuje relativistickou kovariantnosťou. Jedná sa o Kleinovu-Gordonovu rovnicu (2.1.3) a pozrime sa bližšie na jej transformáciu

$$0 = (\Box + m^2)\varphi(x) \to (\Box + m^2)\varphi(\Lambda^{-1}x) = \left| x' = \Lambda^{-1}x \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[(\partial_\mu x'^\nu)(\partial^\mu x'_\rho)\partial'_\nu\partial'^\rho + m^2\right]\varphi(x') \\
&= \left[\partial_\mu((\Lambda^{-1})^\nu{}_\alpha x^\alpha)\partial^\mu((\Lambda^{-1})_\rho{}^\beta x_\beta)\partial'_\nu\partial'^\rho + m^2\right]\varphi(x') \\
&= \left[(\Lambda^{-1})^\nu{}_\alpha g^\alpha_\mu(\Lambda^{-1})_\rho{}^\beta g^\mu_\beta\partial'_\nu\partial'^\rho + m^2\right]\varphi(x') \\
&= \left[(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu(\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu\partial'_\nu\partial'^\rho + m^2\right]\varphi(x') \\
&= \left[g^\nu_\rho\partial'_\nu\partial'^\rho + m^2\right]\varphi(x') \\
&= \left[\partial^\nu\partial_\nu + m^2\right]\varphi(\Lambda^{-1}x) = 0.
\end{aligned}
$$

Jednotlivé kroky odvodenia si odporúčame dobre premyslieť.

Ako by bolo možné uvedené transformácie skalárnych veličín zovšeobecniť na vektorové veličiny? Očakávame komplikovanejší spôsob tvaru

$$V^\mu(x) \to \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(\Lambda^{-1}x). \tag{3.1.4}$$

Uvažujme teraz všeobecné lineárne transformácie M nejakej n-komponentnej štruktúry ϕ_a, kde a je všeobecný index číslujúci jednotlivé nezávislé zložky. V prvom rade bude M závisieť na danej Lorentzovej transformácii Λ, čo jednoducho zdôrazníme funkčnou závislosťou $M = M(\Lambda)$. Štruktúra ϕ_a sa transformuje podľa predpisu

$$\phi_a(x) \to M_{ab}(\Lambda)\phi_b(\Lambda^{-1}x), \tag{3.1.5}$$

ktorú možno chápať aj ako maticové násobenie. Pre jednoduchosť budeme tento vzťah zapisovať v skrátenej podobne

$$\phi \to M(\Lambda)\phi. \tag{3.1.6}$$

Aké prirodzené vlastnosti očakávame od $M(\Lambda)$? Uvažujme dve Lorentzovské transformácie Λ a Λ'. Ich zložením dostaneme novú Lorentzovu transformáciu $\Lambda'' = \Lambda'\Lambda$ vďaka štruktúre Lorentzovej grupy. Preto očakávame, že sa táto vlastnosť prenesie aj na matice M

$$\phi \to M(\Lambda')M(\Lambda)\phi = M(\Lambda'')\phi. \tag{3.1.7}$$

Táto podmienka konzistentnosti znamená, že matice M tvoria tzv. reprezentáciu Lorentzovej grupy. Ide naviac o štruktúru, ktorá imituje správanie sa Lorentzovej grupy a vo všeobecnosti ju môžeme interpretovať ako jej isté n-rozmerné nadstavbové štruktúry.

Podotýkame, že podobná situácia nastáva aj v nerelativistickej kvantovej mechanike. Tam je základnou grupou grupa trojrozmerných priestorových rotácií, ktorá vykazuje známe $n = 2s + 1$-rozmerné reprezentácie, kde $s = 1/2; 1; 3/2, \ldots$. Napríklad pre $s = 1/2$ máme dvojrozmernú reprezentáciu, ktorá opisuje transformáciu dvojkomponentnej spinorovej veličiny. Tie možno predstaviť v tvare dvojzložkovej štruktúry s komplexnými hodnotami, ktoré odpovedajú príslušným amplitúdam pravdepodobnosti pre daný smer spinu. Matice tejto reprezentácie sú unitárne matice 2×2 s jednotkovým determinantom a vyjadriteľné v parametrickom tvare

$$U = \exp\left[-i\frac{\theta_i\sigma_i}{2}\right], \tag{3.1.8}$$

kde $\theta_i \in \mathbb{R}; i = 1, 2, 3$; sú parametre opisujúce rotáciu systému a σ_i sú Pauliho matice

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.1.9}$$

V danom prípade je rotácia trojrozmerného priameho priestoru daná maticou R, ktorú možno zadať v exponenciálnom tvare

$$R = \exp\left[-i\theta_i J_i\right], \tag{3.1.10}$$

kde matice J_i sú

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.11}$$

Vektor $\boldsymbol{\theta}$ určuje smer, o ktorý má dojsť k otočeniu systému, jeho veľkosť zase určuje, o koľko sa má otočiť daný systém a $J_i; i = 1, 2, 3$ predstavujú vlastne operátory momentu hybnosti. Keďže uhly θ_i sú v princípe ľubovoľné reálne čísla, máme do činenia s tzv. spojitou grupou. Mnoho grúp vo fyzike má veľmi podobný charakter. Platí, že ľubovoľnú takúto grupu možno vyskladať použitím infinitezimálne malých prvkov - generátorov grupy. Tieto predstavujú lineárne nezávisle prvky grupy, ktoré sú veľmi blízke jednotkovému prvku a tvoria vektorový priestor, ktorý nazývame Lieova algebra danej grupy. Operátory J_i v danom prípade spĺňajú komutačný vzťah

$$[J_i, J_k] = i\varepsilon_{ikl} J_l. \tag{3.1.12}$$

Intuitívne je jasné, že nutnou podmienkou reprezentácie grupy rotácií je splnenie tohto komutačného vzťahu aj pre jej vlastné generátory. Z porovnania (3.1.8) a (3.1.10) plynie priradenie

$$J_i \to \frac{\sigma_i}{2} \tag{3.1.13}$$

a hovoríme 1/2-reprezentáciu grupy rotácií.

3.2 Reprezentácia Lorentzovej grupy

Generátory grupy rotácií v trojrozmernom priestore je možné uhádnuť z tvaru momentu hybnosti

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times (-i\boldsymbol{\nabla}). \tag{3.2.1}$$

Z tohto výrazu priamočiaro plynú už uvedené komutačné vzťahy (3.1.12). Moment hybnosti sa dá určiť aj pre štvorrozmerné rotácie dané Lorentzovými transformáciami. Zahrnutím času do očakávanej antisymetrickej štruktúry ľahko uhádneme vhodné zovšeobecnenie

$$J^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu). \tag{3.2.2}$$

Antisymetrickosť vedie na šesť nezávislých výrazov. Tie prirodzene odpovedajú trom malým rotáciám a trom malým transformáciám typu boost. Na analýzu reprezentácií Lorentzovej grupy zjavne potrebujeme poznať jej algebraickú štruktúru. Tá je obsiahnutá v komutačných vzťahoch generátorov (3.2.2) a priamočiarym postupom odvodíme

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i\left(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}\right). \tag{3.2.3}$$

Matice ľubovoľnej reprezentácie Lorentzovej grupy musia nutne spĺňať presne tieto komutačné vzťahy. Nájdenie takýchto reprezentácií sa potom redukuje na matematickú úlohu hľadania vyhovujúcich tried matíc.

Jednou z veličín, s ktorou sme sa už stretli a ktorá by mala odpovedať reprezentácii Lorentzovej grupy, sú štvorvektory a s nimi spojené transformácie. Uvažujme preto nasledujúcu štruktúru

$$(\tilde{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}). \tag{3.2.4}$$

Priamym výpočtom overíme, že $\tilde{J}^{\mu\nu}$ vyhovujú komutačnému vzťahu (3.2.3). Ďalej nahliadneme, že $\tilde{J}$ v skutočnosti opisujú nekonečne malé transformácie štvorvektorov. Platí totiž

$$V^{\alpha} \to \left(\delta^{\alpha}_{\beta} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\tilde{J}^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta}\right) V^{\beta}. \tag{3.2.5}$$

Infinitezimálny člen v ω na pravej strane možno priamo stotožniť s výrazom (1.7.4).
Príklad:

Konkrétna voľba $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$ a všetky ostatné zložky $\omega_{\mu\nu}$ nulové vedie na transformáciu

$$V \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V, \tag{3.2.6}$$

v ktorej môžeme rozpoznať infinitezimálnu rotáciu okolo osi z. Na druhej strane voľba $\omega_{01} = -\omega_{10} = \beta$ a všetky ostatné zložky $\omega_{\mu\nu}$ nulové dáva

$$V \to \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V, \tag{3.2.7}$$

čo nepredstavuje nič iné ako malý boost v smere osi x. ■

Vďaka Diracovi poznáme ešte iný spôsob ako možno nájsť netriviálnu reprezentáciu Lorentzovej grupy. Predpokladajme, že máme k dispozícií štyri matice n-tého rádu γ^μ, ktoré vyhovujú antikomutačným vzťahom

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{3.2.8}$$

Tento vzťah je nutné interpretovať ako maticovú rovnicu s tým, že na pravej strane je prítomná jednotková matica $n-$tého rádu, ktorá sa ale obvykle explicitne nepíše. Dirac si uvedomil, že akonáhle máme takúto skupinu matíc k dispozícii, tak potom môžeme priamo zapísať n-rozmernú reprezentáciu Lorentzovej grupy pomocou komutátorov

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]. \tag{3.2.9}$$

Ukazuje sa, že najmenšie možné n je rovné 4. Existuje síce v tomto prípade viacero možností pre matice γ^μ, ale dá sa ukázať, že ide o fyzikálne ekvivalentné možnosti (R. H. Good, 1955). Často používaná voľba je tzv. Weylova (chirálna) reprezentácia, ktorá definovaná maticami

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.10}$$

kde σ^i sú Pauliho matice a $\mathbb{1}$ jednotková matica druhého rádu. V tejto reprezentácii budeme aj pracovať, ak nebude povedaná inak. Okrem iného je jej využite zvlášť výhodne pri diskusii asymptotickej limity vysokých energií (M. E. Peskin & D. V. Schroeder, 1995).

Generátory boostu sú potom

$$S^{0i} = \frac{i}{4}\left[\gamma^0, \gamma^i\right] = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \tag{3.2.11}$$

a generátory rotácií zase

$$S^{ij} = \frac{i}{4}\left[\gamma^i, \gamma^j\right] = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \tag{3.2.12}$$

Následne definujeme štvorkomponentnú veličinu ψ ako takú veličinu, ktorá sa pri Lorentzovej transformácii transformuje podľa reprezentácie danej $S^{\mu\nu}$ a nazveme ju Diracov spinor. Takýto spinor definovaný v každom bode časopriestoru potom predstavuje spinorové pole.

Dá sa spozorovať, že matice S^{0i} nie sú hermitovské. Preto ani im odpovedajúce boosty nemôžu predstavovať unitárne transformácie. To nás ale nebude trápiť, nakoľko ψ teraz predstavuje klasické pole a nebudeme ho interpretovať ako vlnovú funkciu.

Platí dôležitý vzťah medzi Diracovymi maticami γ^μ a $S^{\rho\sigma}$, ktorý možno zapísať v tvare

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (\tilde{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \tag{3.2.13}$$

kde veličina na pravej strane bola zavedená v (3.2.4) v súvislosti s vektorovou reprezentáciou Lorentzovej grupy. Tento vzťah je možné ďalej vhodne prepísať

$$\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right)\gamma^\mu\left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right) = \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\tilde{J}^{\rho\sigma}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{3.2.14}$$

a interpretujeme ho ako infinitezimálnu formu transformačného vzťahu

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \tag{3.2.15}$$

Vystupujúca veličina S predstavuje konečnú transformačnú maticu pre spinory a je možné ju zapísať vo forme exponenciálnej funkcie

$$S = \exp\left[-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right]. \tag{3.2.16}$$

Táto transformačná matica S predstavuje spinorovú reprezentáciu Lorentzovej grupy a spinor ψ sa potom (aktívne) transformuje podľa predpisu

$$\psi(x) \to \psi'(x') = S\psi(x). \tag{3.2.17}$$

Získaný vzťah (3.2.15) nám pomôže skonštruovať Lorentzovsky invariantnú pohybovú rovnicu. Dirac ju postuloval v tvare

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \tag{3.2.18}$$

resp. v skrátenej notácii

$$(i\hat{\partial} - m)\psi(x) = 0, \quad \hat{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu. \tag{3.2.19}$$

V literatúre sa okrem tohto označenia používa často aj Feynmanov "slash" zápis

$$\not{A} = \gamma^\mu A_\mu. \tag{3.2.20}$$

Predpokladajme aktívnu transformáciu spinora $\psi = \psi(x)$. Lorentzova rotácia Λ potom indukuje $S(\Lambda)$, pomocou ktorej vieme transformovať spinorové pole

$$\psi(x) \to \psi'(x) = S\psi(\Lambda^{-1}x), \quad S = S(\Lambda). \tag{3.2.21}$$

Analyzujme postupne transformáciu Diracovej rovnice (3.2.18)

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\,\psi(x) \to [i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\,S\psi(\Lambda^{-1}x) \tag{3.2.22}$$

a upravujme pravú stranu výrazu analogickým spôsobom ako sme vykonali pre skalárne pole v časti 3.1. Pritom je výhodné vyjadriť parciálnu deriváciu ∂_μ pomocou čiarkovanej premennej $x' = \Lambda^{-1}x$ v tvare

$$\partial_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial'_\nu, \quad \partial'_\nu = \frac{\partial}{\partial x'^\nu}. \tag{3.2.23}$$

Postupne dostávame

$$
\begin{aligned}
\left[i\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial'_\nu - m\right] S\psi(\Lambda^{-1}x) &= S\left[iS^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial'_\nu - S^{-1}Sm\right]\psi(x') \\
&= S\left[i\Lambda^\mu{}_\alpha\gamma^\alpha(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial'_\nu - m\right]\psi(x') \\
&= S\left[i\gamma^\alpha g^\nu_\alpha\partial'_\nu - m\right]\psi(x') \\
&= S\left[i\gamma^\nu\partial'_\nu - m\right]\psi(x'),
\end{aligned}
$$

kde sme pri úprave prvého riadku využili (3.2.15). Na základe tohto odvodenia môžeme preto tvrdiť, že ak je splnená Diracova rovnica (3.2.18) v nejakej inerciálnej sústave, tak aj po príslušnej transformácii zostáva táto rovnica v platnosti. Inými slovami, Diracova rovnica je kovariantná vzhľadom na Lorentzove transformácie.

Diracova rovnica ďalej implikuje, že jednotlivé zložky spinora ψ vyhovujú Kleinovej-Gordonovej rovnici. Aplikujme na Diracovu rovnicu $0 = (i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi$ diferenciálny operátor $-i\gamma^\mu\partial_\mu - m$ a dostaneme

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\psi \\
&= \left[\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right]\psi \\
&= \left[\frac{1}{2}2g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_n u + m^2\right]\psi \\
&= \left(\Box + m^2\right)\psi,
\end{aligned}
\tag{3.2.24}
$$

kde sme využili definičný vzťah (3.2.8) pre Diracove matice.

3.3 Lagrangián spinorového poľa

Na zavedenie Lagrangeovho formalizmu spinorových polí je nutná identifikácia skalárnych veličín, ktoré je možné skonštruovať zo spinorov. Jednoduchým pozorovaním vieme nahliadnuť, že očakávaná veličina $\psi^\dagger\psi$ nepredstavuje skalár. Použitím transformačného vzťahu (3.2.17) sa totiž táto veličina transformuje nasledovne

$$
\psi^\dagger\psi \to \psi^\dagger S^\dagger S\psi. \tag{3.3.1}
$$

Priamo z definičného výrazu (3.2.11) ale vidíme, že generátory S^{0i} nie sú hermitovské. Tým pádom vo všeobecnosti $S^\dagger$ nie je unitárna matica, a preto výraz $S^\dagger S$ nemusí byť rovný jednotkovej matici.

Zavedieme novú veličinu - pridružený Diracov spinor, ktorý definujeme ako

$$
\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0. \tag{3.3.2}
$$

Analyzujme jeho infinitezimálnu transformáciu vzhľadom na transformáciu (3.2.16)

$$
\bar{\psi} \to \psi^\dagger\left[1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger\right]\gamma^0. \tag{3.3.3}
$$

V sumácii cez indexy μ a ν máme jednak tri rotačné a jednak tri boostové príspevky. Z vlastností γ matíc a definičného vzťahu (3.2.9) vieme priamo ukázať, že pre rotačné príspevky platí dvojica vzťahov

$$(S^{\mu\nu})^{\dagger} = S^{\mu\nu}, \quad [S^{\mu\nu}, \gamma^0] = 0. \tag{3.3.4}$$

Na druhej strane pre boostové členy odvodíme

$$(S^{\mu\nu})^{\dagger} = -S^{\mu\nu}, \quad \{S^{\mu\nu}, \gamma^0\} = 0. \tag{3.3.5}$$

Tieto vzťahy spolu s (3.2.16) priamo vedú na dôležitú rovnosť

$$\gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0 = S^{-1}. \tag{3.3.6}$$

Taktiež ich je ale možné využiť na prepis (3.3.3) do tvaru

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}\gamma^0 \left[1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right], \tag{3.3.7}$$

kde výraz v hranatej zátvorke nie je nič iné ako malá inverzná transformácia S^{-1}. Teda

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi} S^{-1}. \tag{3.3.8}$$

Odtiaľ s použitím (3.2.17) vidíme

$$\bar{\psi}\psi \to \bar{\psi} S^{-1} S \psi = \psi,$$

a teda veličina

$$\bar{\psi}\psi \tag{3.3.9}$$

sa pri transformácii (3.2.21) nezmení. Predstavuje tak najjednoduchší Lorentzovsky skalár, ktorý je možné vytvoriť z daného spinora. Podobným spôsobom vieme overiť, že výraz

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \tag{3.3.10}$$

predstavuje štvorvektorovú veličinu. Po priamom dosadení a využití vzťahu (3.2.15) máme

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \to \bar{\psi} S^{-1}\gamma^{\mu} S\psi = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi,$$

čo nepredstavuje nič iné ako transformačný vzťah pre štvorvektorovú veličinu.

Najjednoduchšiu možnosť pre Lorentzovsky invariantný Lagrangián vieme uhádnuť a zapísať v tvare

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}\left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right]\psi = \bar{\psi}[i\hat{\partial} - m]\psi. \tag{3.3.11}$$

Podotýkame, že tento výraz v zložkovom tvare vlastne odpovedá nasledujúcemu výrazu

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}_a\left[i(\gamma^{\mu})_{ab}\partial_{\mu} - m\delta_{ab}\right]\psi_b, \tag{3.3.12}$$

kde a, b sú dva sčítacie indexy.

Pri odvodení pohybových rovníc je potrebné mať na pamäti, že ψ je vo všeobecnosti opísaná svojimi komplexnými zložkami. Preto Eulerove-Lagrangeove rovnice vedú na dvojicu rovníc

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0. \tag{3.3.13}$$

Podobne ako pri Lagrangiáne (3.3.12) tieto rovnice efektívne odpovedajú rovniciam

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_a} = 0, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_a} = 0. \tag{3.3.14}$$

Súhrnne sa teda jedná o štvoricu rovníc pre jednotlivé zložky $a = 1, 2, 3, 4$. Výpočtom zistíme, že

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} = i\bar{\psi}_a (\gamma^\mu)_{ab}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_a} = -m\bar{\psi}_a, \tag{3.3.15}$$

ktoré sa zvyknú zapisovať skrátene v tvare

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\bar{\psi}. \tag{3.3.16}$$

Analogicky môžeme postupovať pre druhú rovnicu uvedenú v (3.3.13). Pohybové rovnice tak nakoniec nadobúdajú tvar

$$i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0, \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \tag{3.3.17}$$

Ide vlastne o dve Diracovsky združené rovnice, pričom druhú z nich sme už zaviedli v predchádzajúcej časti v rovnici (3.2.18). Tam sme tiež ukázali, že sa jedná o dobrú relativisticky kovariantnú rovnicu.

Zjavne Lagrangián (3.3.11) nie je symetrický vzhľadom na vystupujúce spinory ψ a $\bar{\psi}$. Je možné zaviesť aj fyzikálne ekvivalentný symetrizovaný Lagrangián

$$\mathcal{L}_{\text{sym}} = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi\right) - m\bar{\psi}\psi. \tag{3.3.18}$$

Pozoruhodnou vlastnosťou Diracovho Lagrangiánu je fakt, že na riešeniach Diracovej rovnice, nadobúda nulovú hodnotu. Teda spinor ψ vyhovujúci Diracovej rovnici (3.2.18) dáva $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = 0$.

3.4 Riešenie Diracovej rovnice pre voľnú časticu

Na získanie fyzikálneho náhľadu analyzujme riešenie Diracovej rovnice vo forme rovinných vĺn. Ako sme si už všimli v (3.2.24) jednotlivé zložky voľného spinorového poľa vyhovujú relativistickej Kleinovej-Gordonovej rovnici. To nás motivuje zaviesť hybnostnú (Fourierovu) reprezentáciu

$$\psi(x) = u(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-ip\cdot x}, \quad p^2 = m^2. \tag{3.4.1}$$

Tu vystupujúca amplitúda $u(p)$ závisí iba na štvorhybnosti p. Dosaďme túto rovnicu do Diracovej rovnice (3.2.18) a za predpokladu $p^0 > 0$ dostaneme

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\boldsymbol{p}) = (\hat{p} - m)u(\boldsymbol{p}) = 0. \tag{3.4.2}$$

Uvažujme riešenie tejto rovnice v pokojovej sústave, kde priestorová časť štvorhybnosti je nulová

$$p \to p_0 = (m, \mathbf{0}) \tag{3.4.3}$$

a (3.4.1) nadobudne jednoduchší tvar

$$(m\gamma^0 - m)u(\mathbf{0}) = m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(\mathbf{0}) = 0. \tag{3.4.4}$$

Riešenie je možné zapísať v tvare

$$u(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \tag{3.4.5}$$

kde ξ je dvojkomponentný spinor a vystupujúci faktor $\sqrt{m}$ bol vložený kvôli zjednodušeniu neskorších výrazov. Navyše požadujeme splnenie normalizačnej podmienky

$$\xi^\dagger \xi = 1. \tag{3.4.6}$$

Vzťahy (3.2.12) a (3.2.16) implikujú, že spinor ξ sa transformuje vzhľadom na priestorové rotácie presne ako dvojzložkový spinor v nerelativistickej kvantovej mechanike. Spinor

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.4.7}$$

možno interpretovať ako časticu so spinom "hore" a

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.4.8}$$

naopak ako časticu so spinom "dole".

Na nájdenie všeobecného riešenia pre $u(\boldsymbol{p})$ využime znalosť pokojového riešenia (3.4.5) a transformujme ho pomocou boostu do vhodnej sústavy. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme boost v smere osi 3 a zapíšeme príslušné rovnice ako v infinitezimálnom

$$\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \left[1 + \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4.9}$$

tak aj konečnom tvare

$$\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \exp\left[\eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.4.10}$$

$$= \left[\cosh\eta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sinh\eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4.11}$$

V smeroch kolmých na os 3 sa hybnosti nemenia.

Po roznásobení (3.4.11) a porovnaní s ľavou stranou dospievame k dvojici rovníc

$$E = m\cosh\eta, \quad p^3 = m\sinh\eta. \tag{3.4.12}$$

Pripomíname, že zo špeciálnej teórie relativity veličinu η zvykneme nazývať rapidita. Tá nám efektívne pomáha vyjadriť rôzne fyzikálne veličiny a navyše sama osebe predstavuje veličinu, ktorá sa pri boostoch transformuje aditívne. Známe faktory β a γ sa vyjadria pomocou η nasledovne

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \cosh\eta, \quad \beta = \frac{v}{c} = \tanh\eta. \tag{3.4.13}$$

Uvažovaný typ transformácie (3.4.11) určuje istú transformáciu spinora $u(p)$, ktorá je daná maticou S^{03} v tvare

$$S^{03} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}. \tag{3.4.14}$$

Využime všeobecný výraz pre transformáciu spinora $S = \exp\left[-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right]$, v ktorej bude vystupovať jediný nenulový prvok $\omega_{03} = \eta$. Upravujeme

$$u(\boldsymbol{p}) = \exp\left[-\frac{i}{2}2\eta \cdot \frac{-i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \tag{3.4.15}$$

$$= \exp\left[-\frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \tag{3.4.16}$$

$$= \exp\left[\cosh\frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \sinh\frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}. \tag{3.4.17}$$

Rozpísaním hyperbolických funkcií do exponenciálnych funkcií máme

$$u(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\eta/2}\frac{1-\sigma^3}{2} + \mathrm{e}^{-\eta/2}\frac{1+\sigma^3}{2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\eta/2}\frac{1+\sigma^3}{2} + \mathrm{e}^{-\eta/2}\frac{1-\sigma^3}{2} \end{pmatrix}\sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}. \tag{3.4.18}$$

Vďaka relativistickým vzťahom (3.4.12) vieme prepísať exponenciálne výrazy ako funkcie energie a zložky hybnosti v treťom smere

$$e^{\eta/2} = \sqrt{\frac{E - p^3}{m}}, \quad e^{-\eta/2} = \sqrt{\frac{E - p^3}{m}}. \tag{3.4.19}$$

Tieto vzťahy dosadíme do (3.4.18) s výsledkom

$$u(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \left[\sqrt{E + p^3}\,\frac{1-\sigma^3}{2} + \sqrt{E - p^3}\,\frac{1+\sigma^3}{2}\right]\xi \\ \left[\sqrt{E + p^3}\,\frac{1+\sigma^3}{2} + \sqrt{E - p^3}\,\frac{1-\sigma^3}{2}\right]\xi \end{pmatrix}. \tag{3.4.20}$$

Tento výsledok je možné intrepretovať (J. D. Bjorken & S. D. Drell, 1964; M. E. Peskin & D. V. Schroeder, 1995) ako špeciálny prípad všeobecného vzťahu

$$u(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma}\xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix}. \tag{3.4.21}$$

Výraz $\sqrt{p \cdot \sigma}$ označuje súčet kladných vlastných hodnôt príslušného výrazu a zaviedli sme označenie

$$\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}), \tag{3.4.22}$$

kde vystupuje vektor Pauliho matíc definovaných ako

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\right). \tag{3.4.23}$$

Poznámka:

Pre uvažovaný prípad boostu v smere osi 3 máme

$$\begin{aligned} p \cdot \sigma &= E\sigma^0 - p^3\sigma^3 \\ &= \begin{pmatrix} E - p^3 & 0 \\ 0 & E + p^3 \end{pmatrix} \qquad = (E - p^3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (E + p^3)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Dôležitou vlastnosťou výsledku (3.4.21), ktorú ale nebudeme dokazovať, je jeho platnosť pre ľubovoľnú štvorhybnosť p. Na nej založíme naše ďalšie úvahy a postupy, ktoré sa neskôr využijú pri analýze spinorových veličín.

Pre vektory matíc σ platí dôležitý (maticový) vzťah

$$(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = p^2 = m^2, \tag{3.4.24}$$

ktorý si dokážeme. Upravujme jeho ľavú stranu

$$\begin{aligned} p_\mu\sigma^\mu p_\nu\bar{\sigma}^\nu &= (p_0\sigma^0 + p_i\sigma^i)(p_0\sigma^0 - p_j\sigma^j) \\ &= (p_0\mathbb{1} + p_i\sigma^i)(p_0\mathbb{1} - p_j\sigma^j) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p_0^2 \underbrace{-p_0 p_j \sigma^j + p_i p_0 \sigma^i}_{0} - p_i p_j \sigma^i \sigma^j \\
&= p_0^2 - \sum_{i=1}^{3} p_i^2 \sigma_i^2 - \underbrace{\sum_{i \neq j} p_i p_j \sigma^i \sigma^j}_{0} \\
&= (p_0^2 - \boldsymbol{p}^2) \\
&= p^2 .
\end{aligned}
$$

Jedná sa o maticovú rovnosť, ale v záverečnom výraze sa jednotková matica nezvykne explicitne zdôrazňovať. ∎

Pri praktických výpočtoch je výhodné pracovať s konkrétnou voľbou spinorov ξ.

Príklad:

Pre $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dostaneme

$$
u_1(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - p^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E + p^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{E \gg p^3} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{3.4.25}
$$

kde posledný výraz odpovedá limite vysokých energií. Analogickým postupom by sme pre spinor $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dostali

$$
u_2(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E + p^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E - p^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{E \gg p^3} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4.26}
$$

∎

Riešenia $u_{1,2}$ sú vlastné stavy operátora helicity h definovaného vzťahom

$$
h \equiv \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{S} = \frac{1}{2} \hat{p}_i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \tag{3.4.27}
$$

Vlastná hodnota 1/2 odpovedá tzv. pravotočivej častici a $-1/2$ zase ľavotočivej. Helicita nehmotnej častice nezávisí na voľbe vzťažnej sústavy. Naopak pre nehmotné častice tomu tak nie je.

3.5 Vlastnosti Diracovych spinorov

V tejto časti sa zameriame na dôsledky, ktoré plynú pre riešenia Diracovej rovnice. Tie nám neskôr poslúžia pri konkrétnych fyzikálnych výpočtoch. Hoci výraz $\psi^\dagger\psi$ nepredstavuje Lorentzovsky skalár, môžeme sa s ním napriek tomu pri konkrétnych výpočtoch stretnúť. Využitím už nájdeného riešenia (3.4.21) dostaneme pre spinor (3.4.21)

$$\begin{aligned} u^\dagger u &= (\xi^\dagger\sqrt{p\cdot\sigma}, \xi^\dagger\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}) \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix} \\ &= \xi^\dagger(p\cdot\sigma + p\cdot\bar{\sigma}) = 2E_{\boldsymbol{p}}\xi^\dagger\xi. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Definujme podľa vzoru (3.3.2) pridružený spinor $\bar{u}$ predpisom

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}) = u^\dagger(\boldsymbol{p})\gamma^0. \tag{3.5.2}$$

Dosadením riešenia (3.4.21) ho prepíšeme

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}) = (\xi^\dagger\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}, \xi^\dagger\sqrt{p\cdot\sigma}). \tag{3.5.3}$$

Odtiaľ priamo dostaneme

$$\bar{u}u = 2m\xi^\dagger\xi = 2m, \tag{3.5.4}$$

kde sa využila zvolená normalizácia $\xi^\dagger\xi = 1$. Zjavne tento výraz je Lorentzovsky skalár.

Dosiaľ sme sa zaoberali jedným typom riešenia v tvare rovinnej vlny s pozitívnou frekvenciou

$$\psi(x) = u(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-ip\cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \tag{3.5.5}$$

Jednotlivé riešenia možno zapísať kompaktným spôsobom

$$u^s(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix}; \quad s = 1,2; \tag{3.5.6}$$

a vyhovujú ortogonalizačnému vzťahu

$$\bar{u}^r(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p}) = 2m\delta^{rs}. \tag{3.5.7}$$

Úplne analogickým spôsobom by sme vedeli analyzovať riešenia s negatívnou frekvenciou

$$\psi(x) = v(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{ip\cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \tag{3.5.8}$$

Tie namiesto rovnice (3.4.2) vyhovujú rovnici

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(\boldsymbol{p}) = 0. \tag{3.5.9}$$

Táto rovnica opäť vykazuje dve riešenia

$$v^s(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\eta^s \end{pmatrix}; \quad s = 1, 2. \tag{3.5.10}$$

Odpovedajúce ortogonalizačné vzťahy majú pozmenený tvar

$$\bar{v}^r(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p}) = -2m\delta^{rs}, \quad v^{r\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p}) = 2E_{\boldsymbol{p}}\delta^{rs}. \tag{3.5.11}$$

Zmiešané ortogonalizačné vzťahy možno odvodiť pomocou vzťahov (3.4.21) a (3.5.10) pre $u(p)$ a $v(p)$

$$\bar{u}^r(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p}) = \bar{v}^r(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p}) = 0. \tag{3.5.12}$$

Potrebujeme byť ale opatrní, keďže napríklad nasledujúce výrazy sú nenulové

$$u^{r\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p}), \quad v^{r\dagger}(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p}). \tag{3.5.13}$$

Pri výpočtoch sa nám tiež môže zísť platnosť dvojice vzťahov

$$u^{r\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(-\boldsymbol{p}) = v^{r\dagger}(-\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p}) = 0. \tag{3.5.14}$$

Pri určovaní účinných prierezov sa vyskytujú sumačné výrazy cez jednotlivé nezávislé spinorové stavy. Upravujme nasledujúci maticový výraz

$$\sum_{s=1,2} u^s(\boldsymbol{p})\bar{u}^s(\boldsymbol{p}). \tag{3.5.15}$$

Dosaďme do neho získané riešenie (3.4.21) a upravujme

$$\begin{aligned}
\sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix} (\xi^{s+}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}, \xi^{s+}\sqrt{p\cdot\sigma}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma} \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & m \end{pmatrix} \\
&= m\mathbb{1} + p\cdot \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\
&= m + p\cdot\gamma = m + \hat{p},
\end{aligned}$$

kde sme využili vzťah úplnosti pre spinory ξ

$$\sum_{s=1,2} \xi^s\xi^{s\dagger} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1\,0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0\,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}.$$

Dospievame tak ku dôležitému vzťahu

$$\sum_s u^s(\boldsymbol{p})\bar{u}^s(\boldsymbol{p}) = \hat{p} + m \tag{3.5.16}$$

Podobným spôsobom vieme odvodiť vzťah pre spinory s negatívnou frekvenciou

$$\sum_s v^s(\boldsymbol{p})\bar{v}^s(\boldsymbol{p}) = \hat{p} - m \tag{3.5.17}$$

Dôležitými algebraickými štruktúrami sú bilineárne výrazy Diracových spinorov, ktoré sa vyznačujú dobrými transformačnými vlastnosťami vzhľadom na Lorentzovu grupu. Uvažujme preto všeobecný výraz

$$\bar{\psi}\Gamma\psi, \tag{3.5.18}$$

kde Γ je nejaká matica 4×4. Takáto matica má vo všeobecnosti 16 nezávislých zložiek a teda potrebujeme mať k dispozícii presne takýto počet matíc. Ukazuje sa, že ich vieme získať pomocou špecifickej množiny Diracových γ matíc

$$\mathbb{1}, \quad \gamma^\mu, \quad \gamma^{\mu\nu} = \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}, \quad \gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}, \quad \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^{\sigma]}, \tag{3.5.19}$$

kde operácia $[\ldots,\ldots]$ predstavuje operáciu totálnej antisymetrickosti. Napr.

$$\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \tag{3.5.20}$$

Dá sa priamočiaro overiť, že počet lineárne nezávislých matíc definovaných v (3.5.19) je $1, 4, 6, 4$ a 1 matica. Transformačné vlastnosti získame priamočiaro opakovaným použitím vzťahu (3.2.15).

Príklad:

Ukážeme si transformačné vzťahy pre výrazy $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ a $\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\psi$. Premyslite si platnosť jednotlivých úprav.

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &\to (\bar{\psi}S^{-1})\gamma^\mu S\psi \\
&= \bar{\psi}\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\psi \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi.
\end{aligned}$$

Tento vzťah indikuje, že $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ sa transfomuje ako štvorvektor.

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\psi &\to (\bar{\psi}S^{-1})\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]S\psi \\
&= \frac{1}{2}\bar{\psi}\left[S^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu S - S^{-1}\gamma^\nu\gamma^\mu S\right]\psi \\
&= \frac{1}{2}\bar{\psi}\left[S^{-1}\gamma^\mu S S^{-1}\gamma^\nu S - S^{-1}\gamma^\nu S S^{-1}\gamma^\mu S\right]\psi \\
&= \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}\Lambda^\mu{}_\alpha\gamma^\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\gamma^\beta\psi - \bar{\psi}\Lambda^\nu{}_\beta\gamma^\beta\Lambda^\mu{}_\alpha\gamma^\alpha\psi\right] \\
&= \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\bar{\psi}\gamma^{\alpha\beta}\psi.
\end{aligned}$$

Vidíme, že štruktúra $\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\psi$ sa transformuje ako tenzor druhého rádu. ■

Isté zjednodušenie je možné dosiahnuť zavedením matice γ^5 vzťahom

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{-i}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma. \tag{3.5.21}$$

Potom je totiž možné posledné dve matice v (3.5.19) vyjadriť kompaktným spôsobom

$$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5, \quad \gamma^{\mu\nu\rho} = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\gamma^5. \tag{3.5.22}$$

Základné vlastnosti matice γ^5 vieme odvodiť priamo z jej definície

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \tag{3.5.23}$$

Posledný vzťah tiež implikuje

$$[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0, \tag{3.5.24}$$

kde matica $S^{\mu\nu}$ bola zavedená v (3.2.9). Tento vzťah vlastne znamená, že Diracova reprezentácia je reducibilná, pretože vlastné vektory matice γ^5 sa transformujú bez vzájomného premiešavania. Vo Weylovej reprezentácii (3.2.10) nadobúda matica γ^5 diagonálny tvar

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \tag{3.5.25}$$

Spinor s vlastnou hodnotou -1 ($+1$) označujeme ako ľavotočivý (pravotočivý). V tabuľke 3.1 nájdeme zosumarizované bilineárne štruktúry, ktoré máme k dispozícií na konštrukciu ľubovoľného bilineárneho spinorového výrazu. Z našej analýzy

matica	typ štruktúry	počet
$\mathbb{1}$	skalár	1
γ^μ	vektor	4
$\sigma^{\mu\nu} = i\frac{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}{2}$	tenzor	6
$\gamma^\mu\gamma^5$	pseudovektor	4
γ^5	pseudoskalár	1

Tabuľka 3.1: Diracovské bilineárne štruktúry

vidíme, že existujú v princípe dve možné štruktúry typu prúd (štvorvektor)

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad J^{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \tag{3.5.26}$$

ktoré odpovedajú Noetherovej prúdom pre transformácie

$$\psi(x) \to \mathrm{e}^{i\alpha}\psi(x), \quad \psi(x) \to \mathrm{e}^{i\alpha\gamma^5}\psi(x). \tag{3.5.27}$$

Predpokladajme, že daný spinor ψ vyhovuje voľnej Diracovej rovnici (3.2.19) a zrátajme štvordivergencie týchto prúdov. V prvom prípade dostaneme

$$\partial_\mu J^\mu = (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \tag{3.5.28}$$

$$= im\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}(-im\psi) \tag{3.5.29}$$
$$= 0 \tag{3.5.30}$$

a v druhom zase

$$\partial_\mu J^{\mu 5} = (\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \gamma^5 \psi + \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^5 (\partial_\mu \psi) \tag{3.5.31}$$
$$= im\bar{\psi}\gamma^5\psi - \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\psi \tag{3.5.32}$$
$$= 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi. \tag{3.5.33}$$

Oba výpočty platia pre voľnú teóriu, ktorá neobsahuje žiadne interakcie. Na rozdiel od prúdu J_μ sa štvorvektor $J^{\mu 5}$ zachováva len pre prípad nehmotných častíc $m = 0$. V literatúre sa $J^{\mu 5}$ označuje aj ako axiálny vektorový prúd a hrá dôležitú rolu pri štúdiu nehmotných fermiónov.

Pri analýze fyzikálnych javov je výhodné zaviesť projekčné operátory na ľavotočivú, resp. pravotočivú časť spinora pomocou matice γ^5

$$J_L^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2}\psi, \quad J_R^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2}\psi. \tag{3.5.34}$$

V prípade nehmotných častíc sa prúdy ľavotočivých, resp. pravotočivých častíc zachovávajú každý zvlášť.

3.6 Klasické spinorové pole

Budeme postupovať podobne ako pre prípady skalárneho a elektromagnetického poľa. Ukážeme si, ako je možné zaviesť "klasické" spinorové pole, ktoré nám po skvantovaní poslúži na opis neinteragujúcich častíc so spinom 1/2. Klasické spinorové pole ako také nie je možné priamo fyzikálne intepretovať. Až jeho kvantové excitácie opisujú reálne existujúce častice (viď kap. 5.6), ktoré odpovedajú fermiónovským časticiam.

Základným matematickým objektom na konštrukciu poľovej teórie je Diracova rovnica (3.2.18). Ako sme uviedli v časti 3.3 túto rovnicu možno získať pomocou variačného princípu z Lagrangiánu $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}[i\hat{\partial} - m]\psi$. Z neho pomocou Noetherovej vety (časť 1.5) odvodíme tenzor energie-hybnosti

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\partial^\nu \psi + \partial^\nu \bar{\psi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{3.6.1}$$
$$= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi. \tag{3.6.2}$$

Ak by sme použili symetrický Lagrangián (3.3.18) dospeli by sme k výrazu

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - (\partial^\nu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right). \tag{3.6.3}$$

Hustota energie spinorového poľa je daná čisto časovými zložkami tohto výrazu

$$T_{00} = i\bar{\psi}\partial_t\psi = i\psi^\dagger\partial_t\psi. \tag{3.6.4}$$

Celkovú energiu spinorového poľa vieme získať pomocou priestorového integrálu

$$E = \int \mathrm{d}^3x\, T^{00} = \int \mathrm{d}^3x\, i\psi^\dagger \dot{\psi} = \int \mathrm{d}^3x\, i\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi}. \tag{3.6.5}$$

Poslednú rovnicu možno ešte upraviť použitím Diracovej rovnice (3.3.11), z ktorej vieme vyjadriť časovú deriváciu $\dot{\psi}$ pomocou priestorových derivácií

$$i\gamma^0\dot{\psi} = m\psi - i\gamma^i\partial_i\psi.$$

Po dosadení do výrazu pre energiu dostaneme

$$E = \int \mathrm{d}^3x\, \bar{\psi}\left[m - i\gamma^i\partial_i\right]\psi. \tag{3.6.6}$$

Výhodou tohto vzťahu oproti (3.6.5) je neprítomnosť časovej derivácie, ktorá nám umožní jednoduchšiu aplikáciu metódy kanonického kvantovania (opísanú v časti 4.2). Tú aplikujeme neskôr na získanie odpovedajúcej kvantovej teórie.

Pre celkovú hybnosť zase dostaneme výraz

$$\boldsymbol{P} = \int \mathrm{d}x\, \psi^\dagger(-i\boldsymbol{\nabla})\psi. \tag{3.6.7}$$

Keďže spinor ψ predstavuje vo všeobecnosti komplexné pole, máme k dispozícii globálnu symetriu tvaru

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{i\Lambda}\psi(x), \tag{3.6.8}$$

s ktorou sme sa stretli pri štúdiu všeobecného prípadu komplexného poľa v časti 1.8. Analogickým spôsobom ako tam bolo uvedené, dospejeme ku štvorvektoru prúdu

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \tag{3.6.9}$$

Už vieme, že každá zo zložiek spinora ψ vyhovuje Kleinovej-Gordonovej rovnici (3.2.24). Tento fakt prirodzeným spôsobom motivuje predstaviť pole $\psi(x)$ vo Fourierovej reprezentácii v tvare

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{ik\cdot x}\delta(k^2 - m^2)\psi(k). \tag{3.6.10}$$

Tu zavedená spinorová funkcia $\psi(k)$ vyhovuje rovnici

$$(\hat{k} + m)\psi(k)\Big|_{k^2=m^2} = 0. \tag{3.6.11}$$

Podobným spôsobom ako pri skalárnom poli (2.1.33), rozložíme pole ψ na časť s kladnou, resp. zápornou frekvenciou

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x), \tag{3.6.12}$$

$$\psi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{ik\cdot x}\delta(k^2 - m^2)\theta(\pm k^0)\psi(k). \tag{3.6.13}$$

Po preintegrovaní cez frekvenčnú premennú k^0, získame výrazy vo forme trojrozmerných hybnostných integrálov

$$\psi^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3k \, \mathrm{e}^{\pm ik\cdot x} \psi^{\pm}(\boldsymbol{k}), \tag{3.6.14}$$

kde argumenty predstavujú nasledujúce výrazy

$$\psi^{\pm}(\boldsymbol{k}) = \frac{\theta(k^0)\psi(\pm k)}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}}, \quad E_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}. \tag{3.6.15}$$

Spinory $\bar{\psi}^+$ a $\bar{\psi}^-$ predstavujú kladnú, resp. zápornú časť funkcie ψ. Trojrozmerné amplitúdy $\psi^{\pm}(\boldsymbol{k})$ vyhovujú rovniciam

$$(m \pm \hat{k})\psi^{\mp}(\boldsymbol{k}) = 0. \tag{3.6.16}$$

Porovnaním s výrazmi (3.4.2), resp. (3.5.9) identifikujeme

$$u \longleftrightarrow \psi^-, \quad v \longleftrightarrow \psi^+. \tag{3.6.17}$$

V tejto práci budeme ďalej používať označenie

$$\psi^+(\boldsymbol{k}) = \sum_s a^s_{\boldsymbol{k}} u^s(\boldsymbol{k}), \quad \psi^-(\boldsymbol{k}) = \sum_s b^{s\dagger}_{\boldsymbol{k}} v^s(\boldsymbol{k}). \tag{3.6.18}$$

Následne sú spinorové polia reprezentované takýmito výrazmi

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left[a^s_{\boldsymbol{p}} u^s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{\boldsymbol{ip\cdot x}} + b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} v^s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-\boldsymbol{ip\cdot x}}\right], \tag{3.6.19}$$

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{x}) = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} u^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-\boldsymbol{ip\cdot x}} + b^s_{\boldsymbol{p}} v^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{\boldsymbol{ip\cdot x}}\right], \tag{3.6.20}$$

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{x}) = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} \bar{u}^s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-\boldsymbol{ip\cdot x}} + b^s_{\boldsymbol{p}} \bar{v}^s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{\boldsymbol{ip\cdot x}}\right]. \tag{3.6.21}$$

Výpočet celkovej štvorhybnosti vedie na integrálny výraz

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3x \, T^{0\mu} = \int \mathrm{d}^3p \, p^\mu \sum_s \left[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} - b^s_{\boldsymbol{p}} b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}\right], \tag{3.6.22}$$

kde zjavne posledný výraz vo všeobecnosti nepredstavuje pozitívne definitnú veličinu pre energiu $E = P^0$.

Pre celkový náboj zase pomocou (3.6.9) odvodíme

$$Q = \int \mathrm{d}^3x \, J^0 = \int \mathrm{d}^3x \, \psi^\dagger\psi = \int \mathrm{d}^3p \sum_s \left[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} + b^s_{\boldsymbol{p}} b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}\right]. \tag{3.6.23}$$

Pri výpočte tenzora spinu poznamenajme, že vo všeobecnom vzorci (1.7.17) nesmieme zabudnúť na sumáciu cez spinorové indexy. Výsledok sa dá zapísať ako

$$S^{\mu(\nu\rho)} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} A^{\psi(\nu\rho)}\psi - \bar{\psi}A^{\bar{\psi}(\nu\rho)}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}. \tag{3.6.24}$$

Na nájdenie explicitných výrazov pre $A^{\psi(\nu\rho)}$ a $A^{\bar{\psi}(\nu\rho)}$ uvažujme infinitezimálnu transformáciu spinora ψ

$$\psi \to \psi' = S(\Lambda)\psi \approx \left(1 - \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\psi, \tag{3.6.25}$$

$$= \psi - \frac{i}{2}S_{\mu\nu}\psi\delta\omega^{\mu\nu}, \tag{3.6.26}$$

kde sme rozvinuli všeobecný vzťah (3.2.16) do prvého rádu podľa malých parametrov $\delta\omega$ a matice $S^{\mu\nu}$ boli zavedené v (3.2.9). Priamo porovnáme s (1.7.8), ktorý pre konkrétnosť zapíšeme v tvare

$$\psi'_a(x') = \psi_a(x) + \sum_{j,\mu<\nu} A^j_{a\mu\nu}\psi_j\delta\omega^{\mu\nu}. \tag{3.6.27}$$

Dospievame tak k identifikácii

$$A^j_{a\mu\nu}\psi_j = -iS_{\mu\nu}\psi = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi, \tag{3.6.28}$$

ktorú čisto formálne preoznačíme $A^j_{a\mu\nu} \to A^{\psi}{}_{(\mu\nu)}$ a píšeme jednoducho

$$A^{\psi(\mu\nu)} = -iS^{\mu\nu}. \tag{3.6.29}$$

Pre pridružený spinor $\bar{\psi}$ analogickým spôsobom dostaneme

$$A^{\bar{\psi}(\mu\nu)} = iS^{\mu\nu}. \tag{3.6.30}$$

Získané výrazy dosadíme do (3.6.24) a použitím Lagrangiánu (3.3.11) odvodíme

$$\begin{aligned} S^{\mu(\alpha\beta)} &= -\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(-iS^{\alpha\beta})\psi = -\bar{\psi}\gamma^\mu S^{\alpha\beta}\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma^\mu S^{\beta\alpha}\psi, \end{aligned} \tag{3.6.31}$$

kde sme v poslednom vzťahu využili antisymetrickosť matíc $S^{\alpha\beta} = -S^{\beta\alpha}$. Z Noetherovej vety ďalej vyplýva, že nultá zložka vypočítaného tenzoru spinového hybnosti (3.6.31)

$$S^{0(\alpha\beta)} = \bar{\psi}\gamma^0 S^{\beta\alpha}\psi \tag{3.6.32}$$

predstavuje zachovávajúcu sa veličinu. Trojrozmerný vektor spinu definujeme pomocou Leviho-Civitovho tenzoru

$$S_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\tilde{S}_{jk}, \tag{3.6.33}$$

kde vystupujú celkové priestorové zložky získané integrovaním (3.6.32)

$$\tilde{S}_{jk} = \int \mathrm{d}^3x\, S^0{}_{jk}$$

a daný argument ešte môžeme prepísať do výhodnejšieho tvaru

$$S^{0}{}_{jk} = \bar{\psi}\gamma^0 S_{jk}\psi = \psi^\dagger(\gamma^0)^2 S_{jk}\psi = \psi^\dagger S_{jk}\psi = \frac{i}{4}\psi^\dagger\left[\gamma_j, \gamma_k\right]\psi.$$

Ľahko nahliadneme, že je možné komutátor $[\gamma_1, \gamma_2]$ prepísať

$$[\gamma_1, \gamma_2] = -2i\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}. \tag{3.6.34}$$

Vďaka tomu sa dá zložka $S^{0}{}_{12}$ zapísať pomocou Pauliho matice σ_3 v diagonálnom tvare

$$S^{0}{}_{12} = \frac{1}{2}\psi^\dagger\Sigma_3\psi, \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}. \tag{3.6.35}$$

Pre zložku spinu v smere osi 3 potom máme

$$s_3 = \varepsilon_{312}\int \mathrm{d}^3x\, S^{0}{}_{12} \to s_3 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, \psi^\dagger\Sigma_3\psi. \tag{3.6.36}$$

Na základe izotropie priestoru dostávame vzťah pre celkový vektor spinu

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, \psi^\dagger\boldsymbol{\Sigma}\psi, \tag{3.6.37}$$

kde vystupuje vektor matíc

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left(\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}\right). \tag{3.6.38}$$

Na základe tohto vzťahu je možné v podstate aplikovať celý formalizmus práce so spinovou premennou známy z nerelativistickej kvantovej mechaniky aj v kvantovej teórii poľa (S. Weinberg, 1995).

