UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH

NÁHODNÉ PROCESY A ICH APLIKÁCIE

Valéria Skřivánková - Martina Hančová

Prírodovedecká fakulta

Košice 2018

Valéria Skřivánková
Martina Hančová

Náhodné procesy a ich aplikácie

UPJŠ, Košice
2018

Náhodné procesy a ich aplikácie
Vysokoškolský učebný text

Autorky:
doc. RNDr. Valéria Skřivánková, CSc.
Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach

RNDr. Martina Hančová, PhD.
Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach

Recenzenti:
doc. RNDr. Galina Horáková, CSc.
Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave

doc. RNDr. Csaba Török, CSc.
Ústav informatiky, Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach

Všetky práva vyhradené. Toto dielo ani jeho žiadnu časť nemožno reprodukovať, ukladať do informačných systémov alebo inak rozširovať bez súhlasu majiteľov práv. Za odbornú a jazykovú stránku tejto publikácie zodpovedajú autori. Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

Vydavateľ: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Dostupné od: 11.04.2018

ISBN 978-80-8152-604-6

Obsah

Predslov **5**

1 Popis náhodného procesu **7**
1.1 Definícia a vlastnosti procesu 7
1.2 Charakteristiky náhodného procesu 10
1.3 Klasifikácia náhodných procesov 14
1.4 Modely reálnych náhodných procesov 16
1.5 Cvičenia 19

2 Markovove reťazce **21**
2.1 Markovská vlastnosť a jej dôsledky 21
2.2 Markovove reťazce s diskrétnym časom 24
2.3 Klasifikácia stavov Markovovho reťazca 29
2.4 Markovove reťazce s ocenením prechodu 35
2.5 Markovove reťazce s diskontovaným ocenením 38
2.6 Riadenie Markovových reťazcov s ocenením 39
2.7 Cvičenia 41

3 Špeciálne reťazce so spojitým časom **45**
3.1 Markovove reťazce so spojitým časom 45
3.2 Poissonov proces 49
3.3 Proces vzniku (rastu populácie) 51
3.4 Proces zániku (vymretia populácie) 52
3.5 Proces vzniku a zániku 53
3.6 Stabilizovaný proces vzniku a zániku 54
3.7 Cvičenia 54

4 Teória hromadnej obsluhy **57**
4.1 Definícia a klasifikácia systémov hromadnej obsluhy 57
4.2 Otvorený SHO bez čakania 59
4.3 Otvorený SHO s čakaním 62

4.3.1 Otvorený SHO s neohraničeným čakaním 62
4.3.2 Otvorený SHO s ohraničeným čakaním 64
4.4 Uzavretý SHO 68
4.5 Cvičenia 70

5 Teória obnovy **73**
5.1 Základné pojmy teórie obnovy 73
5.2 Diskrétny model obnovy 75
5.3 Markovove reťazce v teórii obnovy 77
5.4 Spojitý model obnovy 81
5.5 Rozdelenie doby životnosti 84
5.6 Doba životnosti systému prvkov 88
5.7 Integrálna rovnica obnovy 91
5.8 Limitné vety v teórii obnovy 92
5.9 Riadenie procesu obnovy 94
5.10 Cvičenia 95

Literatúra **97**

Výsledky cvičení **99**

Predslov

Náhodné (stochastické) procesy modelujú také reálne procesy, na priebeh ktorých majú vplyv náhodné faktory.

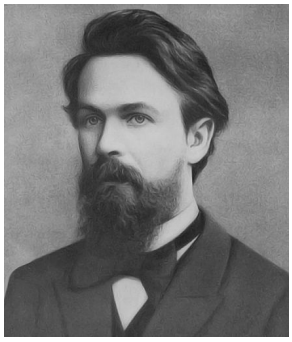
Zakladateľmi teórie náhodných procesov boli ruskí matematici A. A. Markov, A. J. Chinčin a A. N. Kolmogorov. Z historického hľadiska je rozvoj teórie náhodných procesov rozdelený do dvoch období. Prvé obdobie je charakteristické rozvojom teórie diskrétnych procesov (reťazcov). Začína prácou Markova v roku 1906 a pokračuje prácami Chinčina (stacionárne procesy) a Kolmogorovova (popis dynamiky procesu systémom diferenciálnych rovníc) v 30-tych rokoch 20. storočia. História spojitých procesov začína štúdiom Brownovho pohybu N. Wienerom (1921). Významný podiel na ich rozvoji mal japonský matematik K. Itô, ktorý zaviedol v 40-tych rokoch pojem stochastického integrálu. Tým položil základy stochastickej analýzy a odštartoval druhú etapu rozvoja teórie náhodných procesov.

Čo sa týka aplikácií náhodných procesov, prvé sa týkali oblasti fyziky a biológie. V ekonómii sa začali využívať hlavne diskrétne procesy po druhej svetovej vojne (teória hromadnej obsluhy, teória obnovy). Výrazný skok v aplikácii spojitých procesov nastal v 70-tych rokoch 20. storočia v oblasti finančníctva a poisťovníctva (modely oceňovania finančných derivátov, modelovanie rizikovej rezervy poisťovne).

Predložený učebný text je určený hlavne študentom odboru Ekonomická a finančná matematika na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ a jeho zvládnutie vyžaduje základné znalosti teórie pravdepodobnosti. Text svojim obsahom pokrýva prvú časť predmetu „Náhodné procesy“. Zameraný je na diskrétne náhodné procesy, predovšetkým na Markovove reťazce a ich aplikácie v teórii hromadnej obsluhy a v teórii obnovy. Text obsahuje okrem výkladu základných pojmov, definícií a viet s dôkazmi aj množstvo riešených príkladov, ktoré ilustrujú vysvetľovanú teóriu. Na konci každej z piatich kapitol, na ktoré sa kniha delí, sú uvedené neriešené úlohy, na ktorých si čitateľ sám otestuje pochopenie problematiky. Výsledky riešenia úloh sú zaradené na konci textu, v závere je uvedený zoznam príslušnej literatúry.

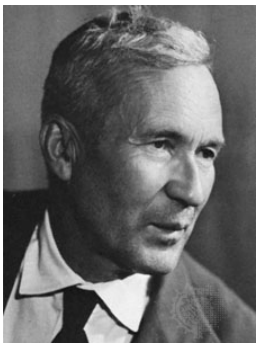
Ďakujeme recenzentom doc. RNDr. G. Horákovej, CSc. a doc. RNDr. Cs. Törökovi, CSc. za starostlivé posúdenie rukopisu a za cenné rady a pripomienky.