K výsledku (3.6.37) by bolo možné dospieť aj s použitím symetrického Lagrangiánu (3.3.18). Tenzor spinového momentu by síce nadobúdal odlišný tvar

$$S^{\mu(\alpha\beta)} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(-iS^{\alpha\beta})\psi - \bar{\psi}iS^{\alpha\beta}\left(-\frac{i}{2}\gamma^\mu\right)\psi \tag{3.6.39}$$

$$= -\frac{1}{2}\bar{\psi}\left[\gamma^\mu S^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}\gamma^\mu\right]\psi \tag{3.6.40}$$

$$= \frac{1}{2}\bar{\psi}\left[\gamma^\mu S^{\beta\alpha} + S^{\beta\alpha}\gamma^\mu\right]\psi, \tag{3.6.41}$$

ale výsledok pre vektor spinu by sa nezmenil (N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1980).

Kapitola 4

Kanonické kvantovanie

4.1 Harmonický oscilátor

Pri konštrukcii kvantovej teórie sa najčastejšie postupuje metódou kanonického kvantovania alebo pomocou funkcionálnych metód. V tejto práci opíšeme prvú z nich, ktorá je používaná aj v nerelativistickej kvantovej mechanike.

Okrem prirodzenej požiadavky relativistickej kovariantnosti spočíva hlavný problém v počte stupňov voľnosti N. V kvantovej mechanike zvyčajne uvažujeme systémy s konečným počtom N. V kvantovej teórii poľa je ale počet stupňov voľnosti nekonečný, pretože daná konfigurácia je určená hodnotou poľa v každom bode príslušného priestoru. Formálne je možné takéto systémy získať limitným prechodom $N \to \infty$. Vhodným štartovacím bodom je potom taký kvantovo-mechanický systém, ktorého riešenie poznáme. Vhodným modelom sa javí systém N neinteragujúcich harmonických oscilátorov. Z kvantovej mechaniky vieme, ako je možné skvantovať jeden harmonický oscilátor. Otázkou zostáva, aký systém dostaneme v limite veľmi veľkého počtu harmonických oscilátorov. Ako si ukážeme v tejto kapitole, získaný systém je možné interpretovať ako skalárne kvantové pole.

Harmonický oscilátor je možné analyzovať rôznymi spôsobmi, či už prostredníctvom Hermiteovej diferenciálnej rovnice, dráhových integrálov alebo reprezentácie obsadzovacích čísel[1]. Posledný z nich sa javí ako veľmi efektívny, a preto ho využijeme v nasledujúcej diskusii.

Predpokladáme Hamiltonián jednorozmerného oscilátora s jednotkovou hmotnosťou v tvare

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2), \tag{4.1.1}$$

kde $\hat{q}$ je operátor zovšeobecnenej súradnice a $\hat{p}$ jej pridružená kanonická hybnosť. Pre jednoduchosť sme tiež položili $\hbar = 1$. Pre účely výhradne tejto kapitoly budeme explicitne rozlišovať medzi klasickou veličinou A a jej odpovedajúcemu kvantovému operátoru $\hat{A}$.

[1] V literatúre sa často označuje ako metóda druhého "kvantovania", čo je značne mätúce, keďže k žiadnemu ďalšiemu kvantovaniu v skutočnosti nedochádza.

Vlastné stavy $|\, n \,\rangle$ Hamiltoniána $\hat{H}$ sú riešeniami bezčasovej Schrödingerovej rovnice a možno ich charakterizovať pomocou nezáporného celého čísla n. Hodnoty energie sú lineárnymi funkciami čísla n

$$\hat{H}\,|\, n \,\rangle = E_n \,|\, n \,\rangle\,, \quad E_k = \omega(n + 1/2), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.1.2}$$

Jednotlivé stavy $|\, n \,\rangle$ je možné medzi sebou pretransformovať pomocou operátorov a a $a^\dagger$ definovaných ako

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(\hat{q} - \frac{i\hat{p}}{\omega} \right), \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(\hat{q} + \frac{i\hat{p}}{\omega} \right). \tag{4.1.3}$$

Pre doplnenie podotýkame, že v $\boldsymbol{x}$-ovej reprezentácii máme $\hat{p} = -i\partial_q, \hat{q} = q$ a v $\boldsymbol{p}$-reprezentácii zase $\hat{p} = p, \hat{q} = i\partial_p$.

Transformácia medzi jednotlivými stavmi prebieha podľa nasledujúcich pravidiel

$$\hat{a}^\dagger \,|\, n \,\rangle = \sqrt{n+1}\,|\, n+1 \,\rangle\,, \quad \hat{a}\,|\, n \,\rangle = \sqrt{n}\,|\, n-1 \,\rangle\,. \tag{4.1.4}$$

Operátor $\hat{a}$ teda znižuje index stavu (t.j. anihiluje energetické kvantum ω) a nazývame ho preto anihilačným operátorom. Analogicky $\hat{a}^\dagger$ predstavuje kreačný operátor. Základným (vákuovým) stavom je stav $|\, 0 \,\rangle$, pre ktorý platí

$$\hat{a}\,|\, 0 \,\rangle = 0. \tag{4.1.5}$$

Numerické faktory $\sqrt{n+1}$ a $\sqrt{n}$ vo vzťahoch (4.1.4) pochádzajú z normalizačných podmienok naložených na vlastné stavy $|\, n \,\rangle$.

Z rovníc (4.1.3) sa pomocou komutačných vzťahov pre operátory $\hat{q}$ a $\hat{p}$ priamočiaro odvodí

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1, \quad \left[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\right] = \left[\hat{a}, \hat{a}\right] = 0. \tag{4.1.6}$$

Ľahko sa ukáže, že stav $|\, k \,\rangle$ je vlastným stavom operátora počtu častíc $\hat{n}$ definovaným ako

$$\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}. \tag{4.1.7}$$

Platí teda $\hat{n}\,|\, n \,\rangle = n\,|\, n \,\rangle$. S pomocou operátora počtu častíc $\hat{n}$ vieme následne prepísať Hamiltonián do tvaru

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger \right) = \omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \tag{4.1.8}$$

Základná myšlienka metódy obsadzovacích čísel spočíva v tom, že namiesto určenia explicitného tvaru vlnovej funkcie $|\, n \,\rangle$ ako funkcie súradníc, sa charakterizuje daný stav jednoducho číslom n, t.j. počtom excitácií, ktoré sú prítomné v danom stave. Hamiltonián (4.1.8) je lineárnou funkciou operátora $\hat{n}$ a preto možno dedukovať, že excitácie daného oscilátora sú fyzikálne nerozlíšiteľné.

Stav $|\, n\, \rangle$ obsahuje n kvánt (častíc alebo tiež excitácii) a vieme ho zapísať pomocou základného (vákuového) stavu ako

$$|\, n\, \rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|\, 0\, \rangle\,. \tag{4.1.9}$$

Pri prechode k súboru konečného počtu $N > 1$ oscilátorov, ktoré navzájom neinteragujú, budeme uvažovať súbor ich možných frekvencií $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$. Celkový Hamiltonián je potom daný sumou

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{N} \hat{H}_n = \sum_{n=1}^{N} \omega_n \left(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2}\right), \tag{4.1.10}$$

kde vystupujúce operátory spĺňajú komutačné vzťahy

$$\left[\hat{a}_l, \hat{a}_k^\dagger\right] = \delta_{lk}, \quad \left[\hat{a}_l^\dagger, \hat{a}_k^\dagger\right] = [\hat{a}_l, \hat{a}_k] = 0. \tag{4.1.11}$$

Prvý z týchto vzťahov je zodpovedný za nezávislosť dvoch harmonických oscilátorov s rôznymi vlastnými frekvenciami. Stav ψ, v ktorom sa nachádza n_1 kvantov v stave 1, n_2 kvantov v stave 2, atď., je daný výrazom

$$|\, \{n\}\, \rangle = \prod_{1 \leqq k \leqq N} \left\{ \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}\,|\, 0\, \rangle \right\}, \quad \{n\} = \{n_1, n_2, \ldots\}. \tag{4.1.12}$$

Ukážeme teraz, že reálnu skalárnu funkciu $\varphi = \varphi(x)$, ktorá vyhovuje Kleinovej-Gordonovej rovnici

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0, \tag{4.1.13}$$

môžeme interpretovať pomocou nekonečného súboru klasických harmonických oscilátorov. Ak sa nám to podarí, tak veľmi jednoducho dospejeme ku kvantovej teórii poľa, pretože klasické oscilátory vieme kvantovať.

Aby sme lepšie porozumeli prechodu od systému s konečným počtom častíc k systému s nekonečným počtom, uvažujme najprv danú rovnicu (4.1.13) v konečnom objeme V tvaru kocky, t.j. $V = L^3$, kde L je dĺžka hrany kocky. Predpokladáme splnenie periodických hraničných podmienok

$$\varphi(x) = \varphi(t, x_1 + L, x_2, x_3) = \varphi(t, x_1, x_2 + L, x_3) = \varphi(t, x_1, x_2, x_3 + L). \tag{4.1.14}$$

Z matematickej analýzy vieme, že takúto funkciu je možné rozložiť do Fourierovho radu

$$\varphi(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\frac{2\pi}{V\omega_k}\right)^{1/2} \left[a(t, \boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a^*(t, \boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right], \quad \boldsymbol{k} \equiv (k_1, k_2, k_3). \tag{4.1.15}$$

Po dosadení tohto rozloženia do pohybovej rovnice (4.1.13) dostávame rovnicu pre amplitúdy $a(t, \boldsymbol{k})$

$$\ddot{a}(t, \boldsymbol{k}) + \omega_k^2 a(t, \boldsymbol{k}) = 0, \tag{4.1.16}$$

kde $\omega_k^2 = \boldsymbol{k}^2 + m^2$. Táto rovnica má presne tvar rovnice pre jednorozmerný harmonický oscilátor. Preto môžeme amplitúdu $a(t, \boldsymbol{k})$ interpretovať ako amplitúdu oscilátora s frekvenciou $\omega_k = (\boldsymbol{k}^2 + m^2)^{1/2}$.

Periodické okrajové podmienky v priamej $\boldsymbol{x}-$reprezentácii ďalej vedú na diskrétne hodnoty vlnového vektora

$$\boldsymbol{k} = \left(\frac{2\pi}{L} n_1, \frac{2\pi}{L} n_2, \frac{2\pi}{L} n_3 \right), \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.1.17}$$

Každej trojici celých čísel (n_1, n_2, n_3) tak odpovedá oscilátor s energiou

$$\omega(\boldsymbol{k}) = \left\{ m^2 + \frac{4\pi^2}{L^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \right\}^{1/2}. \tag{4.1.18}$$

Zo získaných výsledkov môžeme dospieť k záveru, že relativistické pole $\varphi(x)$, ktoré vyhovuje Kleinovej-Gordonovej rovnici (4.1.13) je fyzikálne ekvivalentné súboru harmonických oscilátorov, ktorého zložky vieme očíslovať trojicou celých čísel. Jednotlivé oscilátory sa nachádzajú v uzloch diskrétnej mriežky trojrozmerného hybnostného priestoru. V priamom priestore, každému z nich prináleží rovinná vlna tvaru $\exp(i\omega(\boldsymbol{k})t - i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x})$.

Prechod k reálnemu nekonečnému priestoru $L \to \infty$ vedie efektívne k nahradeniu diskrétneho hybnostného priestoru spojitým. Dochádza pritom k zámene

$$\left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \sum_{\boldsymbol{k}} \ldots \longrightarrow \int \mathrm{d}^3 k \ldots \tag{4.1.19}$$

a navyše sa nám objaví Diracova delta funkcia

$$\left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}} \longrightarrow \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}). \tag{4.1.20}$$

So zmenou normalizácie operátorov

$$\hat{a}_{\boldsymbol{k}} \longrightarrow \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{3/2} \hat{a}_{\boldsymbol{k}} \tag{4.1.21}$$

sa komutačné relácie (4.1.11) prepíšu do

$$\left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}, \hat{a}_{\boldsymbol{q}}^\dagger \right] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}), \quad \left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\dagger, \hat{a}_{\boldsymbol{q}}^\dagger \right] = \left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}, \hat{a}_{\boldsymbol{q}} \right] = 0. \tag{4.1.22}$$

Formula pre stav (4.1.9) zostáva v platnosti. Jediný rozdiel spočíva v tom, že odpovedajúce stavy obsahujú kvantá s presne určenými hodnotami hybnosti. V konfiguračnom priestore by im odpovedali rovinné vlny, a preto takéto stavy ani nevykazujú konečnú normalizáciu.

Naznačeným spôsobom sa nám podarilo reprezentovať funkciu $\varphi(x)$ vo forme lineárnej funkcie operátorov $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ a tým pádom sa ona sama stáva novým bázovým objektom - kvantovým poľom (viď rovnica (4.1.15)).

4.2 Kanonické kvantovanie

V predchádzajúcej časti bol uvedený postup operátorovej formulácie kvantovo-mechanickej úlohy o harmonickom oscilátore, ktorý možno nahradiť v istom zmysle aj priamejším postupom. Ten je založený na tzv. formalizme kanonického kvantovania. Stručne povedané potrebujeme určiť kanonické premenné danej teórie a na ne naložiť komutačné vzťahy kopírujúce štruktúru Poissonovych zátvoriek danej klasickej teórie.

Pre jednoduchosť uvažujme opäť klasický jednorozmerný oscilátor. V kanonickom formalizme (H. Goldstein, C. Poole & J. Safko, 2002; J. Kvasnica et al., 2004) sú jeho fundamentálnymi premennými zovšeobecnená súradnica q a k nej pridružená zovšeobecnená hybnosť

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}.$$

V premenných (q, p) má (klasický) Hamiltonián oscilátora tvar $H = p^2/2 + \omega^2 q^2/2$. Pohybovú rovnicu pre dynamickú premennú $A = A(q, p)$ možno vyjadriť prostredníctvom rovnice

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \{A, H\}, \tag{4.2.1}$$

kde na pravej strane vystupujú Poissonove zátvorky (H. Goldstein, C. Poole & J. Safko, 2002)

$$\{a, b\} \equiv \frac{\partial a}{\partial q}\frac{\partial b}{\partial p} - \frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial q}. \tag{4.2.2}$$

Priamym dosadením sa ľahko overia vzťahy

$$\{q, p\} = 1, \quad \dot{q} = \{q, H\} = p, \quad \dot{p} = \{p, H\} = -\omega^2 q. \tag{4.2.3}$$

Posledné dve rovnice sú tzv. kanonické pohybové rovnice. S ich pomocou je možné rozložiť všeobecné riešenie ako súčet riešenia s kladnou a zápornou frekvenciou

$$q(t) = \frac{a^{(+)}(t) + a^{(-)}(t)}{\sqrt{2\omega}}, \quad p(t) = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left[a^{(+)}(t) - a^{(-)}(t)\right]. \tag{4.2.4}$$

Pre ne sa ľahko odvodí pohybová rovnica

$$\dot{a}^{(\pm)}(t) = \pm i\omega a^{(\pm)}(t), \tag{4.2.5}$$

s riešením

$$a^{(\pm)}(t) = a^{(\pm)}(0)\exp(\pm i\omega t). \tag{4.2.6}$$

Spätným invertovaním vzťahov (4.2.4) a využitím (4.2.3) dostaneme

$$\{a^{(-)}(t), a^{(+)}(t)\} = -i. \tag{4.2.7}$$

Dosadenie (4.2.4) do Hamiltoniánu (4.1.1) vedie na

$$H = \frac{\omega}{2}\left[a^{(+)}(t)a^{(-)}(t) + a^{(-)}(t)a^{(+)}(t)\right] = \frac{\omega}{2}\left[a^{\dagger}a + aa^{\dagger}\right]. \tag{4.2.8}$$

V tomto výraze sme zachovali poradie výrazov $a^{(\pm)}$ tak, aby bol zjavný prechod ku kvantovému modelu. Vo výsledku (4.2.8) sme použili kompaktnejší zápis

$$a^{(-)} \equiv a, \qquad a^{(+)} \equiv a^{\dagger}.$$

Na základe porovnania klasického Hamiltoniánu (4.2.8) s jeho kvantovou verziou (4.1.8) možno formulovať kvantovaciu procedúru (N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1980; S. Weinberg, 1995) pomocou postulátu kanonického kvantovania:

> Dynamické premenné typu $q, p, a, a^{\dagger}, \ldots$ (a funkcie z nich odvodené ako napr. Hamiltonián H) prehlásime za operátory, ktoré pôsobia na vlnovú funkciu ψ stavu.
> Komutačné vzťahy sa určia na základe pravidla korešpondencie, t.j. v rovniciach typu (4.2.1),(4.2.3) a (4.2.7) sa Poissonove zátvorky (4.2.2) nahradia ich kvantovými verziami
>
> $$\{\hat{a}, \hat{b}\}_{\text{kvant.}} = \frac{1}{i}[\hat{a}, \hat{b}] = \frac{1}{i}(\hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}), \tag{4.2.9}$$
>
> t.j.
>
> $$\{a, b\}_{\text{klas.}} \to \frac{1}{i}[\hat{a}, \hat{b}] \tag{4.2.10}$$

Pre kvantový systém prejde potom pohybová rovnica (4.2.1) pre veličinu A (reprezentovanú operátorom $\hat{A}$) do tvaru

$$i\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t} = [\hat{A}, \hat{H}]. \tag{4.2.11}$$

Navyše rovnice (4.2.3) a (4.2.7) nadobudnú tvar komutátorov

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i, \quad [\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1. \tag{4.2.12}$$

Ľahko sa teraz ukáže, že daný Hamiltonián $\hat{H}$ sa dá prepísať do tvaru (4.1.8). Tým sme vlastne ukázali, že postulát kanonického kvantovania je ekvivalentný tradičnému prístupu pre systém oscilátorov, ktorý bol načrtnutý v predošlej časti 4.1. Ako základný princíp využijeme v ďalšom práve postulát kanonického kvantovania na získanie kvantovej formulácie daného problému. Pritom získaný opis bude automaticky predstavený v rámci formalizmu obsadzovacích čísel.

4.3 Schrödingerova a Heisenbergova reprezentácia

Pravdepodobne najčastejšie používaný spôsob opisu v kvantovej mechanike je založený na Schrödingerovej reprezentácii. V nej sa časový vývoj systému popisuje časovo závislou vlnovou funkciou $\psi = \psi(t)$, ktorá vyhovuje časovej Schrödingerovej rovnici

$$i\partial_t \psi(t) = \hat{H}\psi(t), \tag{4.3.1}$$

kde Hamiltonián $\hat{H}$ (operátor energie) nesie úplnú informáciu o časovom vývoji systému. V tejto reprezentácii odpovedajú dynamickým premenným A operátory $\hat{A}$, ktoré nezávisia explicitne na čase. Ich stredné hodnoty

$$\hat{A}_t = \overset{*}{\psi}(t)\hat{A}\psi(t) \tag{4.3.2}$$

ale môžu v princípe na čase závisieť. Časovú závislosť v (4.3.2) možno formálne presunúť z vlnovej funkcie na operátor $\hat{A}$. Preintegrujeme rovnicu (4.3.1)

$$\psi(t) = \hat{U}(t)\psi, \quad \hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t) \tag{4.3.3}$$

a dosadíme do (4.3.2)

$$\overset{*}{\psi}(t)\hat{A}\psi(t) = \overset{*}{\psi}\overset{*}{\hat{U}}(t)\hat{A}\hat{U}(t)\psi = \overset{*}{\psi}\hat{A}_H(t)\psi, \tag{4.3.4}$$

kde sme zaviedli

$$\hat{A}_H(t) \equiv \overset{*}{\hat{U}}(t)\hat{A}\hat{U}(t) = \mathrm{e}^{i\hat{H}t}\hat{A}\mathrm{e}^{-i\hat{H}t}. \tag{4.3.5}$$

Takýmto spôsobom sa časová závislosť preniesla z vlnovej funkcie na príslušný operátor. Reprezentáciu s takouto vlastnosťou nazývame Heisenbergova reprezentácia.

Zderivovaním rovnice (4.3.5) podľa času, dostaneme známu rovnicu

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}]. \tag{4.3.6}$$

Ak porovnáme (4.3.6) s (4.2.11), vidíme, že kanonické kvantovanie vedie priamočiaro na Heisenbergovu reprezentáciu.

V Heisenbergovej reprezentácii hraje zjavne výnimočnú rolu časová premenná. Keďže fundamentálna teória polí musí byť relativisticky invariantná, je možné položiť otázku o oprávnenosti použitia výlučne času. Prečo by sme nemohli rovnako dobre použiť aj priestorovú premennú? Ukazuje sa, že plne relativisticky prístup je možný, pričom čas tam nezohráva žiadnu výnimočnú rolu. Tento prístup bližšie opíšeme v ďalšej časti.

4.4 Relativistická schéma kvantovania polí

V dôsledku procedúry kvantovania sa z poľových funkcií stávajú poľové operátory, ktoré sa vyjadrujú pomocou kreačných a anihilačných operátorov. Medzi týmito je potrebné zadefinovať príslušné komutačné vzťahy. Všeobecný operátorový výraz potom pôsobí na vlnovú funkciu všetkých polí Φ. Podobne ako je tomu v kvantovej mechanike, vlnová funkcia Φ opisuje fyzikálny stav systému a je možné ju charakterizovať ako vektor v nejakom Hilbertovom priestore. Preto sa Φ zvykne označovať ako amplitúda stavu. Aby nedochádzalo k omylu, tak v tejto časti budeme značku striešky "ˆ" používať pre operátory, ktoré budú pôsobiť v Hilbertovom priestore stavov Φ a žiadnom inom. Inými slovami $\hat{\varphi}$ bude predstavovať kvantové pole.

V predchádzajúcich častiach 4.1, 4.2 a 4.3 sme ešte ponechali tradičné označenie operátorov pomocou striešky nad daným symbolom. V ďalšom od tohto upustíme s tým, že je potrebné interpretovať všetky poľové funkcie ako operátorové veličiny. V ďalsom teda, poľové výrazy typu φ, ψ, A^μ budú predstavovať poľové operátory a nie obyčajné poľové funkcie.

Analyzujme teraz transformačné vlastnosti vektorov Φ pri aktívnych transformáciách (Obr. 1.2)

$$x \to x' = \Lambda(\omega, x), \quad \varphi(x) \to \varphi'(x') = M(\omega)\varphi(x), \tag{4.4.1}$$

kde ω sú (konečné) parametre popisujúce Poincarého transformáciu a M predstavuje transformačnú maticu pre vektorové, resp. spinorové pole. Pre jednoduchosť vynechávame index kvantového poľa φ. Transformácie (4.4.1) istým spôsobom indukujú transformáciu stavového vektora Φ

$$\Phi \to \Phi' = U(\omega)\Phi, \tag{4.4.2}$$

pričom táto transformácia musí byť lineárna (aby bol zachovaný princíp superpozície stavov). V dôsledku zachovávajúcej sa pravdepodobnosti musí byť ďalej splnená normovacia podmienka

$$U^*(\omega)U(\omega) = 1. \tag{4.4.3}$$

V najjednoduchšom prípade translácií v Minkowského priestore platí, že

$$\varphi'(x) = \varphi(x - a). \tag{4.4.4}$$

Operátor U vieme zapísať v exponenciálnom tvare

$$U(a) = \exp(iP^\mu a_\mu), \tag{4.4.5}$$

ktorý vyplýva z grupových vlastností časopriestorových translácií. Podmienka unitárnosti (4.4.3) vedie na hermitovosť operátora P^μ, t.j. $(P^\mu)^\dagger = P^\mu$.

Často sa stretávame s operátorom posunu v čase, kedy $a_\mu = -\delta_{\mu 0} t$. Potom $U = \exp(iHt)$, pretože $H = P_0$ je operátorom energie (Hamiltonián). Operátor P^μ sa tak javí ako operátor štvorhybnosti. Práve tento prípad sme analyzovali v predchádzajúcej časti 4.3.

Zovšeobecnením vzťahu pre Heisenbergovu reprezentáciu (4.3.5) dostávame

$$\varphi'(x) = \varphi(x - a) = U^{-1}(a)\varphi(x)U(a). \tag{4.4.6}$$

Pre všeobecnú Lorentzovu transformáciu Λ zase máme

$$\varphi'(x) = \varphi(x') = U^{-1}(\Lambda)\varphi(x)U(\Lambda). \tag{4.4.7}$$

Základný postulát kvantovej teórie poľa (N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1980) je možné uviesť v nasledujúcom tvare

> Hermitovské operátory pre štvorhybnosť P^μ, moment hybnosti, operátor náboja, ktoré sú generátormi nekonečne malých transformácií stavového vektora Φ sa vyjadria potom operátorových poľových funkcií. Tie dostaneme prehlásením poľových výrazov φ v klasickej teórii za im odpovedajúce operátorové výrazy.

Poznámka:

Často sa používajú rôzne označenia pre operátor U. Napr. $U_\Lambda = U(\Lambda)$, resp. $U(\Lambda, a)$ pre prípad Poincarého grupy. ■

Pre nekonečne malé a sa stav Φ transformuje podľa predpisu

$$\Phi \to \Phi' = (1 + iP \cdot a)\Phi, \tag{4.4.8}$$

ktorý je v plnej analógii s transformáciou klasickej poľovej funkcie, t.j.

$$\varphi'(x) = \varphi(x - a) \approx (1 + ip \cdot a)\varphi(x). \tag{4.4.9}$$

Ak by $\varphi(x)$ odpovedalo zvyčajnej vlnovej funkcii, potom koeficienty p_ν môžeme intepretovať ako kvantovomechanické (vývinové) operátory štvorhybnosti

$$p_\nu = i\partial_\nu \equiv i\frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

Podotýkame, že je treba rozlišovať medzi P^μ (vývinový operátor v priestore stavových vektorov) a p_μ (vývinový operátor v priestore poľových funkcií).

Odvodíme teraz pohybovú rovnicu pre (všeobecné) kvantové pole $\hat{\varphi}(x)$. Po priamom dosadení do rovnice (4.4.6) máme

$$(1 + ip \cdot a)\varphi(x) = (1 - iP \cdot a)\varphi(x)(1 + iP \cdot a). \tag{4.4.10}$$

Odtiaľ po porovnaní členov prvého rádu v a dostaneme rovnicu

$$-\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\nu} = -iP_\nu\varphi(x) + i\varphi(x)P_\nu,$$

resp. po krátkej úprave

$$i\partial_\nu\varphi(x) = [\varphi(x), P_\nu]. \tag{4.4.11}$$

Túto rovnicu je možné chápať ako pohybovú (dynamickú) rovnicu pre kvantové pole $\varphi(x)$. Dynamika daného poľa je teda plne určená príslušnými vývinovými operátormi P_ν.

Zovšeobecnenie na Poincarého grupu je priamočiare a operátor U nadobudne tvar

$$U = \exp\left[i\left(P_\nu a^\nu + \frac{1}{2}M_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\right]. \tag{4.4.12}$$

pole $\varphi(x)$ sa v tomto prípade transformuje podľa vzťahu

$$\varphi'(x) = (1 + ip_\mu a^\mu + \frac{i}{2}m_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu})\varphi(x), \quad m_{\mu\nu} \equiv i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu). \tag{4.4.13}$$

Výrazy $m_{\mu\nu}$ nie sú nič iné ako generátory štvorrozmerných rotácií (boostov a rotácií v trojrozmernom priestore). Pre komplexné polia máme navyše globálnu kalibračnú transformáciu

$$\varphi \to \varphi' = \mathrm{e}^{i\alpha}\varphi, \quad \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}{}'\mathrm{e}^{-i\alpha}. \tag{4.4.14}$$

Príslušný operátor $U(\alpha)$ v transformácii $\Phi' = U(\alpha)\Phi$ má exponenciálnu štruktúru

$$U(\alpha) = \exp(i\alpha Q), \tag{4.4.15}$$

kde hermitovský operátor Q je operátor náboja.

Z pohybových rovníc (4.4.11) vieme získať predstavu o fyzikálnej interpretácii kladnej a zápornej frekvenčnej časti poľových operátorov. Uvažujme pole $\hat{\varphi}$ s hmotnosťou m, ktoré je možné zadať v tvare

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi^+(x) + \varphi^-(x), \\
\varphi^+(x) &= \int\limits_{k^0>0} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{ik\cdot x}\delta(k^2 - m^2)\varphi(k), \\
\varphi^-(x) &= \int\limits_{k^0>0} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{-ik\cdot x}\delta(k^2 - m^2)\varphi(-k).
\end{aligned}$$

Separátnym dosadením φ^+ a φ^- do (4.4.11) nájdeme

$$\left[\varphi^+, P^\mu\right] = -\int\limits_{k_0>0} \mathrm{d}k\, k^\mu \mathrm{e}^{ik\cdot x}\delta(k^2 - m^2)\varphi(k), \tag{4.4.16}$$

$$\left[\varphi^-, P^\mu\right] = \int\limits_{k_0>0} \mathrm{d}k\, k^\mu \mathrm{e}^{-ik\cdot x}\delta(k^2 - m^2)\varphi(-k), \tag{4.4.17}$$

odkiaľ už ľahko dostaneme

$$k_\mu\varphi^\pm(\boldsymbol{k}) = \mp[\varphi^\pm(\boldsymbol{k}), P_\mu]. \tag{4.4.18}$$

Vieme sa tiež ľahko presvedčiť, že po dosadení Fourierovej reprezentácie skalárneho poľa (2.1.38), elektromagnetického poľa (2.5.72), resp. spinorového poľa (3.6.14) prejde vzťah (4.4.6) do algebraického tvaru (4.4.18).

Zavedieme teraz vlastné stavy operátora P_ν s danou (vlastnou hodnotou) štvorhybnosťou p_ν vzťahom

$$P_\nu \Phi_p = p_\nu \Phi_p. \tag{4.4.19}$$

Vynásobme teraz rovnicu (4.4.18) sprava stavom Φ_p a po krátkej úprave máme jednak

$$P_\nu \varphi^+(\boldsymbol{k})\Phi_p = (p_\nu + k_\nu)\varphi^+(\boldsymbol{k})\Phi_p \tag{4.4.20}$$

a jednak

$$P_\nu \varphi^-(\boldsymbol{k})\Phi_p = (p_\nu - k_\nu)\varphi^-(\boldsymbol{k})\Phi_p. \tag{4.4.21}$$

Z týchto dvoch vzťahov vyplýva, že výraz $\varphi^+(\boldsymbol{k})\Phi_p$ je buď nulový, alebo predstavuje amplitúdu stavu so štvorhybnosťou $p + k$. Analogickú úvahu vieme vykonať aj pre výraz $\varphi^-(\boldsymbol{k})\Phi_p$. Keďže zároveň platí relativistický vzťah $k^2 = m^2$, môžeme operátor φ^+ stotožniť s kreačným operátorom častíc s hmotnosťou m a štvorhybnosťou k_μ. Podobne operátor φ^- asociujeme s anihilačným operátorom.

Podotýkame, že diskusia plynúca z (4.4.20) a (4.4.21) zostáva v platnosti pre akýkoľvek druh poľa a štatistiky (či už ide o Fermiho-Diracove alebo Boseho-Einsteinove pole).

Ako je to s nábojovým operátorom? Vychádzajúc z (4.4.9) a vzťahov (4.4.14), (4.4.15), vieme povedať, že poľové funkcie sa transformujú nasledovne

$$\mathrm{e}^{i\alpha}\varphi = U^{-1}(\alpha)\varphi U(\alpha), \quad \mathrm{e}^{-i\alpha}\overset{*}{\varphi} = U^{-1}(\alpha)\overset{*}{\varphi}U(\alpha). \tag{4.4.22}$$

Podobne ako predtým, uvažovaním nekonečne malých transformácií s parametrom α, odvodíme rovnice

$$(1 + i\alpha)\varphi = (1 - i\alpha Q)\varphi(1 + i\alpha Q), \quad (1 - i\alpha)\overset{*}{\varphi} = (1 - i\alpha Q)\overset{*}{\varphi}(1 + i\alpha Q). \tag{4.4.23}$$

Následne zanedbaním členov rádu $\mathcal{O}(\alpha^2)$ a porovnaním členov prvého rádu po α, dostaneme

$$\varphi(x) = [\varphi(x), Q], \quad \overset{*}{\varphi}(x) = -\left[\overset{*}{\varphi}(x), Q\right]. \tag{4.4.24}$$

Rovnice (4.4.24) prirodzene dopĺňajú pohybové rovnice (4.4.18).

Nech ďalej $\Phi_{p,q}$ označuje stav so štvorhybnosťou p a zároveň vlastným stavom operátora Q, t.j.

$$Q\Phi_{p,q} = q\Phi_{p,q}. \tag{4.4.25}$$

Použijeme osvedčený rozklad daného poľa na dve zložky $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$ ako sme vykonali v diskusii o klasickom poli v časti 2.1.1 a zapíšeme prvý zo vzťahov (4.4.24)

$$\varphi^\pm = \varphi^\pm Q - Q\varphi^\pm. \tag{4.4.26}$$

Pôsobením tejto rovnice na stav $\Phi_{p,q}$ odvodíme

$$\varphi^{\pm}\Phi_{p,q} = \varphi^{\pm}q\Phi_{p,q} - Q\varphi^{\pm}\Phi_{p,q} \Longrightarrow Q(\varphi^{\pm}\Phi_{p,q}) = (q-1)(\varphi^{\pm}\Phi_{p,q}). \tag{4.4.27}$$

Operátory $\varphi^{\pm}$ preto môžeme interpretovať ako anihilačné operátory vzhľadom na náboj. Analogicky by sme dostali, že

$$Q(\overset{*}{\varphi}{}^{\pm}\Phi_{p,q}) = (q+1)(\overset{*}{\varphi}{}^{\pm}\Phi_{p,q}). \tag{4.4.28}$$

Operátory $\overset{*}{\varphi}{}^{\pm}$ budeme interpretovať ako kreačné operátory vzhľadom na náboj. Súhrnne intepretujeme výsledok zapôsobenia daného operátora nasledovne

- $\varphi^{+}(\boldsymbol{k})$ kreácia (vznik) častice s nábojom -1
- $\varphi^{-}(\boldsymbol{k})$ anihilácia častice s nábojom $+1$
- $\overset{*}{\varphi}{}^{+}(\boldsymbol{k})$ kreácia častice s nábojom $+1$
- $\overset{*}{\varphi}{}^{-}(\boldsymbol{k})$ anihilácia častice s nábojom -1

4.5 Amplitúda vákua a Fockova reprezentácia

V krátkosti si zhrnieme konštrukciu základného-vákuového stavu s ľubovoľným počtom rôznych druhov častíc. Uvažujme systém pozostávajúci z niekoľkých vzájomne neinteragujúcich kvantových polí. Polia nech sú popísané svojimi (operátorovými) poľovými funkciami $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Základný stav definujeme ako stav s nulovou hodnotou celkovej hybnosti a minimálnou hodnotou energie. Keďže operátory φ^{-} znižujú počet excitácií v systéme, tak možno definovať základný stav podmienkou

$$\forall x : \; \varphi_i^{-}(x)\Phi_0 = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.5.1}$$

Podobnou úvahou by sme dospeli k podmienke

$$\Phi_0^{*}\varphi_i^{+}(x) = 0. \tag{4.5.2}$$

Prechod k hybnostnej reprezentácii zase odpovedá podmienke

$$\varphi_i^{-}(\boldsymbol{k})\Phi_0 = 0. \tag{4.5.3}$$

Tento vzťah spolu k nemu združeným výrazom $\Phi_0^{*}\varphi_j^{+}(\boldsymbol{k}) = 0$ a normovacou podmienkou

$$\Phi_0^{*}\Phi_0 = 1 \tag{4.5.4}$$

možno považovať za definíciu vákua voľných (neinteragujúcich) polí.

Amplitúdu ľubovoľného stavu daného dynamického systému polí je možné získať pomocou zavedeného vákuového stavu a dostatočného použitia algebry kreačných operátorov. Napríklad amplitúda stavu, obsahujúceho s-častíc zloženého z

$j_1, \dots, j_s$ druhov (niektoré z týchto indexov môžu byť rovnaké), je vo všeobecnom prípade daná výrazom

$$\int \mathrm{d}^3k_1 \dots \mathrm{d}^3k_s \; F_s^{(j_1,\dots,j_s)}(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_s)\varphi_{j_1}^+(\boldsymbol{k}_1)\dots\varphi_{j_s}^+(\boldsymbol{k}_s)\Phi_0. \tag{4.5.5}$$

Vystupujúce funkcie $F_s^{(j_1,\dots,j_s)}(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_s)$ majú význam zvyčajných kvantovomechanických vlnových funkcií systému s-častíc v hybnostnej reprezentácii.

Vo všeobecnom prípade, kedy je počet častíc premenlivý (môže sa meniť napr. v dôsledku interakcií), je daná amplitúda popísaná sústavou funkcií $\{F_s\}$. Daný stav sa potom zapíše v tvare lineárnej kombinácii výrazov (4.5.5) v tvare

$$\Phi = \sum_{(j,s \geqq 0)} \int \mathrm{d}^3k_1 \dots \mathrm{d}^3k_s \; F_s^{(j_1,\dots,j_s)}(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_s)\varphi_{j_1}^+(\boldsymbol{k}_1)\dots\varphi_{j_s}^+(\boldsymbol{k}_s)\Phi_0. \tag{4.5.6}$$

Fakticky sme dospeli k tzv. Fockovskej reprezentácii amplitúd stavov. Spätný prechod k priamej reprezentácii vykonáme s pomocou inverznej Fourierovej transformácie

$$F_s(\dots\boldsymbol{k}\dots) = \frac{1}{(2\pi)^{3s/2}} \int \mathrm{d}^3x_1 \dots \mathrm{d}^3x_s \, \mathrm{e}^{i\sum \boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{x}_j} F_s(\dots\boldsymbol{x}\dots),$$
$$\varphi^+(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3x \, \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \varphi^+(0,\boldsymbol{x}), \quad \varphi(0,\boldsymbol{x}) = \varphi(x)|_{x^0=0}. \tag{4.5.7}$$

Namiesto (4.5.6) dostaneme výraz

$$\Phi = \sum_{(j,s\geqq 0)} \int F_s(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_s) \prod_{1\leqq\nu\leqq s} \left\{\varphi_{j_\nu}^+(0,\boldsymbol{x}_\nu)\mathrm{d}^3x_\nu\right\}\Phi_0. \tag{4.5.8}$$

V tomto prípade funkcie $F_s(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_s)$ sú v nerelativistickom prípade rovné vlnovým funkciám v konfiguračnom priestore. Podotýkame, že časová závislosť v (4.5.8) vypadla. Ide o celkom prirodzený dôsledok toho, že v nami zvolenej reprezentácii je pri absencii interakcií amplitúda konštantná.

4.6 Typy komutačných vzťahov

V tejto časti sa zameriame na určenie komutačných vzťahov medzi operátorovými vlnovými funkciami. Pri kvantovaní voľných teórií sme videli, že poľové funkcie bolo možné vyjadriť ako lineárne kombinácie zovšeobecnených súradníc a hybností. V danom prípade sú klasické Poissonove zátvorky funkcií polí $\{\varphi(x),\varphi(y)\}$ funkciami rozdielu $x-y$, pričom nezávisia na poli φ. Prvá z týchto vlastností je dôsledkom predpokladanej translačnej invariantnosti systému.

Na základe princípu korešpondencie dostávame následne pre kvantovú teóriu voľných polí komutačný vzťah

$$\{\varphi_i(x),\varphi_j(y)\}_- \equiv [\varphi_i(x),\varphi_j(y)] = \varphi_i(x)\varphi_j(y) - \varphi_j(y)\varphi_i(x) = n_{ij}(x-y). \tag{4.6.1}$$

Tým ale nie sú pokryté všetky prípustné možnosti, s ktorými sa vo fyzikálnom svete vieme stretnúť. Ako alternatívu môžeme predpokladať aj antikomutačnú verziu medzi dvojicou polí

$$\{\varphi_i(x), \varphi_j(y)\}_+ \equiv \{\varphi_i(x), \varphi_j(y)\} = \varphi_i(x)\varphi_j(y)+\varphi_j(y)\varphi_i(x) = n_{ij}(x-y). \quad (4.6.2)$$

Hovoríme, že kvantá polí, ktoré vyhovujú (4.6.1), sú opísané Boseho-Einsteinovou štatistikou a im odpovedajúce častice nazývame bozóny. Na druhej strane, kvantá polí, ktoré vyhovujú (4.6.2), sú opísané Fermiho-Diracovou štatistikou a im odpovedajúce častice nazývame fermióny.

Presný tvar komutačných funkcií n sa odvodí z rovníc (4.4.11), (4.4.24) a zo štruktúry operátora energie daného poľa. Ukážeme teraz, že bez ohľadu na typ komutačného vzťahu, musí platiť, že komutačná funkcia voľných polí závisí len na rozdiele $x - y$, t.j.

$$\{\varphi_i(x), \varphi_j(y)\} = n_{ij}(x - y), \quad (4.6.3)$$

kde teraz (pre potreby tejto podkapitoly) môžu zátvorky $\{\ldots\}$ predstavovať ako komutáror tak aj antikomutátor.

Na dôkaz budeme uvažovať dané vzťahy v hybnostnej reprezentácii. Keďže tá je daná Fourierovou transformáciou, ktorá je lineárna, tak (anti)komutátory frekvenčných zložiek polí $\varphi^{\pm}(\boldsymbol{k})$ musia byť komplexné funkcie (a nie operátorová veličina).

Najskôr ukážeme, že operátory s rovnakým znakom musia nutne komutovať, resp. antikomutovať, t.j. platnosť rovnice

$$\{\varphi_i^{\pm}(\boldsymbol{k}), \varphi_j^{\pm}(\boldsymbol{q})\} = 0. \quad (4.6.4)$$

Uvažujme amplitúdu Φ_p, ktorá bola zavedená skôr v (4.4.19) a zapôsobme na ňu operátormi $\varphi_i^{\dagger}(\boldsymbol{k})$ a $\varphi_j^{\dagger}(\boldsymbol{q})$ v rôznom poradí. Dostaneme dva stavy Φ_1 a Φ_2

$$\Phi_1 = \varphi_i^{\dagger}(\boldsymbol{k})\varphi_j^{\dagger}(\boldsymbol{q})\Phi_p, \quad \Phi_2 = \varphi_j^{\dagger}(\boldsymbol{q})\varphi_i^{\dagger}(\boldsymbol{k})\Phi_p. \quad (4.6.5)$$

Na základe toho, čo sme už uviedli, vieme, že pre im odpovedajúce energie platí

$$P_0\Phi_{1,2} = (p_0 + k_0 + q_0)\Phi_{1,2}.$$

Vzájomným sčítaním a odčítaním rovníc (4.6.5) máme

$$P_0(\Phi_1 \pm \Phi_2) = P_0\{\varphi_i^{+}(\boldsymbol{k}), \varphi_j^{+}(\boldsymbol{q})\}\Phi_p = (p_0 + k_0 + q_0)\{\varphi_i^{+}, \varphi_j^{+}\}\Phi_p. \quad (4.6.6)$$

Ak teraz predpokladáme, že $\{\varphi_i^{+}, \varphi_j^{+}\}$ je nejaké (komplexné) číslo rôzne od nuly, tak po jeho formálnom vykrátení by sme dostali

$$P_0\Phi_p = (p_0 + k_0 + q_0)\Phi_p, \quad (4.6.7)$$

čo je v rozpore s už odvodeným vzťahom (4.4.19). Tým sme vlastne dokázali (4.6.4).

Uvažujme ďalej $\varphi_i^{+}(\boldsymbol{k})$ a $\varphi_j^{-}(\boldsymbol{q})$ za predpokladu $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{q}$. Analogickým spôsobom ako pri stavoch (4.6.5) skonštruujeme stavy Φ_1 a Φ_2 a tentokrát dostaneme

$$P_0(\Phi_1 \pm \Phi_2) = P_0\{\varphi_i^{+}(\boldsymbol{k}), \varphi_j^{-}(\boldsymbol{q})\}\Phi_p = (p_0 + k_0 - q_0)\{\varphi_i^{+}, \varphi_j^{+}\}\Phi_p. \quad (4.6.8)$$

Ak by sme predpokladali, že $\{\varphi_i^+(\boldsymbol{k}), \varphi_j^-(\boldsymbol{q})\} \neq 0$, tak dochádzame opäť k sporu

$$P_0\Phi_p = \underbrace{(p_0 + k_0 - q_0)}_{\neq p_0}\Phi_p.$$

Dokopy teda máme

$$\{\varphi_i^\pm(\boldsymbol{k}), \varphi_j^\mp(\boldsymbol{q})\} = 0, \quad \text{ak} \quad \boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{q} \tag{4.6.9}$$

Vzťahy (4.6.4) a (4.6.9) majú jednoduchú fyzikálnu interpretáciu:

Akty kreácie (anihilácie) častíc rôznych polí sú na sebe nezávislé a takisto sa neovplyvňujú anihilácie a kreácie častíc s rôznymi hodnotami hybností.

Vo všeobecnom prípade sa môže na pravej strane rovnice (4.6.9) objaviť výraz $\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q})$. To ale v konfiguračnom priestore vedie na závislosť (4.6.3). Takýto výraz potom odráža translačnú invariantnosť (anti)komutačných relácií. Je preto celkom prirodzené, že sme na dôkaz použili vlastnosti operátora štvorhybnosti, ktorý je generátorom časopriestorových translácií.

Nie je ťažké ukázať, že v prípade komplexných polí, okrem rovnice (4.6.4), (anti)komutátory operátorov príslušných častíc s rôznymi nábojmi sú taktiež nulové

$$\{\varphi^+, \varphi^-\} = \{\overset{*}{\varphi}{}^+, \overset{*}{\varphi}{}^-\} = 0. \tag{4.6.10}$$

Na dôkaz je navyše potrebné uvažovať amplitúdu Φ_q s danou hodnotou náboja a vykonať podobnú úvahu ako pri dôkaze (4.6.4). Fyzikálny význam (4.6.10) je v tom, že kreácia a anihilácia častíc s rôznymi hodnotami nábojov sú na sebe nezávislé (kvantovo-mechanicky neinterferujú).

Považujeme teda za dokázané, že pre ľubovoľné (komplexné) pole iba nasledujúce výrazy

$$\{u_a^-(\boldsymbol{p}), \overset{*}{u}{}_a^+(\boldsymbol{p})\}, \quad \{\overset{*}{u}{}_a^-(\boldsymbol{p}), u_a^+(\boldsymbol{p})\} \tag{4.6.11}$$

môžu byť principiálne nenulové. Im odpovedajúce poľové výrazy v konfiguračnom priestore sú preto translačne invariantné

$$\{\varphi^\pm(x), \overset{*}{\varphi}{}^\mp(y)\} = n^\pm(x - y). \tag{4.6.12}$$

Ich súčet vedie na celkovú komutačnú funkciu

$$\{\varphi(x), \overset{*}{\varphi}(y)\} = n^+(x - y) + n^-(x - y) = n(x - y). \tag{4.6.13}$$

Na nájdenie explicitných výrazov pre komutačné funkcie danej teórie je nutné využiť vzťahy pre operátor štvorhybnosti a použiť pohybové rovnice (4.4.11) a (4.4.24).

4.6.1 Fermiho-Diracova a Boseho-Einsteinova štatistika

Na určenie konkrétneho typu komutačných vzťahov použijeme teraz (4.4.11). Pritom operátor štvorhybnosti zapíšeme v tvare

$$P_\nu = \sum_s \int \mathrm{d}^3q\, q_\nu \left[\overset{*}{a}{}_s^+(\boldsymbol{q}) a_s^-(\boldsymbol{q}) \pm \overset{*}{a}{}_s^-(\boldsymbol{q}) a_s^+(\boldsymbol{q})\right]. \tag{4.6.14}$$

V súlade s už spomínanými výrazmi klasických polí, t.j. (2.1.46), (2.2.12), (2.4.35), (2.5.80) a (3.6.22), vyjadríme tento výraz pomocou nezávislých amplitúd $a_s^{\pm}(\boldsymbol{k})$ vo všeobecnom tvare

$$\varphi_a^{\pm}(\boldsymbol{k}) = \sum_s v_a^{s,\pm}(\boldsymbol{k}) a_s^{\pm}(\boldsymbol{k}), \tag{4.6.15}$$

kde koeficienty $v_a^{s,\pm}(\boldsymbol{k})$ sú nejaké komplexné funkcie (nie operátory).

Keďže operátory $a^{\pm}$ a $\overset{*}{a}{}^{\pm}$ nekomutujú, tak ich poradie v (4.6.14) je také isté ako poradie funkcií φ a $\overset{*}{\varphi}$ v Lagrangiáne. Pripomeňme, že operátory $a^{\pm}$ a $\overset{*}{a}{}^{\pm}$ sú prepojené operáciou hermitovského združenia

$$(a^{\pm}(\boldsymbol{k}))^{*} = \overset{*}{a}{}^{\mp}(\boldsymbol{k}).$$

Horné znamienko + (plus) pred druhým výrazom na pravej strane (4.6.14) píšeme pre polia s celočíselným spinom (skalárne, vektorové, elektromagnetické) a znamienko − (mínus) pre polia s poločíselným spinom (spinorové pole).