Autorky



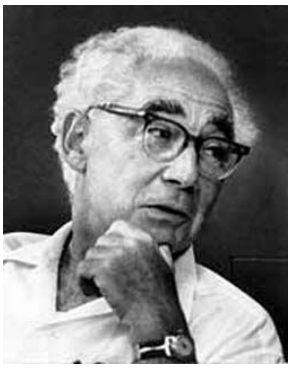
A. A. Markov
(1856-1922)

A. J. Chinčin
(1894-1959)



A. N. Kolmogorov
(1903-1987)

N. Wiener
(1894-1964)

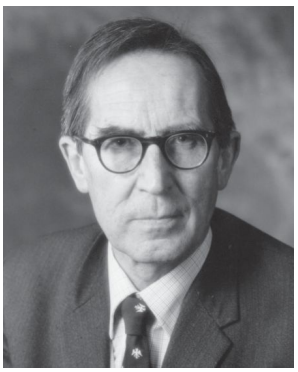


W. Feller
(1906-1970)

K. Itô
(1915-2008)

A. K. Erlang
(1878-1929)

M. R. Fréchet
(1878-1973)



D. G. Kendall
(1918-2007)

Kapitola 1

Popis náhodného procesu

1.1 Definícia a vlastnosti procesu

Definícia 1.1 *Nech je daný pravdepodobnostný priestor* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. ***Náhodným (stochastickým procesom)*** *nazývame ľubovoľný parametrizovaný systém náhodných veličín*

$$\{X_t(\omega),\, t \in T,\, \omega \in \Omega\} = \{X_t,\, t \in T\}$$

kde t *je reálny parameter,* $t \in T \subset \mathbb{R}_1$, ω *reprezentuje náhodnú zložku a* Ω *je výberový priestor.*

Poznámka 1.1 Pri reálnych ekonomických a finančných procesoch parameter t najčastejšie reprezentuje čas, a preto množinu T budem nazývať *časový priestor.*

Poznámka 1.2 Z definície náhodného procesu vyplýva, že $X_t(\omega)$ sa dá chápať ako náhodná funkcia dvoch premenných ω, t, t.j. platí

$$X_t(\omega) = X(t, \omega), \quad \text{kde} \quad t \in T,\, \omega \in \Omega\,.$$

Definícia 1.2 ***Trajektória procesu*** *je každá realizácia procesu* $\{X_t,\, t \in T\}$ *v závislosti na čase pri pevnej hodnote* ω. ***Stav procesu*** *je každá možná hodnota náhodnej veličiny* $X_t(\omega)$ *pri pevnej hodnote* t. *Množina všetkých stavov* S *sa nazýva* ***stavový priestor****.*

Definícia 1.3 *Náhodný proces* $\{X_t,\, t \in T\}$ *sa nazýva* ***proces so spojitými stavmi*** *(stručne spojitý proces), ak stavový priestor* S *je interval. Ak množina* S *je spočítateľná, náhodný proces* $\{X_t,\, t \in T\}$ *sa nazýva* ***proces s diskrétnymi stavmi*** *(diskrétny proces alebo* ***reťazec****).*

Definícia 1.4 *Náhodný proces* $\{X_t, t \in T\}$ *sa nazýva* ***proces so spojitým časom****, ak časový priestor* T *je interval. Ak množina* T *je spočítateľná, hovoríme, že ide o* ***proces s diskrétnym časom*** *alebo o* ***náhodnú postupnosť****.*

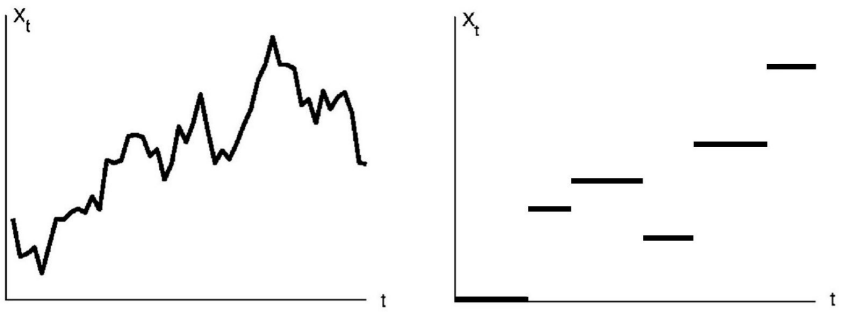
Príklady spojitých procesov:

- aktuálna cena cenného papiera na burze v závislosti na čase,
- celková výška poistného plnenia za čas t, $t \in T$,
- výška hladiny rieky v závislosti na čase.

Príklady diskrétnych procesov:

- počet návštevníkov v obchodnom dome v závislosti na čase,
- počet finančných nárokov na poisťovňu pri havarijnom poistení motorových vozidiel v závislosti na čase,
- počet porúch určitého prístroja za čas t, $t \in T$.

Na obrázku 1.1 sú znázornené možné trajektórie spojitého a diskrétneho náhodného procesu $\{X_t,\, t \in T\}$.



Obr. 1.1

Poznámka 1.3 Každej konečnej podmnožine $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \subset T$ možno priradiť systém náhodných veličín $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\}$, ktoré majú združené rozdelenie dané distribučnou funkciou

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_{t_1} \le x_1,\, X_{t_2} \le x_2,\, \ldots,\, X_{t_n} \le x_n)\,. \tag{1.1}$$

Definícia 1.5 *Hovoríme, že systém distribučných funkcií*

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_{t_1} \le x_1,\, \ldots,\, X_{t_n} \le x_n)\,,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_1$, je ***konzistentný****, ak platí*

1. $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, *t.j. distribučná funkcia je invariantná voči permutácii indexov $i_1, \ldots, i_n$,*
2. $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \lim\limits_{x_{n+1}\to\infty} F_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$.

Veta 1.1 (Kolmogorovova) *Nech* $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)\}$ *je konzistentný systém distribučných funkcií. Potom existuje náhodný proces* $\{X_t,\ t \in T\}$ *taký, že pre každé* $n \in \mathbb{N}$ *a ľubovoľné* $t_1,\dots,t_n \in T$, *ľubovoľné* $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_1$ *je rozdelenie procesu* $\{X_t,\ t \in T\}$ *dané distribučnou funkciou*

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X_{t_1} \le x_1,\ \dots,\ X_{t_n} \le x_n)\,.$$

Dôkaz: Pozri [32], Veta I.10.3.

Dôsledok 1.2 *Rozdelenie náhodného procesu je jednoznačne určené rozdelením všetkých konečnorozmerných vektorov* $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ *podľa* (1.1), *pričom* $n \in N$, $t_1,t_2,\dots,t_n \in T$ *a* $x_1,x_2,\dots,x_n \in S$.

Definícia 1.6 *Hovoríme, že náhodný proces* $\{X_t,\ t \in T\}$ *je* ***striktne stacionárny (stacionárny v užšom zmysle)****, ak pre každé* $n \in \mathbb{N}$, $t_1,\dots,t_n \in T$, $x_1,\dots,x_n \in S$ *a ľubovoľné* $h \in T$ *také, že* $t_1+h,\dots,t_n+h \in T$ *platí*

$$F_{t_1+h,\dots,t_n+h}(x_1,\dots,x_n) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)\,. \tag{1.2}$$

Poznámka 1.4 Z definície 1.6 vyplýva, že v stacionárnom procese majú všetky náhodné veličiny X_t, $t \in T$ identické rozdelenie, pretože distribučná funkcia je invariantná voči posunutiu v čase.