Na odvodenie komutačných vzťahov si najskôr uveďme vzťah pre komutátory operátorov $a^{\pm}$ a kvadratických výrazov na pravej strane (4.6.14) v tvare

$$\left[a^{\pm}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{q}) a^{-}(\boldsymbol{q})\right] = \{a^{\pm}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{q})\} a^{-}(\boldsymbol{q}) - \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{q}) \{a^{-}(\boldsymbol{q}), a^{\pm}(\boldsymbol{k})\}. \tag{4.6.16}$$

Ako už bolo spomenuté, výraz $\{O_1, O_2\}$ označuje buď komutátor alebo antikomutátor operátorov $O_{1,2}$. Pritom na pravej strane rovnice (4.6.16) musíme konzistentne použiť ten istý typ komutačného výrazu.

Analogicky platí

$$\left[a^{\pm}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{q}) a^{+}(\boldsymbol{q})\right] = \{a^{\pm}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{q})\} a^{+}(\boldsymbol{q}) - \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{q}) \{a^{+}(\boldsymbol{q}), a^{\pm}(\boldsymbol{k})\}. \tag{4.6.17}$$

Vďaka vzťahom (4.6.4) a (4.6.10) sú ďalej splnené operátorové výrazy

$$\begin{aligned}
&[a^{+}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{q}) a^{-}(\boldsymbol{q})] = [a^{-}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{q}) a^{+}(\boldsymbol{q})] = 0, \\
&[a^{-}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{q}) a^{-}(\boldsymbol{q})] = \{a^{-}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{q})\} a^{-}(\boldsymbol{q}), \\
&[a^{+}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{q}) a^{+}(\boldsymbol{q})] = \{a^{+}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{q})\} a^{+}(\boldsymbol{q}).
\end{aligned}$$

Dosadenie všeobecného výrazu pre celkovú štvorhybnosť (4.6.14) do pohybovej rovnice pre polia (4.4.18) dáva dvojicu rovníc

$$\begin{aligned}
k_\nu a_i^{-}(\boldsymbol{k}) &= \int \mathrm{d}^3 q \, q_\nu \sum_j \{a_i^{-}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_j^{+}(\boldsymbol{q})\} a_j^{-}(\boldsymbol{q}), \\
\mp k_\nu a_i^{+}(\boldsymbol{k}) &= \int \mathrm{d}^3 q \, q_\nu \sum_j \{a_i^{+}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_j^{-}(\boldsymbol{q})\} \overset{*}{a}{}_j^{+}(\boldsymbol{q}).
\end{aligned}$$

Z nich vidíme, že vystupujúce výrazy $\{\ldots\}$ na pravých stranách musia byť úmerné vhodnej Diracovej delta funkcii

$$\{a_i^{-}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_j^{+}(\boldsymbol{q})\} = \delta_{ij} \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}), \tag{4.6.18}$$

$$\{a_i^+(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_j^-(\boldsymbol{q})\} = \mp\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}). \tag{4.6.19}$$

V poslednom výraze je nejednoznačnosť týkajúca sa znamienka zdôraznená explicitne. Ide o priamy dôsledok predpokladaného rozkladu pre celkovú štvorhybnosť (4.6.14). Pre pole každého typu sme tak odvodili dva druhy komutačných vzťahov. Požiadavka, aby boli tieto vzťahy symetrické vzhľadom na operáciu nábojového združenia (inak povedané zámenu častíc na antičastice)

$$a_i^\pm(\boldsymbol{k}) \longleftrightarrow \overset{*}{a}{}_i^\pm(\boldsymbol{k}) \tag{4.6.20}$$

potom jednoznačne určuje druh kvantovania v oboch možných prípadoch. Symetria (4.6.20) odráža skutočnosť, že voľba medzi fundamentálnou poľovou funkciou φ a k nej komplexne združenou $\overset{*}{\varphi}$ je púhou konvenciou a nie fundamentálnou fyzikálnou vlastnosťou. Fyzikálne plne rovnocenná by bola voľba $\xi = \overset{*}{\varphi}$, $\overset{*}{\xi} = \varphi$. Táto substitúcia by ovplyvnila operátor náboja, ktorý nie je invariantný vzhľadom na (4.6.20). Zároveň ale táto substitúcia neovplyvní pohybovú rovnicu (4.4.11) a výraz pre štvorhybnosť. Podmienka symetrickosti vzhľadom na (4.6.20) taktiež poskytuje správny prechod od komplexného k reálnemu poľu $\overset{*}{\varphi} = \varphi(x)$, $\overset{*}{a}{}^\pm(\boldsymbol{k}) = a^\pm(\boldsymbol{k})$.

Transformácia uvedeného typu (4.6.20) sa nazýva nábojové združenie a jej odpovedajúcu symetriu nazývame nábojová symetria. Ak budeme uvažovať rovnicu (4.6.19) so znamienkom plus na pravej strane (prípad celočíselného spinu), tak potom symetria rovníc (4.6.18) a (4.6.19) podľa (4.6.20) implikuje, že symbol $\{\ldots\}$ musíme nutne interpretovať ako komutátor. Naopak, ak by sme volili znamienko mínus v (4.6.19) (spinorové pole), tak by daná symetria bola zaručená podmienkou

$$\{a, b\} \to \{a, b\}_+. \tag{4.6.21}$$

Stručne povedané, ukázali sme, že polia s celočíselným spinom sa kvantujú podľa Boseho-Einstenovho predpisu

$$\left[a_i^-(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_j^+(\boldsymbol{q})\right] = \left[\overset{*}{a}{}_i^-(\boldsymbol{k}), a_j^+(\boldsymbol{q})\right] = \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}). \tag{4.6.22}$$

Na druhej strane polia s poločíselným spinom sa kvantujú Fermiho-Diracovovým spôsobom

$$\left\{a_i^-(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_j^+(\boldsymbol{q})\right\}_+ = \left\{\overset{*}{a}{}_i^-(\boldsymbol{k}), a_j^+(\boldsymbol{q})\right\}_+ = \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}). \tag{4.6.23}$$

4.6.2 Pauliho veta

Získané výsledky v predošlej časti predstavujú v skutočnosti špeciálny prípad Pauliho vety, ktorá dáva do súvisu vzťah medzi transformačnými vlastnosťami poľa a spôsobom jeho kvantovania (vzťah spinu so štatistikou). Tvrdenie vety je možné v krátkosti zosumarizovať

> Polia častíc s celočíselným spinom podliehajú Boseho-Einsteinovmu spôsobu kvantovania a polia častíc s poločíselným spinom zase Fermiho-Diracovmu spôsobu.

Pauliho vetu možno použiť na polia akéhokoľvek spinu a nachádza mnoho aplikácií v štatistickej fyzike a teórii tuhých látok. Táto dôležitá vlastnosť plynie z fundamentálnych postulátov kvantovej teórie poľa a dosiaľ nie je známy dôkaz, ktorý by na nich nebol založený.

Ako sme si mohli všimnúť, tak na dôkaz sme využili symetriu vzhľadom na nábojové združenie. Sú možné aj iné spôsoby, pretože narušenie spojenia medzi spinom a štatistikou vedie k niekoľkým fundamentálnym protirečeniam. Mohli by sme napríklad namiesto (4.6.20) požadovať pozitívnu definitnosť metriky v Hilbertovom priestore, t.j. splnenie nerovnosti

$$\Phi^* A^* A \Phi = \Phi^* |A|^2 \Phi \geqq 0.$$

Zistili by sme potom, že k rovniciam (4.6.18) a (4.6.19) sa dá dospieť len v prípade, ak platí podmienka (4.6.17). Zároveň, pri Fermiho-Diracovom spôsobe kvantovania poľa s celočíselným spinom dostaneme kontradikciu s vlastnosťami komutátora. Znamienko mínus v (3.6.22) v druhom člene na pravej strane pre energiu spinorového poľa by zase viedlo na nemožnosť skvantovať toto pole podľa Boseho-Einsteinovho spôsobu.

4.6.3 Normálny súčin. Vákuová stredná hodnota

Zavedieme teraz dôležitý pojem normálneho tvaru operátorov a normálneho súčinu operátorov.

> Hovoríme, že operátor je v normálnom tvare, ak všetky v ňom vystupujúce kreačné operátory φ^+ sa nachádzajú naľavo od všetkých anihilačných operátorov φ^-.

Praktický dôvod na zavedenie normálneho súčinu je ten, že značne uľahčuje konkrétne výpočty v poruchovej teórii pre rôzne rozptylové a rozpadové procesy. Napríklad na výpočet maticového elementu $\Phi^* O \Phi$ operátora O v normálnom tvare potrebujeme vykonať v podstate len dva kroky

1) prekomutovať všetky anihilačné operátory φ^- z O s kreačnými operátormi z amplitúdy Φ,

2) prekomutovať všetky kreačné operátory φ^+ z O s anihilačnými operátormi z amplitúdy Φ^*.

Tieto kroky opakujeme až kým sa nevyskytne nejaký operátor φ^- pôsobiaci na Φ_0, resp. operátor φ^+ pôsobiaci na Φ_0^*, ktoré vypadnú (pozri (4.5.1) a (4.5.2)). Nakoniec nám zostanú len isté členy, v ktorých sa "správnym spôsobom" vykrátia dané operátory.

Pre konkrétnosť uvažujme jednoduchý príklad. Majme dva operátory bozónovského typu $\overset{*}{\varphi}(x)$ a $\varphi(y)$. Postupne upravujme ich súčin s použitím ich komutátora

$$\begin{aligned}\overset{*}{\varphi}(x)\varphi(y) &= (\overset{*}{\varphi}{}^+(x) + \overset{*}{\varphi}{}^-(x))(\varphi^+(y) + \varphi^-(y)) \\ &= \overset{*}{\varphi}{}^+(x)\varphi^+(y) + \overset{*}{\varphi}{}^+(x)\varphi^-(y) + \overset{*}{\varphi}{}^-(x)\varphi^+(y) + \overset{*}{\varphi}{}^-(x)\varphi^-(y) \\ &= \overset{*}{\varphi}{}^+(x)\varphi^+(y) + \overset{*}{\varphi}{}^+(x)\varphi^-(y) + \varphi^+(x)\overset{*}{\varphi}{}^-(y) + \overset{*}{\varphi}{}^-(x)\varphi^-(y) \\ &\quad - in^-(x-y),\end{aligned} \tag{4.6.24}$$

kde sme v poslednom kroku prepísali $\overset{*}{\varphi}^{-}(x)\varphi^{+}(y)$ pomocou predpokladaného komutačného vzťahu (4.6.12). Takýto proces sa dá zovšeobecniť na ľubovoľný súčin operátorov a je obsahom Wickovej vety. Jej podrobný dôkaz a aplikácie možno nájsť v literatúre (A. N. Vasil'ev, 1998; N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1980; S. Weinberg, 1995). Podľa tejto vety platí, že daný operátorový výraz vieme vždy prepísať do súčtu výrazov zapísaných v normálnom tvare, ktoré môžu okrem kreačných a anihilačných operátorov teórie obsahovať navyše komutačné funkcie Δ. Tým pádom vieme takýto výraz považovať za polynóm vzhľadom na komutačné funkcie Δ. Členy rozkladu, ktoré neobsahujú ani jednu funkciu Δ, budeme nazývať normálnym súčinom daného operátora. Na označenie normálneho súčinu budeme používať dva typy označenia a to pomocou dvojbodky

$$:\varphi_1\dots\varphi_n: \tag{4.6.25}$$

alebo symbolu N

$$\mathrm{N}\{\varphi_1\dots\varphi_n\}. \tag{4.6.26}$$

Normálny súčin voláme skrátene aj N-súčin a toto pomenovanie budeme ďalej používať.

Hore uvedený príklad (4.6.24) odpovedá nasledujúcemu výrazu pre N-súčin polí $\overset{*}{\varphi}(x)$ a $\varphi(y)$

$$:\overset{*}{\varphi}(x)\varphi(y):=\overset{*}{\varphi}^{+}(x)\varphi^{+}(y)+\overset{*}{\varphi}^{+}(x)\varphi^{-}(y)+\varphi^{+}(x)\overset{*}{\varphi}^{-}(y)+\overset{*}{\varphi}^{-}(x)\varphi^{-}(y). \tag{4.6.27}$$

Ako iný príklad uvedieme teraz normálny súčin dvoch Fermiho operátorov $\overset{*}{\psi}(x)$ a $\psi(y)$. Zjavne platí

$$:\overset{*}{\psi}(x)\psi(y):=\overset{*}{\psi}^{+}(x)\psi^{+}(y)+\overset{*}{\psi}^{+}(x)\psi^{-}(y)-\psi^{+}(y)\overset{*}{\psi}^{-}(x)+\overset{*}{\psi}^{-}(x)\psi^{-}(y). \tag{4.6.28}$$

Poznámka:

Je možné (A. N. Vasil'ev, 1998) kompaktným spôsobom zapísať vlastnosti normálneho súčinu naraz pre častice bozónového aj fermiónového typu. Predpokladajme, že sa dané operátorové pole φ dá zapísať v tvare

$$\varphi(x)=a(x)+b(x), \tag{4.6.29}$$

kde a je anihilačný a b je kreačný operátor. Nech ďalej možno písať

$$a(x)a(x')=\chi a(x')a(x), \quad b(x)b(x')=\chi b(x')b(x). \tag{4.6.30}$$

Navyše predpokladáme platnosť (anti)komutačného vzťahu

$$a(x)b(x')-\chi b(x')a(x)=n(x,x'), \tag{4.6.31}$$

kde parameter χ nadobúda hodnoty ± 1 v závislosti na štatistike polí a $n(x,x')$ je nejaká komplexná funkcia, ktorú nazývame aj kontrakciou poľa $\varphi(x)$. Potom N-súčin ľubovoľnej kombinácie operátorov b_i, a_j (vyjadrený cez permutáciu P) definujeme

$$\mathrm{N}\{P[b(y_1)\dots b(y_m)a(x_1)\dots a(x_n)]\}=\varepsilon_P b(y_1)\dots b(y_m)a(x_1)\dots a(x_n),$$

kde ε_P je rovné 1 pre bozóny, $\varepsilon_P = (-1)^{\#P}$, pričom $\#P$ sa rovná počtu transpozícii na dosiahnutie poradia $b(y_1)\dots b(y_m)a(x_1)\dots a(x_n)$ z operátorového výrazu

$$P[b(y_1)\dots b(y_m)a(x_1)\dots a(x_n)].$$

Základné algebraické operácie s N-súčinom možno zhrnúť do niekoľkých vzťahov

$$\mathrm{N}\left\{\sum\prod\dots\right\} = \sum\mathrm{N}\left\{\prod\dots\right\}, \quad \mathrm{N}\left\{\alpha\prod\dots\right\} = \alpha\mathrm{N}\left\{\prod\dots\right\},$$
$$\mathrm{N}\left\{\alpha\right\} = \alpha, \tag{4.6.32}$$

kde α je komplexné číslo a $\prod\dots$ označuje ľubovoľný operátorový výraz skonštruovaný z operátorov a a b.

Môžeme si všimnúť, že N nie je lineárny operátor. Inými slovami, rovnosť dvoch operátorov $O_1 = O_2$ neimplikuje rovnosť $\mathrm{N}\{O_1\} = \mathrm{N}\{O_2\}$. Jednoduchým protipríkladom je kontrakcia operátorov a a b z (4.6.31)

$$\mathrm{N}[a(x)b(x') - \chi b(x')a(x)] = 0 \neq n(x,x') = \mathrm{N}\{n(x,x')\}. \tag{4.6.33}$$

Túto špecifickú vlastnosť vieme zdôvodniť tým, že N-súčin je dobre definovaný iba na množine výrazov zložených výlučne z kreačných a anihilačných operátorov.

Ešte uvedieme dva vzťahy, s ktorými sa v literatúre môžeme stretnúť

- $\mathrm{N}[\varphi(x)\varphi(x')] = \varphi(x)\varphi(x') - n(x,x')$
- $\mathrm{N}\{P[\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)] = \varepsilon_P\mathrm{N}[\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)]$

■

Od tohto okamihu budeme všetky dynamické premenné s kvadratickou závislosťou na operátoroch s rovnakým argumentom zapisovať v normálnom tvare. Napríklad Lagrangián pre komplexné skalárne pole (2.2.1) bude

$$\mathcal{L} =: (\partial_\mu\overset{*}{\varphi})(\partial^\mu\varphi) : -m^2 : \overset{*}{\varphi}\varphi : . \tag{4.6.34}$$

Podobne to aplikujeme na ďalšie veličiny typu tenzor energie-hybnosti, prúd, atď.

Ľahko sa presvedčíme, že z definície vákuového stavu Φ_0

$$\varphi^-(x)\Phi_0 = 0, \quad \overset{*}{\varphi}{}^+(x)\Phi_0 = 0 \tag{4.6.35}$$

a im konjugovaným rovniciam

$$\Phi_0^*\varphi^+(x) = 0, \quad \overset{*}{\varphi}{}^-(x)\Phi_0^* = 0, \tag{4.6.36}$$

vyplýva, že stredné hodnoty všetkých dynamických premenných sú nulové pre vákuový stav

$$\Phi_0^*P^\mu\Phi_0 = 0, \quad \Phi_0^*Q\Phi_0 = 0, \quad \dots . \tag{4.6.37}$$

V istom zmysle sa vďaka N-súčinu zbavíme nefyzikálnych nekonečien spojených s nulovými fluktuáciami vákua (nulová energia, nulový náboj a pod.). Nakoľko vo fyzike hrá objektívnu (pozorovateľnú) úlohu rozdiel dvoch energetických stavov, môžeme použitie N-súčinu chápať aj ako zavedenie nového referenčného vákua s nulovou energiou.

Zákony zachovania, ktoré sme si uviedli pri diskusii Noetherovej vety, zostávajú v platnosti. Pri prechode k N-súčinu sa ale môže narušiť pozitívna definitnosť objektu.

Kapitola 5

Kvantovanie voľných polí

5.1 Reálne skalárne pole

Pre klasické skalárne pole sme v časti 2.1.1 našli rozklad

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi^{+}(x) + \varphi^{-}(x)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}}}\left[\mathrm{e}^{ik\cdot x}a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} + \mathrm{e}^{-ik\cdot x}a_{\boldsymbol{k}}\right].\end{aligned}$$

Pri kvantovaní tohto poľa budeme postupovať vrámci metódy kanonického kvantovania a formalizmu obsadzovacích čísel. Pre vybraný časový okamih $t = 0$ máme

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\left[a_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + a_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right], \tag{5.1.1}$$

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}}(-i)\sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{2}}\left[a_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} - a_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right], \tag{5.1.2}$$

ktoré sú zjavným zovšeobecnením výrazov pre jednorozmerný harmonický oscilátor

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a + a^{\dagger}\right), \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(a - a^{\dagger}\right). \tag{5.1.3}$$

Dá sa ukázať, že komutačné vzťahy

$$[\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})] = [\pi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})] = 0, \quad [\varphi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})] = i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{5.1.4}$$

sú plne ekvivalentné komutačným vzťahom pre kreačné a anihilačné operátory

$$[a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{q}}] = \left[a_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}, a_{\boldsymbol{q}}^{\dagger}\right] = 0, \quad \left[a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{q}}^{\dagger}\right] = \delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}). \tag{5.1.5}$$

Vidíme, že tieto vzťahy sú v súlade so všeobecnými myšlienkami uvedenými na str. 90.

Ekvivalenciu (5.1.4) s (5.1.5) možno dokázať priamym dosadením a úpravami. Napr.

$$\begin{aligned}
[\varphi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{y})] =& \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{-i}{2}\sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{q}}}{E_{\boldsymbol{p}}}}\left\{-[a_{\boldsymbol{p}},a^\dagger_{\boldsymbol{q}}]\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}+[a^\dagger_{\boldsymbol{p}},a_{\boldsymbol{q}}]\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}\right\}\\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{-i}{2}\sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{q}}}{E_{\boldsymbol{p}}}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\left\{-\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}+\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}\right\}\\
=& -\frac{i}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left\{-\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}-\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}\right\}\\
=& \; i\int\frac{\mathrm{d}^3}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\\
=& \; i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),
\end{aligned}$$

alebo

$$\begin{aligned}
[\varphi(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{y})] =& \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}}\left\{[a_{\boldsymbol{p}},a^\dagger_{\boldsymbol{q}}]\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}+[a^\dagger_{\boldsymbol{p}},a_{\boldsymbol{q}}]\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}\right\}\\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\left\{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}+\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}\right\}\\
=& \int\frac{\mathrm{d}^3p}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}\left[\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}-\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}\right]\\
=& \; 0,
\end{aligned}$$

kde posledný výraz možno získať po zámene $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ v jednom z predchádzajúcich integrálnych výrazov. ■

Na získanie Heisenbergových výrazov pre operátory (5.1.1) a (5.1.2) je potrebná znalosť Hamiltoniánu. Ten je v priamej reprezentácii daný výrazom

$$H=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x\,\left[\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi+m^2\varphi^2\right]=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x\,\left[\pi^2+(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2+m^2\varphi^2\right],\quad(5.1.6)$$

ktorý teraz prepíšeme pomocou operátorov $a_{\boldsymbol{k}}$ a $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$. Priame dosadenie rozkladov pre pole φ a zovšeobecnenú hybnosť π spolu s relativistickým vzťahom $E^2_{\boldsymbol{p}}=$ $=\boldsymbol{p}^2+m^2$ vedie na prepis Hamiltoniánu

$$H=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3p\,E_{\boldsymbol{p}}\left[a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}+a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}\right].\quad(5.1.7)$$

Tento vzťah formálne odpovedá už skôr získanému klasickému výrazu (2.1.46), konkrétne jeho nultej zložke.

Použitím komutačného vzťahu $a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}=a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}+\delta^{(3)}(\mathbf{0})$ nájdeme

$$H=\int\mathrm{d}^3p\,E_{\boldsymbol{p}}\left[a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}+\frac{1}{2}\delta^{(3)}(\mathbf{0})\right].\quad(5.1.8)$$

Ak zadefinujeme vákuový stav $|0\rangle$ tradičným spôsobom ako stav, pre ktorý $a_{\boldsymbol{p}}|0\rangle =$ $= 0$ pre všetky $\boldsymbol{p}$, tak potom je jeho energia E_0 daná výrazom

$$E_0|0\rangle = H|0\rangle = \left[\int \frac{\mathrm{d}^3p}{2}\delta^{(3)}(\mathbf{0})\right]|0\rangle. \tag{5.1.9}$$

Vidíme, že daný výraz diverguje a to dokonca kvôli dvom rôznym príčinám. Prvú z nich vieme analyzovať podobnou myšlienkou ako bola uvedená v kap. 4.1. Predstavme si konečný systém v tvare kocky s hranou dĺžky L. Potom máme

$$(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \lim_{L\to\infty}\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}}\Big|_{\boldsymbol{p}=\mathbf{0}} \tag{5.1.10}$$

$$= \lim_{L\to\infty}\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}^3x = V, \tag{5.1.11}$$

kde V označuje veľký, ale konečný objem uvažovaného systému. Z tohto pozorovania možno dospieť k záveru, že $\delta^{(3)}(\mathbf{0})$ divergencia v (5.1.8) vystupuje preto, lebo rátame celkovú energiu nekonečného priestoru. Konečná fyzikálna veličina by odpovedala hustote energie

$$\mathcal{E}_0 = \frac{E}{V} = \int \mathrm{d}^3p\,\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{2}. \tag{5.1.12}$$

Vidíme ale, že táto veličina stále diverguje z dôvodu prítomnosti módov s veľkou hybnosťou $|\boldsymbol{p}| \to \infty$. Ide teda o divergenciu pri vysokých frekvenciách, ktorá sa označuje ako UV divergencia. Fyzikálne pochádza z optimistickej extrapolácie fyzikálnych zákonov na oblasti, kde znalosti z nízkoenergetickej oblasti nemusia byť postačujúce. Takéto UV divergencie sa dajú študovať pomocou metódy renormalizačnej grupy, čo ale náročnosťou presahuje obsah týchto skrípt.

S divergenciou prvého typu $\delta^{(3)}(\mathbf{0})$ sa môžeme vysporiadať pomocou normálneho súčinu $: \ldots :$, ktorý bol diskutovaný v časti 4.6.3. Týmto spôsobom Hamiltonián nadobúda tvar

$$H = \int \mathrm{d}^3p\,E_{\boldsymbol{p}}\,a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}, \tag{5.1.13}$$

a teda energia vákuového stavu je nulová

$$H|0\rangle = 0. \tag{5.1.14}$$

Táto operácia vlastne znamená, že v experimentoch majú fyzikálny význam len rozdiely energií a nie ich samotné hodnoty. Pod Lagrangiánom teórie sa tak bude mať na mysli

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} =: \frac{(\partial\varphi)^2}{2} : -\frac{m^2}{2} : \varphi^2 : . \tag{5.1.15}$$

Z vákuového stavu $|0\rangle$ môžeme zvyčajným spôsobom skonštruovať časticové spektrum teórie pomocou opakovaného použitia kreačných operátorov. Stavu

$$a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\ldots|0\rangle \tag{5.1.16}$$

bude odpovedať energia

$$E = E_{\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{q}} + \dots. \tag{5.1.17}$$

Operátor celkovej hybnosti bude daný výrazom

$$\boldsymbol{P} = \int \mathrm{d}^3 p \, \boldsymbol{p} \, a^\dagger_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}}, \tag{5.1.18}$$

kde podobne ako pri Hamiltoniáne nám nekonečný príspevok vypadol vďaka použitie normálneho súčinu.

V kvantovej teórii poľa hovoríme často o excitáciách daného poľa ako o časticiach. To má dobrú fyzikálnu príčinu, nakoľko sa jedná o diskrétnu entitu so správnym relativistickým vzťahom pre štvorhybnosť.

Ľahko vieme ukázať, že štatistika skalárneho poľa odpovedá bozónovskému správaniu. Uvažujme dva stavy $|2\rangle$ a $|2'\rangle$ danými

$$|2\rangle = a^\dagger_{\boldsymbol{p}} a^\dagger_{\boldsymbol{q}} |0\rangle, \quad |2'\rangle = a^\dagger_{\boldsymbol{q}} a^\dagger_{\boldsymbol{p}} |0\rangle. \tag{5.1.19}$$

Komutačný vzťah $\left[a^\dagger_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\right]$ ale zaručuje rovnosť $|2\rangle = |2'\rangle$. Taktiež vidíme, že stav s danou hybnosťou $\boldsymbol{p}$ môže obsahovať ľubovoľne veľa excitácii. Hovoríme, že Kleinovo-Gordonovo (skalárne) pole vyhovuje Boseho-Einsteinovej štatistike.

Normalizácia relativistických vzťahov je trochu komplikovanejšia záležitosť. Priamočiary pokus založený na $\langle 0|0\rangle = 1$ a predpoklade $|\boldsymbol{p}\rangle \propto a^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$ nie je správny, nakoľko vedie na skalárny súčin

$$\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = \delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}). \tag{5.1.20}$$

Tento vzťah ale zjavne nepredstavuje Lorentzovsky invariantnú veličinu. Na nájdenie správneho vzťahu pre normalizáciu analyzujme konkrétny prípad boostu v smere osi 3. Ten je daný Lorentzovou transformáciou pre štvorhybnosť

$$p'_3 = \gamma(p_3 + \beta E), \quad E' = \gamma(E + \beta p_3). \tag{5.1.21}$$

Preštudujme transformáciu Diracovej delta funkcie v (5.1.20)

$$\begin{aligned}
\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) &= \delta(p_1 - q_1)\delta(p_2 - q_2)\delta(p_3 - q_3) && (5.1.22)\\
&= \delta(p'_1 - q'_1)\delta(p'_2 - q'_2)\frac{\delta(p'_3 - q'_3)}{|\mathrm{d}p_3/\mathrm{d}p'_3|} && (5.1.23)\\
&= \delta(p'_1 - q'_1)\delta(p'_2 - q'_2)\delta(p'_3 - q'_3)\frac{\mathrm{d}p'_3}{\mathrm{d}p_3} && (5.1.24)\\
&= \delta^{(3)}(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{q}')\gamma\left[1 + \beta\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p_3}\right] && (5.1.25)\\
&= \delta^{(3)}(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{q}')\frac{E'}{E}, && (5.1.26)
\end{aligned}$$

kde sme využili $\mathrm{d}E/\mathrm{d}p_3 = p_3/E$ a druhý zo vzťahov (5.1.21). Získaný výraz (5.1.26) implikuje relativisticky korektnú transformáciu Diracovej delta funkcie pre hybnosti

$$E\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = E'\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{q}'). \tag{5.1.27}$$

Relativistický jednočasticový stav sa preto zvykne definovať

$$|\boldsymbol{p}\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}(2\pi)^{3/2}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle \tag{5.1.28}$$

a skalárny súčin s iným jednočasticovým stavom je daný rovnicou

$$\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}). \tag{5.1.29}$$

Objasníme si ďalej interpretáciu výrazu $\varphi(\boldsymbol{x})|0\rangle$, s ktorým sa budeme stretávať.

$$\varphi(\boldsymbol{x})|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\left[a_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right]|0\rangle \tag{5.1.30}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}}{2E_{\boldsymbol{p}}}|\boldsymbol{p}\rangle, \tag{5.1.31}$$

kde pozorujeme lineárnu superpozíciu stavov s presne definovanou hybnosťou. Pre malé (nerelativistické) energie máme $E_{\boldsymbol{p}}$ =konšt.

Výraz $\varphi(\boldsymbol{x})|0\rangle$ interpretujeme ako vytvorenie častice v polohe $\boldsymbol{x}$. Na potvrdenie tohto tvrdenia rátajme

$$\langle 0|\varphi(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{p}\rangle = \langle 0|\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2E_q}}\left[a_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\right]\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}(2\pi)^{3/2}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle \tag{5.1.32}$$

$$= \langle 0|\int \mathrm{d}^3q\sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{E_{\boldsymbol{q}}}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}|0\rangle \tag{5.1.33}$$

$$= \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{5.1.34}$$

čo nie je nič iné ako $x-$reprezentácia jednočasticového stavu $|\boldsymbol{p}\rangle$. Je možné na tento výsledok $\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$ nazerať aj ako na vlnovú rovnicu častice v polohe $\boldsymbol{x}$ a čase $t = 0$ v ktorom bola anihilovaná.

Poznámka:

V literatúre sa možno stretnúť s inými výrazmi. Napr. v (M. E. Peskin & D. V. Schroeder, 1995) je komutačný vzťah medzi kreačnými a anihilačnými operátormi volený v tvare

$$\left[a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\right] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}). \tag{5.1.35}$$

Nami zvolený zápis je možné získať jednoduchým predefinovaním

$$a_{\boldsymbol{p}} \to (2\pi)^{3/2}a_{\boldsymbol{p}}, \quad a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \to (2\pi)^{3/2}a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \tag{5.1.36}$$

v príslušných vzťahoch.

■

Ako sa pri Lorentzovej transformácii zmenia kreačné a anihilačné operátory? Uvažujme transformáciu stavu $|\boldsymbol{p}\rangle$, ktorú zapíšeme

$$U(\Lambda)|\boldsymbol{p}\rangle = |\Lambda\boldsymbol{p}\rangle, \tag{5.1.37}$$

kde matica Λ opisuje danú Lorentzovu transformáciu. Hermitovsky združená verzia tohto vzťahu pre stav $|\boldsymbol{q}\rangle$ je

$$\langle\boldsymbol{q}|U^\dagger(\Lambda) = \langle\Lambda\boldsymbol{q}|. \tag{5.1.38}$$

Vzájomným prenásobením dostaneme vzťah

$$\langle\boldsymbol{q}|U^\dagger(\Lambda)U(\Lambda)|\boldsymbol{p}\rangle = \langle\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\rangle = \langle\Lambda\boldsymbol{q}|\Lambda\boldsymbol{p}\rangle, \tag{5.1.39}$$

ktorý vyjadruje invariantnosť skalárneho súčinu medzi stavmi $|\boldsymbol{p}\rangle$ a $|\boldsymbol{q}\rangle$. Aplikujme na stav (5.1.28) vývojový operátor $U(\Lambda)$ s výsledkom

$$U(\Lambda)|\boldsymbol{p}\rangle = |\Lambda\boldsymbol{p}\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}(2\pi)^{3/2}U(\Lambda)a^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle. \tag{5.1.40}$$

Na druhej strane musí ale tiež platiť

$$|\Lambda\boldsymbol{p}\rangle = \sqrt{2E_{\Lambda\boldsymbol{p}}}(2\pi)^{3/2}a^\dagger_{\Lambda\boldsymbol{p}}|\Lambda 0\rangle, \tag{5.1.41}$$

kde $|\Lambda 0\rangle = U(\lambda)|0\rangle$. Porovnanie výrazov potom dáva

$$\sqrt{E_{\Lambda\boldsymbol{p}}}a^\dagger_{\Lambda\boldsymbol{p}}U(\Lambda)|0\rangle = \sqrt{E_{\boldsymbol{p}}}U(\Lambda)a^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle, \tag{5.1.42}$$

z ktorého po formálnom vydelení vákuového stavu a krátkej úprave dostávame

$$U(\Lambda)a^\dagger_{\boldsymbol{p}}U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\boldsymbol{p}}}{E_{\boldsymbol{p}}}}a^\dagger_{\Lambda\boldsymbol{p}}. \tag{5.1.43}$$

Ide vlastne o plne analogický vzťah s operátorovou rovnicou (4.4.7).

Reláciu úplnosti možno pomocou stavov $|\boldsymbol{p}\rangle$ vyjadriť v tvare

$$1 = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}\rangle\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\langle\boldsymbol{p}|, \tag{5.1.44}$$

ktorého relativistická invariantnosť plynie zo vzťahu

$$\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}2\pi\delta(p^2-m^2)\bigg|_{p^0>0}. \tag{5.1.45}$$

Z tohto vidíme, že integrálny výraz typu

$$\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{f(p)}{2E_{\boldsymbol{p}}} \tag{5.1.46}$$

bude predstavovať Lorentzovsky invariantnú veličinu v prípade, že funkcia $f(p)$ je Lorentzovsky invariantná. Predpokladáme pritom, že integrácia prebieha cez časť hyperboloidu $p^0 > 0$.

5.2 Vákuové fluktuácie. Kauzalita

Kvantovanie poľa odpovedá kvantovaniu nekonečného súboru harmonických oscilátorov. Videli sme, že vákuová energia vlastne odpovedá energii nulových kmitov oscilátorov. Pozrieme sa teraz bližšie ešte na ďalší typ nekonečien.

Vieme, že poloha harmonického oscilátora v energetickom stave ψ_n nie je presne daná. Inými slovami, je splnená nerovnosť

$$\langle\psi_n|\hat{q}^2\psi_n\rangle > \langle\psi_n|\hat{q}\psi_n\rangle^2 = 0. \tag{5.2.1}$$

Analogický fakt platí aj v poľovej teórii, čoho dôsledkom budú neustále kvantové fluktuácie poľa $\varphi(x)$. V základnom stave totiž platí, že

$$D(x,y) = \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle \neq 0, \tag{5.2.2}$$

hoci stredná hodnota $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle$ je nulová.

Dosaďme rozklad

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}} \left[a_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-ik\cdot x} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{ik\cdot x}\right]$$

do výrazu pre $D(x,y)$. Dospejeme k výrazu

$$\begin{aligned}
D(x,y) &= \langle 0| \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}} \left(a_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{ip\cdot x}\right) \\
&\times \left(a_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{-iq\cdot x} + a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{iq\cdot x}\right)|0\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}} \langle 0|a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}|0\rangle \mathrm{e}^{-ip\cdot x+iq\cdot y} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}} \mathrm{e}^{iq\cdot y-ip\cdot x}\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}}{2E_{\boldsymbol{p}}},
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

kde sme využili zjavné vzťahy

$$\langle 0|a_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{q}}|0\rangle = \langle 0|a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}|0\rangle = \langle 0|a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{q}}|0\rangle = 0$$

a vzťah plynúci z komutátora (5.1.5)

$$\langle 0|a_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}|0\rangle = \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}).$$

Z výsledku (5.2.3) je zrejmá jeho translačná invariantnosť. Preto sa zvykne definovať funkcia

$$D(x-y) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}}{2E_{\boldsymbol{p}}}. \tag{5.2.4}$$

Uvažujme ďalej limitný prechod

$$\lim_{y \to x} D(x-y) = D(0) = \langle 0|\varphi^2(x)|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}. \tag{5.2.5}$$

Posledný výraz predstavuje kvadraticky divergentnú funkciu pre veľké hodnoty hybnosti $\boldsymbol{k}$. Na rozdiel od energie nulových kmitov vákua, ktoré možno rozumne odstrániť z teórie, divergencia $D(0)$ predstavuje závažnejší problém. Ako možno intepretovať fakt, že $\langle 0|\varphi^2(x)|0\rangle = +\infty$? V skutočnosti je nemožné namerať hodnotu kvantového poľa v jednom jedinom bode časopriestoru. Na vykonanie odpovedajúceho experimentu by sme potrebovali nekonečne veľké frekvencie a hybnosti. Ďalej všetky bilineárne výrazy môžu vykazovať podobnú singularitu. Obzvlášť znepokujúce to je pre základnú veličinu, z ktorej sme vychádzali, a to bol Lagrangián skalárneho poľa.

Ukazuje sa, že priamy fyzikálny zmysel majú len súčiny polí spriemerované cez malé konečné oblasti časopriestoru. Iba tie môžu dávať matematicky konzistentný zmysel a môžeme ich v princípe pozorovať. Výsledok (5.2.5) tak interpretujeme ako obmedzenie, ktoré nám príroda kladie na použitie aproximácie založenom na spojitých poliach. Experiment nám vie poskytnúť odhad veľkosti časopriestorového objemu, ktorý ešte teoreticky môže dávať fyzikálny zmysel.

Získaný výsledok je tiež možné použiť na štúdium kauzálnych vlastností teórie. Kauzalita v princípe znamená schopnosť vzájomného súvisu medzi rôznymi udalosťami, ktoré sú od seba vzdialené o istý štvorrozmerný interval. Od zmysluplnej fyzikálnej teórie očakávame, že udalosti oddelené priestorupodobným intervalom by spolu nemali kauzálne súvisieť. Analyzujme preto komutátor $[\varphi(x), \varphi(y)]$. Pomocou výsledku (5.2.3) ho vieme zapísať ako

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = D(x-y) - D(y-x) \equiv n(x-y). \tag{5.2.6}$$

Na základe záverečnej diskusie v predchádzajúcej časti 5.1 vieme, že $n(x-y)$ predstavuje Lorentzovsky invariantnú veličinu. Tvrdíme ďalej, že pre časupodobné intervaly $x-y$ nadobúda $n(x-y)$ nenulové hodnoty. Uvažujme transformáciu do takej sústavy, kde platí $(x-y)^\mu = (t, \mathbf{0})$

$$[\varphi(t, \boldsymbol{x}), \varphi(0, \boldsymbol{x})] = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{-iE_{\boldsymbol{p}}t} - \mathrm{e}^{iE_{\boldsymbol{p}}t}}{2E_{\boldsymbol{p}}}. \tag{5.2.7}$$

Použitím sférických súradníc dostaneme výraz

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty \mathrm{d}E \sqrt{E^2 - m^2} \left[\mathrm{e}^{-iEt} - \mathrm{e}^{iEt}\right], \tag{5.2.8}$$

ktorého asymptotické správanie odvodíme pomocou metódy sedlového bodu. Máme teda

$$[\varphi(t, \boldsymbol{x}), \varphi(0, \boldsymbol{x})] \sim \mathrm{e}^{-imt} - \mathrm{e}^{imt}. \tag{5.2.9}$$

Ide zjavne o nenulové oscilačné správanie sa daného komutátora.

Naopak pre priestorupodobné intervaly $x - y$ je $n(x - y)$ nulová. Uvažujme komutátor polí $\varphi(x)$ a $\varphi(y)$ v tom istom časovom okamihu t

$$\begin{aligned}
[\varphi(t, \boldsymbol{x}), \varphi(t, \boldsymbol{y})] &= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}} \left[\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} - \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \right] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}} \left[\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} - \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \right] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

kde sme v druhom kroku vykonali zámenu premenných $\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$ v druhom z výrazov. Výraz $n(x-y)$ je Lorentzovsky invariantná funkcia, a teda môže závisieť len na časopriestorovom intervale $(x - y)^2$. Zo získaného výsledku (5.2.10) ale plynie, že $n(x-y) = 0$ pre všetky priestorupodobné intervaly $(x - y)^2 < 0$.

Fakt, že komutátor $[\varphi(x), \varphi(y)]$ je komplexné číslo, je vlastnosťou voľnej teórie. Zarátanie interakciie narušuje tento vzťah a je potrebné použiť sofistikovanejšie teoretické postupy na štúdium interagujúcich modelov.

5.3 Skalárne pole v časopriestore

Už máme skvantované pole v Schrödingerovej reprezentácii. Teraz si ukážeme ako je možné získať časovú závislosť operátorov a tým vlastne prejdeme do Heisenbergovej reprezentácie. Z časti 4.3 poznáme predpis pre posun operátorových výrazov v čase

$$\varphi(x) = \varphi(t, \boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{iHt} \varphi(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-iHt}, \tag{5.3.1}$$

kde pole $\varphi(\boldsymbol{x})$ uvažujeme v časovom okamihu $t = 0$. Pre operátor hybnosti $\pi(x)$ máme analogický vzťah

$$\pi(x) = \pi(t, \boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{iHt} \pi(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-iHt}. \tag{5.3.2}$$

Ako sme podrobne analyzovali v časti 4.4, tieto posuny sú ekvivalentné pohybovým rovniciam

$$i\partial_t \varphi(x) = [\varphi(x), H], \quad i\partial_t \pi(x) = [\pi(x), H], \tag{5.3.3}$$

kde Hamiltonián je daný výrazom

$$H = \int \mathrm{d}^3 x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 \right]. \tag{5.3.4}$$

Dosadením Hamiltoniánu do pohybových rovníc dostaneme dva vzťahy

$$[\varphi(x), H] = i\pi(x) \tag{5.3.5}$$

a

$$[\pi(x), H] = i(\boldsymbol{\nabla}^2 - m^2)\varphi(x). \tag{5.3.6}$$

Eliminovaním hybnosti $\pi(x)$ odvodíme rovnicu pre pole $\varphi(x)$ v tvare

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0, \tag{5.3.7}$$

ktorú sme odvodili už skôr pri diskusii klasického skalárneho poľa v (2.1.3). Vidíme ale teraz, že aj kvantové skalárne pole vyhovuje tej istej rovnici.

Pomocou Hamiltoniánu H vieme získať Heisenbergove obrazy kreačných a anihilačných operátorov. Využijeme pritom už skôr získaný tvar Hamiltoniánu (5.1.7). Ľahko sa ukáže platnosť vzťahu

$$Ha_{\boldsymbol{p}} = a_{\boldsymbol{p}}(H - E_{\boldsymbol{p}}). \tag{5.3.8}$$

Jeho viacnásobným použitím dostaneme

$$H^n a_{\boldsymbol{p}} = a_{\boldsymbol{p}}(H - E_{\boldsymbol{p}})^n, \tag{5.3.9}$$

resp.

$$H^n a^\dagger_{\boldsymbol{p}} = a^\dagger_{\boldsymbol{p}}(H - E_{\boldsymbol{p}})^n. \tag{5.3.10}$$

S pomocou nich priamo dostaneme

$$\mathrm{e}^{iHt} a_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-iHt} = a_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-iE_{\boldsymbol{p}}t}, \quad \mathrm{e}^{iHt} a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-iHt} = a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{iE_{\boldsymbol{p}}t}. \tag{5.3.11}$$

Aplikujeme ich teraz na pole $\varphi(\boldsymbol{x})$ (dané v okamihu $t = 0$)

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \mathrm{e}^{iHt}\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-iHt} \\
&= \mathrm{e}^{iHt} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left[a_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \right] \mathrm{e}^{-iHt} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left[a_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left[a_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{ip\cdot x} \right].
\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

Pre úplnosť dodajme, že by bolo možné vykonať podobné posuny aj v priestore pomocou operátora hybnosti

$$\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}} a_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}} = a_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}, \quad \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}} a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}} = a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{5.3.13}$$

Tým pádom sa dá pole $\varphi(x)$ získať transláciou z poľa $\varphi(0, \mathbf{0})$

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{i(Ht - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x})}\varphi(0, \mathbf{0})\mathrm{e}^{-i(Ht - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x})} = \mathrm{e}^{iP\cdot x}\varphi(0, \mathbf{0})\mathrm{e}^{-iP\cdot x}. \tag{5.3.14}$$

V prípade, že by $\varphi(x)$ popisovalo jednočasticovú vlnovú funkciu, tak $\mathrm{e}^{-ip^0 t}$ by opisovalo časticu s kladnou energiou a $\mathrm{e}^{ip^0 t}$ so zápornou. V kvantovej teórii poľa sa ale hovorí všeobecnejšie o módoch s kladnou, resp. zápornou frekvenciou.

Dôležitým objektom v kvantovej teórii poľa je Feynmanov propagátor, ktorý je možné definovať pomocou chronologického T-súčinu. Tento súčin formálne zoradí polia v smere rastúceho časového argumentu sprava doľava. Pre dva operátory máme

$$T\{\varphi(x)\varphi(y)\} = \begin{cases} \varphi(x)\varphi(y) & x^0 > y^0, \\ \varphi(y)\varphi(x) & y^0 > x^0. \end{cases} \tag{5.3.15}$$

Pomocou tejto operácii vieme zaviesť Feynmanov propagátor Δ_F ako vákuovú strednú hodnotu dvojice polí

$$\Delta_F(x-y) = \langle 0|\mathrm{T}\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0\rangle = \begin{cases} D(x-y) & x^0 > y^0, \\ D(y-x) & x^0 > y^0, \end{cases} \tag{5.3.16}$$

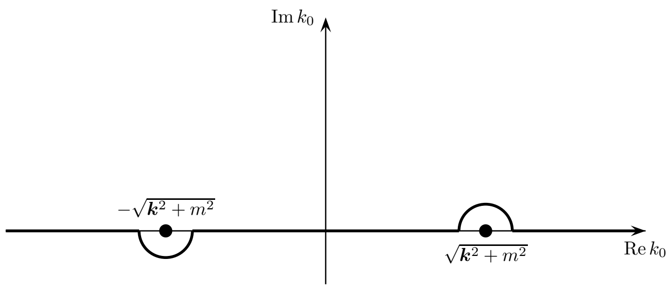
kde vystupuje funkcia $D(x)$ zavedená pri diskusii skalárneho poľa (5.2.4). Tvrdíme, že Feynmanov propagátor je možné predstaviť v tvare

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2} \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}. \tag{5.3.17}$$

Všimnime si, že na rozdiel od funkcie $D(x)$ nie je v tomto výraze p_0 viazané podmienkou $p_0^2 = E_{\boldsymbol{p}}^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$. Navyše môžeme nahliadnuť, že Δ_F nie je jednoznačne definované. V menovateli výrazu (5.3.17) vystupujú dva póly v komplexnej rovine $(\mathrm{Re}\, p_0, \mathrm{Im}\, p_0)$, konkrétne pre hodnoty

$$p_0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}.$$

Pri integrovaní cez p_0 je tak nutné špecifikovať spôsob ich obchádzania v komplexnej rovine. Pre Δ_F volíme spôsob naznačený na Obr. 5.1. Predpokladajme najprv



Obr. 5.1: Obchádzanie polóv pri Feynmanovej Greenovej funkcii v komplexnej rovine k_0.

$x^0 > y^0$ a využime Cauchyho integrálnu vetu. Relevantný faktor v exponenciálnej funkcii $\mathrm{e}^{-ip^0(x^0-y^0)+\cdots}$ nám hovorí, že je potrebné uzavrieť integračnú krivku zdola. Odtiaľ máme

$$\begin{aligned} x^0 > y^0 : \Delta_F(x-y) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi} \frac{i}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2} \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi} \frac{i}{(p_0 - E_{\boldsymbol{p}})(p_0 + E_{\boldsymbol{p}})} \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{-2\pi i^2}{2p_0} \mathrm{e}^{-iE_{\boldsymbol{p}}(x^0-y^0)+i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)} = D(x-y).$$

Analogickým postupom pre $x^0 < y^0$ by sme dospeli k potrebe uzavretia integračnej krivky zhora s výsledkom $D(y-x)$.

Pôsobením diferenciálneho operátora $\Box + m^2$ na Δ_F v tvare (5.3.17) dostaneme

$$\begin{aligned}
(\Box_x + m^2)\Delta_F(x-y) &= (\Box_x + m^2) \int \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \mathrm{e}^{-ik\cdot(x-y)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} [-k^2 + m^2] \mathrm{e}^{-ik\cdot(x-y)} \\
&= -i \int \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-k\cdot(x-y)} \\
&= -i\delta^{(4)}(x-y).
\end{aligned}$$

Získaný Feynmanov propagátor $\Delta_F(x-y)$ tak možno interpretovať ako Greenovu funkciu (pozri A.2) diferenciálneho operátora $\Box + m^2$.

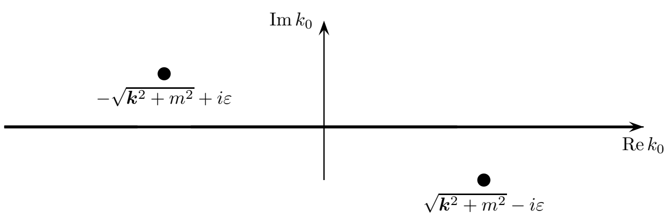
Obchádzanie pólov v Δ_F je možné dosiahnuť aj vhodným zavedením malého kladného parametra ε v tvare

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}. \tag{5.3.18}$$

V tomto prípade sa výraz v menovateli dá upraviť do tvaru (predpokladáme ε infinitezimálne)

$$p_0 = \pm E_{\boldsymbol{p}} \sqrt{1 - \frac{i\varepsilon}{E_{\boldsymbol{p}}^2}} \approx \pm E_{\boldsymbol{p}} \mp \frac{i\varepsilon}{2E_{\boldsymbol{p}}} \to \pm E_{\boldsymbol{p}} \mp i\varepsilon. \tag{5.3.19}$$

Efektívne tak dochádza k posunu pólov, ktoré je schematicky znázornené na Obr. 5.2. Pri integrovaní cez hornú polrovinu tak dáva príspevok pól $p_0 = -E_{\boldsymbol{p}}$ a pre



Obr. 5.2: Posun pólov pri Feynmanovej Greenovej funkcii v komplexnej rovine k_0 zapríčinený dodaním malého kladného parametra ε.

dolnú polrovinu zase $p_0 = E_{\boldsymbol{p}}$.

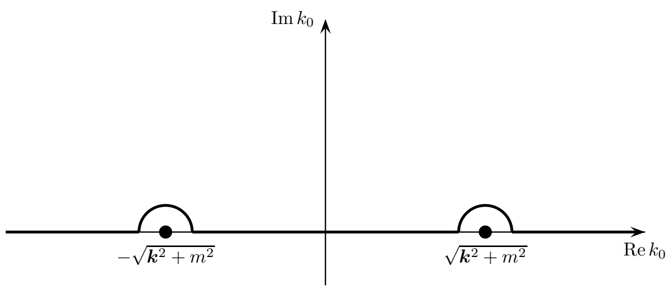
Retardovanú a advansovanú Greenovu funkciu nájdeme inou voľbou obchádzania pólov. Napríklad pre retardovanú Greenovu funkciu volíme obchádzanie spôsobom naznačeným na Obr. 5.3. Použitím Cauchyho integrálnej vety by sme dospeli k výsledku

$$\Delta_R(x-y) = \begin{cases} D(x-y) - D(y-x) & x^0 > y^0, \\ 0 \quad y^0 > x^0. \end{cases} \tag{5.3.20}$$

Naopak pre advansovanú Greenovu funkciu by sme mali

$$\Delta_A(x-y) = \begin{cases} 0 \quad x^0 > y^0, \\ D(y-x) - D(x-y) & y^0 > x^0. \end{cases} \tag{5.3.21}$$

V praktických výpočtoch má najväčší význam Feynmanov propagátor, ktorý zohráva kľučovú rolu pri konštrukcii poruchovej teórie.



Obr. 5.3: Obchádzanie polóv pri retardovanej Greenovej funkcii v komplexnej rovine k_0.

5.4 Komplexné skalárne pole

Lagrangián teórie je daný

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \overset{*}{\varphi} \partial^\mu \varphi - m^2 \overset{*}{\varphi} \varphi, \tag{5.4.1}$$

z ktorého plynú pohybové rovnice

$$(\Box + m^2)\varphi = (\Box + m^2)\overset{*}{\varphi} = 0. \tag{5.4.2}$$

Fourierov hybnostný rozvoj kvantového poľa (v čase $t = 0$) je možné po príslušných klasických výrazoch (2.2.15) a (2.2.16) zapísať v tvare

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left(a_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + b^\dagger_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \right), \tag{5.4.3}$$

$$\varphi^\dagger(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left(a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + b_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \right). \tag{5.4.4}$$

Pridružená konjugovaná hybnosť

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi}^\dagger. \tag{5.4.5}$$

Odpovedajúce poľové výrazy pre kongujovanú hybnosť sú

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} i \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{2}} \left(a_{\boldsymbol{p}}^\dagger \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} - b_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \right), \tag{5.4.6}$$

$$\pi^\dagger(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} (-i) \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{2}} \left(a_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} - b_{\boldsymbol{p}}^\dagger \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \right). \tag{5.4.7}$$

Naložíme jednočasové kanonické komutačné vzťahy

$$[\varphi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})] = i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \tag{5.4.8}$$

pričom všetky ostatné považujeme za nulové, napr. $[\varphi(\boldsymbol{x}), \pi^\dagger(\boldsymbol{y})] = 0$ atď.

Dané komutačné vzťahy sú ekvivalentné s komutačnými vzťahmi pre kreačné a anihilačné operátory

$$\left[a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{q}}^\dagger\right] = \left[b_{\boldsymbol{p}}, b_{\boldsymbol{q}}^\dagger\right] = \delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}), \tag{5.4.9}$$

$$[a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{q}}] = \left[a_{\boldsymbol{p}}^\dagger, a_{\boldsymbol{q}}^\dagger\right] = [b_{\boldsymbol{p}}, b_{\boldsymbol{q}}] = \left[b_{\boldsymbol{p}}^\dagger, b_{\boldsymbol{q}}^\dagger\right] = 0. \tag{5.4.10}$$

Celkový náboj teórie je možno zapísať rôznymi spôsobmi

$$Q = i \int \mathrm{d}^3 x \left[\dot{\overset{*}{\varphi}} \varphi - \overset{*}{\varphi} \dot{\varphi} \right] = i \int \mathrm{d}^3 x \left[\pi \varphi - \overset{*}{\pi} \overset{*}{\varphi} \right] \tag{5.4.11}$$

$$= \int \mathrm{d}^3 p \left[b_{\boldsymbol{p}}^\dagger b_{\boldsymbol{p}} - a_{\boldsymbol{p}}^\dagger a_{\boldsymbol{p}} \right]. \tag{5.4.12}$$

V Heisenbergovom obraze poľové výrazy nadobúdajú plnú časovú závislosť

$$\varphi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left(a_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + b_{\boldsymbol{p}}^\dagger \mathrm{e}^{ip\cdot x} \right), \tag{5.4.13}$$

$$\overset{*}{\varphi}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left(a_{\boldsymbol{p}}^\dagger \mathrm{e}^{ip\cdot x} + b_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-ip\cdot x} \right). \tag{5.4.14}$$

Tieto vzťahy sú vlastne kvantové verzie vzťahov (2.2.15) a (2.2.16).

Kauzálne vlastnosti komplexného poľa možno preštudovať pomocou komutátora $[\varphi(x), \overset{*}{\varphi}(y)] = n(x-y)$. Vďaka daným rozvojom vieme pre neho odvodiť výhodnejší vzťah

$$n(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{p}} E_{\boldsymbol{q}}}} \left\{ [a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{q}}^\dagger] \mathrm{e}^{-ip\cdot x + iq\cdot y} + [b_{\boldsymbol{p}}^\dagger, b_{\boldsymbol{q}}] \mathrm{e}^{ip\cdot x - iq\cdot y} \right\} \tag{5.4.15}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \left[\mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{ip\cdot(x-y)} \right] = D(x-y) - D(y-x) \tag{5.4.16}$$

$$= \langle 0|\varphi(x)\overset{*}{\varphi}(y)|0\rangle - \langle 0|\overset{*}{\varphi}(y)\varphi(x)|0\rangle, \tag{5.4.17}$$

kde funkcia $D(x)$ bola zavedená v (5.2.3). Prvý z týchto členov možno interpretovať ako vznik častice v bode y a jej následný zánik v bode x. Naopak, druhý člen odpovedá vzniku antičastice v bode x a jej zániku v bode y. Pre priestorupodobné intervaly $(x - y)^2 < 0$ už vieme, že $D(x - y) - D(y - x) = 0$. Z uvedeného pozorovania vidíme, že pre komplexné pole dochádza k vzájomnému vyrušeniu amplitúdy častice z x do y s amplitúdou antičastice z y do x.

5.5 Elektromagnetické pole

Pri kvantovaní elektromagnetického poľa je potrebné zabezpečiť splnenie troch podmienok

- pozitívnu definitnosť hustoty energie,
- dodatočnú Lorentzovu podmienku,
- podmienku priečnosti poľa.

Samozrejme daná formulácia musí byť relativisticky kovariantná.

Pri kvantovaní vektorového poľa sa môžeme stretnúť s veľmi podobnou situáciou (N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1980; S. Weinberg, 1995). Hlavný rozdiel ale spočíva v tom, že vektorové mezóny môžu existovať v troch rôznych spinových stavoch, zatiaľčo fotóny len v dvoch. Takisto na rozdiel od mezónov majú fotóny nulovú hmotnosť. Prvý z týchto rozdielov spôsobí to, že elektromagnetické pole obsahuje viac premenných akoby v skutočnosti malo (príliš veľa stupňov voľnosti), pretože A_μ má až štyri komponenty, ale reálne fotóny vykazujú len dva fyzikálne stupne voľnosti.

Druhý rozdiel (hmotnosť fotónu $m = 0$) vedie na nemožnosť priamočiareho prevzatia kvantovacej procedúry z prípadu vektorového poľa (limita $m \to 0$ v odpovedajúcich výrazoch). Kvantovanie hypotetického vektorového poľa s nekonečne malou hmotnosťou, t.j. poľa, ktoré sa líši od elektromagnetického neprítomnosťou kalibračnej invariancie (a teda prítomnosťou troch stupňov voľnosti), vykazuje značné ťažkosti. Pokusy o jeho skvantovanie vedú na nezmysluplné výrazy. Spomedzi mnohých spomeňme diagonalizáciu tenzora energie-hybnosti prostredníctvom (2.4.32) a konštrukciu komutačných vzťahov pre zložky štvorpotenciálu A_μ. V oboch prípadoch by sme dospeli k výrazom obsahujúcim veľmi malú hmotnosť v menovateľoch.

5.5.1 Coulombova kalibrácia

V tejto časti si v krátkosti objasníme kvantovanie elektromagnetického poľa založenom na Coulombovej kalibrácii, ktorá má tvar

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0, \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x). \tag{5.5.1}$$

Lagrangián elektromagnetického poľa uvažujeme v tvare

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \tag{5.5.2}$$

kde $J^\mu = J^\mu(x)$ predstavuje vonkajšie zdroje elektromagnetického poľa. Efektívne možno naloženie Coulombovej kalibrácie dosiahnuť pomocou formálnej zámeny

$$A_i(x) \to \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right) A_j. \tag{5.5.3}$$

Potom totiž ľahko vidíme, že platí

$$\partial_i A_i = 0 \to \partial_i \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right) A_j = (\partial_j - \partial_j) A_j = 0$$

a dané pole A_i tak automaticky vyhovuje Coulombovej kalibrácii (5.5.1). Ako ale máme rozumieť diferenciálnemu výrazu $\delta_{ij} - \partial_i \partial_j / \boldsymbol{\nabla}^2$? Pomôže nám Fourierova transformácia podobne ako v časti 2.5, kde sme študovali klasické elektromagnetické pole. Pomocou nej získame z $A_i(x)$ jeho Fourierov obraz $A_i(k)$. Na ten aplikujeme daný diferenciálny operátor, ktorý odpovedá algebraickej zámene

$$A_i(k) \to \tilde{A}_i(k) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}^2}\right) A_j(k). \tag{5.5.4}$$

Z výsledného poľa $\tilde{A}_i(k)$ sa inverznou Fourierov transformáciou dá dopracovať spätne k poľu $A_i(x)$, ktoré bude vyhovovať Coulombovej kalibrácii.

Prepíšeme ďalej Lagrangián (5.5.2) pomocou zložiek štvorpotenciálu φ a A_i

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{A}^i \dot{A}^i - \frac{1}{2} \partial_j A_i \partial_j + \frac{1}{2} \partial_i \varphi \partial_i \varphi - \dot{A}_i \partial_i \varphi + \frac{1}{2} \partial_i A_j \partial_j A_i - \rho \varphi + \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A}. \tag{5.5.5}$$

Niektoré členy vymiznú, čo sa ľahko ukáže použitím Gaussovej vety

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}x \, \partial_i A_j \partial_j A_i &= - \int \mathrm{d}x \, A_i \partial_i \partial_j A_j = 0, \\ \int \mathrm{d}x \, \dot{A}_i \partial_i \varphi &= - \int \mathrm{d}x \, \varphi \partial_i \dot{A}_i = 0, \end{aligned}$$

kde sa využila metóda per partes a splnenie Coulombovej kalibrácie (5.5.1). Lagrangián $\mathcal{L}$ tak prechádza do tvaru

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{A}^i \dot{A}^i - \frac{1}{2} \partial_j A_i \partial_j + \frac{1}{2} \partial_i \varphi \partial_i \varphi - \rho \varphi + \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A}. \tag{5.5.6}$$

Vykonajme variáciu účinku s týmto Lagrangiánom vzhľadom na pole φ, t.j. vykonajme zámenu $\varphi \to \varphi + \delta\varphi$ v účinku a požadujme jeho extremálnosť $\delta S = 0$. Dostaneme variáciu

$$\delta S = \int \mathrm{d}x \, [\partial_i \varphi \partial_i \delta\varphi - \rho \varphi] \tag{5.5.7}$$

$$= - \int \mathrm{d}x \, [\partial_i \partial_i \varphi + \rho] \, \delta\varphi. \tag{5.5.8}$$

Odtiaľ vidíme, že potenciál φ podľa očakávania vyhovuje Poissonovej rovnici

$$\Delta\varphi = -\rho. \tag{5.5.9}$$

Pre uvažovaný systém v neohraničenej oblasti vieme riešenie zapísať v explicitnom tvare (A. N. Vasil'ev, 2011; L. D. Landau & E. M. Lifschitz, 1975)

$$\varphi(t, \boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^3 y \frac{\rho(t, \boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}. \tag{5.5.10}$$

Toto riešenie je jednoznačné, ak navyše požadujeme splnenie obvyklých okrajových podmienok $\varphi \to 0, \rho \to 0$ pre $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ (polia a náboje v nekonečne vymiznú).

V zmysle rovnice (5.5.10) je potenciál φ určený hustotou náboja a ako taký nevykazuje dynamické vlastnosti. Dosadením tohto integrálneho výrazu do (5.5.6) dostaneme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}_i - \frac{1}{2}\partial_j A_i \partial_j A_i + \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A} + \mathcal{L}_{\mathrm{Coul}} \tag{5.5.11}$$

kde

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Coul}} = -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 y \frac{\rho(t, \boldsymbol{x})\rho(t, \boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}. \tag{5.5.12}$$

Vykonajme variáciu (5.5.11) vzhľadom na vektorový potenciál $\boldsymbol{A} : A_i \to A_i + \delta A_i$ a dostaneme

$$\delta S = \int \mathrm{d}x \, \left[-\ddot{A}_i + (\partial_j\partial_j)A_i + J_i\right] \delta A_i. \tag{5.5.13}$$

Keďže v Coulombovej kalibrácii nemáme pozdĺžnu zložku $A_i^{\parallel}$, tak pohybová rovnica pre A_i je

$$\Box A_i = J_i^{\perp} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right) J_i. \tag{5.5.14}$$

Tranverzálna zložka prúdu nadobúda vo Fourierovom obraze tvar

$$J_i^{\perp}(k) = P_{il}(k) J_l(k) = \left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\boldsymbol{k}^2}\right) J_l(k), \tag{5.5.15}$$

kde príslušný priečny projektor bol zavedený v časti 2.5.1.

Pre voľné elektromagnetické pole ($J_i = 0$) vieme priamo napísať všeobecné riešenie

$$\boldsymbol{A}(x) = \sum_{\pm} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k_0}} \left[\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^*(\boldsymbol{k}) a_{\boldsymbol{k}}^{\lambda} \mathrm{e}^{-ik\cdot x} + \boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{k}) a_{\boldsymbol{k}}^{\lambda\dagger}(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{ik\cdot x}\right], \tag{5.5.16}$$

kde $\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}(\boldsymbol{k})$ predstavujú dva polarizačné vektory. Aby bola splnená Coulombova kalibrácia, musí platiť

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\pm} \cdot \boldsymbol{k} = 0. \tag{5.5.17}$$

Pre hybnosť $\boldsymbol{k} = (0, 0, k)$ volíme polarizačné vektory v tvare

$$\boldsymbol{\epsilon}_+(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0), \quad \boldsymbol{\epsilon}_-(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0). \tag{5.5.18}$$

Hovoríme o pravotočivej, resp. ľavotočivej polarizácii.

Vo všeobecnosti platia pre polarizačné vektory tieto vlastnosti

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{k}) = 0, \tag{5.5.19}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^*_{\lambda'}(\boldsymbol{k}) = \delta_{\lambda'\lambda}, \tag{5.5.20}$$

$$\sum_{\lambda=\pm} \epsilon^*_{\lambda_i}(\boldsymbol{k})\epsilon_{\lambda_j}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}^2}. \tag{5.5.21}$$

Kvantovacia procedúra vedie na efektívnu zámenu amplitúd $a_\lambda, a^\dagger_\lambda$ na odpovedajúce kreačné a anihilačné operátory. Je výhodné zadefinovať operáciu $f\overleftrightarrow{\partial_\mu}g$ predpisom

$$f\overleftrightarrow{\partial_\mu}g \equiv f(\partial_\mu g) - (\partial_\mu f)g. \tag{5.5.22}$$

Pomocou nej je potom možné kompaktne zapísať inverzné vzťahy

$$a^\lambda_{\boldsymbol{k}} = i\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{k}) \cdot \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\boldsymbol{A}(x), \tag{5.5.23}$$

$$a^{\lambda\dagger}_{\boldsymbol{k}} = -i\boldsymbol{\epsilon}^*_\lambda(\boldsymbol{k}) \cdot \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\boldsymbol{A}(x). \tag{5.5.24}$$

Metóda kanonického kvantovania je založená na identifikácii zovšeobecnenej hybnosti, ktorá je pre Lagrangián (5.5.11) daná

$$\pi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_i} = \dot{A}_i. \tag{5.5.25}$$

Podmienka Coulombovej kalibrácie $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$ implikuje splnenie analogickej podmienky pre kanonické hybnosti

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\pi} = 0. \tag{5.5.26}$$

Hustotu Hamiltoniánu určíme priamočiaro

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi_i\dot{A}_i - \mathcal{L} \\
&= \pi_i\pi_i - \frac{1}{2}\underbrace{\dot{A}_i\dot{A}_i}_{\pi_i\pi_i} + \frac{1}{2}\partial_j A_i\partial_j A_i - \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A} - \mathcal{L}_{\mathrm{Coul}} \\
&= \frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \frac{1}{2}\partial_j A_i\partial_j A_i - \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A} + \mathcal{H}_{\mathrm{Coul}}.
\end{aligned}$$

Naložíme ďalej kanonické komutačné vzťahy, ktoré možno zapísať v tvare

$$[A_i(t,\boldsymbol{x}), \pi_j(t,\boldsymbol{y})] = i\left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = i\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}^2}\right)$$

$$(5.5.27)$$

spolu s

$$[A_i(t,\boldsymbol{x}), A_j(t',\boldsymbol{x}')] = [\pi_i(t,\boldsymbol{x}), \pi_j(t',\boldsymbol{x}')] = 0. \tag{5.5.28}$$

Tieto vzťahy implikujú komutačné vzťahy medzi kreačnými a anihilačnými operátormi $a_{\boldsymbol{k}}^{\lambda}$ a $a_{\boldsymbol{k}}^{\lambda\dagger}$

$$\left[a_{\boldsymbol{k}}^{\lambda}, a_{\boldsymbol{k}'}^{\lambda'}\right] = \left[a_{\boldsymbol{k}}^{\lambda\dagger}, a_{\boldsymbol{k}'}^{\lambda'\dagger}\right] = 0, \tag{5.5.29}$$

$$\left[a_{\boldsymbol{k}}^{\lambda}, a_{\boldsymbol{k}'}^{\lambda'\dagger}\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'). \tag{5.5.30}$$

Celkový Hamiltonián v tomto prístupe nadobúda tvar

$$H = \sum_{\lambda=\pm}\int \mathrm{d}^3k\, E_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}^{\lambda\dagger} a_{\boldsymbol{k}}^{\lambda} + 2\mathcal{E}_0 V - \int \mathrm{d}^3x\, \boldsymbol{J}(x)\cdot\boldsymbol{A}(x) + H_{\mathrm{Coul}}, \tag{5.5.31}$$

kde V je objem uvažovanej oblasti priestoru a zaviedli sme označenie

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{k}}, \quad E_{\boldsymbol{k}} = |\boldsymbol{k}|, \tag{5.5.32}$$

$$H_{\mathrm{Coul}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}^3y\, \frac{\rho(t,\boldsymbol{x})\rho(t,\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}. \tag{5.5.33}$$

Výhodou Coulombovej kalibrácie je explicitná prítomnosť fyzikálnych stupňov voľnosti. Na druhej strane ale dochádza k strate Lorentzovej invariancie. To vidno na príklade Feynmanovho propagátora

$$\begin{aligned}\Delta_{ij}^{\mathrm{tr}}(x-y) &= \langle 0|\mathrm{T}\left\{A_i(x)A_j(x)\right\}|0\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2+i\varepsilon}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\right)\mathrm{e}^{-ik\cdot(x-y)}.\end{aligned} \tag{5.5.34}$$

5.5.2 Lorentzova kalibrácia

Pri naložení Lorentzovej kalibrácie sa postup kvantovania elektromagnetického poľa líši vo viacerých bodoch od Coulombovej kalibrácie. V prvom rade budeme považovať jednotlivé zložky vektorového potenciálu A_μ za nezávislé a vychádzajme z Lagrangiánu (2.5.60). Určme kanonické hybnosti použitím definičného vzťahu (1.4.6), aby sme mohli aplikovať metódu kanonického kvantovania

$$\pi^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0} = -\partial_\mu A^\mu, \quad \pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_i} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i. \tag{5.5.35}$$

Očakávame, že komutátory kvantovej teórie by mali vyhovovať vzťahom

$$[A_\mu(\boldsymbol{x}), A_\nu(\boldsymbol{y})] = [\pi_\mu(\boldsymbol{x}), \pi_\nu(\boldsymbol{y})] = 0 \tag{5.5.36}$$

a

$$[A_\mu(\boldsymbol{x}), \pi_\nu(\boldsymbol{y})] = ig_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{5.5.37}$$

Už z prvého z výrazov v (5.5.35) je zrejmé, že nie je možné priamočiaro uvažovať Lorentzovu podmienku, pretože by sme dospeli k sporu v zmiešanom komutátore.

Postupujme ale ďalej a po vzore skalárneho poľa predstavme Fourierovu reprezentáciu polí

$$A_\mu(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{p}|}} \sum_{\lambda=0}^{3} (\epsilon^\lambda)_\mu(\boldsymbol{p}) \left[a^\lambda_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + a^{\lambda\dagger}_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right], \tag{5.5.38}$$

$$\pi^\nu(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{|\boldsymbol{p}|}{2}} (+i) \sum_{\lambda=0}^{3} (\epsilon^\lambda)_\mu(\boldsymbol{p}) \left[a^\lambda_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} - a^{\lambda\dagger}_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right]. \tag{5.5.39}$$

Na rozdiel od dvoch polarizačných vektorov v Coulombovej kalibrácie máme teraz štyri polarizačné vektory $\epsilon^\lambda(\boldsymbol{p}); \lambda = 0, 1, 2, 3$. Normalizačná podmienka pre ne nadobúda tvar

$$\epsilon^\lambda \cdot \epsilon^{\lambda'} = g^{\lambda\lambda'} \tag{5.5.40}$$

a ϵ^0 volíme ako časupodobný vektor a $\epsilon^{1,2,3}$ ako priestorupodobné. Vzťah (5.5.40) explicitne odpovedá rovnici

$$g^{\mu\nu}(\epsilon^\lambda)_\mu \cdot (\epsilon^{\lambda'})_\nu = g^{\lambda\lambda'} \tag{5.5.41}$$

Predpokladáme závislosť $\epsilon^\lambda = \epsilon^\lambda(|\boldsymbol{p}|, \boldsymbol{p})$ a podobne ako v časti 2.5.2 volíme lokálny systém súradníc tak, aby platilo $\epsilon^3 \parallel \boldsymbol{p}$ a

$$\epsilon^1 \cdot p = \epsilon^2 \cdot p = 0. \tag{5.5.42}$$

Komutačné vzťahy pre kreačné a anihilačné operátory sú

$$\left[a^\lambda_{\boldsymbol{p}}, a^\sigma_{\boldsymbol{q}}\right] = \left[a^{\lambda\dagger}_{\boldsymbol{p}}, a^{\sigma\dagger}_{\boldsymbol{q}}\right] = 0, \tag{5.5.43}$$

$$\left[a^\lambda_{\boldsymbol{p}}, a^{\sigma\dagger}_{\boldsymbol{q}}\right] = -g^{\lambda\sigma}\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}). \tag{5.5.44}$$

Pre priestorové zložky komutátorov potom máme $[a^i_{\boldsymbol{p}}, a^{j\dagger}_{\boldsymbol{q}}] = \delta^{ij}\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})$, ale pre časové výraz s podozrivým znamienkom $[a^0_{\boldsymbol{p}}, a^{0\dagger}_{\boldsymbol{q}}] = -\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})$. Čo toto znamienko spôsobuje? Predpokladajme existenciu vákuového stav $|0\rangle : a^\lambda_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = 0$. S jeho pomocou vieme ľahko skonštruovať jednočasticové stavy $|\boldsymbol{p}, \lambda\rangle = a^{\lambda\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$. Rátajme skalárny súčin medzi dvojicou jednočasticových "časových" stavov

$$\langle \boldsymbol{p}, 0|\boldsymbol{q}, 0\rangle = \langle 0|a^0_{\boldsymbol{p}} a^{0\dagger}_{\boldsymbol{q}}|0\rangle = -\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}). \tag{5.5.45}$$

Vidíme, že dostávame stav so zápornou normou. Ide zjavne o nefyzikálny prvok teórie. Na vyriešenie tohto problému bol navrhnutý Guptov-Bleulerov prístup, ktorý spočíva v špeciálnom uvažovaní Lorentzovej podmienky. Tú ako takú nemôžeme teraz chápať v operátorovom význame. Čo tak naložiť podmienku $\partial_\mu A^\mu = 0$ na selekciu možných fyzikálnych stavov teórie? Inými slovami, v teórii Lorentzova podmienka vystupovala ako podmienka na prípustné fyzikálne stavy $|\psi\rangle$. Ukazuje sa ale, že podmienka $\partial_\mu A^\mu|\psi\rangle = 0$ je príliš silná. Ako vhodná sa javí

$$\partial^\mu A^-_\mu|\psi\rangle = 0 \tag{5.5.46}$$

kde

$$A_\mu^- = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{p}|}} \sum_{\lambda=0}^{3} (\epsilon^\lambda)_\mu a_{\boldsymbol{p}}^\lambda \mathrm{e}^{-ip\cdot x} \tag{5.5.47}$$

je časť poľa A_μ so zápornou frekvenciou. Teda v Hilbertovom priestore máme len stavy $|\psi\rangle$, pre ktoré $\partial^\mu A_\mu^- |\psi\rangle = 0$. Táto podmienka zaručí splnenie

$$\langle \psi' | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0. \tag{5.5.48}$$

Hovoríme, že operátor $\partial_\mu A^\mu$ má nulový maticový element medzi fyzikálnymi stavmi. Konštrukciu odpovedajúceho stavového priestoru možno vykonať analogicky po vzore klasickej teórie opísanej v časti 2.5.2. Ľahko sa ukáže, že v lokálnom súradnicovom systéme prejde podmienka (5.5.46) na

$$\sum_{\lambda=0}^{3} (k \cdot \epsilon^\lambda) a_{\boldsymbol{k}}^\lambda = 0. \tag{5.5.49}$$

Keďže platí $k \cdot \epsilon^0 = k_0, k \cdot \epsilon^1 = k \cdot \epsilon^2 = 0$ a $k \cdot \epsilon^3 = -k_0$, tak dostávame podmienku $k_0(a_{\boldsymbol{k}}^0 - a_{\boldsymbol{k}}^3) = 0$. Teda musí platiť

$$a_{\boldsymbol{k}}^0 = a_{\boldsymbol{k}}^3. \tag{5.5.50}$$

Vďaka nej sa dá ukázať, že fyzikálne stavy obsahujú kombinácie časových a pozdĺžnych fotónov, ktorých príspevky sa navzájom rušia. Platí napríklad

$$\Phi^\dagger (a_{\boldsymbol{k}}^{3\dagger} a_{\boldsymbol{k}}^3 - a_{\boldsymbol{k}}^{0\dagger} a_{\boldsymbol{k}}^0) \Phi = \Phi^\dagger (a_{\boldsymbol{k}}^{3\dagger} - a_{\boldsymbol{k}}^{0\dagger}) a_{\boldsymbol{k}}^0 \Phi = 0. \tag{5.5.51}$$

Na záver teda zosumarizujme základné výrazy pre prácu s kvantovým elektromagnetickým poľom

- Lagrangián

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} : (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) :, \tag{5.5.52}$$

- pohybové rovnice

$$\Box A_\mu = 0, \tag{5.5.53}$$

- dodatočná Lorentzova podmienka

$$\left(\frac{\partial A^-}{\partial x}\right)\Phi \equiv \frac{\partial A_\mu^-}{\partial x_\mu}\Phi = 0, \tag{5.5.54}$$

- všeobecný výraz pre operátor štvorhybnosti

$$P^\mu = -\int \mathrm{d}^3 k \, k^\mu \sum_{\sigma=1,2} a_{\boldsymbol{k}}^{\sigma\dagger} a_{\boldsymbol{k}}^\sigma, \tag{5.5.55}$$

- Hamiltonián

$$H = P^0 = \int \mathrm{d}^3k\,|\boldsymbol{k}| \sum_{\sigma=1,2} a_{\boldsymbol{k}}^{\sigma\dagger} a_{\boldsymbol{k}}^{\sigma}, \tag{5.5.56}$$

- stredná hodnota vypočítaná ako sumácia cez dovolené stavy

$$\langle P^\mu \rangle = \Phi^* \int \mathrm{d}^3k\,k^\mu \sum_{\sigma=1,2} a_{\boldsymbol{k}}^{\sigma\dagger} a_{\boldsymbol{k}}^{\sigma} \Phi, \tag{5.5.57}$$

- komutátor poľových funkcií

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = g_{\mu\nu} n_0(x-y), \tag{5.5.58}$$

kde funkcia $n_0(x)$ odpovedá (5.2.6) v limitnom prípade $m = 0$.

- vektor spinového momentu

$$\boldsymbol{S} = i\varepsilon^{abc} \int \mathrm{d}^3k\,\boldsymbol{\epsilon}^a(\boldsymbol{k}) a_{\boldsymbol{k}}^{b\dagger} a_{\boldsymbol{k}}^{c}, \tag{5.5.59}$$

- Feynmanov propagátor

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|\mathrm{T}\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}. \tag{5.5.60}$$

Podobne ako v časti 5.3 infinitezimálne malá veličina $\varepsilon > 0$ v menovateli zabezpečí správne obchádzanie pólov.

5.6 Kvantovanie spinorového poľa

Z pedagogických dôvodov budeme pri kvantovaní spinorového poľa postupovať rovnakým spôsobom ako pri kvantovaní skalárneho a elektromagnetického poľa. A to aj napriek tomu, že očakávame splnenie iných ako komutačných vzťahov pre spinorové pole. Cieľom bude zistiť, kde nastanú problémy, ktorých riešenie nakoniec povedie na fermiónovský charakter spinorového poľa.

Vychádzajme z Lagrangiánu (3.3.11), z ktorého odvodíme výraz pre konjugovanú hybnosť

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\gamma^\dagger. \tag{5.6.1}$$

Postupujúc podľa myšlienok kanonického kvantovania z časti 4.2 postulujme komutačné vzťahy (v pevne zvolenom časovom okamihu) pre spinorové pole v tvare

$$[\psi_a(\boldsymbol{x}), \psi_b(\boldsymbol{y})] = \left[\psi_a^\dagger(\boldsymbol{x}), \psi_b^\dagger(\boldsymbol{y})\right] = 0, \tag{5.6.2}$$

$$\left[\psi_a(\boldsymbol{x}), \psi_b^\dagger(\boldsymbol{y})\right] = \delta_{ab}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{5.6.3}$$

V poslednom výraze vystupuje zvyčajný Kroneckerov symbol δ_{ab}, kde a, b sú spinorové indexy.

Na ďalší postup využijeme rozklady (volené vo vhodnom časovom okamihu $t = 0$)

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left[a^s_{\boldsymbol{p}} u^s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} v^s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right], \tag{5.6.4}$$

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{x}) = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} u^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + b^{s}_{\boldsymbol{p}} v^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right], \tag{5.6.5}$$

ktoré boli získané v časti 3.6.

Tvrdíme, že komutačné vzťahy (5.6.3) implikujú komutačné vzťahy pre kreačné a anihilačné operátory

$$\left[a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\right] = \delta^{rs} \delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}), \quad \left[b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\right] = -\delta^{rs} \delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}). \tag{5.6.6}$$

Síce druhý z týchto vzťahov nevyzerá prirodzene, nejedná sa zatiaľ o významný nedostatok. V podstate len znamená to, že vákuový stav je teraz potrebné definovať ako taký stav, pre ktorý je $b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = 0$ a excitované stavy z neho možno získať aplikovaním anihilačného operátora $b^r_{\boldsymbol{p}}$.

Na dôkaz tvrdenia spočítajme komutátor spinorových polí

$$\begin{aligned}
\left[\psi(\boldsymbol{x}), \psi^\dagger(\boldsymbol{y})\right] = {} & \sum_{r,s} \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{p}} E_{\boldsymbol{q}}}} \Big\{ \left[a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\right] u^r(\boldsymbol{p}) u^{s\dagger}(\boldsymbol{q}) \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{q})} \\
& + \left[{b_{\boldsymbol{p}}}^r\dagger, b^s_{\boldsymbol{q}}\right] v^r(\boldsymbol{p}) v^{s\dagger}(\boldsymbol{q}) \mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{q})} \Big\} \\
& = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \Big\{ u^s(\boldsymbol{p}) \bar{u}^s(\boldsymbol{p}) \gamma^0 \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\
& + v^s(\boldsymbol{p}) \bar{v}^s(\boldsymbol{p}) \gamma^0 \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \Big\} \\
& = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \Big\{ (\hat{p} + m) \gamma^0 \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} + (\hat{p} - m) \gamma^0 \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \Big\} \\
& = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} 2p_0 (\gamma^0)^2 \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\
& = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\
& = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),
\end{aligned}$$

kde sme využili pri úprave súčtové vzorce $\sum_s u^s(\boldsymbol{p})\bar{u}^s(\boldsymbol{p}) = \hat{p} + m$ a $\sum_s v^s(\boldsymbol{p})\bar{v}^s(\boldsymbol{p}) = \hat{p} - m$, vhodnú zámenu premenných $\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$ v jednom z integrálnych výrazov, $(\gamma^0)^2 = 1$ a vzťah $p_0 = E_{\boldsymbol{p}}$. Zostávajúce vzťahy je možné získať analogickým postupom ■

Na odvodenie Hamiltoniánu použijeme výraz (3.6.6), podľa ktorého je hustota Hamiltoniánu daná výrazom $\bar{\psi}[-i\gamma^j\partial_j + m]\psi$. Na výpočet H upravíme najskôr časť výrazu

$$(-i\gamma^j\partial_j + m)\psi = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \bigg[a^s_{\boldsymbol{p}}(-\gamma^j p_j + m)u^s(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{5.6.7}$$

$$+ b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}(\gamma^j p_j + m)v^s(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \bigg], \tag{5.6.8}$$

kde sme využili $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} = p^j x^j = -p^j x_j$. Na ďalšiu úpravu použijeme Diracove rovnice pre spinory u, v v tvare

$$(\hat{p} - m)u = 0, \quad (\hat{p} + m)v = 0,$$

z ktorých jednoduchým prepisom dostaneme

$$(-\gamma^j p_j + m)u = \gamma^0 p_0 u, \quad (\gamma^j p_j + m)v = -\gamma^0 p_0 v. \tag{5.6.9}$$

Dosadením do (5.6.8) nakoniec máme

$$(-i\gamma^j\partial_j + m)\psi = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{2}}\gamma^0 \left[a^s_{\boldsymbol{p}}u^s(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} - b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}v^s(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \right]. \tag{5.6.10}$$

Tento výraz využijeme pri prepise Hamiltoniánu do výhodnejšieho tvaru

$$H = \int \mathrm{d}^3x\, \bar{\psi}\left[-i\gamma^j\partial_j + m\right]\psi = \int \mathrm{d}^3x\, \psi\gamma^0 \left[-i\gamma^j\partial_j + m\right]\psi \tag{5.6.11}$$

$$= \sum_{r,s} \int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p\, \mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{4E_{\boldsymbol{q}}}} \left[a^{r\dagger}_{\boldsymbol{q}} u^{r\dagger}(\boldsymbol{q})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} + b^r_{\boldsymbol{q}} v^{r\dagger}(\boldsymbol{q})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \right]$$

$$\times \left[a^s_{\boldsymbol{q}} u^s(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} - b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}} v^s(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \right] \tag{5.6.12}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2} \sum_{r,s} \bigg[a^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} u^{r\dagger}(\boldsymbol{p}) u^s(\boldsymbol{p}) - a^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}} b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} u^{r\dagger}(-\boldsymbol{p}) v^s(\boldsymbol{p})$$

$$+ b^r_{-\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} v^{r\dagger}(-\boldsymbol{p}) u^s(\boldsymbol{p}) - b^r_{\boldsymbol{p}} b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} v^{r\dagger}(\boldsymbol{p}) v^s(\boldsymbol{p}) \bigg] \tag{5.6.13}$$

$$= \sum_s \int \mathrm{d}^3p\, E_{\boldsymbol{p}} \left[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} - b^s_{\boldsymbol{p}} b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} \right] \tag{5.6.14}$$

$$= \sum_s \int \mathrm{d}^3p\, E_{\boldsymbol{p}} \left[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} - b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} b^s_{\boldsymbol{p}} + \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \right], \tag{5.6.15}$$

kde sme využili vzťahy (3.5.1), (3.5.11) a (3.5.14). Prítomnú divergenciu vieme odstrániť uvažovaním normálneho súčinu $H \to : H :$, podobne ako sme postupovali pri skálarnom poli v časti 5.1. Získaný výraz pre Hamiltonián vykazuje jednu nepríjemnú vlastnosť. S pomocou komutačných vzťahov sa ukáže, že

$$\left[H, b^s_{\boldsymbol{p}}\right] = -E_{\boldsymbol{p}} b^s_{\boldsymbol{p}}. \tag{5.6.16}$$

Postupom naznačeným v časti 4.4 dospejeme k záveru, že opätovným použitím operátora $b^s_{\boldsymbol{p}}$ vieme "vyrobiť" ľubovoľné množstvo excitácií, pričom celková energia konfigurácií bude záporná vďaka členu $-b^\dagger b$ v Hamiltoniáne H. Ukazuje sa teda, že nami zvolené kvantovanie spinorového poľa vedie k nefyzikálnym záverom a je potrebné ho adekvátne pozmeniť. Možným riešením je kvantovacia procedúra pre spinorové pole založená na zámene komutátora za antikomutátor

$$[\quad,\quad] \rightarrow \{\quad,\quad\}. \tag{5.6.17}$$

Na spinorové pole tak naložíme nasledujúce vzťahy

$$\{\psi_a(\boldsymbol{x}), \psi_b(\boldsymbol{y})\} = \left\{\psi^\dagger_a(\boldsymbol{x}), \psi^\dagger_b(\boldsymbol{y})\right\} = 0, \tag{5.6.18}$$

$$\left\{\psi_a(\boldsymbol{x}), \psi^\dagger_b(\boldsymbol{y})\right\} = \delta_{ab}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{5.6.19}$$

Pre príslušné kreačné a anihilačné operátory potom máme

$$\left\{a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\right\} = \left\{b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\right\} = \delta^{rs}\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{5.6.20}$$

s tým, že zostávajúce antikomutačné vzťahy sú identicky rovné nule. Výpočet Hamiltoniánu s touto voľbou povedie tentokrát na výraz

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}^3p\, E_{\boldsymbol{p}} \left[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} - b^s_{\boldsymbol{p}} b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}\right] \\ &= \int \mathrm{d}^3p\, E_{\boldsymbol{p}} \left[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} + b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} b^s_{\boldsymbol{p}} - \delta^{(3)}(\boldsymbol{0})\right], \end{aligned}$$

ktorý už zjavne vykazuje požadovanú vlastnosť pozitívnej definitnosti. Použitie normálneho súčinu potom efektívne vedie k nasledujúcemu výrazu pre Hamiltonián spinorového poľa

$$H = \int \mathrm{d}^3p\, E_{\boldsymbol{p}} \left[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} + b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} b^s_{\boldsymbol{p}}\right]. \tag{5.6.21}$$

Spektrum teórie sa s pomocou takto získaného Hamiltoniánu vybuduje priamočiaro. V prvom rade zavedieme vákuový stav zvyčajnou požiadavkou

$$a^s_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = b^s_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = 0, \forall \boldsymbol{p}, s. \tag{5.6.22}$$

Využitím antikomutačných vzťahov (5.6.20) vieme priamočiaro odvodiť

$$\left[H, a^r_{\boldsymbol{p}}\right] = -E_{\boldsymbol{p}} a^r_{\boldsymbol{p}}, \quad \left[H, a^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}\right] = E_{\boldsymbol{p}} a^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}, \tag{5.6.23}$$

$$\left[H, b^r_{\boldsymbol{p}}\right] = -E_{\boldsymbol{p}} b^r_{\boldsymbol{p}}, \quad \left[H, b^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}\right] = E_{\boldsymbol{p}} b^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}. \tag{5.6.24}$$

Jednočasticové stavy potom odpovedajú napríklad

$$|\boldsymbol{p}, r\rangle = b^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle \tag{5.6.25}$$

a dvojčasticové zase

$$|\boldsymbol{p}, r; \boldsymbol{q}, s\rangle \equiv b^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}} b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}|0\rangle. \tag{5.6.26}$$

Použitím antikomutačných vzťahov dostaneme, že pre daný dvojčasticový stav platí

$$|\boldsymbol{p}, r; \boldsymbol{q}, s\rangle = -|\boldsymbol{q}, s; \boldsymbol{p}, r\rangle. \tag{5.6.27}$$

Z neho vidíme, že v danom stave so zadanou hybnosťou $\boldsymbol{p}$ a spinom s nemôže byť viac ako jedna excitácia. Tým pádom odpovedajúce častice sú popísané známou Fermiho-Diracovou distribúciou.

Podotýkame, že spinorové pole ako také nemá klasickú interpretáciu a ani jeho kvantovú verziu nie je možné chápať analogickým spôsobom ako jednočasticovú Schrödingerovu rovnicu. Samotný Diracov prístup je v krátkosti opísaný v prílohe C.5.

Znalosť Hamiltoniánu (5.6.21) nám tiež dovolí získať plnú časopriestorovú závislosť spinorových polí (5.6.4) a (5.6.5). Keďže dané operátory vyhovujú analogickým vzťahom ako operátory skalárneho poľa, je možné aplikovať postup vedúci k rovnici (5.3.12) a odvodiť odpovedajúce vzťahy pre spinorové polia

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^{2} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left[a^s_{\boldsymbol{p}} u^s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} v^s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{ip\cdot x}\right], \tag{5.6.28}$$

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{s=1}^{2} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left[a^s_{\boldsymbol{p}} u^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{ip\cdot x} + b^s_{\boldsymbol{p}} v^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-ip\cdot x}\right]. \tag{5.6.29}$$

Zavedieme najprv tzv. fermiónovský propagátor predpisom

$$iS_{ab} \equiv \left\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\right\}, \tag{5.6.30}$$

ktorý sa tiež zvykne zapisovať krátko ako

$$iS(x-y) = \left\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\right\}. \tag{5.6.31}$$

V poslednom vzťahu sa implicitne predpokladá translačná invariantnosť, ktorú je možné ľahko overiť. Na získanie explicitného výrazu pre $S(x-y)$ dosadíme do jeho definičného vzťahu rozklady (5.6.28) a (5.6.29) a upravujeme s pomocou sumačných vzťahov (3.5.16) a (3.5.17)

$$\begin{aligned} iS(x-y) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{p}} E_{\boldsymbol{q}}}} \Big[\left\{a^s_{\boldsymbol{p}}, a^{r\dagger}_{\boldsymbol{q}}\right\} u^s(\boldsymbol{p}) \bar{u}^r(\boldsymbol{q}) \mathrm{e}^{-i(p\cdot x - q\cdot y)} \\ &\quad + \left\{b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}, b^r_{\boldsymbol{q}}\right\} v^s(\boldsymbol{p}) \bar{v}^r(\boldsymbol{q}) \mathrm{e}^{i(p\cdot x - q\cdot y)}\Big] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \left[u^s(\boldsymbol{p}) \bar{u}^s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)} + v^s(\boldsymbol{p}) \bar{v}^s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{ip\cdot(x-y)}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \left[(\hat{p}+m) \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)} + (\hat{p}-m) \mathrm{e}^{ip\cdot(x-y)}\right]. \end{aligned} \tag{5.6.32}$$

Z posledného výrazu vidíme, že daný propagátor je možné získať aj pomocou funkcie $D(x-y)$ zadanou v (5.2.4)

$$iS(x-y) = (i\hat{\partial}_x + m) \left[D(x-y) - D(y-x)\right]. \tag{5.6.33}$$

Ďaleko od singularít máme

$$(i\hat{\partial}_x - m)S(x-y) = 0, \tag{5.6.34}$$

čo je vlastne priamym dôsledkom $(\Box_x + m)D(x-y) = 0$.

Pri diskusii skalárneho poľa sme videli, že pre priestorupodobné intervaly platí, že $D(x-y) - D(y-x) = 0$. Táto vlastnosť potom viedla na nulový komutátor $[\varphi(x), \varphi(y)] = 0$ pre $(x-y)^2 < 0$. Antikomutačný vzťah pre spinorové polia vedie ale na podmienku

$$\{\psi_a(x), \psi_b(y)\} = 0 \quad (x-y)^2 < 0. \tag{5.6.35}$$

Ako to teda je pre kauzálne vlastnosti spinorového poľa? Pragmatická odpoveď znie, že pozorovateľné veličiny pre fermióny sú vždy dané bilineárnou kombináciou. Pre ne bude platiť, že odpovedajúci komutátor je mimo svetelného kužeľa nulový.

Na zavedenie Feynmanovho propagátora uvedieme najskôr dve vákuové stredné hodnoty, ktorých platnosť sa dá ľahko ukázať

$$\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}(\hat{p}+m)_{ab}\mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}, \tag{5.6.36}$$

$$\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}(\hat{p}-m)_{ab}\mathrm{e}^{ip\cdot(x-y)}. \tag{5.6.37}$$

Feynmanov propagátor pre spinorové polia $S_F(x-y)$ zavedieme opäť pomocou chronologického T-súčinu, ktorý bol pre bozónovské polia zadefinovaný v (5.3.15), predpisom

$$S_F(x-y) \equiv \langle 0|\mathrm{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)]|0\rangle = \begin{cases} \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle & x^0 > y^0, \\ -\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle & y^0 > x^0. \end{cases} \tag{5.6.38}$$

Tento výraz samozrejme odpovedá matici typu 4×4. Pre praktické výpočty je tiež výhodný prepis Feynmanovho propagátora do hybnostnej reprezentácie, kde nadobúda tvar

$$S_F(x-y) = i\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}\mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}. \tag{5.6.39}$$

Infinitezimálna veličina ε zabezpečí správne obchádzanie pólov (podobne ako pre skalárne pole v časti 5.3). Feynmanov propagátor v danom prípade vyhovuje rovnici

$$(i\hat{\partial}_x - m)S_F(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y). \tag{5.6.40}$$

Kapitola 6

Interagujúce polia

Dôležitou črtou elementárnych častíc je ich schopnosť vzájomnej interakcie a možnosť premeny na iné častice. V súčasnosti poznáme štyri experimentálne dobre podložené interakcie, ktorými na seba častice pôsobia a to

(a) gravitačná,

(b) elektromagnetická,

(c) slabá,

(d) silná.

Gravitačne interagujú všetky známe formy energie a odpovedajúca interakcia sa javí ako najuniverzálnejšia vôbec. V tom zmysle, že existuje medzi ľubovoľnou dvojicou fyzikálnych objektov. Zároveň pri väčšine fyzikálnych javov (určite ale nie všetkých), s ktorými sa prakticky stretávame v laboratórnych podmienkach, je táto interakcia veľmi malá. Preto sa napríklad jej prejav vo fyzike elementárnych častíc zanedbáva a vynecháva v teoretickej analýze. Naopak jej prejav je najviac citeľný na makroskopickej úrovni, kde ovplyvňuje pohyb družíc, planét, celých galaxií a vesmíru ako celku (S. Weinberg, 1972).

Elektromagnetická interakcia existuje len medzi elektricky nabitými časticami. Podobne ako gravitáciu, tak i elektromagnetickú interakciu radíme medzi ďalekodosahové interakcie. To preto, že na veľkých vzdialenostiach im príslušný (statický) potenciál asymptoticky zaniká podľa Coulombovho zákona $\sim r^{-1}$ a to je aj jeden z dôvodov, prečo práve tieto interakcie boli z historického hľadiska skúmané ako prvé. Na druhej strane je prejav silnej a slabej interakcie značne ohraničený na oblasť mikrosveta a ich účinky sú značné len na relatívne malých priestorových mierkach, ktoré sú ďaleko od každodennej ľudskej skúsenosti.

V tejto kapitole si na klasickej úrovni vysvetlíme a objasníme základné vlastnosti interakcií elementárnych častíc. Na hlbšie oboznámenie sa s tu vyloženým výkladom existuje mnoho vynikajúcich učebníc. Za mnohé spomeňme (D. Griffiths, 2008; J. Hořejší, 2003; L. H. Ryder, 1996). Z populárnych knižiek vrelo doporučujeme (K. Huang, 2007; R. P. Feynman, 2000).