Definícia 1.7 *Nech procesy* $\{X_t,\ t \in T\}$, $\{Y_t,\ t \in T\}$ *sú definované na tom istom pravdepodobnostnom priestore* $(\Omega,\mathcal{A},P)$, *s hodnotami v tom istom stavovom priestore* S. *Hovoríme, že procesy* $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$ *sú* ***stochasticky ekvivalentné****, ak platí*

$$P(X_t = Y_t) = P\big\{\omega \in \Omega;\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\big\} = 1\,.$$

Poznámka 1.5 Ak sú $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$ stochasticky ekvivalentné, ešte nemusia mať totožné trajektórie.

Príklad 1.1 Nech $\Omega = \langle 0,1\rangle$, $T = \langle 0,1\rangle$. Definujme

$$X_t = 0, \quad \forall \omega \in \langle 0,1\rangle, t \in \langle 0,1\rangle,$$

$$Y_t = \begin{cases} 0, & \omega \ne t, \\ 1, & \omega = t. \end{cases}$$

Zrejme $P(X_t = Y_t) = P\{\omega \in \langle 0,1\rangle;\ \omega \ne t\} = 1$, ale trajektórie sú odlišné v bode $\omega = t$. □

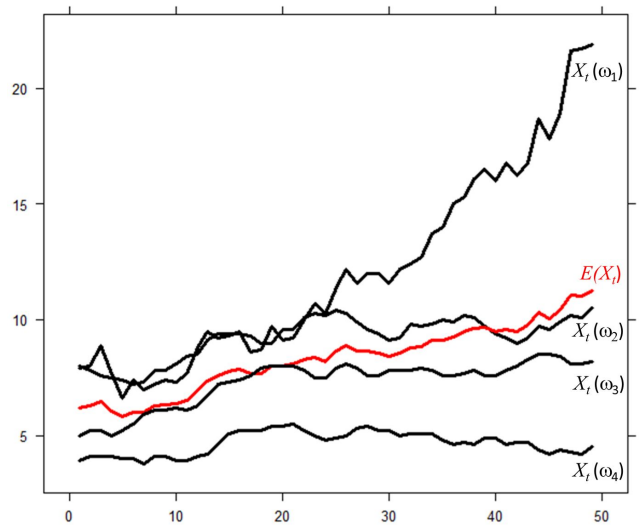
Poznámka 1.6 Procesy, ktoré sú stochasticky ekvivalentné, majú rovnaké rozdelenie, lebo majú rovnaké všetky konečnorozmerné rozdelenia. Platí totiž

$$\begin{aligned} &P(X_{t_1} \le x_1,\ \dots,\ X_{t_n} \le x_n) = \\ &\quad = P(X_{t_1} \le x_1,\ \dots,\ X_{t_n} \le x_n, X_{t_1} = Y_{t_1},\ \dots,\ X_{t_n} = Y_{t_n}) = \\ &\quad = P(Y_{t_1} \le x_1,\ \dots,\ Y_{t_n} \le x_n)\,. \end{aligned}$$

1.2 Charakteristiky náhodného procesu

Definícia 1.8 *Nech* $\{X_t,\ t \in T\}$ *je náhodný proces. Nenáhodná funkcia* $E(X_t) = m(t)$, *definovaná na* T *sa nazýva* ***strednou hodnotou*** *náhodného procesu* $\{X_t,\ t \in T\}$ *za predpokladu, že* $E(X_t)$ *existuje pre všetky* $t \in T$.

Poznámka 1.7 Význam $E(X_t)$ je analogický významu strednej hodnoty náhodnej veličiny. Realizácie náhodného procesu sú reálne funkcie premennej t, ktorej hodnoty kolíšu okolo hodnôt funkcie $E(X_t)$, ako vidieť na obrázku 1.2.



Obr. 1.2

Definícia 1.9 *Nech* $\{X_t,\ t \in T\}$ *je náhodný proces so strednou hodnotou* $E(X_t)$ *a konečným druhým momentom* $E(X_t^2) < \infty$. *Reálnu funkciu* $K(s,t)$, $s,t \in T$, *definovanú vzťahom*

$$K(s,t) = E\Big[\big(X_s - E(X_s)\big) \cdot \big(X_t - E(X_t)\big)\Big] = \operatorname{cov}(X_s, X_t)\,,$$

nazývame ***kovariančnou funkciou*** *náhodného procesu* $\{X_t,\ t \geq 0\}$. *Nenáhodná funkcia*

$$K(t,t) = E\big(X_t - E(X_t)\big)^2 = D(X_t),$$

sa nazýva ***disperzia (rozptyl)*** *procesu.*

Príklad 1.2 Vypočítajme strednú hodnotu, kovariančnú funkciu a disperziu náhodného procesu $\{X_t,\ t \in T\}$, ak $X_t = 2U\cos\omega t + 2Vt + 4$, $E(U) = E(V) = 2$, $D(U) = 0{,}1$; $D(V) = 0{,}2$; $\operatorname{cov}(U,V) = 0{,}5$.

Riešenie.

$$\begin{aligned}
E(X_t) &= E(2U\cos\omega t + 2Vt + 4) = 2\cos\omega t \cdot E(U) + 2tE(V) + 4 = \\
&= 4\cos\omega t + 4t + 4\,. \\
K(s,t) &= \operatorname{cov}(2U\cos\omega s + 2Vs + 4; 2U\cos\omega t + 2Vt + 4) = \\
&= \operatorname{cov}(2U\cos\omega s, 2U\cos\omega t) + \operatorname{cov}(2U\cos\omega s, 2Vt) + \\
&+ \operatorname{cov}(2Vs, 2U\cos\omega t) + \operatorname{cov}(2Vs, 2Vt) = \\
&= 4\cos\omega s \cdot \cos\omega t \cdot D(U) + 4t\cos\omega s \cdot \operatorname{cov}(U,V) + \\
&+ 4s\cos\omega t \cdot \operatorname{cov}(V,U) + 4st \cdot D(V) = \\
&= 0{,}4\cos\omega s \cdot \cos\omega t + 2t\cos\omega s + 2s\cos\omega t + 0{,}8st\,. \\
D(X_t) &= K(t,t) = 0{,}4\cos^2\omega t + 4t\cos\omega t + 0{,}8t^2\,.
\end{aligned}$$

□

Definícia 1.10 *Normovaná kovariančná funkcia $R(s,t)$, definovaná vzťahom*

$$R(s,t) = \frac{\operatorname{cov}(X_s, X_t)}{\sqrt{D(X_s)\cdot D(X_t)}}, \quad s,t \in T\,,$$

sa nazýva ***korelačná funkcia*** *náhodného procesu.*

Definícia 1.11 *Hovoríme, že náhodný proces $\{X_t,\, t \in T\}$ je* ***kovariančne (slabo) stacionárny****, ak má konštantnú strednú hodnotu $E(X_t)$ a kovariančnú funkciu $K(s,t)$ invariantnú voči posunutiu v čase, t.j. ak platí*

1. $E(X_t) = m(t) =$ *konšt.*, $\forall t \in T$,
2. $K(s,t) = K(s+h, t+h) = K(|s-t|)$.

Poznámka 1.8 Druhá požiadavka v predchádzajúcej definícii hovorí, že lineárna závislosť náhodných veličín X_s, X_t závisí iba od ich vzdialenosti $|s-t|$ a nezávisí od ich polohy na časovej osi.

Príklad 1.3 Nech Y je náhodná veličina s nulovou strednou hodnotou a konečným kladným rozptylom σ^2. Definujme náhodný proces $\{X_t,\, t \in \mathbb{N}_0\}$ predpisom $X_t = (-1)^t \cdot Y$. Ukážme, že $\{X_t,\, t \in \mathbb{N}_0\}$ je slabo stacionárny proces.

Riešenie. Máme ukázať, že $E(X_t) =$ konšt. a $K(s,t) = K(|s-t|)$. Pre strednú hodnotu procesu platí

$$E(X_t) = E\big[(-1)^t \cdot Y\big] = (-1)^t \cdot E(Y) = (-1)^t \cdot 0 = 0 = \text{konšt.}$$

Pre kovariančnú funkciu platí

$$\begin{aligned}
K(s,t) &= E\Big[\big(X_s - E(X_s)\big)\cdot\big(X_t - E(X_t)\big)\Big] = E(X_s \cdot X_t) = \\
&= E\big[(-1)^s \cdot Y \cdot (-1)^t \cdot Y\big] = (-1)^{s+t} E(Y^2) = (-1)^{|s-t|} D(Y) = \\
&= (-1)^{|s-t|} \cdot \sigma^2 = K(|s-t|)\,.
\end{aligned}$$

Uvažovaný náhodný proces je teda slabo stacionárny. □

Veta 1.3 *Nech náhodný proces* $\{X_t,\, t \in T\}$ *je slabo stacionárny. Potom platí*

1. $D(X_t) =$ *konšt.*, $\forall t \in T$
2. $|K(\tau)| \leq K(0)$, $\forall \tau \in T$
3. $K(-\tau) = K(\tau)$, $\forall \tau \in T$.

Dôkaz. 1. Z definície slabo stacionárneho procesu pre $s = t$ máme

$$D(X_t) = K(t,t) = K\big(|t-t|\big) = K(0) = \text{konšt.}$$

2. $\big|K(\tau)\big| = \big|K(t,t+\tau)\big| = \big|\operatorname{cov}(X_t, X_{t+\tau})\big|$. Po predelení odmocninou disperzií

$$\frac{|K(\tau)|}{\sqrt{D(X_t)\cdot D(X_{t+\tau})}} = \left|\frac{\operatorname{cov}(X_t, X_{t+\tau})}{\sqrt{D(X_t)\cdot D(X_{t+\tau})}}\right| = \big|R(t,t+\tau)\big| \leq 1\,.$$

Odtiaľ $\big|K(\tau)\big| \leq \sqrt{D(X_t)\cdot D(X_{t+\tau})} = \sqrt{D(X_t)\cdot D(X_t)} = D(X_t) = K(0)$.

3. $K(-\tau) = K(t-\tau, t) = K\big(\big|t-(t-\tau)\big|\big) = K(\tau)$. □

Príklad 1.4 Zdroj generuje symboly 0 a 1 nezávisle, s pravdepodobnosťami p a $1-p$. Symbol 1 znamená, že sa počas jednotkového intervalu vyšle impulz s amplitúdou a, symbol 0 znamená, že sa počas intervalu dĺžky 1 nevyšle žiaden impulz. Predpokladajme, že zdroj už začal pracovať v minulosti. Popíšme náhodný signál generovaný týmto spôsobom ako náhodný proces $\{X_t,\, t \in (-\infty, \infty)\}$ a určme jeho strednú hodnotu a kovariančnú funkciu.

Riešenie. Uvedený náhodný proces možno vyjadriť v tvare:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot f(t-n), \quad n \leq t < n+1,$$

kde $A_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sú nezávislé náhodné veličiny s alternatívnym rozdelením definované nasledovne:

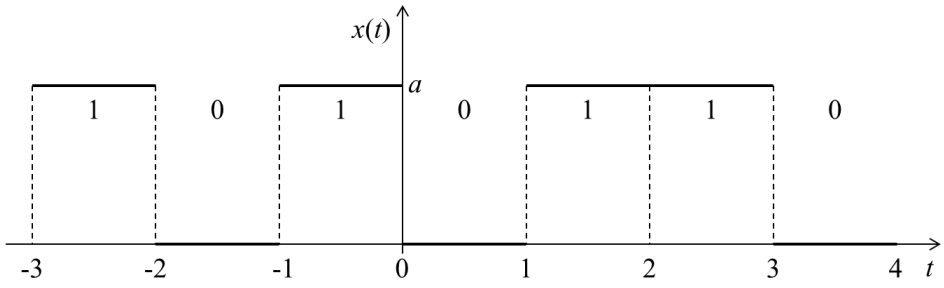
$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou} \quad p \\ a & \text{s pravdepodobnosťou} \quad 1-p \end{cases}$$

a funkcia $f(t)$ je daná

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \qquad\qquad \text{inak} \end{cases}.$$

Pre každé t potom náhodné veličiny $X(t)$ sú určené predpisom

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou} \quad p \\ a & \text{s pravdepodobnosťou} \quad 1-p \end{cases}.$$



Obr. 1.3

Na obrázku 1.3 je znázornená časť jednej z možných trajektórií procesu generovaného signálom: $\ldots, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots$
Ľahko ukážeme, že proces má konštantnú strednú hodnotu:

$$E(X_t) = a \cdot P(X_t = a) + 0 \cdot P(X_t = 0) = a \cdot (1 - p).$$

V prípade, že uvažujeme časové okamihy, pre ktoré $n \leq s, t \leq n{+}1,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\begin{aligned} E(X_s X_t) &= E(X_s X_t \mid X_s = a) \cdot P(X_s = a) + E(X_s X_t \mid X_s = 0) \cdot P(X_s = 0) = \\ &= a^2 \cdot (1 - p). \end{aligned}$$

Ak však pre s, t platí $m \leq s < m + 1$ a $n \leq t < n + 1, m \neq n$, tak náhodné veličiny X_s a X_t sú nezávislé. Kovariančná funkcia procesu $\{X_t,\ t \in (-\infty, \infty)\}$ je teda

$$K(s,t) = \begin{cases} a^2 \cdot (1 - p) & \text{pre} \quad n \leq s, t \leq n + 1,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0 & \text{inak} \end{cases}.$$

Proces analyzovaný v tomto príklade je dôležitý vo fyzike, elektrotechnike, či telekomunikácii. Používa sa pri prevode analógového zvukového signálu na digitálny.