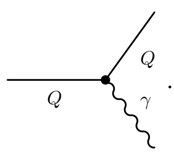
6.1 Interakcia častíc

Začnime našu diskusiu *elektromagnetickou* interakciou. Jej pôsobenie vysvetľujeme na klasickej úrovni obvykle takým spôsobom, že existuje invariantná vlastnosť častíc, ktorú nazývame elektrický náboj. Každá nabitá častica potom vytvára vo svojom okolí elektromagnetické pole, ktoré sa istým spôsobom (popísaným Maxwellovými rovnicami) šíri v priestore vo forme svetelných vĺn. Následne dochádza k interakcii tohto poľa s inými nabitými časticami. Tým pádom sa elektromagnetické pole stáva nositeľom elektromagnetickej interakcie. Kvantovanie (kapitola 5.5) vedie k opísaniu elektromagnetického poľa cez jeho kvantá - fotóny a elementárnym aktom interakcie medzi časticou s nábojom Q a elektromagnetickým poľom sa stane pohltenie, resp. vyžiarenie fotónu (γ-kvanta). Formálne môžeme takýto proces predstaviť v tvare “chemickej” reakcie

$$Q + \gamma \to Q \quad \text{alebo} \quad Q \to Q + \gamma. \tag{6.1.1}$$

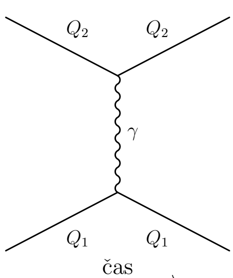
Tieto dva procesy môžeme výhodne znázorniť pomocou obojstrannej reakcie, resp. graficky

$$Q \longleftrightarrow Q + \gamma, \tag{6.1.2}$$



Naznačený grafický spôsob bol zavedený Richardom Feynmanom práve na zjednodušenie zápisu rôznych časopriestorových procesov medzi časticami a ich ďalšiu teoretickú analýzu (R. P. Feynman, 1949; S. S. Schweber, 1994) a v literatúre je známy ako Feynmanove diagramy. Dnes ich výskyt nie je obmedzený len na teóriu elementárnych častíc, ale vyskytuje sa aj v oblastiach, akými sú tuhé látky, hydrodynamika, štatistická fyzika a iné.

V diagrame v (6.1.2) odpovedá jednoduchá čiara šíreniu nabitej častice a zvlnená čiara fotónu. Pomocou tohto diagramu sa potom dá Coulombova interakcia medzi dvojicou nabitých častíc Q_1 a Q_2 znázorniť

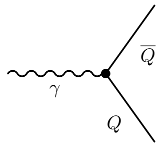


$$Q_1 + Q_2 \longrightarrow Q_1 + Q_2. \tag{6.1.3}$$

Predokladáme, že čas tečie v naznačenom smere zľava doprava a fotón vlastne sprostredkúva interakciu medzi časticami.

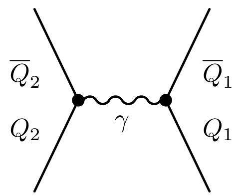
Iný možný proces je proces anihilácie, resp. vzniku páru častica-antičastica, ktorý môžeme graficky zachytiť pomocou Feynmanovho diagramu

$$Q + \bar{Q} \longleftrightarrow \gamma, \tag{6.1.4}$$



Na rozdiel od diagramu v rovnici (6.1.2), teraz obe jednoduché línie smerujú do(z) interakčného vrcholu. Navyše je nutné zameniť časticu na antičasticu $\bar{Q}$, aby bol zachovaný celkový elektrický náboj v danom procese. Ak sa diagram v (6.1.3) otočí o 90°, dostaneme

$$Q_2 + \bar{Q}_2 \longleftrightarrow Q_1 + \bar{Q}_1, \tag{6.1.5}$$



Fyzikálne tento proces opisuje proces premeny páru častíc $Q_2, \bar{Q}_2$ na pár $Q_1, \bar{Q}_1$ prostredníctvom jednofotónovej anihilácie.

Ako neskôr uvidíme, procesy typu (6.1.2) a (6.1.4) pochádzajú z člena v Lagrangiáne tvaru

$$\mathcal{L}(x) \sim eA_\mu(x)J^\mu(x), \tag{6.1.6}$$

kde A_μ je štvorpotenciál elektromagnetického poľa a J^μ štvorvektor prúdu nabitej častice. Z pragmatického pohľadu sa jedná o najjednoduchšiu skalárnu štruktúru, ktorú vieme skonštruovať z daných štvorvektorov. Táto relatívne priamočiara myšlienka sa skrýva aj za konštrukciou komplikovanejších modelov vo fyzike elementárnych častíc.

Na kvantitatívne vyjadrenie relevantnosti danej interakcie zavádzame do popisu väzbové konštanty. V prípade elektromagnetickej interakcie je rozhodujúcou veličinou náboj e, ktorý vyjadríme pomocou bezrozmerného parametra jemnej štruktúry α. S pomocou fyzikálnych konštánt je tento parameter definovaný ako

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \quad \text{(v SI jednotkách).} \tag{6.1.7}$$

Na základe približnej numerickej hodnoty sa potom často konštatuje, že elektromagnetická interakcia je rádu $10^{-2} - 10^{-3}$. Parameter α zohráva dôležitú úlohu v poruchovej teórii, kde je možné konštruovať asymptotické rozvoje fyzikálnych veličín (napr. účinných prierezov, polčasov rozpadu a pod.) vzhľadom na α.

Typickým príkladom *slabej* interakcie je β-rozpad neutrónu

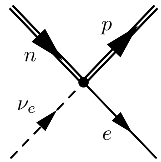
$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e, \tag{6.1.8}$$

ktorý vieme pomocou Feynmanových diagramov efektívne vyjadriť v tvare

$$n + \nu_e \to p + e^-$$

alebo

$$n + \bar{p} \to e^- + \bar{\nu}_e$$



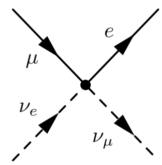
. (6.1.9)

Ako je známe, nízkoenergetické procesy slabých interakcií majú tvar štvorfermiónovej štruktúry, ako je znázornené na diagrame (6.1.9). Na ilustráciu uvedieme aj ďalší príklad - proces rozpadu miónu, ktorý je možno opísať interakciou

$$\mu + \nu_e \to \nu_\mu + e^-$$

alebo

$$\mu + \bar{\nu}_\mu \to e^- + \bar{\nu}_e$$



. (6.1.10)

Dynamické vlastnosti slabej interakcie fenomenologicky opisujeme Lagrangiánom Fermiho typu, ktorý ma štruktúru typu prúd $\times$ prúd

$$\mathcal{L} \sim G J^{\nu}_{\text{sl}}(x) {J^{\text{sl}}}^{\dagger}_{\nu}(x), \tag{6.1.11}$$

v ktorom sa vystupujúci prúd postuluje v tvare

$$J^{\text{sl}}_{\nu}(x) = \bar{p}(x) O_\nu n(x) + \bar{\nu}_e(x) O_\nu e(x) + \bar{\nu}_\mu(x) O_\nu \mu(x) + \dots . \tag{6.1.12}$$

Matice O_ν zabezpečia korektnú indexovú štruktúru, G je Fermiho konštanta a operátorové poľové funkcie sú označené tými istými symbolmi ako im odpovedajúce častice. Funkcia $e(x)$ teda opisuje pole elektrónov, $n(x)$ neutrónov, atď. Hodnotu Fermiho konštanty G vieme vyjadriť v bezrozmernom tvare s pomocou známych fyzikálnych konštánt a hmotnosti nukleónu M

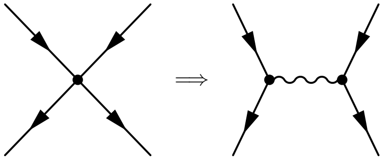
$$\frac{G}{\hbar c} \times \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \simeq 10^{-5}. \tag{6.1.13}$$

V systéme fyzikálnych jednotiek, kde $\hbar = c = 1$, vidíme, že

$$[G] \propto [\text{hmotnosť}]^{-2}.$$

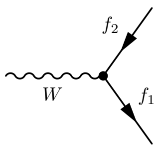
Ako sa pri podrobnejšej analýze (J. Hořejší, 2003) ukáže, tento fakt priamo vedie na závislosť intenzity slabej interakcie na typickej energii daného procesu. Pri energiách rádovo rovných 1 GeV je intenzita slabej interakcie zhruba rovná (6.1.13). Z experimentov tiež vyplýva, že pri energiách okolo 10^2 GeV prestáva byť fyzikálny opis založený na (6.1.11) adekvátny. Pre ďalšie oboznámenie sa s teóriou elektroslabej interakcie odkazujeme čitateľa na literatúru (J. Hořejší, 2003; M. E. Peskin, 2019; M. E. Peskin & D. V. Schroeder, 1995).

Podľa súčasných poznatkov je teória slabých interakcií sprostredkovaná intermediárnymi bozónmi, ktorá v diagramatickej reprezentácii odpovedá nasledujúcemu efektívnemu nahradeniu Fermiho interakcie



$$\Longrightarrow \quad . \tag{6.1.14}$$

Fundamentálnym prvkom teórie sa tak stáva proces podobný tomu z kvantovej elektrodynamiky, na ktorom sa podieľa celkovo trojica interagujúcich polí



$$, \tag{6.1.15}$$

kde $f_i; i = 1, 2$ predstavujú fermiónovské polia a W intermediárne vektorové bozóny so spinom 1 a hmotnosťami rádovo 10^2 GeV.

Silná interakcia je významná pre veľkú skupinu častíc, ktoré sa vyznačujú veľkou hmotnosťou $m \geqq m_\pi$ a nazývajú sa súhrnne hadróny. Silná interakcia je zodpovedná za jadrové sily, ktoré viažu protóny a neutróny v atómových jadrách. Nazývajú sa tiež silnými, pretože v mikrosvete sú zodpovedné za významné kvalitatívne efekty. Táto interakcia je podobne ako slabé interakcie krátkodosahová s fenomenologickou závislosťou

$$F_{\text{sil}} \sim \exp(-r/r_{\text{jad}}). \tag{6.1.16}$$

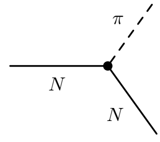
Prejavuje sa iba na malých vzdialenostiach, ktoré sú charakterizované polomerom jadrových síl

$$r_{\text{jad}} \simeq \frac{\hbar}{m_\pi c^2} \simeq 1,4\ \text{f} = 1,4\ \cdot\ 10^{-13}\,\text{cm}, \tag{6.1.17}$$

pričom táto hodnota je blízka Comptonovskej dĺžke $\pi-$mezóna. Na malých vzdialenostiach $r < r_{\text{jad}}$ je ich intenzita väčšia ako napr. elektromagnetickej interakcie.

Historicky prvé opisy dynamiky silných interakcií sa zavádzali v rámci tzv. Yukawovskej interakcie

$$\begin{aligned} N &\longleftrightarrow N + \pi \\ N + \bar{N} &\longleftrightarrow \pi \end{aligned}$$



$$, \tag{6.1.18}$$

ktorá mala pseudovektorový charakter

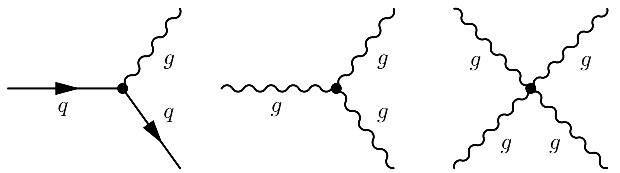
$$\mathcal{L} = g\bar{\Psi}(x)\gamma^5\vec{\tau}\Psi(x) \cdot \vec{\pi}(x), \tag{6.1.19}$$

kde $\vec{\pi}$ opisuje kvantové pole prislúchajúce π mezónom. V danom Lagrangiáne sa taktiež využíva kompaktný zápis pre nukleóny (protóny a neutróny) v tvare

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_p & \bar{\psi}_n \end{pmatrix}. \tag{6.1.20}$$

Explicitne naznačené vektory v rovnici (6.1.19) zase predstavujú abstraktné vektory vo vnútornom izotopickom priestore.

V súčasnosti je už ale známe, že fundamentálna teória opisujúca silné interakcia je kvantová chromodynamika. Ide o teóriu hmoty, ktorej elementárnymi excitáciami sú kvarky a gluóny. Základné interakcie medzi nimi sú akty kvarkovo-gluónovej a gluónovo-gluónovej interakcie



(6.1.21)

Pritom im odpovedajúca (bezrozmerná) väzbová konštanta je rádovo rovná 1. To vedie na omnoho zložitejšie problémy ako je tomu v kvantovej elektrodynamike a nevyhnutnosť hľadania nových (hlavne neporuchových) prístupov.

6.2 Interakčný Lagrangián

Pri opisoch vzájomne interagujúcich polí, pri ktorých môže dochádzať k premene jedného typu častíc na iný, sa zvykne vychádzať z plného Lagrangiánu systému, ktorý vyjadríme v tvare súčtu

$$\mathcal{L}_{\text{plný}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \tag{6.2.1}$$

kde $\mathcal{L}_0$ je Lagrangián voľných polí (obsahujú nanajvýš kvadratickú závislosť na poliach, napr. φ^2 alebo $(\partial\varphi)^2$) a interakčný Lagrangián $\mathcal{L}_{\text{int}}$, ktorý nesie informáciu o vzájomnom pôsobení medzi danými poliami a matematicky je daný aspoň kubickou závislosťou na poliach (napr. φ^3 a pod). Fyzikálne motivované príklady na interakčné Lagrangiány boli uvedené v predchádzajúcej časti, napr. vzťahy (6.1.6), (6.1.11) a (6.1.19).

Dôležitým fyzikálnym problémom je stanovenie podmienok na konštrukciu interakčného Lagrangiánu $\mathcal{L}_{\text{int}}$. Vo všeobecnosti sa predpokladá, že sa musí jednať o lokálny, hermitovský, Lorentzovsky-invariantný skalár, zložený z polí a ich derivácii. Na základe experimentálnych pozorovaní musí tiež zohľadňovať pozorované symetrie danej interakcie.

Ak sa obmedzíme na interakcie polynomiálneho typu, tak môžeme tvrdiť, že interakcia skalárneho poľa φ so spinorovým poľom môže byť typu skalár $\times$ skalár: $\bar{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x)$ alebo typu vektor $\times$ vektor: $\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)\partial_\nu\varphi(x)$. Analogickým spôsobom vieme postupovať pri nájdení najjednoduchšieho tvaru interakcie pseudoskalárneho izovektorového poľa piónov $\pi(x)$ s poľom nukleónov Ψ zavedeným v (6.1.20). Takýto typ sme uviedli v (6.1.19) a z formálneho hľadiska sa jednalo o štruktúru typu pseudoskalár$\times$pseudoskalár v konfiguračnom priestore, resp. izovektor$\times$izovektor v izotopickom priestore. Inú prípustnú interakčnú štruktúru (pseudovektor$\times$pseudovektor)$\times$(izovektor$\times$izovektor) možno postulovať v tvare

$$\bar{\Psi}(x)\gamma^\nu\gamma^5\boldsymbol{\tau}\Psi(x)\partial_\nu\boldsymbol{\pi}(x) \tag{6.2.2}$$

a predstavuje tzv. pseudovektorový variant Yukawovskej interakcie (6.1.19). Podotýkame, že izopická symetria je narušená a exaktne je splnená iba pre prípad silných interakcií. Podobne symetria vzhľadom na priestorovú inverziu sa zachováva iba pre silné interakcie a elektromagnetickú interakciu. V slabých interakciách sa parita nezachováva vôbec (D. Griffiths, 2008). Tok slabých interakcií má tvar lineárnej kombinácie vektora a pseudovektora. Z experimentov tiež vieme, že zákony zachovania elektrického a baryónového náboja, ktorý bol zavedený pre rozlíšenie silno interagujúcich častíc od ostatných, platia pre všetky typy interakcií. Ide o absolútne platné zákony zachovania.

V súvislosti so zákonom zachovania pre elektrický náboj je nutné, aby bol daný Lagrangián invariantný vzhľadom na (globálnu) kalibračnú transformáciu prvého druhu (pozri (1.8.2)) komplexne združených polí opisujúcich nabité častice

$$\varphi \to \mathrm{e}^{i\alpha}\varphi, \quad \overset{*}{\varphi} \to \mathrm{e}^{-i\alpha}\overset{*}{\varphi}, \tag{6.2.3}$$

s ktorým sme sa stretli napr. pri komplexnom skalárnom poli v časti 2.2. Analogicky je možné konštruovať zachovávajúce sa náboje pre iné typy (baryónový, podivnosť, atď.).

V kvantovej teórii poľa zohrávajú veľmi dôležitú rolu jednoduché modely, obsahujúce relatívne malý počet polí. V tejto práci sa stretneme s modelom (reálneho) skalárneho neutrálneho poľa, ktorý je opísaný Lagrangiánom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2(x) - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4(x). \tag{6.2.4}$$

Jeho Euklidovská verzia (časová premenná sa efektívne zamieňa za ďalšiu priestorovú premennú) je základným modelom v štatistickej fyzike, kde popisuje kritické vlastnosti fázového prechodu druhého druhu v Isingovom modeli. Parameter λ v poslednom člene (6.2.4) predstavuje väzbovú konštantu a tento model sa zvykne nazývať aj φ^4-modelom. V princípe je možné pole φ považovať ako za skalár, tak aj za pseudoskalár. Z tohto dôvodu je φ^4-model vhodný aj na opis pión-piónového rozptylu, ktorý je možno zapísať v tvare

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi})\cdot(\partial^\mu\boldsymbol{\varphi}) - \frac{m^2}{2}\boldsymbol{\varphi}(x)\cdot\boldsymbol{\varphi}(x) - \lambda(\boldsymbol{\varphi}(x)\cdot\boldsymbol{\varphi}(x))^2, \tag{6.2.5}$$

kde $\boldsymbol{\varphi} = (\psi^+, \pi^0, \pi^-)$ je izovektor. Člen obsahujúci $\lambda(\boldsymbol{\varphi}(x)\cdot\boldsymbol{\varphi}(x))^2$ opisuje súčasne niekoľko rozptylových procesov

$$\pi^\pm + \pi^\pm \to \pi^\pm + \pi^\pm, \qquad \pi^+ + \pi^- \longleftrightarrow \pi^0 + \pi^0, \quad \pi^0 + \pi^0 \to \pi^0 + \pi^0. \tag{6.2.6}$$

Ako už bolo spomenuté na konci predchádzajúcej časti 6.1, tak tieto tri interakcie nemožno považovať za fundamentálne. V kvarkovo-gluónovom modeli sa pión-piónové interakcie a takisto aj pión-nukleónové interakcie odvodzujú od základných kvarkovo-gluónových interakcií. Avšak bozónová interakcia vo φ^4 modeli (6.2.4) hrá dôležitú úlohu pri vysvetlení Higssovho mechanizmu a to bol aj hlavný dôvod, prečo sme tento model uviedli.

6.3 Komplexné skalárne pole

Zameriame sa teraz na spôsob zavedenia interakcie medzi elektromagnetickým poľom a komplexným skalárnym poľom, ktoré bolo analyzované v časti 2.2. Ako sme uviedli, Lagrangián komplexného poľa možno zadať pomocou dvojice komplexne združených polí $\varphi, \overset{*}{\varphi}{}^{*}$ s Lagrangiánom $\mathcal{L} = (\partial_\mu \overset{*}{\varphi})(\partial^\mu \varphi) - m^2 \overset{*}{\varphi}\varphi$, ktorý bol zavedený v (2.2.1). Podľa časti 1.8 vieme, že tento Lagrangián je invariantný vzhľadom na tzv. (globálne) kalibračné transformácie prvého druhu, ktoré v infinitezimálnom tvare nadobúdajú tvar

$$\delta\varphi = i\Lambda\varphi, \quad \delta\overset{*}{\varphi} = -i\Lambda\overset{*}{\varphi}, \tag{6.3.1}$$

kde Λ je ľubovoľné reálne číslo. V súvislosti s časťou 1.5 uveďme krátku poznámku o použitom označení. V (6.3.1) píšeme znak variácie δ namiesto Δ, ktorý sme použili v (1.5.2). To preto, lebo v analyzovanom prípade kalibračnej invariancie, nedochádza k aktívnej transformácii systému. Inými slovami X v (1.5.2) je rovné nule. Potom z porovnania (1.5.2) a (1.5.8) dostaneme, že $\delta\varphi = \Delta\varphi$. Taktiež v literatúre sa vieme častejšie na tomto mieste stretnúť s označením δ.

Iný možný prístup k zavedeniu komplexného poľa je predstaviť $(\varphi, \overset{*}{\varphi})$ pomocou ich rozloženia na reálnu a imaginárnu zložku

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad \overset{*}{\varphi} = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_{1,2} \in \mathbb{R}. \tag{6.3.2}$$

Dosadením týchto vzťahov do Lagrangiánu (2.2.1) odvodíme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)(\partial^\mu \varphi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)(\partial^\mu \varphi_2) - \frac{m^2}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2). \tag{6.3.3}$$

Kalibračnú transformáciu (6.3.1) predstavíme teraz v geometrickom tvare. Zapíšme dvojicu zložiek $\varphi_{1,2}$ ako dvojrozmerný vektor

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi_1 \boldsymbol{e}_1 + \varphi_2 \boldsymbol{e}_2, \tag{6.3.4}$$

kde jednotkové vektory $\boldsymbol{e}_{1,2}$ tvoria príslušnú ortonormálnu bázu vnútornom (fiktívnom) priestore. Lagrangián (6.3.3) sa týmto spôsobom dá prepísať do tvaru

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\varphi}) - \frac{m^2}{2}\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi}. \tag{6.3.5}$$

Konečnú kalibračnú transformáciu pre zložky (6.3.2) potom vieme zapísať v tvare

$$\varphi_1' \pm i\varphi_2' = \mathrm{e}^{\pm i\Lambda}(\varphi_1 \pm i\varphi_2), \tag{6.3.6}$$

resp. použitím Eulerovho vzťahu získame pre zložky $\varphi_{1,2}$ transformačný predpis

$$\varphi_1' = \varphi_1 \cos\Lambda - \varphi_2 \sin\Lambda, \quad \varphi_2' = \varphi_1 \sin\Lambda + \varphi_2 \cos\Lambda. \tag{6.3.7}$$

Tieto rovnice môžeme interpretovať ako rotáciu vektora φ o uhol Λ v rovine danej vektormi $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$. Súbor takýchto rotácií tvorí komutatívnu grupu $SO(2)$. Na druhej strane možno každú rotáciu predstaviť v tvare komplexnej jednotky $\mathrm{e}^{i\Lambda}$, ktorú je možné triviálne stotožniť s unitárnou "maticou" v jednorozmernom priestore. To pozorovanie plynie vďaka vzťahu $\mathrm{e}^{i\Lambda}(\mathrm{e}^{i\Lambda})^* = 1$. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že unitárne matice v jednorozmernom prípade tvoria grupu $U(1)$. Vidíme teda, že kalibračné transformácie prvého druhu generujú grupu $SO(2) \cong U(1)$.

Vráťme sa naspäť k analýze kalibračnej invariancie. Keďže sme predpokladali, že parameter Λ nezávisí na polohe v časopriestore, jednalo sa o tzv. globálnu kalibračnú transformáciu. Globálnu v zmysle, že ak vykonáme otočenie vektora $\boldsymbol{\varphi}$ o nejaký uhol v jednom bode, tak sa príslušné otočenie vykoná zároveň vo všetkých ostatných bodoch časopriestoru. Zo špeciálnej teórie relativity ale očakávame konečnú rýchlosť fyzikálnych signálov. Pozrime sa preto na situáciu, kedy Λ nebude pevne zvolený parameter, ale bude opísaný nejakou funkciou $\Lambda = \Lambda(x)$. Môžeme o nej predokladať, že sa mení len lokálne v istej oblasti časopriestoru. Takéto transformácie sa potom zvyknú označovať ako *lokálne* kalibračné transformácie, resp. kalibračné transformácie druhého druhu (L. H. Ryder, 1996; N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov, 1983). Predpokladajme nekonečne malú transformáciu, teda $\Lambda \ll 1$. Potom máme infinitezimálnu zmenu poľa

$$\varphi \to \varphi + i\Lambda(x)\varphi. \tag{6.3.8}$$

Odtiaľ podľa (1.5.2) s prihliadnutím (1.5.8) a $X^{\mu}_{(s)} = 0$ máme

$$\delta\varphi = i\Lambda(x)\varphi, \quad \partial_\mu\varphi \to \partial_\mu\varphi + i(\partial_\mu\Lambda)\varphi + i\Lambda(\partial_\mu\varphi). \tag{6.3.9}$$

Z poslednej rovnice vidíme, že malá zmena derivácie pozostáva z dvoch členov

$$\delta(\partial_\mu\varphi) = i(\partial_\mu\Lambda)\varphi + i\Lambda(\partial_\mu\varphi). \tag{6.3.10}$$

Komplexným združením transformácií (6.3.9) a (6.3.10) dostaneme

$$\delta\overset{*}{\varphi} = -i\Lambda(x)\overset{*}{\varphi}, \quad \delta(\partial_\mu\overset{*}{\varphi}) = -i(\partial_\mu\Lambda)\overset{*}{\varphi} - i\Lambda(\partial_\mu\overset{*}{\varphi}). \tag{6.3.11}$$

Oproti kalibračným transformáciám prvého druhu (6.3.1) vidíme, že derivácie poľa φ obsahujú navyše výrazy $\partial_\mu\Lambda$. Preto hovoríme, že výraz $\partial_\mu\varphi$ sa netransformuje kovariantne podľa kalibračných transformácií druhého druhu. Ako sa ale zmení Lagrangián $\mathcal{L}$ pri takýchto transformáciách? Pozrime sa preto na to, ako sa zmení

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \delta[(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\overset{*}{\varphi})] - m^2\delta(\overset{*}{\varphi}\varphi) \\
&= [\delta(\partial_\mu\varphi)](\partial^\mu\overset{*}{\varphi}) + (\partial^\mu\varphi)[\delta(\partial_\mu\overset{*}{\varphi})] - m^2 \cdot 0 \\
&= [i(\partial_\mu\Lambda)\varphi + i\Lambda(\partial_\mu\varphi)](\partial^\mu\overset{*}{\varphi}) + (\partial^\mu\varphi)[-i(\partial_\mu\Lambda)\overset{*}{\varphi} - i\Lambda(\partial_\mu\overset{*}{\varphi})] \\
&= (\partial_\mu\Lambda)[i(\partial^\mu\overset{*}{\varphi})\varphi - i\overset{*}{\varphi}(\partial^\mu\varphi)] \\
&= -(\partial_\mu\Lambda)J^\mu,
\end{aligned} \tag{6.3.12}$$

kde sme identifikovali Noetherovej prúd J^μ, ktorý bol odvodený v (2.2.7). Aby sme dosiahli požadovanú kalibračnú invarianciu Lagrangiánu, zaveďme nové kompenzačné pole A_μ (sugestívne použijeme písmeno A, pretože sa neskôr ukáže, že ho vieme stotožniť s elektromagnetickým poľom). Pole A_μ bude vystupovať spolu s prúdom J^μ v novom člene v Lagrangiáne $\mathcal{L}$ v tvare

$$\mathcal{L}_1 = -eJ^\mu A_\mu = -ie[\overset{*}{\varphi}(\partial^\mu \varphi) - (\partial^\mu \overset{*}{\varphi})\varphi]A_\mu, \tag{6.3.13}$$

kde e možno stotožniť s elektrickým nábojom častíc komplexného poľa (nezamieňať si ho ale s nábojom elektrónu) a interpretovať ako väzbovú konštantu modelu. Navyše ďalej požadujeme nehomogénnu transformáciu poľa A_μ

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda, \quad \delta A_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda. \tag{6.3.14}$$

Potom totiž pre nový celkový Lagrangián $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1$ dostaneme

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{L} + \mathcal{L}_1) = \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_1 & \\ = -(\partial_\mu \Lambda)J^\mu - e(\delta J_\mu)A^\mu - eJ^\mu(\delta A^\mu) & \\ = -(\partial_\mu \Lambda)J^\mu - e(\delta J_\mu)A^\mu + J^\mu(\partial_\mu \Lambda) & \\ = -e(\delta J_\mu)A^\mu. & \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

Výraz pre δJ^μ odvodíme pomocou vzťahov (2.2.7) a (6.3.11)

$$\delta J^\mu = i\delta(\overset{*}{\varphi}\partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \overset{*}{\varphi}) = -2\overset{*}{\varphi}\varphi(\partial^\mu \Lambda). \tag{6.3.16}$$

Súhrnne tak vidíme, že celková zmena súčtu Lagrangiánov $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1$ je

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = 2eA_\mu(\partial^\mu \Lambda)\overset{*}{\varphi}\varphi. \tag{6.3.17}$$

Postupujme ďalej rovnakým spôsobom ako sme naznačili a pripočítajme k celkovému Lagrangiánu ďalší člen

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_\mu A^\mu \overset{*}{\varphi}\varphi, \tag{6.3.18}$$

o ktorom sa s pomocou (6.3.14) ľahko presvedčíme, že sa transformuje podľa

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_2 &= 2e^2 A_\mu(\delta A^\mu)\overset{*}{\varphi}\varphi + e^2 A_\mu A^\mu \delta(\overset{*}{\varphi}\varphi) \\ &= -2eA_\mu(\partial_\mu \Lambda)\overset{*}{\varphi}\varphi. \end{aligned} \tag{6.3.19}$$

Sčítaním (6.3.17) a (6.3.19) nakoniec dospejeme k požadovanému vynulovaniu zmeny celkového Lagrangiánu

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0. \tag{6.3.20}$$

Vidíme teda, že Lagrangián $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ je invariantný vzhľadom na kalibračnú transformáciu druhého druhu (6.3.8). Nutnou komplikáciou za dosiahnutie tohto cieľa je zavedenie dodatočného poľa A_μ. Očakávame, že toto pole musí samo osebe vykazovať vnútornú dynamiku a byť opísané pomocou vhodného Lagrangiánu. Ako vhodná voľba, ktorá je tiež kalibračne invariantná, sa javí antisymetrická štruktúra $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, ktorá nápadne pripomína tenzor elektromagnetického poľa (2.5.4). Odpovedajúci Lagrangián $\mathcal{L}_3$ je potom možné zapísať v tvare

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{6.3.21}$$

ktorý sa veľmi ponáša na Lagrangián elektromagnetického poľa (2.5.19). Zdôvodnenie koeficientu $-1/4$ možno nájsť pri odvodení (2.5.18). V sume nakoniec dostávame celkový Lagrangián

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{sum}} &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \\ &= (\partial_\mu \overset{*}{\varphi})(\partial^\mu \varphi) - m^2 \overset{*}{\varphi}\varphi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{(kvadratická časť)} \qquad (6.3.22) \\ &- ie[\overset{*}{\varphi}(\partial^\mu \varphi) - (\partial^\mu \overset{*}{\varphi})\varphi]A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu \overset{*}{\varphi}\varphi, \quad \text{(interakcie)} \qquad (6.3.23)\end{aligned}$$

alebo v skrátenom tvare

$$\mathcal{L}_{\text{sum}} = (\partial^\mu \overset{*}{\varphi} - ieA^\mu \overset{*}{\varphi})(\partial_\mu \varphi + ieA_\mu \varphi) - m^2 \overset{*}{\varphi}\varphi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{6.3.24}$$

Pozorovania:

(i) Porovnaním pôvodného Lagrangiánu komplexného skalárneho poľa (2.2.1) a kalibračne invariantného Lagrangiánu (6.3.24) si všimnime, že prechod medzi nimi je daný zámenou obyčajnej parciálnej derivácie ∂_μ za tzv. kovariantnú deriváciu

$$\mathcal{D}_\mu \varphi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi. \tag{6.3.25}$$

O tejto derivácii sa dá ukázať, že sa transformuje kovariantne vzhľadom na kalibračné transformácie druhého druhu. Konkrétne použitím vzťahov (6.3.9), (6.3.10) a prihliadnutím na nehomogénnu transformáciu A_μ (6.3.14) máme

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{D}_\mu \varphi) &= \delta(\partial_\mu \varphi) + ie(\delta A_\mu)\varphi + ieA_\mu \delta\varphi \\ &= i\Lambda[\partial_\mu \varphi + ieA_\mu \varphi] \\ &= i\Lambda(\mathcal{D}_\mu \varphi).\end{aligned} \tag{6.3.26}$$

Derivácia $\mathcal{D}_\mu \varphi$ sa tak transformuje rovnakým spôsobom ako pole φ. S pravidlom uvedenej zámeny

$$\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu \tag{6.3.27}$$

sa môžeme stretnúť už v prednáškach venovaných klasickej teórii elektromagnetizmu (A. N. Vasil'ev, 2011). Pre ďalšie technické detaily odporúčame diskusiu v dodatku B.3.

Je zrejmé, že pole φ bude nosičom náboja $+e$, zatiaľčo pole $\overset{*}{\varphi}$ bude charakterizované nábojom $-e$ a kovariantnou deriváciou (pole A_μ je reálne)

$$\mathcal{D}_\mu \overset{*}{\varphi} = (\partial_\mu - ieA_\mu)\overset{*}{\varphi}. \tag{6.3.28}$$

Derivácia $\mathcal{D}_\mu \overset{*}{\varphi}$ sa rovnako ako $\mathcal{D}_\mu \varphi$ transformuje kovariantne vzhľadom na kalibračné transformácie druhého druhu.

(ii) Už zo spomenutej diskusie o identifikácii kalibračného poľa A_μ s elektromagnetickým poľom plynie nová interpretácia A_μ. Jedná sa vlastne o kalibračné pole, ktoré zavádzame preto, aby bola dosiahnutá plná lokálna $U(1)$ kalibračná invariancia teórie.

Nehomogénne Maxwellove rovnice je možné získať z celkového Lagrangiánu (6.3.24) pomocou Eulerových-Lagrangeových rovníc (1.4.5). V danom prípade nadobúdajú tvar

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) = 0.$$

Z nich postupne získame

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= -ie[\overset{*}{\varphi}(\partial^\mu \varphi) - (\partial^\mu \overset{*}{\varphi})\varphi] + 2e^2 A^\mu \overset{*}{\varphi}\varphi \\ &= -ie[\overset{*}{\varphi}(\mathcal{D}^\mu \varphi) - (\mathcal{D}^\mu \overset{*}{\varphi})\varphi] \\ &\equiv -e\mathcal{J}^\mu, \end{aligned} \tag{6.3.29}$$

kde

$$\mathcal{J}^\mu = i[\overset{*}{\varphi}(\mathcal{D}^\mu \varphi) - (\mathcal{D}^\mu \overset{*}{\varphi})\varphi] \tag{6.3.30}$$

je kovariantná verzia Noetherovej prúdu (2.2.7). Antisymetrickosť tenzora $F_{\mu\nu}$ zaručuje, že nulovosť divergencie tohto prúdu

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0. \tag{6.3.31}$$

V prítomnosti elektromagnetického poľa sa tak zachováva $\mathcal{J}^\mu$ a nie J^μ.

(iii) Z analýzy v poslednej časti vyplynulo, že elektromagnetické pole je nehmotné. Ak by totiž príslušný Lagrangián (6.3.21) obsahoval hmotnostný člen

$$\mathcal{L}_m = m^2 A_\mu A^\mu, \tag{6.3.32}$$

tak by celkový Lagrangián nebol invariantný vzhľadom na kalibračné transformácie (6.3.14). Inými slovami, kalibračná invariancia vedie priamo na nehmotnosť kalibračných poľa (resp. jeho nosičov - fotónov). V prednáškach teórie elektromagnetického poľa je nulová hmotnosť fotónu asociovaná so základnými postulátmi špeciálnej teórie relativity (rýchlosť svetla je konštantná v ľubovoľnej inerciálnej vzťažnej sústave).

(iv) Náboj komplexného poľa e bol pri odvodzovaní zavedený ako väzbová konštanta v kovariantnej derivácii (6.3.25) a (6.3.28). Z celkového Lagrangiánu (6.3.24) totiž vidíme, že polia φ a A_μ sú zviazané nelineárnym členom, ktorý je úmerný e. Môžeme preto dedukovať, že elektrický náboj e hraje dvojakú rolu: jednak ide o zachovávajúcu sa veličinu (2.2.13) a jednak určuje silu interakcie. Tento druhý (dynamický) aspekt je dôsledkom požiadavky kalibračnej invariancie. Akonáhle sa objaví nejaká zachovávajúca sa veličina (izospin, podivnosť, atď.), môžeme sa pýtať, či to nie je tiež spôsobené prítomnosťou nejakého nehmotného kalibračného poľa. A či "náhodou" neexistuje interakcia medzi ním a poľom častíc s odpovedajúcimi vlastnosťami.

6.4 Spinorové pole

Teraz aplikujeme postup z predchádzajúcej časti na zavedenie interakcie medzi elektromagnetickým a spinorovým poľom. V tomto prípade je zavedenie o niečo jednoduchšie ako pre komplexné skalárne pole, čo pochádza z menšieho počtu derivácií v Lagrangiáne spinorového poľa. Už sme odvodili (3.3.18), že Lagrangián (voľného) spinorového poľa je možné predstaviť v symetrickom tvare

$$\mathcal{L}_{\text{sym}} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right] - m\bar{\psi}\psi. \tag{6.4.1}$$

Pomocou kalibračných transformácií druhého druhu uvažujme opäť fázovú funkciu $\Lambda = \Lambda(x)$ a vykonajme príslušnú transformáciu spinorov ψ a $\bar{\psi}$ do prvého rádu podľa Λ

$$\psi(x) \to \mathrm{e}^{-i\Lambda}\psi(x) \approx [1 - i\Lambda(x)]\psi(x), \tag{6.4.2}$$

$$\bar{\psi}(x) \to \mathrm{e}^{i\Lambda}\bar{\psi}(x) \approx [1 + i\Lambda(x)]\bar{\psi}(x). \tag{6.4.3}$$

Z týchto vzťahov vidíme, že infinitezimálne transformácie spinorového poľa sú

$$\delta\psi = -i\Lambda\psi, \quad \delta\bar{\psi} = i\Lambda\bar{\psi}. \tag{6.4.4}$$

Analogicky ako pri komplexnom poli aj teraz je odpovedajúci výraz $X^\mu_{(s)}$ v (1.5.3) rovný nule, lebo sa jedná o vnútornú symetriu. Dosadíme približné vzťahy (6.4.3) do (6.4.1) a postupne upravíme. Začnime s hmotnostným členom

$$\begin{aligned}\delta(\bar{\psi}\psi) &= (\delta\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(\delta\psi)\\ &= i\Lambda\bar{\psi}\psi(x) - i\Lambda\bar{\psi}\psi\\ &= 0,\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

kde sme dosadili vzťahy (6.4.4). Zjavne sa teda $\bar{\psi}\psi$ pri transformáciách (6.4.3) nezmení (do prvého rádu podľa Λ). Hovoríme potom, že ide o invariantný výraz vzhľadom na kalibračné transformácie.

Podobne postupujeme pre kinetický člen v (6.4.1)

$$\begin{aligned}\delta\left(\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right) &= (\delta\bar{\psi})\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\delta\partial_\mu\psi\\ &\quad - (\delta\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\delta\psi\\ &= i\Lambda\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(i\Lambda\psi)\\ &\quad - \partial_\mu(i\Lambda\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + i\Lambda(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\\ &= i\Lambda\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - i\Lambda\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - i(\partial_\mu\Lambda)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\\ &\quad - i\Lambda(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi - i(\partial_\mu\Lambda)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + i\Lambda(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\\ &= -2i(\partial_\mu\Lambda)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\\ &= -2i(\partial_\mu\Lambda)J^\mu,\end{aligned} \tag{6.4.6}$$

kde členy vyššieho ako druhého rádu v Λ boli zanedbané a identifikovali sme prúd spinorového poľa (3.6.9). Súhrnne sa preto Lagrangián (6.4.1) transformuje nasledovne

$$\mathcal{L}_{\text{sym}} \to \mathcal{L}_{\text{sym}} + (\partial_\mu \Lambda) J^\mu. \tag{6.4.7}$$

Aby došlo k "odstráneniu" posledného člena a tým dosiahnutiu kalibračnej invariancie, zavedieme (kompenzačné) kalibračné pole A_μ. Požadujeme navyše, aby sa transformovalo podľa

$$A_\mu \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda(x). \tag{6.4.8}$$

Môžeme si všimnúť, že sa jedná o analogický predpis ako bol uvedený v predchádzajúcej časti v rovnici (6.3.14). Zároveň pridáme do celkového Lagrangiánu interakčný člen

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = eJ_\mu A^\mu. \tag{6.4.9}$$

Na nájdenie spôsobu akým sa transformuje nový Lagrangián $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{sp}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$ potrebujeme určiť transformáciu prúdu J_μ

$$\begin{aligned} \delta J_\mu(x) &= \delta(\bar{\psi}\gamma_\mu \psi) \\ &= (\delta\bar{\psi})\gamma_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma_\mu \delta\psi \\ &= i\Lambda\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - i\Lambda\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6.4.10}$$

Teda spinorový prúd J_μ sa pri kalibračných transformáciách (6.4.3) nemení. Máme už pripravené všetky čiastkové výsledky na určenie transformovaného Lagrangiánu $\mathcal{L}$. Postupne upravujme

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \delta(\mathcal{L}_{\text{sym}} + \mathcal{L}_{\text{int}}) \\ &= (\partial_\mu\Lambda)J^\mu + e(\delta J^\mu)A_\mu + eJ^\mu\delta A_\mu \\ &= (\partial_\mu\Lambda)J^\mu - J^\mu\partial_\mu\Lambda \\ &= 0, \end{aligned} \tag{6.4.11}$$

kde sme postupne využili (6.4.7), (6.4.8) a (6.4.10). Vidíme, že Lagrangián

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{sym}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right] - m\bar{\psi}\psi + eJ_\mu A^\mu \end{aligned} \tag{6.4.12}$$

je *lokálne* kalibračne invariantný. Po pridaní kinetického člena (6.3.21) pre elektromagnetické pole A^μ (tento člen vlastne zabezpečí dynamické šírenie sa poľa a zároveň vyhovuje podmienke kalibračnej invariancie) dostaneme výsledný Lagrangián pre vzájomne previazaný systém spinorového a elektromagnetického poľa

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right] - m\bar{\psi}\psi + eJ_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{6.4.13}$$

kde veličinu $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ stotožníme s tenzorom elektromagnetického poľa (2.5.4). Získaný Lagrangián (6.4.13) je základom na opis kvantovej elektrodynamiky (QED z anglického Quantum Electrodynamics) - teórie, ktorá nám slúži na opis vzájomnej interakcie elektrónov, pozitrónov a fotónov. Interakčný člen $eJ_\mu A^\mu$ zapisujeme vo Feynmanovej grafickej reprezentácii pomocou diagramu (6.1.2).

6.5 Neabelovské kalibračné polia

V tejto časti sa pokúsime zovšeobecniť výsledky z predchádzajúcich častí 6.3 a 6.4 na prípad, kedy sa Lagrangián vyznačuje komplikovanejšou symetriou ako je $SO(2)$, resp. $U(1)$. Pravdepodobne najjednoduchším zovšeobecnením je grupa $SU(2)$. Táto a ďalšie komplikovanejšie grupy sú príkladom neabelovských grúp a kalibračné polia, ktoré sa vyznačujú príslušnou symetriou, nazývame potom neabelovské kalibračné polia. Ukazuje sa, že celú modernú fyziku elementárnych častíc je možné vybudovať na takýchto a im príbuzných myšlienkach (S. Weinberg, 1995, 1996).

V prípade interakcie elektromagnetického so skalárnym poľom v časti 6.3 sa skalárne pole vyznačovalo dvomi zložkami, ktoré bolo možné stotožniť s rotáciou vo vnútornom priestore. Ponúka sa prirodzené zovšeobecnenie, ktoré spočíva v uvažovaní trojkomponentného poľa

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3). \tag{6.5.1}$$

Tri komponenty $\varphi_i; i = 1, 2, 3$ opätovne interpretujeme ako zložky vektora $\boldsymbol{\varphi}$ vo vnútornom fiktívnom priestore. Kalibračné transformácie prvého druhu potom predstavujú rotácie v tomto priestore. To priamočiaro vedie na vektorovú veličinu, ktorá sa zachováva a zvykne sa označovať ako izospin. Podotýkame, že v celej tejto časti budú tučným písmom označené práve vektory vo vnútornom (izotopickom) priestore a nie vektory v konfiguračnom (priamom) priestore.

Hypotéza, že izospinová symetria je prejavom istej lokálnej symetrie bola navrhnutá teoretickými fyzikmi Yangom a Millsom v roku 1954. Keďže sa ale nenašiel experimentálny dôkaz podporujúci toto tvrdenie, zostávala táto práca po dlhú dobu málo známa. Nakoniec sa ale ukázalo, že silné interakcie medzi kvarkami a zjednotená elektroslabá interakcia sa dajú popísať práve pomocou vhodnej Yangovej-Millsovej teórie. Tieto teórie ale vyžadujú isté vedomosti z teórie grúp, ktoré idú nad rámec tejto práce. Pre bližšie oboznámenie sa s použitím teórie grúp v časticovej fyzike doporučujeme knihy (D. Griffiths, 2008; H. Georgi, 1982) alebo skriptá od nositeľa Nobelovej ceny G. 't Hoofta (G. 't Hooft, 2007).

Ako je možné opísať trojrozmerné rotácie? Vieme, že konečná dvojrozmerná rotácia v rovine (12) okolo osi 3 o uhol Λ_3 je matematicky daná transformáciou

$$\varphi_1' = \varphi_1 \cos\Lambda_3 - \varphi_2 \sin\Lambda_3, \quad \varphi_2' = \varphi_1 \sin\Lambda_3 + \varphi_2 \cos\Lambda_3, \quad \varphi_3' = \varphi_3. \tag{6.5.2}$$

Pre infinitezimálne malé otočenie $\Lambda_3 \ll 1$ dostaneme po rozvinutí do Taylorovho radu

$$\varphi_1' = \varphi_1 - \varphi_2\Lambda_3, \quad \varphi_2' = \varphi_1\Lambda_3 + \varphi_2, \quad \varphi_3' = \varphi_3. \tag{6.5.3}$$

Ľahko sa preverí, že tieto rovnice nepredstavujú nič iné ako tretiu zložku vektorovej rovnice

$$\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\varphi}, \tag{6.5.4}$$

kde $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ je vektor v izotopickom priestore. Pritom $|\boldsymbol{\Lambda}|$ udáva veľkosť rotácie a $\boldsymbol{\Lambda}/|\boldsymbol{\Lambda}|$ smer, okolo ktorého k rotácii dochádza. Tieto tvrdenia sú v plnej analógii so štúdiom rotácie tuhého telesa v klasickej mechanike (H. Goldstein, C. Poole & J. Safko, 2002). Potom tiež máme, že infinitezimálne malé pootočenie je jednoducho dané druhým členom v (6.5.4)

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\varphi}. \tag{6.5.5}$$

Táto rovnica je kalibračnou rovnicou prvého rádu a jedná sa o analógiou vzťahov (6.3.9) a (6.3.11). Podotýkame, že znak vektorového súčinu $\times$ samozrejme v tomto vzťahu súvisí s vnútorným trojrozmerným priestorom.

Ďalej budeme postupovať obdobným spôsobom ako sme postupovali pri zavedení interakcie medzi skalárnym a elektromagnetickým poľom v sekcii 6.3. Ukáže sa, že tentoraz bude postup technicky, ale nie konceptuálne komplikovanejší. Na rozdiel od grupy $SO(2)$ nie je totiž grupa rotácií $SO(3)$ komutatívna (abelovská) (P. Zlatoš, 2011).