□

Definícia 1.12 *Hovoríme, že náhodný proces* $\{X_t,\ t \in T\}$ *má* ***kanonický rozklad****, ak sa dá vyjadriť v tvare*

$$X_t = E(X_t) + \sum_k U_k \cdot f_k(t)\,, \tag{1.3}$$

kde U_k *sú nekorelované náhodné veličiny s nulovou strednou hodnotou a* $f_k(t)$ *sú nenáhodné funkcie, pre* $k = 1, 2, \ldots$.

Príklad 1.5 Náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ je daný kanonickým rozkladom

$$X_t = t - \cos t + U \cdot t^2 + V \cdot \cos 3t\,,$$

pričom $D(U) = D(V) = 1$. Určme $E(X_t)$, $K(t_1, t_2)$ a zistime, či je proces slabo stacionárny.

Riešenie. Podľa definície kanonického rozkladu procesu je $E(U) = E(V) = 0$. Dosadením za X_t dostaneme

$$E(X_t) = E(t - \cos t + Ut^2 + V\cos 3t) = t - \cos t + t^2 E(U) + \cos 3t E(V)$$
$$E(X_t) = t - \cos t \neq \text{konšt.},$$

teda proces $\{X_t,\, t \in T\}$ nie je slabo stacionárny.

$$\begin{aligned}
K(t_1,t_2) &= E\big[\big(X_{t_1} - E(X_{t_1})\big)\big(X_{t_2} - E(X_{t_2})\big)\big] = \\
&= E\big[\big(t_1 - \cos t_1 + Ut_1^2 + V\cos 3t_1 - (t_1 - \cos t_1)\big) \cdot \\
&\quad \cdot \big(t_2 - \cos t_2 + Ut_2^2 + V\cos 3t_2 - (t_2 - \cos t_2)\big)\big] = \\
&= E\big[\big(Ut_1^2 + V\cos 3t_1\big) \cdot \big(Ut_2^2 + V\cos 3t_2\big)\big] = \\
&= E\big[U^2 t_1^2 t_2^2 + UVt_2^2 \cos 3t_1 + UVt_1^2 \cos 3t_2 + V^2 \cos 3t_1 \cos 3t_2\big] = \\
&= t_1^2 t_2^2 E(U^2) + t_2^2 \cos 3t_1 E(UV) + t_1^2 \cos 3t_2 E(UV) + \cos 3t_1 \cos 3t_2 E(V^2)\,.
\end{aligned}$$

Keďže z predpokladu $D(U) = D(V) = 1$, $E(U) = E(V) = 0$, $E(UV) = 0$, pre kovariančnú funkciu dostávame

$$K(t_1,t_2) = t_1^2 \cdot t_2^2 + \cos 3t_1 \cdot \cos 3t_2\,. \qquad \square$$

1.3 Klasifikácia náhodných procesov

Náhodné procesy delíme podľa rôznych kritérií, najčastejšie podľa

a) spojitosti času a stavov,

b) vnútornej závislosti náhodných veličín $X_t(\omega)$,

c) vývoja procesu v čase.

Ad a) Klasifikácia podľa spojitosti času a stavov

1. *Procesy s diskrétnym časom a diskrétnymi stavmi*, kde $T = \{0, 1, \dots\}$, $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.
2. *Procesy so spojitým časom a diskrétnymi stavmi*, kde $T = \langle 0, \infty)$, $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.
3. *Procesy s diskrétnym časom a spojitými stavmi*, kde $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, $S \subset \mathbb{R}_1$.
4. *Procesy so spojitým časom a spojitými stavmi*, kde $T = \langle 0, \infty)$, $S \subset \mathbb{R}_1$.

Poznámka 1.9 Procesy s diskrétnymi stavmi sme nazvali *reťazce* (s diskrétnym alebo spojitým časom). Procesy s diskrétnym časom sú *časové rady.*

Tento učebný text bude venovaný hlavne diskrétnym náhodným procesom, ktoré majú v ekonomickej a finančnej oblasti široké využitie.

Ad b) Klasifikácia podľa vnútornej závislosti

1. *Proces s nezávislými prírastkami* – je taký proces $\{X_t,\, t \geq 0\}$, pre ktorý platí: pre ľubovoľné $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \quad X_{t_3} - X_{t_2}, \quad \ldots, \quad X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

   sú nezávislé náhodné veličiny.

2. *Markovov proces* – je proces „bez pamäte“, t.j. proces, v ktorom podmienená pravdepodobnosť budúceho vývoja závisí iba od súčasného stavu, od minulého vývoja nie. Pre ľubovoľné $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ platí

$$P(X_t \leq x \mid X_{t_1} = x_1,\ \ldots,\ X_{t_n} = x_n) = P(X_t \leq x \mid X_{t_n} = x_n)\,.$$

3. *Martingal* – je proces, v ktorom podmienená stredná hodnota je rovná poslednej hodnote. Pre ľubovoľné $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < t$ je

$$E(X_t \mid X_{t_1} = x_1,\ \ldots,\ X_{t_n} = x_n) = x_n\,. \tag{1.4}$$

Poznámka 1.10 Ak vo vzťahu (1.4) platí nerovnosť, ide o submartingal, resp. supermartingal. Presnejšie

1. ak $E(X_t \mid X_{t_1} = x_1,\ \ldots,\ X_{t_n} = x_n) > x_n$, proces $\{X_t,\, t \geq 0\}$ je *submartingal*,
2. ak $E(X_t \mid X_{t_1} = x_1,\ \ldots,\ X_{t_n} = x_n) < x_n$, proces $\{X_t,\, t \geq 0\}$ je *supermartingal*.

Poznámka 1.11 Martingal modeluje „spravodlivú hazardnú hru“, kedy očakávaný zisk z hry je nulový. Submartingal modeluje „výhodnú hru“, kým supermartingal „nevýhodnú hru“.

Ad c) Klasifikácia podľa vývoja procesu v čase

1. *Stacionárny proces* $\{X_t,\, t \in T\}$, podľa definícií 1.6 a 1.11, môže byť

   - *striktne stacionárny*, ak má distribučnú funkciu invariantnú voči posunutiu v čase, t.j platí pre každé $n \in \mathbb{N}$; $t_1, \ldots, t_n \in T$; $x_1, \ldots, x_n \in S$ a ľubovoľné $h > 0$

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_1+h,\ldots,t_n+h}(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

   - *slabo stacionárny*, ak má konštantnú strednú hodnotu a kovariančnú funkciu invariantnú voči posunutiu v čase, t.j. pre ľubovoľné $s, t \in T$ a $h > 0$ je

$$E(X_t) = \text{konšt.}$$
$$K(s,t) = K(s+h, t+h)\,.$$

2. *Homogénny proces* je taký proces, v ktorom podmienená pravdepodobnosť $P(X_t \leq j \mid X_s = i)$ je invariantná voči posunutiu v čase, t.j. pre ľubovoľné $0 \leq s < t; s, t \in T$ a $h > 0$ platí

$$P(X_t \leq j \mid X_s = i) = P(X_{t+h} \leq j \mid X_{s+h} = i).$$

3. *Ordinárny proces* je taký bodový proces, v ktorom nedochádza ku kumulácii udalostí, t.j. za krátky časový interval dĺžky $\triangle t$, $\triangle t \to 0_+$ môže nastať nanajvýš jedna udalosť (bodovému procesu sa budeme venovať v ďalšej časti)

1.4 Modely reálnych náhodných procesov

1. *Bodové procesy* – modelujú výskyt náhodných udalostí v čase, prípadne v priestore. Takými náhodnými udalosťami môžu byť napríklad príchod zákazníka do obchodného domu, porucha stroja, výskyt prírodnej katastrofy, doručenie e-mailu na server, dopad meteoritu na Zem, atď. Bodové procesy môžeme zadávať tromi ekvivalentnými spôsobmi podľa typu registrácie sledovaných náhodných udalostí:

   (a) Zapisujeme časové okamihy t_k, v ktorých nastáva sledovaná udalosť. Takto dostaneme postupnosť náhodných veličín

   $$\begin{aligned} &t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \quad \text{kde } t_i < t_j \text{ pre } i < j\,, \\ &t_0 \equiv 0\,, \lim_{i \to \infty} t_i = \infty. \end{aligned}$$

   (b) Zapisujeme intervaly medzi susednými udalosťami τ_k, pričom platí

   $$\begin{aligned} &\tau_k = t_k - t_{k-1}, \quad \text{pre } k = 2, \ldots, n, \\ &\tau_1 \equiv t_1\,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

   Odtiaľ dostaneme

   $$t_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{1.6}$$

   (c) Zapisujeme celkový počet udalostí N_t za čas t od začiatku pozorovania $t_0 = 0$, t.j. načítací proces $\{N_t,\, t \geq 0\}$, kde

   $$N_t = n \Leftrightarrow t_n \leq t < t_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots\,. \tag{1.7}$$

   Ukážeme, že všetky tri spôsoby registrácie sú ekvivalentné.

   Podľa vzťahu (1.5) resp. (1.6) je zrejmé, že t_k a τ_k sú dané súčasne. Venujme sa preto tretiemu spôsobu registrácie pomocou načítacieho procesu

$\{N_t,\, t \geq 0\}$, kde položíme

$$\begin{aligned} &N_t = N(t) = N(0,t)\,, \\ &N(0) \equiv 0\,, \\ &N(s,t) = N(t) - N(s), \quad \text{pre } 0 \leq s < t\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Zrejme funkcia N_t je neklesajúca a schodkovitá, jej bodmi nespojitosti sú okamihy nastatia udalosti t_i, $i = 1, \ldots, n$. Označme si ďalej pravdepodobnosť toho, že na intervale $(0, t\rangle$ nastalo práve n udalostí, ako

$$p_n(t) = P(N_t = n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{1.9}$$

pravdepodobnosť toho, že na intervale $(s, t\rangle$, $s < t$ nastalo n udalostí, ako

$$p_n(s,t) = P\big(N(s,t) = n\big), \quad s < t\,. \tag{1.10}$$

Uvažujme ľubovoľnú n-ticu časových okamihov $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, v ktorých nastala sledovaná udalosť. Pre distribučnú funkciu náhodnej veličiny t_k, $k = 1, \ldots, n$ platí

$$F_{t_k}(t) = P(t_k \leq t) = P(N_t \geq k) = \sum_{j=k}^{\infty} P(N_t = j) = \sum_{j=k}^{\infty} p_j(t)\,,$$

teda znalosť rozdelenia N_t stačí k určeniu rozdelenia t_k. Podobne sa dá ukázať, že 3. spôsob registrácie implikuje 2. spôsob. Problém by sa mohol vyskytnúť pri určení rozdelenia náhodnej veličiny τ_1, ktoré vo všeobecnosti môže byť iné, ako rozdelenie τ_k, $k = 2, \ldots, n$, ale aj tu platí

$$F_{\tau_1}(t) = F_{t_1}(t) = P(t_1 \leq t) = 1 - P(t_1 > t) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - p_0(t)\,.$$

□

2. *Náhodná prechádzka na priamke* – je diskrétny náhodný proces s diskrétnym časom, definovaný nasledovne:

   Nech $Y_1, Y_2, \ldots$ sú nezávislé náhodné veličiny s identickým rozdelením, nadobúdajúce iba 2 hodnoty ± 1 s pravdepodobnosťou $1/2$, t.j.

   $$P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots\,.$$

   Položme

   $$\begin{aligned} X_n &= \sum_{i=1}^{n} Y_i\,, \\ X_0 &= 0\,. \end{aligned}$$

   Potom náhodný proces $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ sa nazýva *symetrická náhodná prechádzka* na priamke. Ak by platilo $P(Y_i = 1) = p$, $P(Y_i = -1) = q$, $p \neq q$ pre

$p, q \in (0,1)$, išlo by o *nesymetrickú náhodnú prechádzku.* Zrejme platí v oboch prípadoch $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, $S = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.
Interpretácia: Náhodná veličina X_n udáva polohu, ktorú má po n krokoch častica, pohybujúca sa náhodne po celočíselných bodoch na priamke, vo všetkých krokoch s rovnakou pravdepodobnosťou v oboch smeroch, vychádzajúc z počiatku. Zovšeobecnenie tohto procesu sa používa pri diskrétnom modelovaní cien finančných aktív.

Poznámka 1.12 Zaujímavou modifikáciou náhodnej prechádzky je náhodný proces, ktorý má pohlcujúce stavy, teda také stavy, do ktorých je možný vstup, ale výstup už nie. Táto modifikovaná verzia sa používa tiež na modelovanie bankrotu hazardného hráča (problematika je rozpracovaná napr. v [10, 11]).

3. *Biely šum* – je spojitý náhodný proces so spojitým časom. Ide o model fyzikálneho procesu, ktorý bol objavený Robertom Brownom v roku 1826 a objasnený Albertom Einsteinom v roku 1905 na pohybe malých častíc v kvapaline. Pohybová rovnica častice, vznášajúcej sa v kvapaline, je

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} X_t + c \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_t = F_t \,,$$

kde m je hmotnosť častice, c – koeficient viskozity kvapaliny, X_t – jedna súradnica polohy častice, F_t – sila, ktorá vzniká nárazom molekúl kvapaliny na časticu.