V rovnici (6.5.4) dochádza k otočeniu poľa $\boldsymbol{\varphi}$ o ten istý uhol vo všetkých bodoch časopriestoru. Ak v súlade s myšlienkou lokálnych kalibračných transformácií predpokladáme, že sa kalibračné transformácie vzťahujú len na istú oblasť časopriestoru, tak formálne máme $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(x)$. Tento predpoklad vedie najprv na pozmenenú transformáciu derivácie poľa $\boldsymbol{\varphi}$

$$\partial_\mu\boldsymbol{\varphi} \to \partial_\mu\boldsymbol{\varphi}' = \partial_\mu\boldsymbol{\varphi} + (\partial_\mu\boldsymbol{\Lambda}) \times \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\Lambda} \times (\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}), \tag{6.5.6}$$

kde sme zanedbali členy vyššieho ako prvého rádu v $\boldsymbol{\Lambda}$. Tento vzťah implikuje zmenu derivácie poľa

$$\delta(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}) = (\partial_\mu\boldsymbol{\Lambda}) \times \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\Lambda} \times (\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}). \tag{6.5.7}$$

Opäť kvôli prítomnosti prvého člena na pravej strane tvrdíme, že derivácia $\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}$ sa netransformuje kovariantným spôsobom. Chceli by sme nájsť kovariantnú deriváciu podobným spôsobom ako sme postupovali pri elektromagnetickom poli, ktorý viedol na (6.3.25). Očakávame nutnosť zavedenia kalibračného potenciálu $\boldsymbol{W}_\mu$ a preto kovariantnú deriváciu hľadáme v tvare

$$\mathcal{D}_\mu\boldsymbol{\varphi} = \partial_\mu\boldsymbol{\varphi} + g\boldsymbol{W}_\mu \times \boldsymbol{\varphi}. \tag{6.5.8}$$

Všimnime si, že $\boldsymbol{W}_\mu$ musí byť nielen štvorvektor v konfiguračnom priestore, ale zároveň aj trojrozmerným vektorom vo vnútornom izotopickom priestore (z dvojice $\boldsymbol{W}_\mu$ a $\boldsymbol{\varphi}$ potrebujeme skonštruovať vektor vo vnútornom priestore a najjednoduchšou možnosťou sa javí použitie vektorového súčinu). Parameter g je väzbová konštanta modelu. Vzhľadom na rovnicu (6.5.5) ďalej požadujeme platnosť transformačného vzťahu

$$\delta(\mathcal{D}_\mu\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\Lambda} \times (\mathcal{D}_\mu\boldsymbol{\varphi}). \tag{6.5.9}$$

Ako sa musí transformovať pole $\boldsymbol{W}_\mu$, aby bol tento vzťah splnený? Postupujme heuristicky: nielen $\boldsymbol{W}_\mu$ predstavuje vektor vo vnútornom priestore, ale aj $\boldsymbol{\Lambda} \times$ $\times \boldsymbol{W}_\mu$. Ďalej sme si pri elektromagnetickom poli všimli, že vektorový potenciál získal dodatočný člen $(1/e)\partial_\mu\Lambda$ pri danej transformácii. Preto očakávame, že k $\boldsymbol{W}_\mu$ pribudne nový nehomogénny člen $(1/g)\partial_\mu\boldsymbol{\Lambda}$. Píšeme teda

$$\boldsymbol{W}_\mu \to \boldsymbol{W}_\mu + \boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\Lambda}, \tag{6.5.10}$$

resp.

$$\delta\boldsymbol{W}_\mu = \boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\Lambda}. \tag{6.5.11}$$

Tento vzťah, s použitím predchádzajúcich vzťahov (6.5.4), (6.5.5) a (6.5.7), vedie nakoniec na prepis (6.5.9) do tvaru

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{D}_\mu\boldsymbol{\varphi}) &= \delta(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}) + g(\delta\boldsymbol{W}_\mu) \times \boldsymbol{\varphi} + g\boldsymbol{W}_\mu \times \delta\boldsymbol{\varphi} \\ &= \boldsymbol{\Lambda} \times (\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}) + (\partial_\mu\boldsymbol{\Lambda}) \times \boldsymbol{\varphi} + g(\boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_\mu) \times \boldsymbol{\varphi} - (\partial_\mu\boldsymbol{\Lambda}) \times \boldsymbol{\varphi} \\ &\quad + g\boldsymbol{W}_\mu \times (\boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\varphi}) \\ &= \boldsymbol{\Lambda} \times (\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}) + g[(\boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_\mu) \times \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{W}_\mu \times (\boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\varphi})].\end{aligned} \tag{6.5.12}$$

Vektorovú identitu

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} + (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{B} = 0, \tag{6.5.13}$$

vieme po krátkej úprave prepísať do tvaru

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}). \tag{6.5.14}$$

Po dosadení $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{W}_\mu, \boldsymbol{C} = \boldsymbol{\varphi}$ výhodne prepíšeme posledný výraz v hranatej zátvorke v (6.5.12)

$$\delta(\mathcal{D}_\mu\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\Lambda} \times (\partial_\mu\boldsymbol{\varphi} + g\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\Lambda} \times \mathcal{D}_\mu\boldsymbol{\varphi}. \tag{6.5.15}$$

Prichádzame tak k požadovanému tvaru pre kalibračne invariantnú deriváciu. Cenou za jej zavedenie je prítomnosť poľa $\boldsymbol{W}_\mu$, ktoré má oproti situácii v elektromagnetickom poli komplikovanejšiu štruktúru. Je zrejmé, že toto pole $\boldsymbol{W}_\mu$ je analogické elektromagnetickému poľu A_μ. Aký ale objekt bude hrať rolu tenzora elektromagnetického poľa $F_{\mu\nu}$? Označme hľadanú veličinu $\boldsymbol{W}_{\mu\nu}$. Na rozdiel od tenzora $F_{\mu\nu}$, ktoré je skalárom vzhľadom na $SO(2)$, $\boldsymbol{W}_{\mu\nu}$ musí byť vektorom vzhľadom na $SO(3)$, a preto sa musí transformovať rovnako ako pole $\boldsymbol{\varphi}$, teda predpisom

$$\delta(\boldsymbol{W}_{\mu\nu}) = \boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_{\mu\nu}. \tag{6.5.16}$$

Predpoklad $\boldsymbol{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu\boldsymbol{W}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{W}_\mu$ nepovedie k požadovanému výsledku, pretože platí

$$\delta(\partial_\mu\boldsymbol{W}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{W}_\mu) = \partial_\mu\left(\boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_\nu - \frac{1}{g}\partial_\nu\boldsymbol{\Lambda}\right) - \partial_\nu\left(\boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\Lambda}\right)$$

$$= \mathbf{\Lambda} \times (\partial_\mu \boldsymbol{W}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{W}_\mu) + (\partial_\mu \mathbf{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_\mu). \tag{6.5.17}$$

Posledný výraz považujeme za nechcený, a teda ho potrebujeme nejakým spôsobom odstrániť. Všimnime si, že platí nasledujúci vzťah

$$\delta(g\boldsymbol{W}_\mu \times \boldsymbol{W}_\nu) = g\left(\mathbf{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \mathbf{\Lambda}\right) \times \boldsymbol{W}_\nu + g\boldsymbol{W}_\mu \times \left(\mathbf{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_\nu - \frac{1}{g}\partial_\nu \mathbf{\Lambda}\right), \tag{6.5.18}$$

ktorý ďalej upravíme použitím (6.5.14). Dostaneme

$$\delta(g\boldsymbol{W}_\mu \times \boldsymbol{W}_\nu) = g\mathbf{\Lambda} \times (\boldsymbol{W}_\mu \times \boldsymbol{W}_\nu) - (\partial_\mu \mathbf{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{\Lambda} \times \boldsymbol{W}_\mu). \tag{6.5.19}$$

Posledný člen má až na znamienko presne tú istú štruktúru ako posledný člen vo výraze (6.5.17). Zavedieme preto tenzor

$$\boldsymbol{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{W}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{W}_\mu + g\boldsymbol{W}_\mu \times \boldsymbol{W}_\nu \tag{6.5.20}$$

a to sa už bude transformovať požadovaným spôsobom, čo vyplýva priamo z naznačeného postupu. Ide vlastne o zovšeobecnenie tenzora elektromagnetického poľa $F_{\mu\nu}$ (2.5.4).

Keďže $\boldsymbol{W}_{\mu\nu}$ je vektorom vo vnútornom (izotopickom) priestore, tak $\boldsymbol{W}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{W}^{\mu\nu}$ v ňom bude skalárom. A teda sa takýto výraz v princípe môže objaviť v celkovom Lagrangiáne teórie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu \boldsymbol{\varphi}) \cdot (\mathcal{D}^\mu \boldsymbol{\varphi}) - \frac{m^2}{2}\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{4}\boldsymbol{W}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{W}^{\mu\nu}. \tag{6.5.21}$$

Pohybové rovnice následne plynú z Eulerových-Lagrangeových rovníc (1.4.5), ktoré teraz nadobúdajú tvar

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial W^i_\mu)} = \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu W^i_\mu)}\right], \tag{6.5.22}$$

kde i je vnútorný index. Po priamočiarom dosadení a krátkom výpočte dostaneme pohybové rovnice

$$\partial^\nu \boldsymbol{W}_{\mu\nu} + g\boldsymbol{W}^\nu \times \boldsymbol{W}_{\mu\nu} = g[(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}) \times \boldsymbol{\varphi} + g(\boldsymbol{W}_\mu \times \boldsymbol{\varphi}) \times \boldsymbol{\varphi}], \tag{6.5.23}$$

resp. s použitím kovariantnej derivácie (6.5.8) vieme tento vzťah prepísať do kompaktnejšieho tvaru

$$\mathcal{D}^\nu \boldsymbol{W}_{\mu\nu} = g(\mathcal{D}_\mu \boldsymbol{\varphi}) \times \boldsymbol{\varphi} \equiv g\boldsymbol{J}_\mu. \tag{6.5.24}$$

Táto rovnica odpovedá Maxwellovým rovniciam (6.3.29). Preto $\boldsymbol{W}_{\mu\nu}$ interpretujeme ako izospinové kalibračné pole a $\boldsymbol{J}_\mu$ ako jeho zdrojové pole.

Tvrdenie, že $\mathcal{D}^\nu \boldsymbol{W}_{\mu\nu}$ je kovariantná derivácia $\boldsymbol{W}_{\mu\nu}$ znamená, že táto veličina sa transformuje ako vektor v izospinovom priestore podobne ako $\boldsymbol{W}_{\mu\nu}$. Rovnica (6.5.24) dáva do súvisu kovariantnú divergenciu kalibračného poľa s tokom hmoty. Zatiaľčo Maxwellove rovnice (2.5.14) sú lineárne vzhľadom na kalibračné pole A_μ, je zrejmé, že rovnica (6.5.24) je nelineárna vzhľadom na pole $\boldsymbol{W}_\mu$. K akým dôsledkom táto vlastnosť vedie? Priamočiaro môžeme nahliadnuť, že bez prítomnosti zdrojov $J \to 0$ elektromagnetického poľa, máme dočinenia s dvojicou rovníc

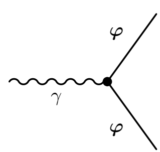
$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0 \longrightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = 0. \tag{6.5.25}$$

Na druhej strane ale pohybové rovnice kalibračných polí nadobúdajú v limite $\boldsymbol{J} \to 0$ tvar

$$\mathcal{D}^\nu \boldsymbol{W}_{\mu\nu} = 0 \longrightarrow \partial^\nu \boldsymbol{W}_{\mu\nu} = -g\boldsymbol{W}^\nu \times \boldsymbol{W}_{\mu\nu}. \tag{6.5.26}$$

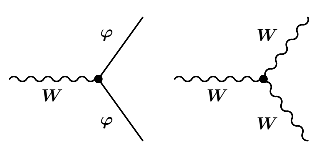
Z posledného vzťahu vidíme, že pole $\boldsymbol{W}_{\mu\nu}$ môže fakticky byť svojim vlastným zdrojom. Túto skutočnosť interpretujeme tak, že elektromagnetické pole $F_{\mu\nu}$ nenesie žiaden náboj (fotón je elektricky neutrálna častica), a preto nemôže generovať ďalšie elektromagnetické pole. Na druhej strane, izospinové pole $\boldsymbol{W}_{\mu\nu}$ nesie izospinový náboj a toto pole sa samogeneruje, t.j. môže dochádzať k jeho excitácii aj bez prítomnosti dodatočných izospinových zdrojov.

Dosadením kovariantnej derivácie $\mathcal{D}_\mu \boldsymbol{\varphi}$ z (6.5.8) a výrazu pre $\boldsymbol{W}_{\mu\nu}$ z (6.5.20) do Lagrangiánu (6.5.21) a jeho následným rozpísaním, ľahko nahliadneme, že daný Lagrangián obsahuje niekoľko členov tretieho a štvrtého rádu vzhľadom na polia $\boldsymbol{\varphi}$, resp. $\boldsymbol{W}_\mu$. Už sme sa napríklad stretli s tým, že kubický člen sa vyskytuje v Lagrangiáne kvantovej elektrodynamiky (6.3.24) v podobe interakcie typu $\varphi^*\varphi A$. Tá podľa časti 6.1 vedie na Feynmanov diagram



. (6.5.27)

Na druhej strane Lagrangián (6.5.21) vedie na dvojicu interakčných vrcholov, ktoré možno schematicky znázorniť nasledovne



. (6.5.28)

Druhý z týchto grafov vieme dať do súvisu so samogenerovaním kalibračného poľa $\boldsymbol{W}_\mu$. Podrobné dôsledky vyžadujú netriviálnu analýzu, ktorá ide ďaleko nad rámec týchto skrípt. Je však pozoruhodné, že podobná situácia nastáva aj v klasickej teórii gravitácie. Gravitačné pole samo o sebe je totiž zdrojom energie. Tej odpovedá istá hmotnosť, a preto je gravitačné pole priamo zdrojom gravitácie. Inými slovami gravitačné pole pôsobí nutne samo na seba. Ide o fundamentálne iný prípad ako elektromagnetické pole, kde jeho elementárne nosiče - fotóny nie sú elektricky nabité, a teda neovplyvňujú ďalej prítomné elektromagnetické pole. Takto v krátkosti možno argumentovať v prospech nelinearity fundamentálnych rovníc gravitačného poľa. Ako sa ukázalo, gravitačné pole je riadené Einsteinovými rovnicami, ktoré je možné zapísať v tenzorovom tvare

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{6.5.29}$$

Obe strany rovnice sú tenzorové veličiny, ktorých kovariantné divergencie sú nulové. Kovariantné derivácie v tomto prípade vznikajú v dôsledku zakriveného (neeuklidovského) časopriestoru. Teda aj bez prítomnosti akejkoľvek hmoty $T_{\mu\nu} = 0$, môže byť divergencia Einsteinovho tenzoru $\partial^\mu G_{\mu\nu}$ nenulová a to je opäť dôsledkom toho, že gravitačné pole interaguje so sebou samým.

Na ilustráciu väčšej rozmanitosti neabelovských kalibračných teórií preštudujeme v krátkosti rovnice odpovedajúce homogénnym Maxwellovým rovniciam (2.5.12)

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \tag{6.5.30}$$

Ako môžeme priamym výpočtom ukázať, tieto rovnice implikujú dvojicu Maxwellovych rovníc, ktoré neobsahujú zdroje

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \partial_t \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0. \tag{6.5.31}$$

Prvú z nich interpretujeme ako neexistenciu magnetických nábojov a druhá z nich predstavuje Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie. Neabelovská verzia rovnice (6.5.30) je (viac detailov v nasledujúcej časti 6.5.1)

$$\mathcal{D}_\lambda \boldsymbol{W}_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu \boldsymbol{W}_{\nu\lambda} + \mathcal{D}_\nu \boldsymbol{W}_{\lambda\mu} = 0. \tag{6.5.32}$$

Tu vystupujúce derivácie sú kovariantné derivácie a nie iba parciálne priestorové derivácie. Odtiaľ potom vyplýva

$$\mathrm{div} \vec{\boldsymbol{B}} \neq 0, \tag{6.5.33}$$

kde $\vec{\boldsymbol{B}}$ je "izovektor magnetickej indukcie" - vektor jednak v izospinovom (vnútornom) priestore a jednak aj v reálnom priestore. V tejto časti pre prehľadnosť šípkou nad symbolom $\rightarrow$ budeme označovať vektor v konfiguračnom priestore a tučné písmo použijeme zase na označenie vektora v izospinovom priestore. Dôsledok toho, že divergencia izovektorového magnetického poľa je nenulová, je existencia izospinových magnetických monopólov s izospinom $I = 1$. Zaveďme skalárne izovektorové pole $\boldsymbol{\varphi}$ a definujme analóg magnetického poľa $\vec{B}_{\mathrm{HP}}$ vzťahom

$$\vec{B}_{\mathrm{HP}} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}. \tag{6.5.34}$$

Potom

$$\mathrm{div} \vec{B}_{\mathrm{HP}} \neq 0 \tag{6.5.35}$$

a daná teória sa vyznačuje izoskalárnymi magnetickými monopólmi. Ako prví si takúto možnosť uvedomili teoretickí fyzici G. t'Hooft a A. M. Polyakov, odkiaľ pochádza skratka HP v (6.5.35).

Vo všeobecnosti ale neabelovské a abelovské teórie vykazujú aj niektoré spoločné črty. Jednou z nich je požiadavka, aby izospinové pole $\boldsymbol{W}_\mu$ bolo nehmotné analogicky situácii pre elektromagnetické pole. Dôvod je ten istý - ak by bolo pole $\boldsymbol{W}_\mu$ hmotné, tak by musel Lagrangián obsahovať dodatočný hmotnostný člen

$$\mathcal{L}_m = m^2 \boldsymbol{W}_\mu \cdot \boldsymbol{W}^\mu. \tag{6.5.36}$$

Ide o obdobný výraz ako (6.3.32). Tento člen ale následne pozmení pohybové rovnice (6.5.24) do tvaru

$$\mathcal{D}^\nu \boldsymbol{W}_{\mu\nu} = gJ_\mu + m^2 \boldsymbol{W}_\mu. \tag{6.5.37}$$

Je ale zrejmé, že člen (6.5.36) nie je kalibračne invariantný, a teda požiadavka kalibračnej invariancie vedie priamo na nulovú hmotnosť kalibračného poľa.

Je teraz vhodné prediskutovať v krátkosti otázku, či je izospin popísaný kalibračnou teóriou. Koncept izospinu sa často zavádza v kurzoch časticovej fyziky a odpovedá mu zachovávajúce sa "vektorové“ kvantové číslo. Ak je naozaj izospin analogický elektrickému náboju, tak jeho zákon zachovania plynie z lokálnej (kalibračnej) symetrie, a teda musí existovať nehmotné 1-izospinové, 1-spinové kalibračné pole. Navyše uvedené pole $\boldsymbol{\varphi}$ popisuje ľubovoľné izovektorové pole. Jeho kovariantná derivácia $\mathcal{D}_\mu \boldsymbol{\varphi}$ z (6.5.8) obsahuje väzbovú konštantu g, ktorá zároveň vďaka Lagrangiánu (6.5.21) popisuje aj silu interakcie medzi poľom $\boldsymbol{\varphi}$ a kalibračným poľom. Všimnime si ale, že to isté g vystupuje aj v definícii tenzora (6.5.20) kalibračného poľa $\boldsymbol{W}_{\mu\nu}$! Z toho vyplýva, že všetky izovektorové polia interagujú s tou istou väzbovou konštantou s kalibračným poľom. Táto univerzalita interakcie je priamym dôsledkom neabelovskej symetrie. Niečo podobné v elektromagnetizme neplatí, nakoľko vieme, že častice môžu v princípe vykazovať akýkoľvek elektrický náboj. Naopak v prípade neabelovského poľa máme stav, kedy všetky častice vykazujú ten istý náboj. Z historického hľadiska, bolo toto pozorovanie jedným z hlavných dôvodov záujmu o neabelovské teórie - prirodzene by potom vysvetľovali kvantovanie náboja (jeho diskrétne hodnoty).

Experimentálne sa ale nakoniec ukázalo, že izospin neodpovedá kalibračnej teórii. V šestdesiatych rokoch sa vykonalo mnoho experimentov na vtedy novoobjavených vektorových (spin 1) mezónoch. Predpokladalo sa, že ρ mezóny predstavujú izospinové kalibračné pole, ω alebo ϕ mezón je kalibračné pole pre baryónové číslo a že K mezón je kalibračné pole spojené s podivnosťou. Postupom času sa vďaka experimentálnym dôkazom tento obraz opustil.

Dnes netvrdíme, že ρ mezón môže byť zodpovedný za izospinové kalibračné pole, lebo ide o hmotnú časticu, a teda kalibračná invariancia by bola narušená. V skutočnosti je možné sofistikovaným spôsobom tento problém obísť pomocou spontánneho narušenia symetria. Tomuto sa budeme venovať neskôr v ďalšej časti 6.6. Toto narušenie nakoniec povedie aj k tomu, že W bozóny ako nositelia elektroslabej interakcie vykazujú nenulovú hmotnosť (F. Halzen & A. D. Martin, 1991; J. Hořejší, 2003; L. H. Ryder, 1996). Podľa aktuálnych predstáv založených na štandardnom modeli je ρ mezón jednoducho tvorený rôznymi kombináciami (anti)kvarkov u a d

$$(\rho^+, \rho^0, \rho^-) = \left(u\bar{d}, \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}, d\bar{u} \right). \tag{6.5.38}$$

Ak by išlo v prípade ρ o kalibračné pole, nebolo by zložené z kvarkov. Podobné úvahy platia aj pre iné častice ω, Φ a K ako možní kandidáti na kalibračné polia (D. Griffiths, 2008).

Zachovávajúca sa veličina	Dynamické (kalibračné) pole	Typ zákona zachovania
Náboj Q	EM pole γ	lokálny
Izospin $\boldsymbol{I}$	-	globálny
Čudnosť S	-	globálny
Baryónové číslo B	-	globálny
Leptónové číslo L	-	globálny

Tabuľka 6.1: Porovnanie rôznych zákonov zachovania.

Súhrn toho, čo sme doteraz prebrali, je naznačený v tabuľke 6.1. Zákon zachovania elektrického náboja je popísaný lokálnou symetriou a má dynamickú realizáciu vo forme elektromagnetického poľa, ktorého kvantá nazývame fotóny. Zákon zachovania izospinu, podivnosti, baryónového a leptónového čísla sú všetky popísané globálnou symetriou a nemajú dynamickú realizáciu, t.j. neexistujú im odpovedajúce kalibračné polia.

V tejto časti sme zaviedli neabelovskú kalibračnú symetriu a ako príklad sme uvažovali izovektorové pole $\boldsymbol{\varphi}$, ktoré sa transformuje podľa grupy symetrií $SO(3)$, resp. $SU(2)$. Daná analýza môže byť vykonaná ešte abstraktnejším a všeobecnejším spôsobom. To je okrem iného veľmi dôležité pre ďalší teoretický rozvoj, pretože v časticovej fyzike potrebujeme aj iné grupy symetrií ako $SO(3)$. Tento postup si ukážeme v nasledujúcej časti, ktorá bude vychádzať z geometrických úvah.

6.5.1 Geometrické vlastnosti kalibračných polí

Významnou vlastnosťou kalibračných transformácií je, že ich hodnoty nadobúdajú rôzne hodnoty v rôznych bodoch priestoru. Dá sa očakávať, že ich analýzu by bolo výhodné vykonať pomocou geometrických metód, ktorým sa teraz v krátkosti budeme venovať.

Začnime s prepísaním rovnice pre (globálnu) rotáciu v izotopickom priestore, ktorá sa v infinitezimálnom tvare (6.5.4) rovná

$$\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\varphi}.$$

Konečnú rotáciu vieme získať v limite nekonečnej postupnosti infinitezimálnych skladaní a nadobúda exponenciálny tvar

$$\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\varphi}' = \exp(-i\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\varphi}. \tag{6.5.39}$$

Maticové generátory $\boldsymbol{I}$ je sú

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.5.40}$$

Ako sa dá ľahko ukázať, prvky týchto matíc je možné kompaktne vyjadriť pomocou Leviho-Civitovho symbolu

$$(I_j)_{mn} = -i\varepsilon_{jmn}. \tag{6.5.41}$$

Rozvinieme pravú stranu rovnice (6.5.39) do prvého rádu podľa $\boldsymbol{\Lambda}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi'_m &= (1 - iI_j\Lambda_j)_{mn}\varphi_n = (\delta_{mn} - \varepsilon_{jmn}\Lambda_j)\varphi_n = \varphi_n + \varepsilon_{mjn}\Lambda_I\varphi_n \\ &= (\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\varphi})_m. \end{aligned}$$

Tým sme vlastne dokázali opodstatnenosť vzťahu (6.5.39) vzhľadom na odpovedajúcu infinitezimálnu limitu (6.5.4).

Ak v súlade so základnou myšlienkou kalibračných teórií predpokladáme, že $\boldsymbol{\Lambda}$ závisí na priestorovej súradnici x^μ, tak sa vzťah (6.5.39) formálne prepíše

$$\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\varphi}' = \exp[-i\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(x)]\boldsymbol{\varphi} = S(x)\boldsymbol{\varphi}. \tag{6.5.42}$$

Matice $\boldsymbol{I}$ sú reprezentáciami generátorov grupy $SO(3)$ (resp. $SU(2)$), a preto spĺňajú známe komutačné relácie (H. Georgi, 1982)

$$[I_j, I_k] = i\varepsilon_{jkl}I_l = C_{jkl}I_l. \tag{6.5.43}$$

Táto rovnica stotožňuje výraz $i\varepsilon_{jkl}$ so štruktúrnymi konštantami C_{jkl} grupy $SU(2)$. Keďže generátory M_i akejkoľvek grupy spĺňajú tzv. Jacobiho identitu

$$[[M_i, M_j], M_k] + [[M_j, M_k], M_i] + [[M_k, M_i], M_j] = 0, \tag{6.5.44}$$

tak štruktúrne konštanty C_{jkl} (ktoré sú zároveň antisymetrickými štruktúrami vzhľadom na svoje indexy j, k, l) musia vyhovovať podmienke

$$C_{lim}C_{mjk} + C_{ljm}C_{mki} + C_{lkm}C_{mij} = 0. \tag{6.5.45}$$

Ak sa vrátime späť ku grupe $SU(2)$ a jej reprezentácii (6.5.40), tak podotýkame, že reprezentácia s prvkami

$$(I_j)_{mn} = C_{jmn} \tag{6.5.46}$$

sa zvykne nazývať pridružená reprezentácia danej grupy. Z toho, čo už bolo uvedené o spine, vieme, že izospinor ψ sa transformuje podľa

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left[-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(x)\right]\psi(x) = S(x)\psi(x), \tag{6.5.47}$$

kde $S(x)$ je matica typu 2×2 a vektor Pauliho matíc $\boldsymbol{\sigma}$ bol zavedený v (3.4.23). Tieto matice spĺňajú známe komutačné vzťahy (6.5.43). Vo všeobecnosti pre n-rozmerný prípad môžeme písať transformančný vzťah

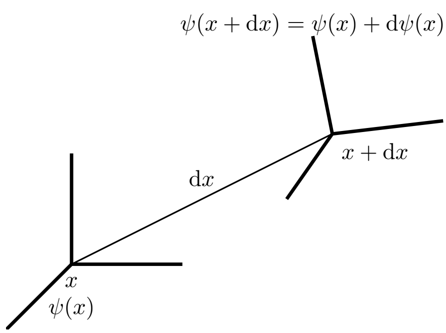
$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp[-iM^a \Lambda^a(x)]\psi(x) = S(x)\psi(x), \tag{6.5.48}$$

kde sumačný index a nadobúda hodnoty $1, 2, 3$; ψ je n-komponentný vektor a M^a sú tri štvorcové matice rádu n, ktoré sa taktiež vyznačujú komutačnými vzťahmi (6.5.43). Pripomíname, že s podobnou myšlienkou sme sa stretli pri konštrukcii spinorového formalizmu v kapitole 3.1.

Zo vzťahu (6.5.48) priamo vyplýva, že derivácia $\partial_\mu \psi$ sa netransformuje kovariantne

$$\partial_\mu \psi' = S(\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu S)\psi. \tag{6.5.49}$$

Príčina problému tkvie v tom, že vykonávame rôzne izorotácie v rôznych bodoch priestoru. Inými slovami, súradnicové osi v izopriestore sú inak orientované v každom bode priestoru, t.j. nie sú navzájom rovnobežné. Dôvod, prečo $\partial_\mu \psi$ nie je kovariantná veličina je teda ten, že $\psi(x)$ a $\psi(x + \mathrm{d}x) = \psi(x) + \mathrm{d}\psi$ uvažujeme v rôznych súradnicových sústavách. Túto situáciu sme kvalitatívne znázornili na Obr. 6.1. Veličina $\mathrm{d}\psi$ obsahuje informáciu ako o variácii poľa ψ, tak aj o zmene súradníc pri prechode $x \to x + \mathrm{d}x$. Na vytvorenie zmysluplnej kovariantnej derivácie

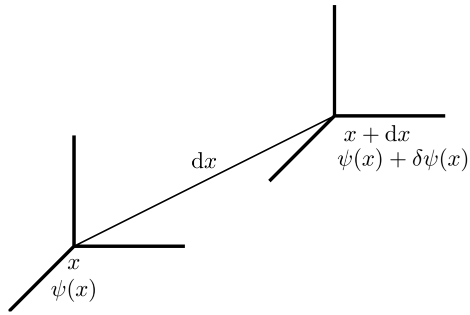


Obr. 6.1: Infinitezimálny prírastok $\mathrm{d}\psi$ obsahuje nielen informáciu o variácii ψ, ale aj o pootočení súradnícových osí pri prechode od bodu x k $x + \mathrm{d}x$.

je potrebné porovnať $\psi(x + \mathrm{d}x)$ nie priamo s $\psi(x)$, ale s hodnotou $\psi(x)$, ktorú by sme dostali pri zachovaní orientácie súradnicových osí. Táto procedúra sa zvykne označovať ako paralelný transport a kvalitatívne je naznačená na Obr. 6.2. Kvôli jednoznačnosti označenia sme výsledný vektor označili $\psi + \delta\psi$. Podotýkame, že $\delta\psi$ nie je rovné nule : $\psi + \delta\psi$ vlastne odpovedá paralelne posunutému vektoru ψ z bodu x do bodu $x + \mathrm{d}x$. Keďže ale súradnicové systémy v bodoch x a $x + \mathrm{d}x$ sú rôzne, tak sú rôzne aj zložky vektora ψ v týchto bodoch.

Ako určíme $\delta\psi$? Fyzikálna intuícia nám hovorí, že táto veličina by mala byť úmerná hodnote ψ a tiež posunutiu $\mathrm{d}x^\mu$. Predpokladáme preto transformačný vzťah

$$\delta\psi = igM^a A^a_\mu \mathrm{d}x^\mu \, \psi, \tag{6.5.50}$$



Obr. 6.2: Kvalitatívne znázornenie paralelného transportu pomocou veličiny $\delta\psi$.

kde veličina g zabezpečí správný rozmer vystupujúcich veličín a A^a_μ je dodatočné pole, ktoré opisuje zmenu súradníc v izotopickom priestore pri prechode od bodu k bodu v konfiguračnom priestore.

Máme k dispozícii dva vektory v polohe $x+\mathrm{d}x$, konkrétne $\psi+\mathrm{d}\psi$ a $\psi+\delta\psi$. Správna derivácia ψ je potom určená rozdielom týchto dvoch vektorov

$$\begin{aligned} D\psi &= (\psi+\mathrm{d}\psi)-(\psi+\delta\psi)=\mathrm{d}\psi-\delta\psi \\ &= \mathrm{d}\psi - igM^a A^a_\mu \mathrm{d}x^\mu\,\psi, \end{aligned}$$

resp.

$$\frac{D\psi}{dx^\mu}=\mathcal{D}_\mu\psi=\partial_\mu\psi-igM^aA^a_\mu\psi. \tag{6.5.51}$$

Táto rovnica opisuje kovariantnú deriváciu ľubovoľného poľa ψ, ktoré sa transformuje podľa grupy, ktorej generátory sú matice M^a.

Overme teraz, že takto získaný predpis (6.5.51) vedie k tým istým výsledkom, ktoré sme už našli.

- Grupa $U(1)$: porovnajme (6.5.48) s výrazom pre komplexné skalárne pole (1.8.2). Odtiaľ vidíme, že v tomto prípade $M\to -1$. Navyše preoznačenie $g\to e$ vedie na

  $$U(1):\quad \mathcal{D}_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu,$$

  čo plne súhlasí s kovariantnou deriváciou pre elektromagnetické pole (6.3.25).

- Grupa $SU(2)$: vo vektorovej reprezentácii platí (rovnica (6.5.41))

  $$(M^a)_{mn}=-i\varepsilon_{amn}, \tag{6.5.52}$$

  kde indexy nadobúdajú hodnoty $1,2,3$. Pre indexy označujúce vnútornú symetriu nerozlišujeme medzi horným a dolným indexom. Ak vezmeme $i-$tú zložku rovnice (6.5.51), dostaneme

  $$\mathcal{D}_\mu\varphi_i=\partial_\mu\varphi_i-ig(M^a)_{in}A^a_\mu\varphi_n=\partial_\mu\varphi_i-g\varepsilon_{ain}A^a_\mu\varphi_n$$

$$= (\partial_\mu \boldsymbol{\varphi} + g\boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{\varphi})_i,$$

resp. v plne vektorovom tvare

$$\mathcal{D}_\mu \boldsymbol{\varphi} = \partial_\mu \boldsymbol{\varphi} + g\boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{\varphi}, \tag{6.5.53}$$

ktorá po identifikácii $\boldsymbol{W} \longleftrightarrow \boldsymbol{A}$ súhlasí (6.5.8).

- Spinorová kovariantná derivácia: zapíšme $M^a = \sigma^a/2$ a dostaneme

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{A}_\mu \psi. \tag{6.5.54}$$

Poznámka:

Motivácia pre horeuvedené zavedenie kovariantnej derivácie pre kalibračnú grupu je podobné ako odvodenie kovariantnej derivácie vo všeobecnej teórii relativity (S. M. Carroll, 2019; S. Weinberg, 1972). Tam máme dočinenia so zakriveným časopriestorom - smer jeho súradnicových osí sa v princípe môže meniť od bodu k bodu. Pre prípad kontravariantného vektora V^μ je jeho kovariantná derivácia daná predpisom

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda. \tag{6.5.55}$$

Veličiny $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ nazývame konexie a zjavne zohrávajú podobnú rolu ako vektorové potenciály A^a_μ. ■

Už vieme, akým spôsobom sa transformuje vektor ψ pri rotácii v izotopickom priestore $\psi \to S\psi$. Keďže $\mathcal{D}_\mu \psi$ je kovariantná derivácia ψ, tak sa musí transformovať rovnakým spôsobom. Preto požadujeme platnosť

$$\mathcal{D}_\mu \psi \to \mathcal{D}'_\mu \psi' = S\mathcal{D}_\mu \psi. \tag{6.5.56}$$

Pre jednoduchší zápis, zavedieme maticu A_μ vzťahom

$$A_\mu \equiv M^a A^a_\mu, \tag{6.5.57}$$

vďaka čomu sa predpis (6.5.51) prepíše do tvaru

$$\mathcal{D}_\mu \psi = (\partial_\mu - igA_\mu)\psi. \tag{6.5.58}$$

V novom izotopickom súradnicovom systéme s použitím (6.5.56) vidíme, že musí platiť

$$(\partial_\mu - igA'_\mu)\psi' = S(\partial_\mu - igA_\mu)\psi. \tag{6.5.59}$$

Za ψ' dosadíme výraz $S\psi$ a nakoniec z porovnania odvodíme transformačný vzťah pre kalibračné pole

$$A'_\mu = SA_\mu S^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu S)S^{-1}. \tag{6.5.60}$$

Týmto sme našli pravidlo pre kalibračnú transformáciu potenciálu A_μ. Netriviálnym sa javí prítomnosť nehomogénneho člena na pravej strane. Pre grupu $U(1)$ napríklad máme, že $S = \mathrm{e}^{i\Lambda}$, $\partial_\mu S = i(\partial_\mu \Lambda)\mathrm{e}^{i\Lambda}$ a z (6.5.60)

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda,$$

kde sme vykonali priradenie $g \to e$ a $M \to -1$. Dospievame tak k tomu istému vzťahu (6.3.14) ako pri diskusii elektromagnetického a komplexného skalárneho poľa.

Pre prípad grupy $SU(2)$ máme

$$S = \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Lambda}\right),$$

odkiaľ plynie

$$\partial_\mu S = -\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\Lambda} \cdot S.$$

Po krátkej úprave s použitím (6.5.60) odvodíme

$$\boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{A}_\mu - \boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{A}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \boldsymbol{\Lambda},$$

čo zase súhlasí s rovnicou (6.5.11).

Pri štúdiu všeobecnej teórie relativity (S. M. Carroll, 2019) si môžeme všimnúť, že aj v nej máme prítomný nehomogénny člen v transformačnom vzťahu pre Christoffelove symboly

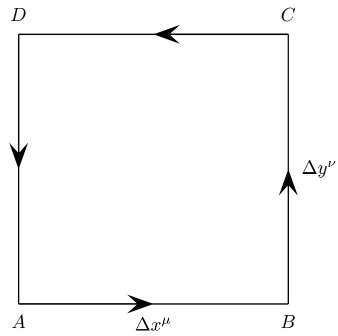
$$\Gamma'^{\kappa}_{\lambda\mu} = \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\alpha}}. \tag{6.5.61}$$

Ak by posledný člen nebol prítomný, Christoffelove symboly $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ by sa transformovali ako zložky tenzora tretieho rádu.

Keďže sa A_μ transformuje nehomogénne, môžeme si položiť otázku, či má alebo nemá toto pole fyzikálny zmysel. Či je napríklad oprávnené alebo možné vykonať takú transformáciu, aby toto pole bolo všade nulové. Na otestovanie tejto možnosti, uvažujme štyri po sebe idúce infinitezimálne posunutia okolo uzavretej dráhy $A \to B \to C \to D \to A$, ktorá je naznačená na Obr. 6.3. V bode A máme najskôr vektor $\psi_{A,0}$, ktorý postupne prenášame okolo uzavretej dráhy s použitím pravidla pre paralelný posun a nakoniec porovnáme výsledný vektor $\psi_{A,1}$ s pôvodnou hodnotou $\psi_{A,0}$. Ak zistíme, že sa tieto hodnoty líšia, tak A_μ môže mať fyzikálny efekt.

Posun vektora $\psi_{A,0}$ do bodu B vedie do druhého rádu v infinitezimálne malých veličinách $\Delta x, \delta x$ k výsledku

$$\begin{aligned}\psi_B &\approx \psi_{A,0} + \mathcal{D}_\mu \psi_{A,0} \Delta x^\mu + \frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \psi_{A,0} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \\ &= \left(1 + \Delta x^\mu \mathcal{D}_\mu + \frac{1}{2}\Delta x^\mu \Delta x^\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu\right)\psi_{A,0}.\end{aligned}$$



Obr. 6.3: Uzavretá dráha pri použití paralelného transportu.

Posun do bodu C možno vyjadriť nasledovne

$$\begin{aligned}\psi_C &\approx \left(1 + \Delta y^\mu \mathcal{D}_\mu + \frac{1}{2}\Delta y^\mu \Delta y^\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu\right)\psi_B \\ &= \left[1 + (\Delta y^\mu + \Delta x^\mu)\mathcal{D}_\mu + \left(\frac{1}{2}\Delta y^\mu \Delta y^\nu + \Delta y^\mu \Delta x^\nu + \frac{1}{2}\Delta x^\mu \Delta x^\nu\right)\right. \\ &\left.\times\, \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu\right]\psi_{A,0},\end{aligned}$$

ďalej do bodu D je daný výrazom

$$\begin{aligned}\psi_D &\approx \left(1 - \Delta x^\mu \mathcal{D}_\mu + \frac{1}{2}\Delta x^\mu \Delta x^\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu\right)\psi_C \\ &= \left[1 + \Delta y^\mu \mathcal{D}_\mu + \frac{1}{2}\Delta y^\mu \Delta y^\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu + (\Delta y^\mu \Delta x^\nu - \Delta x^\mu \Delta y^\nu)\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu\right]\psi_{A,0}\end{aligned}$$

a nakoniec návrat do bodu A zase

$$\begin{aligned}\psi_{A,1} &\approx \left(1 - \Delta y^\mu \mathcal{D}_\mu + \frac{1}{2}\Delta y^\mu \Delta y^\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu\right)\psi_D \\ &= (1 + \Delta y^\mu \Delta x^\nu [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu])\psi_{A,0}.\end{aligned} \tag{6.5.62}$$

Vo výslednom výraze sa nám objavil komutátor obsahujúci kovariantné derivácie operátorov. Použitím definičného vzťahu (6.5.58) prepíšeme tento komutátor

$$\begin{aligned}[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] &= [\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] \\ &= -ig\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]\right).\end{aligned} \tag{6.5.63}$$

Ak zavedieme kalibračné pole $G_{\mu\nu}$ vzťahom

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \tag{6.5.64}$$

tak potom vlastne máme komutačný vzťah

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -igG_{\mu\nu}. \tag{6.5.65}$$

V získanom výsledku (6.5.62) vystupuje súčin $\Delta x^\mu \Delta y^\nu$, ktorý predstavuje plochu $\Delta S^{\mu\nu}$ malého obdĺžnika z Obr. 6.3. Preto nakoniec môžeme písať

$$\begin{aligned} \psi_{A,1} &= (1 - ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu})\psi_{A,0} \\ \psi_{A,1} - \psi_{A,0} = \Delta\psi_A &= -ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu}\psi_A. \end{aligned} \tag{6.5.66}$$

Vidíme, že ak je kalibračné pole nenulové, tak posun vektora ψ okolo uzavretej dráhy má fyzikálny efekt: dochádza k pootočeniu ψ v izopriestore.

Pre prípad $U(1)$ symetrie, čo je abelovská (komutatívna) grupa, je odpovedajúci komutátor medzi poliami A_μ v (6.5.64) rovný nule. Takže po preoznačení $F \to G$ v (6.5.64) dostaneme intenzitu kalibračného poľa

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

ktorú sme očakávali (porovnaj s (2.5.4)).

Pre prípad symetrie $SU(2)$ vieme, že matice M^a vyhovujú komutačným vzťahom (6.5.43), a preto možno písať

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu, \tag{6.5.67}$$

alebo vo vektorovom zápise

$$\boldsymbol{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu + g\boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{A}_\nu. \tag{6.5.68}$$

Tento výraz identicky odpovedá vzťahu (6.5.20).

Priamočiaro sa dá ukázať, že pole $G_{\mu\nu}$ sa tranformuje kovariantne.

$$G'_{\mu\nu} = SG_{\mu\nu}S^{-1}. \tag{6.5.69}$$

Stačí k tomu využiť fakt, že vykonanie rotácie v izospinovom priestore dáva

$$\psi_{A,0} \to \psi'_{A,0} = S\psi_{A,0}, \quad \psi_{A,1} \to \psi'_{A,1} = S\psi_{A,1},$$

kde vystupuje v oboch rovniciach rovnaký výraz S. Z výsledku (6.5.69) vidíme, že ak je $G_{\mu\nu}$ nulové v nejakej kalibrácii, tak je nulové aj pre všetky ostatné kalibrácie.

Poznámka:

Ak sa vrátime ku analógii so všeobecnou teóriou relativity, tak veličina, ktorá odpovedá poľovému tenzoru $G^a_{\mu\nu}$ je Riemannov tenzor krivosti $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}$. Ten sa zvykne definovať vzťahom

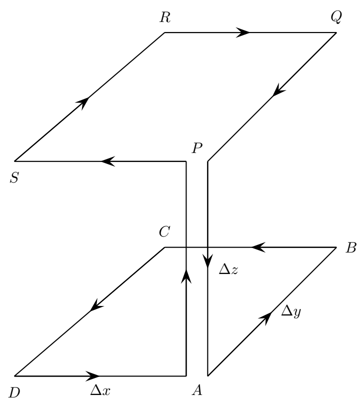
$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\Gamma^\kappa_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\Gamma^\kappa_{\rho\mu}. \tag{6.5.70}$$

Porovnanie s (6.5.64) a (6.5.67) naznačuje istú štruktúrnu podobu. Prvé dva členy predstavujú derivácie Christoffelových symbolov (konexií), ktoré sú antisymetrické vzhľadom na zámenu indexov μ a ν. Posledné dva výrazy sú taktiež dané antisymetrickými štruktúrami vytvorené zo súčinu dvojice Christoffelových symbolov. Spôsob, akým sa zavádza tenzor krivosti (S. M. Carroll, 2019), je obdobný - vektor V^μ sa posunie po uzavretej dráhe a určí sa rozdiel medzi jeho počiatočnou a koncovou hodnotou

$$\Delta V^\mu = \frac{1}{2} R^\mu{}_{\rho\sigma\lambda} V^\rho \Delta S^{\sigma\lambda},$$

kde $\Delta S^{\sigma\lambda}$ je plocha ohraničená dráhou. Rozdiel ΔV^μ je nenulový v prípade, že je daný priestor zakrivený. Napríklad na povrchu gule (dvojrozmerný objekt) bude vektor ukazovať do iného smeru po takomto posune. Na dvojrozmernej ploche bude naopak ukazovať stále do toho istého smeru, bez ohľadu na posun. Tenzor krivosti má vlastnosť, že ak je nenulový v nejakom súradnicovom systéme, tak bude nenulový aj vo všetkých ostatných a to poukazuje na zakrivenie priestoru. Vo všeobecnej teórii relativity potom tento fakt spájame s prítomnosťou gravitačného poľa. ■

Nakoniec ešte odvodíme zaujímavú identitu, ktorej vyhovuje kalibračné pole. Uvažujme trojrozmernú uzavretú dráhu, ktorá je znázornená na Obr. 6.4. Ak za-



Obr. 6.4: Uzavretá dráha, ktorá slúži na odvodenie Bianchiho identity.

čneme s vektorom $\psi_{A,1}$ v bode A, po posune okolo dráhy $ABCDA$ dostaneme

$$\psi_{A,1} = (1 - ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu})\psi_{A,0},$$

kde výraz $\Delta S^{\mu\nu} = \Delta x^\mu \Delta y^\nu$ je rovný obsahu $ABCD$. Ďalej, po transporte vektora ψ do bodu P pozdĺž úsečky AP máme

$$\psi_{P,0} = (1 + \Delta z^\rho \mathcal{D}_\rho)\psi_{A,1}.$$

Posun okolo okruhu $PSRQP$ dáva

$$\psi_{P,1} = (1 + ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu})\psi_{P,0},$$

kde znamienko + pochádza zo záporného smerovania dráhy. Nakoniec dostaneme

$$\begin{aligned}\psi_{A,2} &= (1 - \Delta z^\sigma \mathcal{D}_\sigma)\psi_{P,1} \\ &= (1 - \Delta z^\sigma \mathcal{D}_\sigma)(1 + ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu})(1 + \Delta z^\rho \mathcal{D}_\rho)(1 - ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu})\psi_{A,0} \\ &= (1 - ig\Delta V^{\rho\mu\nu}[\mathcal{D}_\rho, G_{\mu\nu}])\psi_{A,0},\end{aligned}$$

kde $\Delta V^{\rho\mu\nu} = \Delta z^\rho \Delta x^\mu \Delta y^\nu$ je objem hranola $ABCDPQRS$. Ak vezmeme do úvahy to, že diferenciálny operátor pôsobí aj na vektor $\psi_{A,0}$, môžeme jednoducho nahradiť komutátor súčinom $\mathcal{D}_\rho G_{\mu\nu}$ a písať

$$\psi_{A,2} = (1 - ig\Delta V^{\rho\mu\nu}\mathcal{D}_\rho G_{\mu\nu})\psi_{A,0}.$$

Uzavretá krivka na Obr. 6.4 pozostáva z okruhu po hornej a spodnej podstave. Zjavne existujú ešte dve ďalšie analogické možnosti po bočných stenách. Celkovo príspevok od všetkých šiestich dráh tak môžeme formálne zapísať v tvare

$$(ABCDAPSRQPA) + (ADSPABQRCBA) + (APQBADCRSDA). \tag{6.5.71}$$

Výsledný výraz sa dá potom ľahko uhádnuť

$$1 - ig\Delta V^{\rho\mu\nu}(\mathcal{D}_\rho G_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu G_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\nu G_{\rho\mu}).$$

Tento výraz pôsobí na vektor $\psi_{A,0}$ a vedie na nový vektor v bode A, ktorý označíme $\psi_{A,3}$. Ľahko sa ale ukáže, že sa každá hrana dráhy naznačená v (6.5.71) prejde rovnako veľa krát ako v jednom smere tak aj opačnom. Z tohto dôvodu sa vektor ψ nemôže pri takomto posune zmeniť, teda nutne platí $\psi_{A,3} = \psi_{A,0}$. Dôsledkom tohto je ale identita

$$\mathcal{D}_\rho G_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu G_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\nu G_{\rho\mu} = 0. \tag{6.5.72}$$

Kovariantná derivácia $\mathcal{D}_\rho G_{\mu\nu}$ je daná

$$\mathcal{D}_\rho G_{\mu\nu} = \partial_\rho G_{\mu\nu} - ig[A_\rho, G_{\mu\nu}]. \tag{6.5.73}$$

Nezabúdajme pritom ale, že A_μ aj $G_{\mu\nu}$ sú matice, a preto aj komutátor v (6.5.73) je vlastne maticový komutátor. Kalibračné transformácie (6.5.60) a (6.5.69) následne implikujú transformačný zákon pre kovariantnú deriváciu

$$\mathcal{D}'_\rho G'_{\mu\nu} = S(\mathcal{D}_\rho G_{\mu\nu})S^{-1}.$$

Vzhľadom na rovnicu (6.5.65), je práve odvodená identita (6.5.72) ekvivalentná vzťahu

$$[\mathcal{D}_\rho, [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]] + [\mathcal{D}_\mu, [\mathcal{D}_\nu, \mathcal{D}_\rho]] + [\mathcal{D}_\nu, [\mathcal{D}_\rho, \mathcal{D}_\mu]] = 0,$$

v ktorej môžeme rozpoznať známu Jacobiho identitu. Táto podmienka je identicky splnená poľovým tenzorom. V abelovskom prípade symetrie $U(1)$, nadobúda tvar

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0.$$

S touto rovnicou sme sa už stretli pri teórii elektromagnetického poľa (2.5.12), kde sa ukázalo, že odpovedá homogénnym Maxwellovým rovniciam (tie, ktoré neobsahujú zdroje).

Rovnica (6.5.72) má analógiu aj vo všeobecnej teórii relativity (S. M. Carroll, 2019; S. Weinberg, 1972), kde je známa ako Bianchiho identita

$$\nabla_\rho R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\mu R^\kappa{}_{\lambda\nu\rho} + \nabla_\nu R^\kappa{}_{\lambda\rho\mu} = 0. \tag{6.5.74}$$

Porovnanie medzi jednotlivými pojmami v kalibračnej teórii a všeobecnej teórii relativity sme zhrnuli v Tab. 6.2.

Kalibračná teória	Všeobecná teória relatvity
kalibračná transformácia	transformácia súradníc
kalibračná grupa	grupa všetkých transformácii súradníc
kalibračný potenciál A_μ	Christoffelov symbol $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$
pole $G_{\mu\nu}$	tenzor krivosti $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}$
Bianchiho identita	Bianchiho identita
$\sum_{cykl.} \mathcal{D}_\rho G_{\mu\nu} = 0$	$\sum_{cykl.} \nabla_\rho R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} = 0$

Tabuľka 6.2: Porovnanie analogických pojmov vo všeobecnej teórie relativity a kalibračných teórii v časticovej fyzike.

6.6 Spontánne narušenie symetrie

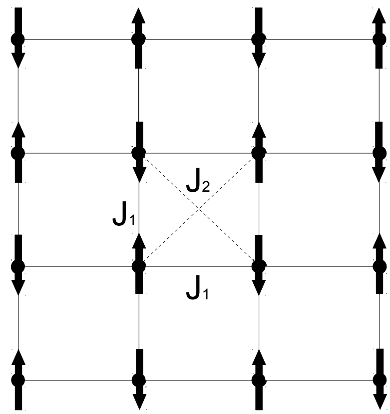
Dôležitosť interagujúcich teórii sa významne prejavuje vo fyzikálnom mechanizme známom ako spontánne narušenie symetrie. Tento bol prvýkrát opísaný v súvislosti s teóriou tuhých látok. Fyzici si uvedomili, že základný stav danej teórie nemusí nutne zohľadňovať symetriu Hamiltoniánu, ktorý ho popisuje. Neskôr si Nambu a Goldstone uvedomili, že podobný mechanizmus môže fungovať aj v teórii elementárnych častíc. Jednou z najznámejších predikcií, na ktoré tento jav poukazuje, je predpoveď existencie Higgsovho bozónu. Weinberg a Salam použili tieto myšlienky na konštrukciu zjednotenej teórie elektroslabej interakcie, o ktorej neskôr 't Hooft dokázal, že spadá do kategórie renormalizovateľných teórii. Následne došlo k jej experimentálnemu potvrdeniu, čo viedlo na udelenie niekoľkých Nobelových cien.

V tejto časti preštudujeme narušenie symetrie na príklade ako klasickej tak aj kvantovej teórie. Ukážeme si, ako ovplyvní časticové spektrum v abelovskej aj neabelovskej teórii.

Začnime našu diskusiu s jednoduchým modelom štatistickej fyziky známym ako Heisenbergov model magnetickej látky. Ten je založený na Hamiltoniáne

$$H = -\sum_{i,j} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j, \tag{6.6.1}$$

kde $\boldsymbol{S}_i$ sú spinové premenné uložené na pravidelnej mriežke a J_{ij} opisujú interakcie medzi dvojicami spinov umiestnených na uzloch i a j. Základnou vlastnosťou tohto Hamiltoniánu je jeho skalárny charakter vzhľadom na spinové rotácie.



Obr. 6.5: Kvalitatívne znázornenie základného stavu v antiferomagnetickom materiáli.

Predpokladajme záporné hodnoty J_{ij}, čo odpovedá tzv. antiferomagnetickému materiálu, v ktorom sa dvojica susedných spinov snaží naorientovať antiparalelne. Základný stav (pri dostatočne malých teplotách) by mal odpovedať situácii znázornenej na Obr. 6.5. Vybraný smer spinových premenných je ale v princípe ľubovoľný. Ak by napríklad došlo k otočeniu všetkých spinov o rovnaký uhol, celková energia znázornenej konfigurácie by sa vôbec nezmenila. Máme teda dočinenia s degeneratívným vákuom - existuje množstvo stavov s tou istou energiou. Vidíme teda, že hoci je Hamiltonián (6.6.1) rotačne invariantný, daný vákuový stav nezdieľa túto jeho vlastnosť. Hovoríme, že došlo k spontánnemu narušeniu symetrie.

Existuje niekoľko technických detailov na to, aby došlo k narušeniu symetrie, ako napríklad potreba nekonečného počtu spinov. Pre podrobnejšiu analýzu odporúčame (A. Altland & B. Simons, 2010; J. Zinn-Justin, 2010).

6.6.1 Skalárne pole

Analyzujme teraz model komplexného skalárneho poľa, o ktorom ukážeme, že sa symetria Lagrangiánu $\mathcal{L}$ neprenesie na základný (vákuový) stav. V poľovej teórii nazývame zvyčajne základný stav teórie ako vákuum. Našou úlohou bude teraz nájsť nový typ vákua, ktorý bude špecifickým spôsobom narúšať symetrické vlastnosti Lagrangiánu $\mathcal{L}$.

Predpokladajme, že $\mathcal{L}$ vykazuje nejaký druh symetrie. Pre jednoduchosť uvažujme rozšírenie modelu z časti 2.2 o interakčný člen

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^*) - V(\varphi,\varphi^*)\\ &= (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^*) - m^2\varphi^*\varphi - \lambda(\varphi^*\varphi)^2,\end{aligned} \tag{6.6.2}$$

kde λ predstavuje väzbovú konštantu “samointerakcie” komplexného poľa a výraz

$$V = m^2\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2 \tag{6.6.3}$$

môžeme interpretovať ako potenciál modelu. Z kapitoly 4 vieme, že procedúra kvantovania vedie na intepretovanie parametra m ako hmotnosti častíc (excitácií) kvantového poľa. V tejto časti ale budeme pre vysvetlenie základnej myšlienky narušenia symetrie uvažovať iba klasickú a nie kvantovú teóriu. Preto m^2 pre potreby tejto časti predstavuje parameter a nie nutne fyzikálnu veličinu typu hmotnosti. Môžeme preto predpokladať, že m^2 nadobúda ako kladné tak aj záporné hodnoty.

Zvolená interakcia v Lagrangiáne (6.6.2) nenarušuje globálnu kalibračnú transformáciu, ktorú sme pre voľné pole analyzovali v časti 1.8. Lagrangián je teda invariantný vzhľadom na zámenu

$$\varphi \to \mathrm{e}^{i\Lambda}\varphi, \quad \Lambda \in \mathbb{R}. \tag{6.6.4}$$

Základný stav odpovedá minimu potenciálu (6.6.3), ktoré vieme nájsť pomocou jeho derivácie. Krátky výpočet dáva

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = m^2\varphi^* + 2\lambda\varphi^*(\varphi^*\varphi) = 0. \tag{6.6.5}$$

Odtiaľ vidíme, že ak $m^2 > 0$, tak minimum nastane pre $\varphi = 0$. Na druhej strane pre $m^2 < 0$, máme jednak lokálne maximum pre $\varphi = 0$ a jednak minimum pre

$$|\varphi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} = a^2. \tag{6.6.6}$$

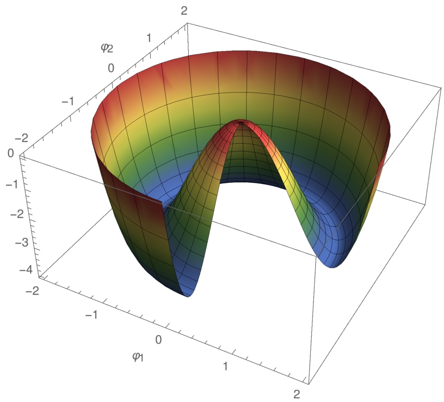
Posledná rovnica odpovedá konštantnej veľkosti poľa φ, t.j. $|\varphi| = a$. Graficky je táto situácia znázornená na Obr. 6.6, kde sa použil rozklad poľa φ na jeho reálnu a imaginárnu zložku

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad \varphi^* = \varphi_1 - i\varphi_2.$$

Po skvantovaní sa pole φ stáva operátorovým poľom a podmienka (6.6.6) sa interpretuje ako podmienka na vákuovú strednú hodnotu

$$|\langle 0|\varphi|0\rangle|^2 = a^2. \tag{6.6.7}$$

Vidíme, že minimálne hodnoty potenciálu V ležia v podstate na kružnici $|\varphi| = = a$. Im odpovedajúce stavy tvoria množinu degenerovaných vákuí, ktoré sú navzájom prepojené vhodnou rotáciou. Fyzikálne polia, ktoré sú excitáciami vákua,



Obr. 6.6: Kvalitatívne znázornenie interakčného potenciálu $V(\varphi_1, \varphi_2)$ pre prípad $m^2 < 0$.

je potom možné získať rozvojom okolo stavov $|\varphi| = a$ a nie okolo očakávaného stavu $\varphi = 0$. Aby sme získali hlbší náhľad do teórie, zavedieme polárne súradnice pre komplexné pole

$$\varphi(x) = \rho(x)\mathrm{e}^{i\theta(x)}, \tag{6.6.8}$$

kde vystupujú dve nové reálne polia ρ a θ. Ako očakávame, premenná θ odpovedá na Obr. 6.6 pohybu okolo “údolia” a ρ zase pohybu v radiálnom smere. Fyzikálna intuícia nám napovedá, že pohyb okolo údolia nestojí žiadnu energiu, keďže nedochádza k zmene potenciálnej energie.

Voľme vákuový stav podmienkou

$$\langle 0|\varphi|0\rangle = a, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{6.6.9}$$

Potom musia platiť dve rovnice

$$\langle 0|\varphi|0\rangle = a, \quad \langle 0|\theta|0\rangle = 0. \tag{6.6.10}$$

Dané vákuum sa vyznačuje konkrétnou hodnotou poľa (6.6.10), ktoré odpovedá vybranému smeru magnetizácie vo feromagnete (L. H. Ryder, 1996; M. E. Peskin & D. V. Schroeder, 1995). Na štúdium excitácií okolo vákua je ďalej výhodne zaviesť radiálnu fluktuačnú časť ρ' vzťahom

$$\varphi(x) = [\rho'(x) + a]\mathrm{e}^{i\theta(x)}. \tag{6.6.11}$$

Stredné hodnoty oboch polí ρ' a θ sú prirodzene rovné nule. Vzťah (6.6.11) dosadíme do Lagrangiánu (6.6.2) a postupne upravujeme s pomocou (6.6.6)

$$V = m^2\rho'^2 + 2m^2a\rho' + m^2a^2 + \lambda(\rho'^4 + 4a^3\rho'^3 + 6a^2\rho'^2 + 4a^4\rho' + a^4)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda^4 {\rho'}^4 + 4a\lambda {\rho'}^3 + 4\lambda a^2 {\rho'}^2 - \lambda a^4 \\
&= \lambda[(\rho' + a)^2 - a^2]^2 - \lambda a^4 \\
&= \lambda(\varphi^* \varphi - a^2)^2 - \lambda a^4. \qquad (6.6.12)
\end{aligned}
$$

Kinetický člen v Lagrangiáne sa zase da prepísať do tvaru

$$(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) = (\partial_\mu \rho')(\partial^\mu \rho') + (\rho' + a)^2 (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta).$$

Vo výraze pre potenciál V pozorujeme prítomnosť člena ${\rho'}^2$ a preto tvrdíme, že pole ρ' sa vyznačuje hmotnosťou

$$m_{\rho'}^2 = 4\lambda a^2. \qquad (6.6.13)$$

Na druhej strane ale nepozorujeme výraz typu θ^2 v potenciáli, a preto θ odpovedá nehmotnému poľu. Výsledkom spontánneho narušenia symetrie je tak prítomnosť jedného hmotného a jedného nehmotného poľa. Tento výsledok interpretujeme s pomocou Obr. 6.6. Je zjavné, že narušenie poľa ρ' z jeho rovnovážnej polohy vyžaduje dodanie nejakej energie, zatiaľčo narušenie poľa θ nie. Neexistuje totiž žiadna sila, ktorá by nám bránila v posunoch pozdĺž kružnice $|\varphi| = a$. Pre uhlové excitácie θ o vlnovej dĺžke λ tak bude platiť, že $\omega \to 0$ pre $\lambda \to \infty$. Odtiaľ máme nepriamu úmeru $\omega \propto \lambda^{-1}$, a vzťah $E \propto p$. Odpovedajúce relativistické častice sa potom správajú ako nehmotné (podobné správanie pozorujeme u fotónov). Častica odpovedajúcu poľu θ je známa ako Goldstoneov bozón. Dôležitým faktom je, že naznačený mechanizmus narušenia symetrie je značne univerzálny, t.j. spontánne narušenie spojitej symetrie vedie k existencii nehmotných častíc. Presné znenie tohto tvrdenia bude dokázané v nasledujúcej časti.

Pre úplnosť dodajme, že v kartézskych súradniciach by bol rozklad (6.6.11) nahradený rovnicou

$$\varphi(x) = a + \frac{\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)}{\sqrt{2}} \qquad (6.6.14)$$

a predpokladali by sme $\langle \varphi_1 \rangle_0 = \langle \varphi_2 \rangle_0 = 0$. Lagrangián by po dosadení a úprave nadobudol tvar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 - 2\lambda a^2 \varphi_1^2 - \sqrt{2}\varphi_1(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2. \quad (6.6.15)$$

Pozorujeme, že pole φ_2 je nehmotné. Na druhej strane pole φ_1 vykazuje hmotnosť $4\lambda a^2$, čo je úplne analogické k výsledku (6.6.13) s polárnymi súradnicami.

6.6.2 Goldstoneovo tvrdenie

V príklade z predošlej časti sme mali dočinenia s Lagrangiánom, ktorý sa vyznačoval $U(1)$ symetriou. Dve reálne polia prirodzene tvoria dvojrozmernú reprezentáciu grupy $U(1)$. Jedno z týchto polí nadobúda nenulovú vákuovú strednú hodnotu a ukáže sa, že jedno pole sa stáva hmotným a druhé nehmotným. Zdôrazňujeme, že všetky uvedené dôvody boli založené na klasickej úrovni. Na ďalší rozvoj si potrebujeme vyjasniť dve otázky

- Ak je Lagrangián invariantný vzhľadom na grupu symetrií G, koľko existuje Goldstoneových bozónov?

- Čo sa stane po skvantovaní klasickej teórie?

Pozrime sa na konkrétny príklad neabelovskej grupy, napr. $SO(3)$. Predpokladajme existenciu izovektorového skalárneho poľa s Lagrangiánom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_i)(\partial^\mu \varphi_i) - \frac{m^2}{2}\varphi_i\varphi_i - \lambda(\varphi_i\varphi_i)^2. \tag{6.6.16}$$

V Lagrangiáne prebieha sumácia cez $i = 1, 2, 3$. Lagrangián $\mathcal{L}$ je invariantný vzhľadom na izotopické rotácie, ktoré sú generované grupou symetrií $G = SO(3)$

$$G : \varphi_i \to \mathrm{e}^{iQ_k\alpha_k}\varphi_i\mathrm{e}^{-iQ_k\alpha_k} = (\mathrm{e}^{-iT_k\alpha_k})_{ij}\varphi_j = U_{ij}\varphi_j = [U(g)\varphi]_i, \tag{6.6.17}$$

kde α_k sú uhly popisujúce rotácie v izospinovom priestore, Q_i sú generátory grupy a T_k sú matice spĺňajúce Lieovu algebru grupy. Tá má teraz ten istý rozmer ako reprezentácia, do ktorej patrí pole φ, t.j. ide o trojrozmernú grupu. Matica $U(g)$, ktorá odpovedá maticovému prvku g, je unitárna (ak T je hermitovská), a teda pracujeme s unitárnou reprezentáciou.

Nájdime minimum potenciálu V (ide o výraz obsahujúci dva posledné členy v Lagrangiáne (6.6.16))

$$V = \frac{m^2}{2}\varphi_i\varphi_i + \lambda(\varphi_i\varphi_i)^2. \tag{6.6.18}$$

Ak je parameter m^2 kladný, tak minimum nastáva pre $\varphi_i = 0$. Naopak pre $m^2 < 0$ dostaneme nasledujúcu podmienku pre minimum

$$|\varphi_0| = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)^{1/2} = \left(-\frac{m^2}{4\lambda}\right)^{1/2} \equiv a. \tag{6.6.19}$$

Opäť máme situáciu s degenerovaným vákuom a za základný stav môžeme oprávnene zvoliť ľubovoľnú fyzikálne prípustnú realizáciu. Bez ujmy na všeobecnosti volíme za základný stav

$$\vec{\varphi}_0 = a\vec{e}_3. \tag{6.6.20}$$

Vektor $\vec{\varphi_0}$ je rovnobežný so smerom osi 3 v izospinovom priestore. Zjavne φ_0 nie je invariantný vzhľadom na plnú grupu G, t.j. existujú také prvky $g \in G$, pre ktoré platí

$$G : \quad \varphi_0' = U(g)\varphi_0 \neq \varphi_0. \tag{6.6.21}$$

φ_0 je ale invariantné vzhľadom na podgrupu H grupy G, ktorá pozostáva z rotácií okolo osi 3

$$H : \quad \varphi_0' = U(h)\varphi_0 = \varphi_0, \quad U(h) = \mathrm{e}^{iT_3\alpha_3}. \tag{6.6.22}$$

Na druhej strane potenciál V je invariantný vzhľadom na celú grupu G

$$V(\varphi') = V(\varphi), \quad \varphi' = U(g)\varphi. \tag{6.6.23}$$

Na nájdenie Golstoneových bozónov predstavíme tretiu zložku poľa ako súčet konštanty a fluktuujúcej zložky

$$\varphi_3 = \chi + a. \tag{6.6.24}$$

Ďalej tento vzťah dosadíme do (6.6.18) a upravujme

$$\begin{aligned} V &= \frac{m^2}{2}[\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + (\chi + a)^2] + \lambda[\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + (\chi + a)^2]^2 \\ &= 4a^2\lambda\chi^2 + 4a\lambda\chi(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \chi^2) + \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \chi^2)^2 - \lambda a^4 \\ &= \lambda[(\varphi_i\varphi_i - a^2)^2 - a^4]. \end{aligned} \tag{6.6.25}$$

Vidíme, že jedine pole χ sa vyskytuje pri kvadratickom člene, a teda má nenulovú hmotnosť

$$m_\chi^2 = 8a^2\lambda, \quad m_{\varphi_1} = m_{\varphi_2} = 0. \tag{6.6.26}$$

Konštatujeme, že po spontánnom narušení symetrie, máme dva Goldstoneove bozóny a jedno hmotné pole.

Postupujme všeobecne, bez odvolávania sa na konkrétnu grupu. Rozložme potenciál okolo jeho minima. Keďže nutnou podmienkou je

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \varphi_a}\right|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \tag{6.6.27}$$

môžeme preto písať rozvoj potenciálu v tvare

$$V(\varphi) = V(\varphi_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}\right)_{\varphi=\varphi_0}\chi_i\chi_j + \mathcal{O}(\chi^3), \tag{6.6.28}$$

kde $\chi(x) = \varphi(x) - \varphi_0$. Matica druhých derivácií potenciálu je

$$M_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}\right)_{\varphi=\varphi_0} \geqq 0, \tag{6.6.29}$$

t.j. matica M_{ij} je pozitívne definitná. Aby sme našli pole, pre ktoré môže nastať rovnosť v (6.6.29), vykonáme grupovú transformáciu. Invariancia rovnice (6.6.23) implikuje

$$V(\varphi_0) = V(U(g)\varphi_0) = V(\varphi_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}\right)_{\varphi_0}\delta\varphi_i\delta\varphi_j + \dots \tag{6.6.30}$$

a teda platí aj

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}\right)_{\varphi_0}\delta\varphi_i\delta\varphi_j = 0, \tag{6.6.31}$$

kde $\delta\varphi_i$ je variácia poľa φ_i podľa grupovej transformácie. Zo vzťahov (6.6.21) a (6.6.22) vidno, že je dôležité, či g je prvok podgrupy H alebo nie. Ak $g \in H$, tak potom $\varphi_0' = \varphi$ a $\delta\varphi_i = 0$, alebo tiež

$$\delta\varphi = \left(\frac{\partial U}{\partial\alpha_3}\right)_{\alpha_3=0}\varphi_0\delta\alpha_3 = 0. \tag{6.6.32}$$

Rovnica (6.6.31) je preto splnená. Ak ale g nepatrí do podgrupy H, tak

$$\delta\varphi_n = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha_i}\right)\varphi_0\right]_n \delta\alpha_i \neq 0. \tag{6.6.33}$$

V tomto prípade z (6.6.29) a (6.6.30) dostaneme

$$M_{ij}[U'(0)\varphi_0]_j = 0. \tag{6.6.34}$$

Polia $U'(0)\varphi_0$ majú preto nulovú hmotnosť. Tie potom predstavujú hľadané Goldstoneove bozóny. Z daného odvodenia by malo byť zrejmé, že ich počet je dôsledkom teórie grúp. Počet polí, ktoré nemusia byť hmotné, je rovný dimenzii Lieovej algebry podgrupy H, ktorá opisuje invariantné vákuové stavy. V rozoberanom prípade sme mali $H = SO(2) \sim U(1)$ s jedným generátorom T_3 - preto jedno pole zostalo hmotné. Prvky G, ktoré nepatria do H, netvoria grupu. Je ale stále možné zaviesť faktorovú množinu G/H (P. Zlatoš, 2011). Počet Goldstoneových bozónov je rovný dimenzii faktorového priestoru, ktorá je tiež rovná počtu generátorov G, ktoré nie sú prvkami H. V rozoberanom prípade by to odpovedalo formálnej rovnosti $3 - 1 = 2$.

Poznámka:

Všimnime si ešte dva špeciálne prípady. Ak existuje jediné vákuum, tak $H = G$ a faktorová množina obsahuje iba jednotkový prvok, a teda nemáme žiadne Goldstoneove bozóny.

Ak naopak existuje také vákuum, že neexistuje žiadna podgrupa H, ktorá necháva vákuový stav φ_0 invariantný, tak H je identita a $G/H = G$. Počet Goldstoneových bozónov je tak rovný dimenzii G.

Vráťme sa teraz k problému kvantovej teórie. V nej je možné Goldstoneovo tvrdenie formulovať tak, že ak existuje taký poľový operátor $\varphi(x)$ s nenulovou vákuovou strednou hodnotou $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle$ a zároveň sa nejedná o singletný stav podľa nejakej grupy symetrií, tak potom v spektre možných stavov musia byť prítomné nehmotné častice. Uvedieme si základné myšlienky dôkazu.

Ak je Lagrangián $\mathcal{L}$ invariantný vzhľadom na istú grupu symetrií, tak potom z časti o Noetherovej vete (kapitola 1.5) vieme, že prúdy

$$j^a_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \varphi)} \frac{\delta\varphi(x)}{\delta\alpha^a} \tag{6.6.35}$$

majú nulovú štvordivergenciu $\partial^\mu j^a_\mu = 0$ a im odpovedajúce náboje

$$Q^a = \int \mathrm{d}^3x\, j^a_0(x) \tag{6.6.36}$$

predstavujú veličiny, ktoré sa zachovávajú v čase. Náboje sa vyznačujú komutačnými vzťahmi

$$[Q^a, Q^b] = C^{abc}Q^c,$$

kde C^{abc} sú štruktúrne konštanty Lieovej algebry. Unitárny operátor grupovej transformácie je

$$U = \mathrm{e}^{iQ^a \alpha^a}. \tag{6.6.37}$$

Ak je vákuový stav invariantný podľa grupy (ide o singlet), $U|0\rangle = 0$, a preto

$$Q^a|0\rangle = 0 \tag{6.6.38}$$

a nábojové operátory anihilujú vákuum. To zvyčajne nastáva, ak existuje nejaký druh symetrie. V opačnom prípade, môžeme povedať, že máme degenerovanú sústavu základných stavov: $U|0\rangle = |0\rangle' \neq |0\rangle$ alebo $Q^a|0\rangle \neq 0$. Mali by sme hovoriť, že $Q^a|0\rangle$ neexistuje v Hilbertovom priestore - inak povedané, jeho norma je nekonečná.

Keďže operátor $\varphi(x)$ nie je singletom vzhľadom na danú grupu, potom musí existovať taký operátor $\varphi'(x)$, že pre nejaké a máme

$$[Q^a, \varphi'(x)] = \varphi(x). \tag{6.6.39}$$

Použitím predpokladu $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle \neq 0$ potom dostaneme

$$\langle 0|[Q^a, \varphi'(x)]|0\rangle = \langle 0|Q^a\varphi'(x) - \varphi'(x)Q^a|0\rangle \neq 0. \tag{6.6.40}$$

To znamená, že rovnica (6.6.38) nemôže nastať a nemáme symetriu vo zvyčajnom zmysle slova.

Ukážeme si, že (6.6.40) vedie priamo na existenciu nehmotných častíc. Dosadíme (6.6.36) do (6.6.40) a zároveň vložíme úplnú množinu stavov

$$\sum_n \int \mathrm{d}^3y\, [\langle 0|j_0^a(y)|n\rangle\langle n|\varphi'(x)|0\rangle - \langle 0|\varphi'(x)|n\rangle\langle n|j_0^a(y)|0\rangle]_{x^0=y^0} \neq 0. \tag{6.6.41}$$

Obmedzenie $x^0 = y^0$ je potrebné na dôkaz (6.6.39). Translačná invariancia implikuje

$$j_0^a(y) = \mathrm{e}^{-ip\cdot y} j_0^a(0)\mathrm{e}^{ip\cdot y},$$

ktorú využijeme v (6.6.41) na ďalšiu úpravu

$$\begin{aligned}
&\sum_n \int \mathrm{d}^3y\, [\langle 0|j_0^a(0)|n\rangle\langle n|\varphi'(x)|0\rangle\mathrm{e}^{ip_n\cdot y} - \langle 0|\varphi'(x)|n\rangle\langle n|j_0^a(0)|0\rangle\mathrm{e}^{-ip_n\cdot y}]_{x^0=y^0} \\
&\quad = (2\pi)^3 \sum_n \delta^3(\boldsymbol{p}_n)[\langle 0|j_0^a(0)|n\rangle\langle n|\varphi'(x)|0\rangle\mathrm{e}^{ip_{n0}y_0} \\
&\quad - \langle 0|\varphi'(x)|n\rangle\langle n|j_0^a(0)|0\rangle\mathrm{e}^{-ip_{n0}y_0}]_{x^0=y^0} \\
&\quad = (2\pi)^3 \sum_n \delta^3(\boldsymbol{p}_n)[\langle 0|j_0^a(0)|n\rangle\langle n|\varphi'(x)|0\rangle\mathrm{e}^{iM_ny_0} \\
&\quad - \langle 0|\varphi'(x)|n\rangle\langle n|j_0^a(0)|0\rangle\mathrm{e}^{-iM_ny_0}]_{x^0=y^0} \\
&\quad \neq 0,
\end{aligned} \tag{6.6.42}$$

kde sme preintegrovali cez priestorovú súradnicu a využili prítomnosť Diracovej delta funkcie na identifikáciu $p_{n0} = M_n$, kde M_n je hmotnosť vložených stavov. Musíme ešte ukázať, že (6.6.42) nezávisí na časovej premennej y^0. Ak to ukážeme, dostaneme $M_n = 0$, a teda všetky vložené stavy majú nulovú hmotnosť, čo už je vlastne obsahom Goldstoneovho tvrdenia. Na požadovaný dôkaz využime fakt, že $j^a_\mu(y)$ má nulovú divergenciu

$$\partial^\mu j^a_\mu(y) = \partial_0 j^a_0(y) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}^a(y) = 0,$$

ktorá po integrácii dáva

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \int \mathrm{d}^3 y\, j^a_0(y) = -\int \mathrm{d}^3 y\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}^a(y).$$

Vieme, že (6.6.42) nie je nič iné ako (6.6.40), a preto

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_0} \langle 0|[Q^a, \varphi'(x)]|0\rangle &= \frac{\partial}{\partial y_0} \int \mathrm{d}^3 y\, \langle 0|[j^a_0(y), \varphi'(x)]|0\rangle \\ &= -\int \mathrm{d}^3 y\, \langle 0|[\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}^a(y), \varphi'(x)]|0\rangle \\ &= -\int \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \langle 0|[\boldsymbol{j}^a(y), \varphi'(x)]|0\rangle.\end{aligned}$$

Ak sú splnené zvyčajné podmienky kladené na polia v nekonečne, tak daný povrchový integrál je nulový. ■

V šestdesiatych rokoch bola vynaložená veľká snaha o nájdenie aplikácií Goldstoneovej vety vo fyzike častíc. Hoci sa nepozorujú hadróny s nulovou hmotnosťou, pión má relatívne nízku hmotnosť a dalo by sa povedať, že ide o “skoro”-Goldstoneov bozón. Ak by to tak bolo, mali by sme vysvetlený úspech PCAC hypotézy (z anglického “partially conserved axial current”). Viac detailov viete nájsť napr. v H. Georgi, 1982; S. Coleman, 1985.

6.6.3 Spontánne narušenie kalibračných symetrií

Preštudujeme teraz otázku, čo sa stane, ak dôjde k spontánnemu narušeniu teórie s *lokálnou* kalibračnou symetriou. Začnime s najjednoduším modelom (6.6.2)

$$\varphi \to \mathrm{e}^{i\Lambda(x)}\varphi. \tag{6.6.43}$$

Ako sme už videli v časti 6.3, priamym dôsledkom takejto lokálnej kalibrácie je zavedenie elektromagnetického poľa a výskyt kovariantnej derivácie (6.3.25) a (6.6.2)

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi + ieA_\mu \varphi)(\partial^\mu \overset{*}{\varphi} - ieA^\mu \overset{*}{\varphi}) - m^2 \overset{*}{\varphi}\varphi - \lambda(\overset{*}{\varphi}\varphi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{6.6.44}$$

Podobne ako predtým, budeme považovať m^2 za parameter, ktorý môže nadobúdať ako kladné tak aj záporné hodnoty. V prípade $m^2 < 0$ a absencii kalibračného poľa sa vákuum (základný stav) vyznačuje nenulovou hodnotou

$$|\varphi| = a = \left(-\frac{m^2}{2\lambda}\right)^{1/2}. \tag{6.6.45}$$

Analogicky ako pri (6.6.14) rozložíme pole φ na reálnu a imaginárnu časť

$$\varphi(x) = a + \frac{\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)}{\sqrt{2}}$$

a prepíšeme Lagrangián pomocou polí $\varphi_{1,2}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2a^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 - 2\lambda a^2\varphi_1^2 \\ &+ \sqrt{2}eaA^\mu\partial_\mu\varphi_2 + \ldots,\end{aligned} \tag{6.6.46}$$

kde sme vzali do úvahy (6.6.6) a explicitne nevypísali členy vyššieho ako tretieho rádu. Zaujímavým členom sa javí druhý člen na pravej strane rovnice (6.6.46), ktorý je úmerný $A_\mu A^\mu$. Ten naznačuje, že fotón sa stal hmotnou časticou. Skalárne pole φ_1 je taktiež hmotným poľom, zatiaľčo φ_2 sa javí nehmotným. Navyše ale máme prítomný "zvláštny" zmiešavací člen $A^\mu\partial_\mu\varphi_2$. Takýto výraz by spôsoboval zmenu letiaceho fotónu na pole φ_2, a teda φ_2 by nemalo odpovedať reálne pozorovateľnému fyzikálnemu poľu. V skutočnosti vieme toto pole odstrániť z modelu vhodnou kalibračnou transformáciou. Pre nekonečne malé Λ v (6.6.43) odvodíme z (6.6.14) dva vzťahy

$$\varphi_1' = \varphi_1 - \Lambda\varphi_2, \quad \varphi_2' = \varphi_2 + \Lambda\varphi_1 + \sqrt{2}\Lambda a. \tag{6.6.47}$$

Vidíme, že φ_2 (podobne ako A_μ) podstupuje nehomogénnu transformáciu, ktorá pozostáva z rotácie a posunutia v rovine (φ_1, φ_2), a preto nemá priamy fyzikálny zmysel (analogicky ako pre elektromagnetické pole, pre ktoré sú pozorovateľné veličiny $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ a nie A_μ). Môžeme vždy zvoliť kalibračný parameter Λ tak, aby $\varphi_2 = 0$ a tým dosiahneme neprítomnosť zmiešavacieho člena $A^\mu\partial_\mu\varphi_2$. V tejto kalibrácii potom dostaneme Lagrangián v tvare

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2a^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 - 2\lambda a^2\varphi_1^2 + \text{interakčné členy}, \tag{6.6.48}$$

kde sme preznačili $\varphi_1' \to \varphi_1$. Tento Lagrangián obsahuje dve polia, fotónové so spinom 1 a φ_1 so spinom 0. Obe polia sú pritom hmotné. Pole φ_2, ktoré v prípade spontánneho narušenia globálnej symetrie zostáva nehmotné (Goldstoneov bozón), nám v skutočnosti vymizlo. Ďalej kalibračné pole, ktorého prítomnosť je dôsledkom lokálnej symetrie, nadobudlo hmotnosť - "fotón" sa stal hmotným. Takýto jav je známy ako Higgsov mechanizmus. V danom abelovskom modeli to vieme zosumarizovať nasledovne: spontánne narušenie symetrie vedie nie na prítomnosť nehmotného Goldstoneovho bozónu, ale na jeho vymiznutie z teórie. Namiesto toho sa nám objaví hmotné kalibračné pole. Spontánne narušenie symetrie $U(1)$ nám takýmto spôsobom poskytuje časticové spektrum závislé na type symetrie (globálna vs. lokálna)

a) Goldstoneov mód (narušenie globálnej symetrie $U(1)$)

$$2 \text{ hmotné skalárne polia} \to 1 \text{ hmotné skalárne pole} + 1 \text{ nehmotné skalárne pole} \tag{6.6.49}$$

b) Higgsov mód (narušenie lokálnej kalibračnej symetrie $U(1)$)

$$2 \text{ hmotné skalárne polia} + 1 \text{ fotón} \to 1 \text{ hmotné skalárne pole} + 1 \text{ hmotný fotón} \tag{6.6.50}$$

Všimnime si, že v oboch prípadoch sa počet stupňov voľnosti zachováva v naznačených transformáciách. V Goldstoneovom prípade je to jednoduché: hmotné aj nehmotné skalárne pole má jeden stupeň voľnosti. Celkovo sa preto počet stupňov voľnosti zachováva $2 = 1 + 1$. V Higgsovom prípade máme nehmotný fotón, ktorý ma dva fyzikálne stupne voľnosti, ale hmotný fotón má až tri stupne. Celkovo teda máme $2 + 2 = 1 + 3$. Hrubo povedané, fotón "absorboval" skalárne pole a tým nadobudol hmotnosť. Tento mechanizmus vieme porovnať so situáciou v kvantovej elektrodynamike v časti 5.5. Tam sa pozdĺžne a časové komponenty fotónu navzájom vynulovali a zostali nám len priečne zložky. V tomto prípade sa časová zložka fotónu vynuluje so skalárnym poľom a zostanú nám tri polarizačné stavy fotónu. Fotón sa tak stáva hmotnou časticou.

Hoci sme naše úvahy založili na analýze Lagrangiánu (6.6.48), jeho konkrétny tvar nehrá až takú podstatnú rolu. V skutočnosti, v renormalizačnej procedúre (ktorá je nad rámec tohoto kurzu, ale dôležitá pre časticových a teoretických fyzikov) je oveľa výhodnejšie pracovať s (6.6.46). Kalibrácia (6.6.48) sa nazýva fyzikálna alebo unitárna kalibrácia (U kalibrácia), pretože sa v nej vyskytujú iba fyzikálne častice.

Teraz preskúmame neabelovský Higgsov mechanizmus a pre konkrétnosť uvažujme $O(3)$, ktorý sme rozoberali v predchádzajúcej časti. Lagrangián (6.6.16) musí byť pozmenený nahradením normálnej derivácie kovariantnou a pridaním kalibračného člena. To vedie na celkový Lagrangián modelu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu \varphi_i)(D^\mu \varphi_i) - \frac{m^2}{2}\varphi_i \varphi_i - \lambda(\varphi_i\varphi_i)^2 - \frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}, \tag{6.6.51}$$

kde na základe vzťahov (6.5.8) a (6.5.20) vieme, že

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi_i &= \partial_\mu \varphi_i + g\varepsilon_{ijk}A^j_\mu \varphi_k, \\ F^i_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\varepsilon^{ijk}A^j_\mu A^k_\nu. \end{aligned} \tag{6.6.52}$$

Potenciál V nadobúda svoje minimum (pre $m^2 < 0$) pre

$$|\varphi_0| = \left(-\frac{m^2}{4\lambda}\right)^{1/2} = a. \tag{6.6.53}$$

Volíme vákuový stav tak, aby smeroval pozdĺž osi 3

$$\vec{\varphi}_0 = a\vec{e}_3. \tag{6.6.54}$$

Fyzikálne polia potom sú $\varphi_{1,2}$ a $\chi = \varphi_3 - a$. Po krátkej úprave dostaneme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi_1)^2 + (\partial_\mu\varphi_2)^2 + (\partial_\mu\chi)^2] + ag[(\partial_\mu\varphi_1)A_2^\mu - (\partial_\mu\varphi_2)A_1^\mu] \\ + \frac{a^2g^2}{2}[(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2] - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)^2 - 4a^2\lambda\chi^2 + \ldots, \tag{6.6.55}$$

kde sme explicitne nevypísali členy vyššieho ako tretieho rádu vzhľadom na polia. Tie nie sú potrebné na našu fyzikálnu diskusiu. Tento Lagrangián je analogický k (6.6.46). Podobne obsahuje zmiešavací člen medzi A^μ a φ. Preto jeho priamočiara interpretácia nie je možná. Na odvodenie fyzikálne viac transparentného Lagrangiána, využijeme prítomnosť lokálnej kalibračnej symetrie. Zvolíme kalibráciu - konkrétne unitárnu kalibráciu takým spôsobom, aby v každom bode časopriestoru $\vec{\varphi}$ smeroval pozdĺž osi 3 v izospinovom priestore

$$\vec{\varphi}(x) = \varphi_3\vec{e}_3 = (a+\chi)\vec{e}_3. \tag{6.6.56}$$

Tým sa efektívne zbavíme polí φ_1 a φ_2 a máme

$$D_\mu\varphi_1 = g(a+\chi)A_\mu^2, \quad D_\mu\varphi_2 = -g(a+\chi)A_\mu^1, \quad D_\mu\varphi_3 = \partial_\mu\chi. \tag{6.6.57}$$

Potom tiež

$$(D_\mu\varphi_i)^2 = a^2g^2[(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2] + (\partial_\mu\chi)^2 + \ldots$$

a Lagrangián nadobudne konečný tvar

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)^2 - \frac{a^2g^2}{2}[(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2] + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - 4a^2\lambda\chi^2, \tag{6.6.58}$$

kde sme sa opäť obmedzili na kvadratické členy. Častice toho modelu tak odpovedajú hmotnému skaláru, dvom hmotným vektorovým časticiam a jednej nehmotnej vektorovej častici. V skutočnosti Goldstoneove bozóny, ktoré boli prítomné v modeli so spontánne narušenou globálnou symetriou, vymizli v modeli s lokálnou symetriou a dve z nehmotných kalibračných polí sa stali hmotnými. Preto podobne ako pri (6.6.49) a (6.6.50) vieme zosumarizovať získane výsledky spontánneho narušenia modelu s $O(3)$ symetriou nasledovným spôsobom

a) Goldstoneov mód (globálna symetria $O(3)$)

$$\text{3 hmotné skalárne polia} \rightarrow \text{1 hmotné skalárne pole} + \text{2 nehmotné skalárne polia} \tag{6.6.59}$$

b) Higgsov mód (lokálna symetria $O(3)$)

$$\begin{aligned} &\text{3 hmotné skalárne polia} + \text{3 nehmotné vektorové polia} \rightarrow \\ &\text{1 hmotné skalárne pole} + \text{2 hmotné vektorové polia} + \\ &\text{1 nehmotné vektorové pole} \end{aligned} \tag{6.6.60}$$

Vidíme, že počet nezávislých módov sa zachováva. Napr. v Higgsovom prípade $3 + 3 \times 2 = 9 = 1 + 2 \times 3 + 2$.

Model $O(3)$ obsahuje všetky dôležité prvky všeobecného neabelovského prípadu. Malo by byť jasné, že jedno nehmotné vektorové pole je prítomné vždy, pretože podgrupa H ($=U(1)$), podľa ktorej je vákuum invariantné, má jeden generátor - ide o skutočnosť, ktorá dovoľuje jedno hmotné skalárne pole (v Goldstoneovom prípade). Preto počet nehmotných vektorových polí je rovný $\dim H$. Na druhej strane, dve vektorové polia sa stali hmotnými vďaka "absorpcii" dvoch Goldstoneových módov. Počet hmotných vektorových polí je preto $\dim G/H$. A tak celkový počet kalibračných častíc (hmotných aj nehmotných) je $\dim G$. To možno očakávať, pretože kalibračné pole sa transformuje podľa regulárnej reprezentácie danej grupy. Fakt, že v diskutovanom modeli sme mali aj skalárne pole bolo spôsobené tým, že sme zvolili skalárne polia za prvky izotripletu. Dá sa povedať, že do značnej miery je výsledok Higgsovho mechanizmu determinovaný grupovými vlastnosťami daného fyzikálneho modelu.

6.6.4 Supravodivosť

Supravodivosť predstavuje ilustráciu Higgsovho mechanizmu pre abelovskú teóriu. Známym experimentálnym faktom je prejav javu supravodivosti v kovoch pri dostatočne nízkych teplotách. Takéto kovy sú schopné viesť prúdy, pričom nedochádza k disipácii energie. V princípe preto môžu elektrické prúdy v supravodiči tiecť nekonečne dlho. Jedným z ich prejavov je efektívne tienenie magnetického toku, čoho dôsledkom je nulové magnetické pole vnútri supravodiča (tzv. Meissnerov-Ochsenfeldov jav). Iným spôsobom je možné tento efekt vysvetliť tým, že vo vnútri supravodiča sa fotóny stávajú hmotnými.

Našu diskusiu začnime uvažovaním statického prípadu, t.j. $\partial_0 \varphi = 0$ a ďalšie časové derivácie sú identicky rovné nule. Prepíšeme potom rovnicu (6.6.44) do tvaru

$$\mathcal{L} = -(\boldsymbol{\nabla}\varphi - ie\boldsymbol{A}\varphi) \cdot (\boldsymbol{\nabla}\overset{*}{\varphi} + ie\boldsymbol{A}\overset{*}{\varphi}) - m^2|\varphi|^2 - \lambda|\varphi|^4 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})^2,$$

resp.

$$-\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})^2 + |(\boldsymbol{\nabla} - ie\boldsymbol{A})\varphi|^2 + m^2|\varphi|^2 + \lambda|\varphi|^4. \tag{6.6.61}$$

Tento Lagrangián je tiež známy ako Landauova-Ginzburgova voľná energia v teórii kritických javov (A. Altland & B. Simons, 2010; J. Zinn-Justin, 2010). Veličina $m^2 = a(T - T_c)$ sa interpretuje ako odklon od kritickej teploty $T = T_c$, pole φ predstavuje mnohočasticovú vlnovú funkciu a jej fyzikálna opodstatnenosť je zabezpečená vďaka Bardeeonovej-Cooperovej-Schriefferovej teórii. Podľa nej vieme, že za istých podmienok vzniká efektívna príťažlivá sila medzi elektrónmi. Poľovými excitáciami sú potom páry elektrónov, ktoré takto tvoria viazané bozónové stavy. Pri nízkych teplotách sa môžu tieto stavy nachádzať v tom istom kvantovom stave (Boseho-Einsteinov kondenzát) a vďaka tomu je možné zaviesť na ich opis mnohočasticovú vlnovú funkciu φ. Pre $T > T_c \rightarrow m^2 > 0$ nastáva minimum voľnej energii pre $|\varphi| = 0$. Naopak pre $T < T_c \to m^2 < 0$ je minimum voľnej energie dosiahnuté pre stavy, ktoré vyhovujú podmienke

$$|\varphi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} > 0. \tag{6.6.62}$$

To, ako už vieme z časti 6.6.1, odpovedá spontánnemu narušeniu symetrie. Lagrangián (6.6.61) je invariantný vzhľadom na zvyčajné fázové transformácie

$$\varphi \to \mathrm{e}^{i\Lambda(x)}\varphi, \quad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \frac{1}{e}\boldsymbol{\nabla}\Lambda(x),$$

ktoré priamo vedú na Noetherovej prúd

$$\boldsymbol{j} = -i(\overset{*}{\varphi}\boldsymbol{\nabla}\varphi - \varphi\boldsymbol{\nabla}\overset{*}{\varphi}) - 2e|\varphi|^2\boldsymbol{A}. \tag{6.6.63}$$

Pre $T < T_c$ sa pole φ mení len veľmi málo na priestorových mierkach porovnateľných s veľkosťou vzorky. Dôležitejším sa preto stáva relevantnejším druhý člen na pravej strane (6.6.44) a približne máme

$$\boldsymbol{j} \approx \frac{em^2}{\lambda}\boldsymbol{A} = -k^2\boldsymbol{A}, \tag{6.6.64}$$

kde k je nejaká kladná konštanta. Táto rovnica je známa aj ako Londonova rovnica. Pre elektrické pole dostaneme $\boldsymbol{E} = -\partial_t\boldsymbol{A} = 0$ a ak predpokladáme platnosť Ohmovho zákona $\boldsymbol{E} = R\boldsymbol{j}$, tak nutne

$$R = 0,$$

čo možno interpretovať ako samotný jav supravodivosti.

Meissnerov jav vieme taktiež ľahko demonštrovať. Ampérov zákon nám dáva do súvisu magnetické pole $\boldsymbol{B}$ s prúdovou hustotou $\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}. \tag{6.6.65}$$

Aplikujme na túto rovnicu operáciu rotácie, využime $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ a vzťah (6.6.64) a dostaneme rovnicu pre magnetické pole

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B} = k^2\boldsymbol{B}. \tag{6.6.66}$$

Ak sa obmedzíme na jeden priestorový rozmer, tak ľahko nahliadneme, že prípustné fyzikálne riešenie má exponenciálny charakter

$$B_x = B_0\mathrm{e}^{-kx}.$$

Magnetické pole preto vniká do supravodiča iba na efektívnu vzdialenosť rádovo rovnú $1/k$. Experiment naznačuje, že približná hodnota je $1/k \approx 10^{-6}$cm. Nakoniec z (6.6.66) dostaneme $\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A} = k^2\boldsymbol{A}$, resp. v Lorentzovsky kovariantnom tvare

$$\Box A_\mu = -k^2 A_\mu,$$

odkiaľ vidíme, že “fotóny” sa vyznačujú efektívnou hmotnosťou k, čo je charakteristickou črtou Higgsovho mechanizmu.

Dodatok A

Matematické dodatky

A.1 Vlastnosti Leviho-Civitovho symbolu

Uvažujme trojrozmerný euklidovský vektorový priestor. Pod Leviho-Civitovym symbolom ε_{ijk} rozumieme objekt charakterizovaný trojicou indexov i, j a k, pričom môže nadobúdať iba tri hodnoty 1,−1 a 0. Jeho definícia potom znie

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ak } (ijk) \text{ je párna permutácia;} \\ -1, & \text{ak } (ijk) \text{ je nepárna permutácia;} \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \tag{A.1.1}$$

Jeho hlavná opodstatnenosť spočíva v značnom zjednodušení symbolických a algebraických výpočtov. Ako sa uvidí pri konkrétnych výpočtoch, výrazy obsahujúce vektorový súčin sa prepíšu do kompaktnejšieho zápisu oproti používanému zápisu pomocou determinantu. Základné vlastnosti Levitovho-Civitovho symbolu, ktoré budeme využívať, sú

a) Komponenty vektorového súčinu $c_i = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i; i = 1, 2, 3$ je možné vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} c_1 &= a_2b_3 - a_3b_2, \\ c_2 &= a_3b_1 - a_1b_3, \\ c_3 &= a_1b_2 - a_2b_1, \end{aligned}$$

resp. v kompaktnom tvare ako

$$c_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k,$$

kde sa implicitne rozumie sumácia cez dva opakujúce sa indexy j a k. Index i je voľný, t.j. môže predstavovať ľubovoľný prvok z množiny $\{1, 2, 3\}$.

b) Pri výpočtoch dochádza k výskytu viacerých vektorových súčinov veličín. To sa po prepise prejaví vo výskyte viacerých Leviho-Civitovych symbolov s niektorými opakujúcimi sa indexmi. Cez ne sa musí vysčítať a základné vzťahy, ktoré sa pritom využívajú, sú tieto

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnl} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{il} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jl} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kl} \end{vmatrix} \tag{A.1.2}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \tag{A.1.3}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kjn} = -2\delta_{in} \tag{A.1.4}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = -6 \tag{A.1.5}$$

Z nich hlavne vzťah (A.1.3) nachádza časté použitie pri algebraických úpravách.

Podotýkame, že Leviho-Civitov symbol je možné zovšeobecniť aj na iné priestorové rozmery, prípadne metriky.

A.2 Greenove funkcie

Aby nedochádzalo k zbytočným nedorozumeniam, v krátkosti zhrnieme v tejto časti základné myšlienky metódy Greenovych funkcií na riešenie diferenciálnych rovníc. Detaily môže čitateľ nájsť aj v príslušnej matematickej a fyzikálnej literatúre (A. N. Vasil'ev, 2011; P. J. Olver, 2014).

Predpokladajme, že máme zadaný nejaký lineárny diferenciálny operátor L premennej $x = (t, \boldsymbol{x})$. Napr. $\Box = \partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2$. Úloha typicky spočíva v nájdení riešenia $\varphi = \varphi(x)$ rovnice

$$L\varphi(x) = f(x), \tag{A.2.1}$$

kde $f(x)$ interpretujeme ako zdroj.

<u>*Definícia*: Greenovou funkciou operátora L nazývame takú funkciu $G(x, x')$ pre ktorú platí</u>

$$L_x G(x, x') = \delta(x - x'), \tag{A.2.2}$$

kde L_x je operátor L pôsobiaci na premennú x.

Akonáhle je známa Greenova funkcia $G(x, x')$, môžeme ihneď skonštruovať partikulárne riešenie φ_p daného problému. Stačí definovať

$$\varphi_p(x) = \int \mathrm{d}x'\, G(x, x')f(x'). \tag{A.2.3}$$

Na overenie postupujme formálne

$$\begin{aligned} L\varphi(x) &= L_x \int \mathrm{d}x'\, G(x, x')f(x') \\ &= \int \mathrm{d}x'\, L_x G(x, x')f(x') \end{aligned}$$

$$= \int \mathrm{d}x'\, \delta(x - x') f(x')$$
$$= f(x).$$

Všeobecné riešenie (A.2.1) samozrejme pozostáva zo všeobecného riešenia homogénnej rovnice a partikulárneho riešenia

$$\varphi = \varphi_h + \varphi_p, \tag{A.2.4}$$

kde φ_h je riešením

$$L\varphi_h = 0. \tag{A.2.5}$$

Príklad:

V teórii elektromagnetického poľa sme sa pri riešení elektrostatických úloh stretli s Poissonovou rovnicou pre potenciál $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \varphi(\boldsymbol{x}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\epsilon_0}, \tag{A.2.6}$$

kde $\rho(\boldsymbol{x})$ je zadané statické rozloženie elektrického náboja. Riešenie je možné zapísať v explicitnom tvare

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^3x'\, \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|},$$

čo vieme aj formálne prepísať ako

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^3x'\, \frac{-\rho(\boldsymbol{x}')}{\epsilon_0} \frac{-1}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}. \tag{A.2.7}$$

Porovnaním s (A.2.1) a (A.2.3) pre operátor $L = \boldsymbol{\nabla}^2$ dostaneme

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'). \tag{A.2.8}$$

Greenova funkcia $G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}')$ Laplaceovho operátora (v troch rozmeroch) $\boldsymbol{\nabla}^2$ je preto

$$G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}') = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}. \tag{A.2.9}$$

■

Dodatok B

Niektoré aspekty špeciálnej teórie relativity

B.1 Lorentzovské transformácie

V tomto dodatku uvedieme vybrané informácie o Lorentzových transformáciach, ktoré sa využívajú pri niektorých odvodeniach v tejto knihe.

Pri konštrukcii (konečného) boostu v smere osi x potrebujeme poznať tvar matice Λ, ktorá odpovedá jeho infinitezimálnej verzii. Z prednášky venovanej špeciálnej teórii relativity vieme, že danú transformáciu je možné zapísať v nasledujúcom tvare

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{B.1.1}$$

kde používame štandartné označenia

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}}, \quad \beta = \frac{|\boldsymbol{v}|}{c}. \tag{B.1.2}$$

Vykonaním Taylorovho rozvoja vzhľadom na malý parameter $\beta \ll 1$ dostaneme približný vzťah

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{B.1.3}$$

Z výrazu na pravej strane vidíme, že infinitezimálnu transformáciu typu boost vieme predstaviť v tvare súčtu jednotkovej matice a antisymetrickej matice I

$$I^{\nu}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.1.4}$$

Je zrejmé, že platí $I^0{}_1 = I^1{}_0 = -I^{10} = I^{10} = -1$.