Sila F_t ako *biely šum* je ťažko popísateľná náhodná veličina, ktorej stredná hodnota je rádovo 10^{-21}. Norbert Wiener v roku 1921 skúmal integrál bieleho šumu $W_t = \int\limits_0^t F_s \,\mathrm{d}s$ a dokázal, že náhodný proces $\{W_t,\, t \geq 0\}$, tzv. Wienerov proces, už má „pekné“ vlastnosti

a) $W_0 = 0$, W_t má spojité trajektórie s pravdepodobnosťou 1,

b) $W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sú nezávislé náhodné veličiny, pre ľubovoľné $0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq t$,

c) $W_t - W_s \sim N(0, (t-s) \cdot \sigma^2)$, pre $0 \leq s < t$.

Interpretácia: Okrem modelovania vo fyzike (hlavne v radiotechnike) sa používa „biely šum“ resp. Wienerov proces, nazývaný aj ako Brownov pohyb, na modelovanie fluktuácie cenového vývoja na burze, na popis fluktuácie rizikovej rezervy poisťovne, atď. Význam Wienerovho procesu pre stochastickú analýzu v teórii spojitých náhodných procesov sa dá prirovnať významu normálneho rozdelenia pre matematickú štatistiku.

1.5 Cvičenia

1.1 Vypočítajte strednú hodnotu, kovariančnú funkciu a disperziu náhodného procesu $X_t = Y \cdot e^{-t \sin \omega t}$, ak Y je reálna náhodná veličina, $E(Y) = 1$, $D(Y) = 0{,}5$.

1.2 Nech X_t je náhodný proces a $f(t)$ je nenáhodná funkcia. Položte $Y_t = X_t + f(t)$ a dokážte, že kovariančné funkcie oboch procesov sú rovnaké, teda, že platí $K_X(s,t) = K_Y(s,t),\ 0 \leq s < t$.

1.3 Nech $X_t = Y_1 \cdot t^2 + Y_2 \cdot \cos t$, kde náhodný vektor $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$ má strednú hodnotu $E(\boldsymbol{Y}) = (2,3)$ a kovariančnú maticu $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Vypočítajte strednú hodnotu, disperziu a kovariančnú funkciu náhodného procesu $\{X_t,\ t \geq 0\}$.

1.4 Nech $\{X_t,\ t \in T\}$ je náhodný proces, kde rozdelenie X_t je dané distribučnou funkciou

$$F_t(x) = P(X(t) \leq x) = 1 - e^{-(\frac{x}{t})^2}; \quad x \geq 0.$$

Je tento proces slabo stacionárny?

1.5 Nech $\{X_t,\ t \in T\}$ je náhodný proces, kde rozdelenie X_t je dané distribučnou funkciou

$$F_t(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(\frac{(u-\mu t)^2}{2\sigma^2 t})} \mathrm{d}u; \quad \mu > 0,\ \sigma > 0,\ x \in (-\infty, \infty).$$

Určte strednú hodnotu a disperziu procesu. Pre $\mu = 2$ a $\sigma = 0,5$ načrtnite funkcie

$$y_1(t) = E(X_t) + \sqrt{D(X_t)} \quad \text{a} \quad y_2(t) = E(X_t) - \sqrt{D(X_t)}, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

1.6 Nech je daný náhodný proces $\{X_t,\ t \geq 0\}$, kde $X_t = a \sin(\omega t + Y)$ a Y má rovnomerné rozdelenie na intervale $(0, 2\pi)$. Dokážte, že proces $\{X_t,\ t \geq 0\}$ je slabo stacionárny a určte kovariančnú funkciu.

1.7 Nech $\{X_t,\ t \in (-\infty, \infty)\}$ a $\{Y_t,\ t \in (-\infty, \infty)\}$ sú dva nezávislé slabo stacionárne procesy s nulovou strednou hodnotou a rovnakou kovariančnou funkciou $K(h)$. Dokážte, že proces $\{Z_t,\ t \in (-\infty, \infty)\}$, kde $Z_t = X_t \cdot \cos \omega t - Y_t \cdot \sin \omega t$ je slabo stacionárny.

1.8 Je daný náhodný proces $\{X_t,\ t \geq 0\}$, kde $X_t = \sum_{j=1}^{n} [A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t]$, ďalej ω_j sú reálne čísla, A_j, B_j nekorelované náhodné veličiny pre $j = 1, \ldots, n$, $E(A_j) = E(B_j) = 0$, $D(A_j) = D(B_j) = \sigma_j^2$. Rozhodnite, či je proces slabo stacionárny.

1.9 Proces $\{X_t,\, t \geq 0\}$ je daný kanonickým rozkladom $X_t = U \sin \omega t + V \cos \omega t + 2t$, kde U, V sú nekorelované náhodné veličiny s nulovou strednou hodnotou a disperziou $D(U) = D(V) = 0{,}2$. Určte $E(X_t)$, $D(X_t)$, $K(t_1, t_2)$.

1.10 Náhodný proces $\{X_t,\, t \in T\}$ je slabo stacionárny a má kanonický rozklad $X_t = U_1 \cos \lambda t + U_2 \sin \lambda t$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Nech $U_k, k = 1, 2$ majú normálne rozdelenie $\mathrm{N}(0,\, \sigma^2)$. Určte korelačnú funkciu procesu.

1.11 Modulový signál $\{X_t,\, t \in (-\infty, \infty)\}$ je daný

$$X_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot f(t-n),$$

kde A_n sú nezávislé, rovnako rozdelené náhodné veličiny, ktoré nadobúdajú len hodnoty ± 1, $E(A_n) = 0$ pre všetky n. Nech funkcia $f(t)$, vyjadrujúca reakciu systému na signál, je daná nasledovne

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre} \quad 0 \leq t < 1/2 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

a) Načrtnite časť možnej trajektórie procesu $\{X_t,\, t \in (-\infty, \infty)\}$

b) Určte kovariančnú funkciu daného procesu.

1.12 Nájdite strednú hodnotu a kovariančnú funkciu pre nesymetrickú náhodnú prechádzku na priamke. Urobte záver o stacionarite tohto špeciálneho procesu.

1.13 Nech $\{N_t, t \geq 0\}$ je náhodný proces, kde náhodná veličina N_t má Poissonove rozdelenie s parametrom λt a T_0 je náhodná veličina, pre ktorú platí: $P(T_0 = \pm 1) = 1/2$. Definujte $T_t = T_0(-1)^{N_t}$. Ukážte, že proces $\{T_t, t \geq 0\}$ je stacionárny a vypočítajte $R(T_s, T_{s+t})$.

Kapitola 2

Markovove reťazce

2.1 Markovská vlastnosť a jej dôsledky

Definícia 2.1 *Diskrétny náhodný proces* $\{X_t,\, t \in T\}$ *sa nazýva* ***Markovov reťazec*** *(MR), ak spĺňa* ***Markovskú vlastnosť***

$$P(X_t = j \mid X_{t_1} = i_1,\ \ldots,\ X_{t_n} = i_n) = P(X_t = j \mid X_{t_n} = i_n) \tag{2.1}$$

pre ľubovoľné $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t, \quad t, t_k \in T,\ k = 1, 2, \ldots, n$ *a ľubovoľné* $i_1, i_2, \ldots, i_n, j \in S \subset \mathbb{Z}$.