Overíme si teraz, že nekonečným skladaním infinitezimálnej transformácie (B.1.3) naozaj dospejeme k pôvodnej matici (B.1.1). Tým bude zdôvodnená opodstatnenosť typického prístupu vo fyzike, kedy sa obvykle predpokladá, že daná konečná transformácia sa vždy dá vyskladať z nekonečného počtu infinitezimálnych transformácií. Tie sa obvykle analyzujú jednoduchšie ako konečné.

Zapíšeme danú infinitezimálnu transformáciu v tvare

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu}, \quad \Lambda^{\nu}{}_{\mu} = g^{\nu}_{\mu} + \Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}, \tag{B.1.5}$$

$$\Delta\omega^{\nu}{}_{\mu} = \Delta\omega I^{\nu}{}_{\mu}, \tag{B.1.6}$$

kde $\Delta\omega = \Delta\beta$ predstavuje nekonečne malý parameter odpovedajúci rapidite. Umocňovaním matice I dostaneme

$$I^2 = I \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.1.7}$$

a ďalej

$$I^3 = I^2 \cdot I = I. \tag{B.1.8}$$

Odtiaľ by už mal byť zrejmý tvar všeobecnej mocniny $I^n, n \in \mathbb{N}$.

Konečnú Lorentzovu transformáciu potom vyskladáme limitným prechodom

$$\begin{aligned} x'^{\nu} &= \lim_{n\to\infty} \left(g + \frac{\omega}{N} I\right)^{\nu}{}_{\sigma_1} \left(g + \frac{\omega}{N} I\right)^{\sigma_1}{}_{\sigma_2} \ldots x^{\sigma_n} \\ &= \exp(\omega I)^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu} \\ &= [\cosh(\omega I) + \sinh(\omega I)]^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu}. \end{aligned} \tag{B.1.9}$$

Upravujme postupne výrazy obsahujúce hyperbolické funkcie, ktorých argumentom je matica I

$$\cosh(I\omega) = \frac{\mathrm{e}^{\omega I} + \mathrm{e}^{-\omega I}}{2} = \frac{1}{2}\left[\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I^n \omega^n}{n!} + \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I^n (-1)^n \omega^n}{n!}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n)\frac{I^n\omega^n}{n!} = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{I^{2n}\omega^{2n}}{(2n)!} \\
&= \mathbb{1} + I^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^{2n}}{(2n)!} = \mathbb{1} - I^2 + I^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^{2n}}{(2n)!} \\
&= \mathbb{1} - I^2 + I^2\cosh(\omega).
\end{aligned}
\tag{B.1.10}
$$

Analogicky postupujeme pre hyperbolický sínus

$$
\begin{aligned}
\sinh(I\omega) &= \frac{\mathrm{e}^{\omega I} - \mathrm{e}^{-\omega I}}{2} = \frac{1}{2}\left[\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{I^n\omega^n}{n!} - \mathbb{1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{I^n(-1)^n\omega^n}{n!}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n)\frac{I^n\omega^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{I^{2n+1}\omega^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{I\omega^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= I\sinh(\omega).
\end{aligned}
\tag{B.1.11}
$$

Získané vzťahy (B.1.10) a (B.1.11) dosadíme do (B.1.9) a upravíme najskôr maticovú časť

$$
\begin{aligned}
&1 - I^2 + I^2\cosh(\omega) + I\sinh(\omega) = \\
&= \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cosh(\omega)&0&0&0\\ 0&\cosh(\omega)&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&-\sinh(\omega)&0&0\\ -\sinh(\omega)&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh(\omega)&-\sinh(\omega)&0&0\\ -\sinh(\omega)&\cosh(\omega)&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

A teda hľadaná transformácia nadobúda tvare

$$
\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\omega)&-\sinh(\omega)&0&0\\ -\sinh(\omega)&\cosh(\omega)&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{B.1.12}
$$

Po roznásobení dostaneme vyjadrenie jednotlivých zložiek

$$
ct' = x'^0 = x^0\cosh(\omega) - x^1\sinh(\omega) = \cosh(\omega)[x^0 - x^1\,\mathrm{tgh}(\omega)],
$$

$$
\begin{aligned}
x' &= x'^1 = -x^0 \sinh(\omega) + x^1 \cosh(\omega) = \cosh(\omega)[x^1 - x^0 \,\mathrm{tgh}(\omega)],\\
y' &= x'^2 = x^2,\\
z' &= x'^3 = x^3.
\end{aligned} \tag{B.1.13}
$$

Pritom platí

$$
\mathrm{tgh}(\omega) = \frac{v}{c}, \quad \cosh(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{B.1.14}
$$

Priamym dosadením overíme, že tieto vzťahy sú v súlade s (B.1.2). Pri rotáciách okolo priestorovej osi x^3 by sme zase použili maticu

$$
I^{\nu}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.1.15}
$$

a podobne by sme postupovali pre ďalšie možné rotácie a boosty.

B.2 Relativistická dynamika bodovej častice

Pohyb voľnej častice (taká na ktorú nepôsobia žiadne vonkajšie sily) je možné určiť pomocou dvoch postulátov motivovaných experimentálnymi pozorovaniami:
1. postulát: Lagrangián voľnej častice je funkciou iba jej rýchlosti, t.j. $L = L(\boldsymbol{v})$.

V princípe sa jedná o dôsledok homogenity časopriestoru. Ak navyše predpokladáme izotrópnosť priestoru, tak nutne $L = L(\boldsymbol{v}^2)$. Ako motiváciu môžeme uviesť prípad nerelativistickej častice, pre ktorú máme

$$
L = \frac{m\boldsymbol{v}^2}{2}, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i; i = 1, 2, 3. \tag{B.2.1}
$$

Využili sme známe poznatky z teoretickej mechaniky (H. Goldstein, C. Poole & J. Safko, 2002). Následne s pomocou Eulerových-Lagrangeových rovníc dostaneme

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \text{konšt.},
$$

čo nie je nič iné ako prvý Newtonov zákon.
2. postulát: Potreba relativistickej kovariantnosti. Inými slovami to znamená, že požadujeme, aby účinok S a jeho diferenciál $\mathrm{d}S = L\mathrm{d}t$ boli invariantné veličiny vzhľadom na Lorentzove transformácie.

Z týchto dvoch postulátov teraz odvodíme tvar Lagrangeovej funkcie voľnej častice L. Zrejme všetky veličiny v $\mathrm{d}S$ sa musia vyjadriť nejakým spôsobom pomocou štvorvektora $\mathrm{d}x^\alpha$

$$
\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x^0}{c}, \quad v_i = c\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}x^0} = (\boldsymbol{v})_i, \quad i = 1, 2, 3.
$$

Iný vhodný štvorvektor ani nemáme k dispozícii. Ďalej jediná vhodná skalárna veličina, ktorá pripadá do úvahy, je infinitezimálny invariantný interval $\mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x^\alpha = \mathrm{d}s^2$. Očakávame, že $\mathrm{d}S = L(\boldsymbol{v})\mathrm{d}t = f(\mathrm{d}s^2)$, t.j. že Lagrangián je nejakou funkciou dĺžky vektora $\mathrm{d}x^\alpha$ (Lagrangián ako skalárna veličina by mala byť funkciou len prípustných skalárnych premenných). Vyberieme z $\mathrm{d}s^2$ druhú mocninu $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^0 - \mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^i = c^2(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 = c(\mathrm{d}t)^2\left[1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right].$$

Veličina $\mathrm{d}S$ by mala byť lineárna v časovom prírastku $\mathrm{d}t$. Preto očakávame, že

$$\mathrm{d}S = L(\boldsymbol{v})\mathrm{d}t \propto \mathrm{d}t\left[1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right]^{1/2},$$

odkiaľ

$$L(\boldsymbol{v}) = a\left[1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right]^{1/2}$$

s istým koeficientom úmernosti a. Ten určíme z porovnania s nerelativistickým priblížením, ktoré poznáme (B.2.1). Pomocou Taylorovho rozvoja máme

$$L(\boldsymbol{v}) \approx a\left[1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{2c^2} + \dots\right]$$

pre $v \ll c$. Zjavne prvý člen na pravej strane je fyzikálne nedôležitá konštanta. Druhý člen ale môžeme porovnať s nerelativistickým Lagrangiánom (B.2.1). Vidíme, že musí platiť $a = -mc^2$. Dospievame tak k Lagrangiánu (voľnej) relativistickej častice

$$L(\boldsymbol{v}) = -mc^2\left[1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right]^{1/2}. \tag{B.2.2}$$

Hybnosť a energiu relativistickej častice nájdeme použitím vzťahov

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}, \quad E = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - L. \tag{B.2.3}$$

Po úprave dostaneme známe relativistické vzťahy

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}}. \tag{B.2.4}$$

Veličina $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}$ sa zvykne označovať aj ako diferenciál vlastného času. Zjavne ide o Lorentzovsky invariantnú veličinu a $\mathrm{d}\tau = (\mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x^\alpha)^{1/2}$.

Pomocou vlastného času vieme zaviesť pojem štvorrýchlosti vzťahom

$$u^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}. \tag{B.2.5}$$

Ide vlastne o podiel štvorvektora a lorentzovského skaláru a teda u^α je nutne tiež štvorvektorom. Jeho jednotlivé zložky sú

$$u^0 = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} = c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}, \quad \boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}. \tag{B.2.6}$$

Dĺžka vektora u^α je invariantná a rovná $u^\alpha u_\alpha = c^2$. Vzťahy pre energiu a hybnosť častice sa kompaktne prepíšu pomocou štvorrýchlosti ako

$$E = p^0 = mcu^0, \quad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}.$$

Odtiaľ priamo vidíme, že E/c a $\boldsymbol{p}$ tvoria komponenty štvorvektora

$$p^\alpha = mu^\alpha; \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \tag{B.2.7}$$

Tento štvorvektor nazývame aj štvorvektorom hybnosti (štvorhybnosťou, prípadne hybenergiou, viď (E. F. Taylor & J. A. Wheeler, 2012)). Často vyskytujúcim sa vzťahom je invariant

$$\frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2 = m^2 u_\alpha u^\alpha = m^2 c^2, \tag{B.2.8}$$

ktorý sa zvykne zapisovať v tvare

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{B.2.9}$$

B.3 Lagrangián nabitej častice v elektromagnetickom poli

Jeden z často používaných a úspešných prístupov pri riešení fyzikálnych problémov spočíva vo vhodnom rozdelení úlohy na časť, ktorú vieme riešiť presne a časť, ktorú berieme do úvahy približne. Máme na mysli poruchovú teóriu, ktorej základná myšlienka spočíva v nasledovnom rozklade plného Lagrangiánu L pre dva podsystémy A a B

$$L = L_A + L_B + L_{AB}, \tag{B.3.1}$$

kde $L_{A,B}$ sú Lagrangiány popisujúce jednotlivé systémy A a B, člen L_{AB} je zodpovedný za interakciu medzi A a B. Vo fyzike platí symbolická rovnosť $L_{AB} = L_{BA}$, t.j. interakcia A s B je taká istá ako B s A (v duchu Newtonovho zákona akcie a reakcie). Predpokladáme pritom, že pohybové rovnice plynúce z Lagrangiánov L_A a L_B vieme vyriešiť.

Aplikujme tieto všeobecné úvahy na systém pozostávajúci z nabitej častice a okolitého elektromagnetického poľa. Vo svojej fundamentálnej podstate ide o veľmi ťažký problém, pretože daná častica sama tvorí pole (napr. elektromagnetické), ktoré ovplyvňuje iné zdroje tohto poľa a to zase spätne pôsobí na časticu. Aby sa zjednodušila fyzikálna analýza problému, zavedieme aproximáciu, v ktorej budeme vonkajšie polia považovať za pevne dané. Inými slovami zanedbáme vplyv častice na častice, ktoré sú zdrojmi vonkajšieho elektromagnetického poľa. V takom prípade je interakčný Lagrangián môžné zapísať

$$L_{\mathrm{int}} = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}_{\mathrm{int}} = -\int \mathrm{d}^3x\, J_\alpha A^\alpha, \tag{B.3.2}$$

kde

$$J^0 = \rho, \quad J^i = (\boldsymbol{J})_i; \quad A^0 = \varphi, \quad A^i = (\boldsymbol{A})_i.$$

Z heuristického hľadiska je zrejmé, že voľba (B.3.2) predstavuje najjednoduchšiu možnosť pre konštrukciu netriviálneho lorentzovského skáláru medzi elektromagnetickým poľom a štvorvektorovou veličinou charakterizujúcou danú časticu.

Pre prehľadnosť sme uviedli explicitné vzťahy s obvyklým zápisom vektorov v Euklidovskou priestore. Následne po krátkom prepise dostaneme

$$L_{\mathrm{int}} = \int \mathrm{d}^3x\, [-\rho\varphi + \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}]. \tag{B.3.3}$$

Daná častica predstavuje vlastne bodový náboj a pre ten vieme jeho hustotu a prúd zapísať prostredníctvom Diracovej delta funkcie

$$\rho(t,\boldsymbol{x}) = e\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t)), \quad \boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}) = e\boldsymbol{v}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t)); \quad \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{B.3.4}$$

Tieto vzťahy dosadíme do (B.3.3) a dostaneme

$$\int \mathrm{d}^3x\, \rho\varphi = \int \mathrm{d}^3x\, e\delta(x-\boldsymbol{r}(t))\varphi(t,\boldsymbol{x}) = e\varphi(t,\boldsymbol{r}(t))$$

a tiež

$$\int \mathrm{d}^3x\, \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A} = \int \mathrm{d}^3x\, e\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t)) = e\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}(t)).$$

Vzťah (B.3.3) tak nadobune tvar

$$L_{\mathrm{int}} = e[-\varphi + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}(t)}. \tag{B.3.5}$$

V ďalšom pre skrátenie zápisu nebudeme rozlišovať medzi $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{r}(t)$. Impicitne budeme mať na mysli zámenu $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{r}(t)$ v relevantných fyzikálnych veličinách.

Celkový Lagrangián (relativistickej) častice v elektromagnetickom poli je daný súčtom Lagrangiánov (B.2.2) a (B.3.5)

$$L = -mc^2\left[1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right]^{1/2} - e\varphi + e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}. \tag{B.3.6}$$

Použitím vzťahov pre kanonickú hybnosť (B.2.3) odvodíme

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + \frac{\partial L_{\mathrm{int}}}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}, \tag{B.3.7}$$

kde $\boldsymbol{p}$ je hybnosť voľnej častice v neprítomnosti elektromagnetického poľa a $\boldsymbol{P}$ sa zvykne označovať ako zovšeobecnená hybnosť častice (L. D. Landau & E. M. Lifschitz, 1975). Hamiltonián častice je zase daný výrazom

$$H = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} - L, \tag{B.3.8}$$

ktorý po dosadení Lagrangiánu (B.3.6) a kanonickej hybnosti (B.3.7) vieme prepísať do tvaru

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}} + e\varphi, \tag{B.3.9}$$

V štvorvektorom zápise sa tento vzťah dá skombinovať s (B.3.7) do kompaktného výrazu

$$P^\alpha = p^\alpha + eA^\alpha. \tag{B.3.10}$$

Hamiltonián (B.3.8) by bolo ale vhodnejšie vyjadriť nie pomocou rýchlosti častice ale prostredníctvom zovšeobecnenej hybnosti $\boldsymbol{P}$. Triviálne sú splnené nasledujúce vzťahy

$$H - e\varphi = E, \quad \boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}. \tag{B.3.11}$$

Z nich vďaka relativistickej rovnici $E^2/c^2 - \boldsymbol{P}^2 = m^2c^2$ dostaneme

$$\left(\frac{H - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \Big(\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A}\Big)^2, \tag{B.3.12}$$

z ktorého už ľahko vyjadríme Hamiltonián častice

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A})^2} + e\varphi. \tag{B.3.13}$$

Pre úplnosť dodajme, že v nerelativistickom (klasickom) priblížení by sme dostali jednoduchšie výrazy

$$L = \frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} + e\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} - e\varphi, \quad H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A})^2 + e\varphi. \tag{B.3.14}$$

Na záver našej diskusie ešte určíme tvar Lorentzovej sily. Tu získame pomocou Eulerových-Lagrangeových rovníc, ktoré implikujú

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}] = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}. \tag{B.3.15}$$

Upravujme najskôr pravú stranu

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial L_{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{x}} = -e\boldsymbol{\nabla}\varphi + e\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}),$$

kde sme využili to, že iba interakčná časť Lagrangiánu (B.3.6) závisí na polohe častice. Jednotlivé zložky tejto rovnice sú

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -e\partial_i\varphi + e\partial_i(v_kA_k) = -e\partial_i\varphi + ev_k\partial_iA_k. \tag{B.3.16}$$

Na úpravu časovej derivácie $\boldsymbol{A}$ vystupujúcej (B.3.15) využijeme vzorec pre derivovanie zloženej funkcie

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{r}(r)) = \partial_t \boldsymbol{A} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \partial_t \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}. \tag{B.3.17}$$

Podotýkame, že naším cieľom je odvodenie výrazu pre Lorentzovu silu, ktorá má tvar vektorovej rovnice v trojrozmernom priestore. Z tohto dôvodu píšeme a rozumieme index i ako index určujúci trojrozmernú zložku vektora.

Získané vzťahy (B.3.16) a (B.3.17) dosadíme do (B.3.15) a prepíšeme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= -e\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} \\ &= -e\partial_t\boldsymbol{A} - e(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} - e\boldsymbol{\nabla}\varphi + e\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) \\ &= -e[\boldsymbol{\nabla}\varphi + \partial_t\boldsymbol{A}] + e[\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}]. \end{aligned} \tag{B.3.18}$$

Po jednotlivých zložkách táto rovnica predstavuje vlastne trojicu rovníc

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = eE_i + e[v_k\partial_i A_k - v_k\partial_k A_i]; \quad i = 1, 2, 3. \tag{B.3.19}$$

Využili sme pritom známy fakt $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \partial_t\boldsymbol{A}$. Druhý výraz na pravej strane prepíšeme pomocou Leviho-Civitovho tenzoru

$$\partial_i A_k - \partial_k A_i = [\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}]\partial_m A_n = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}\partial_m A_n = \varepsilon_{ikl}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_l = \varepsilon_{ikl}B_l.$$

Pohybová rovnica tak nadobudne tvar

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = eE_i + ev_k\varepsilon_{ikl}B_l. \tag{B.3.20}$$

Vo vektorom zápise ide o známy vzorec pre Lorentzovu silu

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = e[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]. \tag{B.3.21}$$

Určíme ešte zmenu kinetickej energie častice.

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma mc^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}\right) \tag{B.3.22}$$

čo sa rovná výrazu

$$\frac{mc^2}{(1-\boldsymbol{v}^2/c^2)^{3/2}}\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{m\boldsymbol{v}}{(1-\boldsymbol{v}^2/c^2)^{3/2}}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{B.3.23}$$

Na druhej strane ale tiež platí

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{(1-\boldsymbol{v}^2/c^2)^{1/2}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \frac{m}{(1-\boldsymbol{v}^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m\boldsymbol{v}^2}{(1-\boldsymbol{v}^2/c^2)^{3/2}} \frac{1}{c^2} \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= m\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{1}{(1-\boldsymbol{v}^2/c^2)^{1/2}} + \frac{\boldsymbol{v}^2/c^2}{(1-\boldsymbol{v}^2/c^2)^{3/2}} \right] \\
&= \frac{m}{(1-\boldsymbol{v}^2/c^2)^{3/2}} \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}. \qquad \text{(B.3.24)}
\end{aligned}
$$

Porovnaním tohto výrazu s (B.3.23) tak dostaneme, že

$$
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}. \qquad \text{(B.3.25)}
$$

Ďalší podrobnejší výklad je možné nájsť v knihe (A. N. Vasil'ev, 2011).

Dodatok C

Diracova rovnica

V tejto časti popíšeme základné vlastnosti Diracovej rovnice, ktorá slúži na opis fermiónov - častíc s neceločíselnou hodnotou spinu. Naša diskusia je založená na podobnom prístupe ako je uvedené napr. v knihe J. D. Bjorken & S. D. Drell, 1964. Našou snahou bude na základe prijateľných fyzikálnych úvah ukázať opodstatnenie Diracovej rovnice a stručne analyzovať vlastnosti jej riešenia. Na rozdiel od hlavného textu budeme explicitne uvádzať rýchlosť svetla c vo všetkých vzorcoch, kde dôjde k jej výskytu.

C.1 Naivný pokus

Najjednoduchší fyzikálny systém predstavuje voľná častica, ktorej nerelativistický opis je založený na Hamiltoniáne

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}. \tag{C.1.1}$$

V rámci kanonického kvantovania (kapitola 4.2) je prechod ku kvantovej mechanike možné dosiahnuť zámenou klasických veličín na im odpovedajúce kvantové operátory

$$H \to i\hbar\partial_t, \quad \boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}, \quad \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{C.1.2}$$

Táto zámena priamo vedie na nerelativistickú Schrödingerovu rovnicu

$$i\hbar\partial_t\psi(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi(t,\boldsymbol{r}). \tag{C.1.3}$$

Ide o zjavne Lorentzovsky nekovariantú rovnicu, keďže časová premenná t sa transformuje iným spôsobom ako priestorová premenná $\boldsymbol{r}$. Vieme, že pri vysokých rýchlostiach je opis založený na nerelativistickej mechanike neadekvátny a musí byť nahradený špeciálnou teóriou relativity. Preto rovnica (C.1.3) nemôže predstavovať fundamentálny popis elementárnych častíc.

Podľa špeciálnej teórie relativity sa celková energia E a hybnosť $\boldsymbol{p} = (p^1, p^2, p^3)$ voľnej častice transformujú ako zložky kontravariantného štvorvektora

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E/c, p^1, p^2, p^3). \tag{C.1.4}$$

Veličina $p_\mu p^\mu$ predstavuje Lorentzovsky skalár s hodnotou

$$p_\mu p^\mu = p_0^2 - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} = \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2 = m^2 c^2, \tag{C.1.5}$$

kde m je (inviariantná) hmotnosť častice a c rýchlosť svetla vo vákuu. Všimnime si, že prechod (C.1.2) je Lorentzovsky kovariantný, pretože ide o priradenie medzi dvomi kontravariantnými štvorvektormi, skrátene $p^\mu \to i\hbar\partial^\mu$.

Z toho, čo sme doteraz uviedli, by sme prvoplánovo mohli očakávať, že Hamiltonián relativistickej častice je daný odmocninou z operátora

$$H = \sqrt{c^2 \boldsymbol{p}^2 + m^2 c^4}. \tag{C.1.6}$$

Odpovedajúca relativistická verzia Schrödingerovej rovnice by potom bola

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-c^2\hbar^2 \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2 c^4}\,\psi. \tag{C.1.7}$$

Ak by sme interpretovali diferenciálny operátor na pravej strane pomocou formálneho Taylorovho rozvoja, dospeli by sme k nekonečnému radu obsahujúcemu párne mocniny Laplaceovho operátora $\boldsymbol{\nabla}^2$. Celkovo by sa teda jednalo o nelokálny operátor. Tento nedostatok je možné čiastočne eliminovať pomocou jednoduchého pozorovania: Ak dva operátory A, B navzájom komutujú, tak potom je splnená implikácia

$$A\psi = B\psi \Rightarrow A^2\psi = B^2\psi \tag{C.1.8}$$

pre ľubovoľnú prípustnú vlnovú funkciu ψ. Použitím tohto pozorovania na rovnicu (C.1.7) s identifikáciou $A = i\hbar\partial_t$ a $B = \sqrt{-c^2\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2c^4}$ odvodíme

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-c^2\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2 c^4)\psi, \tag{C.1.9}$$

resp. po krátkej úprave

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = \left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0. \tag{C.1.10}$$

Rozpoznávame v nej Kleinovu-Gordonovu rovnicu (2.1.4), ktorú sme analyzovali v súvislosti s reálnym skalárnym poľom. Napriek tomu, že táto rovnica je Lorentzovsky kovariantná, vyznačuje sa dvomi relevantnými nedostatkami

(i) Okrem riešenia s kladnou energiou, obsahuje aj riešenie so zápornou energiou $H = -\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4}$. To (zatiaľ) nevieme rozumne interpretovať.

(ii) Nedovoľuje identifikovať pozitívne definitnú hustotu pravdepodobnosti a tým pádom ani zachovávajúci sa prúd pravdepodobnosti.

Bod (i) sa do istej miery dá vyriešiť, ale bod (ii) zabráni tomu, aby sme mohli rovnicu (C.1.10) prehlásiť za relativistickú Schrödingerovu rovnicu.

Ukážeme si, v čom spočíva príčina bodu (ii). Uvažujme rovnicu (C.1.10) a k nej komplexne združenú

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0, \qquad \left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi^* = 0. \tag{C.1.11}$$

Prenásobme prvú z nich funkciou ψ^* a druhú z nich ψ, odčítajme od seba a postupne upravujme

$$\begin{aligned} 0 &= \psi^*\Box\psi - \psi\Box\psi^* \\ &= \psi^*\partial^\mu\partial_\mu\psi - \psi\partial^\mu\partial_\mu\psi^* \\ &= \partial^\mu[\psi^*\partial_\mu\psi - \psi\partial_\mu\psi^*], \end{aligned}$$

čo sa dá vhodným dosadením fyzikálnych veličín prepísať do sugestívneho tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)\right] + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*(\boldsymbol{\nabla}\psi) - (\boldsymbol{\nabla}\psi)^*\psi\right)\right] = 0. \tag{C.1.12}$$

Vidíme, že ako vhodný kandidát na hustotu pravdepodobnosti sa javí výraz

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right). \tag{C.1.13}$$

Zjavne ale táto funkcia nie je pozitívne definitná. Priamou príčinou je fakt, že rovnica (C.1.10) predstavuje diferenciálnu rovnicu druhého rádu v čase. Preto počiatočné podmienky pozostávajú zo zadania ako hodnoty ψ tak aj $\partial_t\psi$. Vhodnou voľbou sa potom dá dosiahnuť, aby hustota ρ nadobúdala kladné aj záporné hodnoty. Východisko z tejto situácie našiel britský fyzik Paul A. M. Dirac, ktorý sa podujal nájsť diferenciálnu rovnicu prvého rádu (P. A. M. Dirac, 1928a,b). Pritom mnoho jeho súčasníkov nezdieľalo jeho skepticizmus ohľadom Kleinovej-Gordonovej rovnice, ktorú považovali za dostatočne dobrého kandidáta na relativistickú pohybovú rovnicu (S. S. Schweber, 1994).

C.2 Diracova rovnica

V krátkosti zhrnieme heuristické uvažovanie, ktoré viedlo Diraca (P. A. M. Dirac, 1928a,b) k formulovaniu jeho rovnice. Očakávame, že správna relativistická rovnica by mala byť diferenciálna rovnica prvého rádu v čase. Keďže špeciálna teória relativity zavádza istú formu demokracie medzi priestorovými premennými a časom, predpokladáme rovnicu v tvare

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \underbrace{\frac{\hbar c}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x^1} + \alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right) + \beta mc^2\psi}_{H\psi}, \tag{C.2.1}$$

ktorá obsahuje neurčené koeficienty $\alpha_i; i = 1, 2, 3$ a β. Výrazy α_i nemôžu byť čísla, lebo potom rovnica (C.2.1) nebude invariantná ani vzhľadom na priestorové rotácie (pri tých vo všeobecnosti dochádza k zmenám derivácií $\partial/\partial x^i$). Diracovo geniálne riešenie spočívalo v prehlásení α_i a β za štvorcové matice $N \times N$ a vlnovú funkciu ψ za N-zložkový objekt

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}. \tag{C.2.2}$$

Na rovnicu (C.2.1) ďalej Dirac naložil podmienky

a) Každá zo zložiek ψ vyhovuje Kleinovej-Gordonovej rovnici (C.1.10), t.j. spĺňajú relativistický vzťah $E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4$.

b) Existuje zachovávajúci sa štvorvektor prúdu, ktorého nultá (časová) zložka je pozitívne definitná veličina.

c) Daná rovnica musí byť Lorentzovsky kovariantná. To znamená, že musí nadobúdať rovnaký tvar vo všetkých prípustných vzťažných sústavách.

Na základe Diracovej úvahy je potrebné rovnicu (C.2.1) identifikovať ako maticovú rovnicu, t.j.

$$i\hbar\partial_t\psi_\sigma = \frac{\hbar c}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_{\sigma\tau}\psi_\tau + \beta_{\sigma\tau}mc^2\psi_\tau, \tag{C.2.3}$$

kde sa má na mysli implicitná sumácia cez sčítavací index τ. V skrátenom zápise sa rovnica (C.2.3) zapíše jednoducho ako

$$i\hbar\partial_t\psi_\sigma = H_{\sigma\tau}\psi_\tau, \tag{C.2.4}$$

kde na pravej strane vystupuje maticový operátor

$$H_{\sigma\tau} = \frac{\hbar c}{i}\left[(\alpha_1)_{\sigma\tau}\frac{\partial}{\partial x^1} + (\alpha_2)_{\sigma\tau}\frac{\partial}{\partial x^2} + (\alpha_3)_{\sigma\tau}\frac{\partial}{\partial x^3}\right] + \beta_{\sigma\tau}mc^2. \tag{C.2.5}$$

Odvodíme teraz niekoľko dôležitých vlastností, ktoré musia vykazovať matice α_i a β. Derivujme preto rovnicu (C.2.3) podľa času a prenásobme výrazom $i\hbar$

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t^2\psi_\sigma &= \partial_t H_{\sigma\tau}\psi_\tau = H_{\sigma\tau}\partial_t\psi_\tau, \qquad\qquad / \times i\hbar \\ -\hbar^2\partial_t^2\psi_\sigma &= H_{\sigma\tau}i\hbar\partial_t\psi_\tau. \end{aligned} \tag{C.2.6}$$

Na pravej strane dosadíme vzťah (C.2.4) a postupne upravujeme

$$\begin{aligned} -\hbar^2\partial_t^2\psi_\sigma &= H_{\sigma\tau}H_{\tau\rho}\psi_\rho \\ &= -\hbar^2c^2\sum_{i,j=1}^{3}\frac{(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)_{\sigma\rho}}{2}\frac{\partial^2\psi_\rho^2}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\hbar mc^2}{i}\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)_{\sigma\rho}\frac{\partial\psi_\rho}{\partial x^i} \end{aligned}$$

$$+ m^2c^4(\beta^2)_{\sigma\rho}\psi_\rho. \tag{C.2.7}$$

Aby bola splnená rovnica (C.1.9) pre každú zo zložiek $\psi_\sigma(\sigma = 1, 2, \ldots, N)$, tak musia byť nutne splnené vzťahy

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}\mathbb{1}_N, \tag{C.2.8}$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \tag{C.2.9}$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}_N, \tag{C.2.10}$$

kde $\mathbb{1}_N$ je jednotková maticu typu $N \times N$. Zo vzťahov (C.2.8)-(C.2.10) plynie:

(i) Keďže $\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$, tak vlastné hodnoty týchto matíc môžu byť len ± 1.

(ii) Rovnicu (C.2.9) možno prepísať do tvaru $\alpha_i = -\beta\alpha_i\beta$ a počítať jej stopu

$$\mathrm{Tr}\,\alpha_i = -\mathrm{Tr}\,(\beta\alpha_i\beta) = -\mathrm{Tr}\,(\beta^2\alpha_i) = -\mathrm{Tr}\,\alpha_i,$$

Teda sa jedná o matice s nulovou stopou ($\mathrm{Tr}\,\alpha_i = 0$). Podobným spôsobom vieme odvodiť, že $\mathrm{Tr}\,\beta = 0$.

(iii) Z bodov (i) a (ii) vyplýva, že matice α_i, β musia mať rovnaký počet kladných a záporných vlastných hodnôt. Preto musia mať tieto matice párny rozmer.

Pre $N = 2$ nevieme nájsť štyri takéto matice, pretože z kvantovej mechaniky je známe, že množina matíc $\{\mathbb{1}_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ obsahuje len tri vzájomne antikomutujúce matice. Najmenšie možné N, pre ktoré vieme nájsť štyri antikomutujúce matice, je $N = 4$. Konkrétnych realizácií pre voľbu je viacero. Medzi najpoužívanejšie patria

a) štandartná reprezentácia

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \tag{C.2.11}$$

b) chirálna (Weylova) reprezentácia

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.2.12}$$

Štandardná reprezentácia sa často používa v súvislosti s limitou nízkych energií. Naopak Weylova reprezentácia je výhodná pri diskusii limity vysokých energií (M. E. Peskin, 2019; M. E. Peskin & D. V. Schroeder, 1995).

Na vytvorenie vektorového prúdu uvažujme najprv Hermitovsky združenú vlnovú funkciu k (C.2.2) v tvare $\psi^\dagger = (\psi_1^* \ldots \psi_4^*)$ a vynásobme ňou rovnicu (C.2.1) zľava

$$i\hbar\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\psi^\dagger\alpha_k\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + mc^2\psi^\dagger\beta\psi. \tag{C.2.13}$$

Ďalej Hermitovsky združme (C.2.1) a násobme sprava výrazom ψ

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar c}{i}\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^k}\alpha_k\psi + mc^2\psi^\dagger\beta\psi, \tag{C.2.14}$$

kde sme využili to, že $\alpha_i^\dagger = \alpha_i$ a $\beta^\dagger = \beta$. Odpočítame rovnicu (C.2.14) od (C.2.13) a získame

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) = \frac{\hbar c}{i}\frac{\partial}{\partial x^k}(\psi^\dagger\alpha^k\psi), \tag{C.2.15}$$

Definujme hustotu pravdepodobnosti vzťahom

$$\rho \equiv \psi^\dagger\psi = \sum_{\sigma=1}^{4}\psi_\sigma^\dagger\psi_\sigma \tag{C.2.16}$$

a tok hustoty pravdepodobnosti

$$j^k \equiv c\psi^\dagger\alpha^k\psi; \quad k = 1, 2, 3. \tag{C.2.17}$$

Potom (C.2.15) nadobúda presne tvar rovnice kontinuity

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0. \tag{C.2.18}$$

Preintegrovaním (C.2.18) cez celý trojrozmerný priestor, použitím Gaussovej vety a zvyčajného predpokladu, že sa vlnové funkcie asymptoticky blížia k nule dostatočne rýchlo pre veľké vzdialenosti, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\,\psi^\dagger\psi = 0, \tag{C.2.19}$$

čo naznačuje možnú identifikáciu $\rho = \psi^\dagger\psi$ ako pozitívne definitnú hustotu pravdepodobnosti.

C.3 Nerelativistická limita Diracovej rovnice

Ešte pred samotným dôkazom Lorentzovskej kovariantnosti Diracovej rovnice sa pokúsime získať jej nerelativistickú limitu. Tým vieme aspoň čiastočne verifikovať jej opodstatnenosť. Ak by nesedela táto limita, ihneď by sme vedeli, že príslušná Diracova teória nie je správna.

Začnime s voľným elektrónom a určme počet možných riešení. Rovnica (C.2.1) sa redukuje na

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \beta mc^2\psi, \tag{C.3.1}$$

pretože vlnová dĺžka je nekonečne veľká, čoho dôsledkom je priestorová uniformita vlnovej funkcie. V reprezentácii (C.2.11) nájdeme štyri možné riešenia

$$\psi_1^{(+)} = \mathrm{e}^{-imc^2t/\hbar}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \psi_2^{(+)} = \mathrm{e}^{-imc^2t/\hbar}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\psi_1^{(-)} = \mathrm{e}^{+imc^2t/\hbar}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \psi_2^{(-)} = \mathrm{e}^{+imc^2t/\hbar}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{C.3.2}$$

Riešenia $\psi_1^{(+)}$ a $\psi_2^{(+)}$ sú riešeniami s kladnou hodnotou energie a riešenia $\psi_1^{(-)}$ a $\psi_2^{(-)}$ so zápornou. Interpretáciu negatívnych riešení budeme diskutovať neskôr. Vedie nakoniec k predpovedi antičastíc, čo bolo z historického hľadiska významnou predpoveďou Diracovej teórie. Tu sa teraz zameriame na diskusiu riešení s kladnou energiou. Pokúsime sa ísť ďalej v teoretickom popise a zaviesť interakciu s elektromagnetickým poľom a dospieť tak ku Pauliho rovnici. V analógii s relativistickým prípadom sa hybnosť $\boldsymbol{p}$ zamení na zovšeobecnenú hybnosť $\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}/c$ (detaily nájdete v Dodatku B.3). Navyše je potrebné k pokojovej energii započítať interakciu s elektrostatickým potenciálom $e\phi$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) + \beta mc^2 + e\phi\right)\psi. \tag{C.3.3}$$

Pod nábojom e rozumieme náboj častice, pre elektrón tak máme $e = -e_0$.

Na štúdium nerelativistického prípadu využijeme explicitný tvar Diracových matíc C.2.11 a rozložíme štvorspinor na dva dvojkomponentné spinory $\tilde{\varphi}$ a $\tilde{\chi}$

$$\psi \equiv \begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} \tag{C.3.4}$$

a potom

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\tilde{\chi}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\tilde{\varphi}\end{pmatrix} + e\phi\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ -\tilde{\chi}\end{pmatrix}, \tag{C.3.5}$$

kde

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A} \tag{C.3.6}$$

je operátor zovšeobecnenej hybnosti.

V nerelativistickom prípade je pokojová energia mc^2 najväčšia energetická mierka. Preto ju ďalej vydeľme v riešení a píšme

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-imc^2t/\hbar} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{C.3.7}$$

kde predpokladáme, že časová závislosť zložiek φ a χ sa mení pomaly. Po dosadení a úprave musia vyhovovať rovnici

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}\chi \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}\varphi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{C.3.8}$$

V druhej rovnici môžeme zanedbať kinetický člen $\hbar\partial_t\chi$ a interakciu $e\phi\chi$ vzhľadom ku energetickej škále $2mc^2\chi$ a odtiaľ dostať

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2mc}\varphi. \tag{C.3.9}$$

Vidíme, že v nerelativistickom prípade je zložka χ menšia od φ o násobiaci faktor rádovo porovnateľný s v/c. Preto považujeme zložku φ za "väčšiu" a χ za "menšiu" zložku spinora ψ. Dosadíme rovnicu (C.3.9) do (C.3.8) a dostaneme

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) + e\phi\right)\varphi. \tag{C.3.10}$$

Na ďalšiu úpravu využijeme vzťah

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}),$$

ktorý plynie zo známej rovnosti pre Pauliho matice $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$. To nám umožní odvodiť

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B},$$

kde sme využili

$$(\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi})^i\varphi = -i\hbar\left(\frac{-e}{c}\right)\varepsilon^{ijk}(\partial_j A^k - A^k\partial_j)\varphi = i\frac{e\hbar}{c}\varepsilon^{ijk}(\partial_j A^k)\varphi = i\frac{e\hbar}{c}B^i\varphi,$$

kde sme identifikovali $B^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j A^k$. Taktiež sa dá ľahko ukázať, že platí

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{A}\varphi) + \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \boldsymbol{\nabla}\varphi \times \boldsymbol{A} + (\varphi\boldsymbol{\nabla}) \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\varphi \times \boldsymbol{A} = \varphi(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}).$$

Týmto vieme dospieť k rovnici

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} + e\phi\right]\varphi. \tag{C.3.11}$$

A toto je známa Pauliho rovnica pre Pauliho spinor φ (F. Schwabl, 2000). Komponenty φ popisujú spin elektrónu. Okrem toho vedú k predpovedi gyromagnetického vzťahu $g = 2$. Na dôkaz tohto tvrdenia potrebujeme len zopakovať známe kroky z nerelativistickej kvantovej mechaniky. Predpokladajme, že je dané homogénne magnetické pole $\boldsymbol{B}$ a príslušný vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}. \tag{C.3.12}$$

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ a spinový moment sú dané

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}. \tag{C.3.13}$$

Tieto vzťahy dosadíme do (C.3.11) a po krátkej úprave odvodíme

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}(\boldsymbol{L} + 2\boldsymbol{S}) \cdot \boldsymbol{B} + \frac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2 + e\phi\right]\varphi. \tag{C.3.14}$$

Vlastné hodnoty projekcie spinového operátora $\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}$ na ľubovoľný jednotkový vektor $\hat{\boldsymbol{e}}$ sú $\pm\hbar/2$. Interakcia s elektromagnetickým poľom je podľa (C.3.14) popísaná výrazom

$$H_{\text{int}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} + \frac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2 + e\phi, \tag{C.3.15}$$

kde celkový magnetický moment

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{\text{orb}} + \boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} = \frac{e}{2mc}(\boldsymbol{L} + 2\boldsymbol{S}) \tag{C.3.16}$$

pozostáva z orbitálnej a spinovej časti. Spinový moment je daný výrazom

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} = g\frac{e}{2mc}\boldsymbol{S} \tag{C.3.17}$$

s gyromagetickým (Landého) faktorom

$$g = 2. \tag{C.3.18}$$

C.4 Priestorová parita

Dôležitú rolu v časticovej fyzike zohrávajú aj tzv. vnútorné symetrie spojené s nevlastnými Lorentzovskými transformáciami. Príkladom je priestorová inverzia daná formálne ako

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}, \quad t' = t. \tag{C.4.1}$$

Takúto transformáciu nemôžeme dostať nekonečným počtom infinitezimálne blízkych transformácii k identickej. Vieme nájsť odpovedajúcu maticu S z rovnice

(3.2.15) pre tento prípad? Odpovedajúca Lorentzovská transformácia má tvar

$$P_\mu^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\nu\mu}, \tag{C.4.2}$$

kde posledná rovnica je splnená, čo sa týka numerických hodnôt, ale nie Lorentzovskej indexovej algebry. Transformácie s párnymi počtom reflexií priestorových osí možno vyskladať použitím rotácií. Sústreďme sa preto teraz na prípad, v ktorom dochádza ku kompletnej priestorovej inverzii (tzv. P-transformácia)

$$x'^i = -x^i, \quad i = 1, 2, 3; \quad x'^0 = x^0, \tag{C.4.3}$$

$$\psi'(x') = \eta(P) S_{123} \psi(x), \quad S_{123} = \gamma^0, \tag{C.4.4}$$

keďže spinorová reprezentácia je dvojznačná máme $\eta^2(P) = \pm 1$. odkiaľ vidno, že pridružený spinor sa transformuje maticou $\gamma^0 S^\dagger \gamma^0$. Už sme videli (3.3.6), že pre akúkoľvek transformáciu plnej Lorentzovej grupy platí

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}.$$

Tento vzťah zostáva v platnosti aj pri priestorovej inverzii (C.4.4).

Špeciálnu rolu hraje matica γ^5. Dá sa ukázať, že γ^5 komutuje s S pre vlastné Lorentzove transformácie

$$S^{-1} \gamma^5 S = \gamma^5 \to [S, \gamma^5] = 0 \tag{C.4.5}$$

ale pre nevlastné Lorentzove transformácie antikomutuje

$$S^{-1} \gamma^5 S = -\gamma^5. \tag{C.4.6}$$

Špeciálne napríklad platí $P\gamma^5 = -\gamma^5 P$. Preto sa výraz typu $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ bude správať ako pseudoskalár. Podobne veličiny

$$\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\mu\psi(x) \tag{C.4.7}$$

budú zložkami pseudovektora.

C.5 Diracova teória dier

Z historického hľadiska je zaujímavé, že Dirac pri odvodení svojej rovnice poskytol inú interpretáciu ako sme uviedli v časti 3.6. Tam sme implicitne predpokladali, že ψ predstavuje klasické pole, ktorého dynamika je opísaná Diracovou rovnicou $(i\hat{\partial} - m)\psi = 0$. Pôvodne ale Dirac postupoval trochu inak. V prvom rade túto rovnicu prepísal do tvaru

$$i\partial_t \psi = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi + m\beta\psi \equiv H\psi, \tag{C.5.1}$$

čím vlastne tiež zaviedol Hamiltonián teórie H. Ďalej Dirac predpokladal, že je možné ψ interpretovať analogickým spôsobom ako v kvantovej mechanike ako vlnovú funkciu jednej častice. Uvažovaním stavov $\psi_+ = u(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-ip\cdot x}$ a $\psi_- = v(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{+ip\cdot x}$ dospel k

$$i\partial_t\psi_+ = E_{\boldsymbol{p}}\psi_+, \quad i\partial_t\psi_- = -E_{\boldsymbol{p}}\psi_-. \tag{C.5.2}$$

Teda stav ψ_+ (ψ_-) sa javí ako stav s kladnou (zápornou) energiou.

Celkové časticové spektrum takejto teórie nie je zjavne zdola ohraničené. Vieme stále dodať stav $v(\boldsymbol{p})$, ktorý zníži celkovú energiu o $-E_{\boldsymbol{p}}$. Na vyriešenie tohto fyzikálneho rozporu Dirac postuloval existenciu mora (Diracovo more, angl. Dirac sea) v ktorom sú všetky záporné energetické stavy naplnené. Vďaka predpokladanému fermionovskému charakteru častíc, takéto stavy by mali podliehať Pauliho vylučovaciemu princípu. Tvrdíme, že iba stavy s kladnou energiou sú prístupné a tiež, že iba rozdiely v náboji možno pozorovať. V poslednom prípade ide o podobnú úvahu ako pri zavedení normálneho súčinu.

Následne si Dirac uvedomil, že táto teória vedie k predikcii nového druhu častíc. Predpokladajme totiž, že dôjde k excitácii stavu so zápornou energiou. V Diracovom mori po nej zostáva prázdne "miesto" - diera, ktorá má všetky charakteristiky elektrónu až na znamienko elektrického náboja. Dirac na základe tejto úvahy dospel k presvedčeniu, že diera odpovedá novej častici - pozitrónu. Taktiež vyslovil predpoveď, že elektrón s pozitrónom môžu vzájomnej anihilovať. Tým Dirac dospel k jednému z najväčších fyzikálnych objavov a to objav antihmoty. Experimentálne bol pozitrón pozorovaný v roku 1932.

Hoci Diracova úvaha viedla k fyzikálnemu objavu antičastíc, ako taká nie je správna. Jednou z príčin je to, že bola založená na Pauliho princípe. Ale v prírode existujú antičastice aj pre bozóny, pre ktoré Pauliho princíp neplatí. Problém Diracovho prístupu spočíva hlavne v tom, že riešenia Diracovej rovnice nie je možné intepretovať v rámci jednočasticového formalizmu. V skutočnosti je potrebné interpretovať ψ ako spinorové pole, pre ktoré vieme sformulovať pozitívne definitný Hamiltonián a ktorého excitácie odpovedajú časticiam, resp. antičasticiam.

Bibliografia

A. Altland, B. Simons (2010). *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press.

A. N. Vasil'ev (1998). *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics*. Gordon a Breach, New York.

— (2011). *Klasická elektrodynamika*. Equilibria, Košice.

C. G. Gray, E. F. Taylor (2007). In: *Am. J. Phys.* 75, s. 434.

D. Griffiths (2008). *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim.

D. Tong (2005). *Lectures on Classical Dynamics*. URL: http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics.html.

E. F. Taylor, J. A. Wheeler (2012). *Fyzika Priestoročasu*. Enigma, Nitra.

F. Halzen, A. D. Martin (1991). *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. Wiley.

F. Schwabl (2000). *Advanced Quantum Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

G. 't Hooft (2007). *Lie Groups in Physics*. URL: http://http://www.staff.science.uu.nl/~hooft101/lectures/lieg07.pdf.

H. Georgi (1982). *Lie Algebras in Particle Physics*. Addison-Wesley.

H. Goldstein, C. Poole, J. Safko (2002). *Classical Mechanics (3th edition)*. Addison Wesley.

J. D. Bjorken, S. D. Drell (1964). *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill.

J. Hořejší (2003). *Fundamentals of Electroweak Theory*. Karolinum Press, Charles University, Praha.

J. Kvasnica et al. (2004). *Mechanika*. Academia.

J. Zinn-Justin (2010). *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Clarendon Press, Oxford.

K. Huang (2007). *Fundamental Forces of Nature: The Story of Gauge Fields*. World Scientific Publishing Company.

L. D. Landau, E. M. Lifschitz (1975). *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press.

L. H. Ryder (1996). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press.

M. E. Peskin (2019). *Concepts of Elementary Particle Physics*. Oxford University Press.

M. E. Peskin, D. V. Schroeder (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press.

N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov (1980). *Introduction to the Theory of Quantized Fields*. John Wiley& Sons.
N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov (1983). *Quantum Fields*. Benjamin/Cummings Publishing Company.
P. A. M. Dirac (1928a). In: *Proc. Roy. Loc. Soc. A* 117, s. 610.
— (1928b). In: *Proc. Roy. Loc. Soc. A* 118, s. 351.
P. J. Olver (2014). *Introduction to Partial Diff erential Equations*. Springer, New York.
P. Zlatoš (2011). *Lineárna algebra a geometria*. Marenčin PT, Bratislava.
R. H. Good (1955). In: *Rev. Mod. Phys.* 27, s. 187.
R. P. Feynman (2000). *QED – nezvyčajná teória svetla a lát*. Enigma.
R. P. Feynman (1949). In: *Phys. Rev.* 76, s. 749.
S. Coleman (1985). *Aspects of symmetry*. Cambridge University Press.
S. M. Carroll (2019). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press.
S. S. Schweber (1994). *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga*. Princeton University Press.
S. Weinberg (1972). *Gravitation And Cosmology: Principles And Applications Of The General Theory Of Relativity*. Wiley.
— (1995). *The Quantum Theory of Fields: Volume 1*. Cambridge University Press.
— (1996). *The Quantum Theory of Fields: Volume 2*. Cambridge University Press.

Kvantová teória poľa 1
Vysokoškolský učebný text

Autori: prof. RNDr. Michal Hnatič, DrSc.
RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD.

Vydavateľ: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Vydavateľstvo ŠafárikPress

Rok vydania: 2023
Počet strán: 205
Rozsah: 10,9 AH
Vydanie: prvé

ISBN 978-80-574-0196-4 (e-publikácia)