Definícia 2.2 *Nech* $\{X_t,\ t \in T\}$ *je Markovov reťazec. Podmienené pravdepodobnosti*

$$P(X_t = j \mid X_s = i) = p_{i,j}(s,t), \quad 0 \le s < t; \quad s, t \in T; \quad i, j \in S,$$

nazývame ***pravdepodobnosti prechodu*** *Markovovho reťazca zo stavu* i *v čase* s *do stavu* j *v čase* t. *Nepodmienené pravdepodobnosti*

$$P(X_t = j) = p_j(t), \quad t \in T, \quad j \in S,$$

nazývame ***absolútne pravdepodobnosti*** *stavov Markovovho reťazca a pravdepodobnosť* $P(X_0 = j) = p_j(0)$, $j \in S$ *sa nazýva* ***počiatočné rozdelenie*** *MR.*

Definícia 2.3 *Matica* $\widetilde{P}(s,t) = \big(p_{i,j}(s,t)\big)_{i,j \in S}$ *sa nazýva* ***matica pravdepodobnosti prechodu*** *Markovovho reťazca. Vektor* $\bar{p}(t) = \big(p_j(t)\big)_{j \in S}$ *sa nazýva* ***vektor absolútnych pravdepodobností****. Špeciálne pre* $t = 0$ *dostaneme* ***vektor počiatočných rozdelení*** $\bar{p}(0)$.

Definícia 2.4 *Matica* $\widetilde{P}(s,t) = \big(p_{i,j}(s,t)\big)_{i,j \in S}$, *ktorá spĺňa podmienky*

1. $p_{i,j}(s,t) \ge 0$ (*všetky prvky matice sú nezáporné*),

2. $\sum_{j \in S} p_{i,j}(s,t) = 1$ (*súčet prvkov v riadku je 1*),

sa nazýva ***stochastická matica****. Ak navyše platí*

3. $\sum_{i \in S} p_{i,j}(s,t) = 1$,

potom matica $\widetilde{P}(s,t)$ *sa nazýva* ***dvojne stochastická****.*

Poznámka 2.1 Markovská vlastnosť vo vzťahu (2.1) znamená, že ide o proces *bez pamäte*, kde pravdepodobnosť budúceho vývoja procesu závisí iba od súčasného stavu, od minulého vývoja nie. Vďaka Markovskej vlastnosti, k znalosti rozdelenia Markovovho reťazca nie je nutné poznať všetky konečnorozmerné združené rozdelenia, ako to platí vo všeobecnosti pre náhodné procesy.

Veta 2.1 *Nech* $\{X_t,\ t \in T\}$ *je Markovov reťazec. Potom rozdelenie pravdepodobnosti náhodného procesu* $\{X_t,\ t \in T\}$ *je jednoznačne dané, ak poznáme počiatočné rozdelenie* $p_j(0)$ *a pravdepodobnosti prechodu* $p_{i,k}(s,t)$, $i,j,k \in S$, $s,t \in T$, $0 \leq s < t$.

Dôkaz. Podľa Kolmogorovovej vety na určenie rozdelenia náhodného procesu $\{X_t,\ t \in T\}$ stačí poznať združené rozdelenia $P(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2 \ldots, X_n = i_n)$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$, $t_k \in T$, $i_k \in S$, $k = 1, \ldots, n$. Podľa vety o násobení pravdepodobnosti a využitím Markovskej vlastnosti dostaneme

$$\begin{aligned}
&P(X_{t_1} = i_1,\ X_{t_2} = i_2,\ \ldots,\ X_{t_n} = i_n) = \\
&= P(X_{t_1} = i_1) \cdot P(X_{t_2} = i_2 \mid X_{t_1} = i_1) \cdot P(X_{t_3} = i_3 \mid X_{t_1} = i_1,\ X_{t_2} = i_2) \cdot \ldots \\
&\quad \ldots \cdot P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_1} = i_1,\ X_{t_2} = i_2,\ \ldots,\ X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = \\
&= P(X_{t_1} = i_1) \cdot P(X_{t_2} = i_2 \mid X_{t_1} = i_1) \cdot P(X_{t_3} = i_3 \mid X_{t_2} = i_2) \cdot \ldots \\
&\quad \ldots \cdot P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = (*)
\end{aligned}$$

Podľa vety o úplnej pravdepodobnosti pre absolútnu pravdepodobnosť platí $P(X_{t_1} = i_1) = \sum_{j \in S} P(X_0 = j) \cdot P(X_{t_1} = i_1 \mid X_0 = j)$. Pre združenú pravdepodobnosť teda dostaneme

$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{j \in S} P(X_0 = j) \cdot P(X_{t_1} = i_1 \mid X_0 = j) \cdot \ldots \cdot P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = \\
&= \sum_{j \in S} p_j(0) \cdot p_{j,i_1}(0,t_1) \cdot p_{i_1,i_2}(t_1,t_2) \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1},i_n}(t_{n-1},t_n),
\end{aligned}$$

teda pre určenie združeného rozdelenia stačí poznať počiatočné rozdelenie a pravdepodobnosti prechodu. □

Veta 2.2 (Chapmanova-Kolmogorovova) *Pre pravdepodobnosť prechodu Markovovho reťazca platia Chapman–Kolmogorovove rovnice*

$$p_{i,k}(s,t) = \sum_{j \in S} p_{i,j}(s,u) \cdot p_{j,k}(u,t)\,, \tag{2.2}$$

kde $0 \leq s < u < t$, $s, u, t \in T$, $i, j, k \in S$.

Dôkaz. Využitím vety o úplnej pravdepodobnosti a Markovskej vlastnosti procesu pre $0 \leq s < u < t$ platí

$$\begin{aligned} p_{i,k}(s,t) &= P(X_t = k \mid X_s = i) = \\ &= \sum_{j \in S} P(X_u = j \mid X_s = i) \cdot P(X_t = k \mid X_s = i,\, X_u = j) = \\ &= \sum_{j \in S} P(X_u = j \mid X_s = i) \cdot P(X_t = k \mid X_u = j) = \\ &= \sum_{j \in S} p_{i,j}(s,u) \cdot p_{j,k}(u,t)\,. \end{aligned}$$

□

Poznámka 2.2 Chapman–Kolmogorovove rovnice možno zapísať aj v maticovom tvare

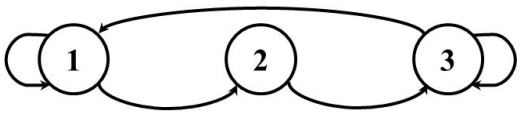
$$\widetilde{P}(s,t) = \widetilde{P}(s,u) \cdot \widetilde{P}(u,t)\,. \tag{2.3}$$

Definícia 2.5 *Markovov reťazec sa nazýva* ***homogénny*** *v čase, ak pre ľubovoľné* $h > 0$ *a pre všetky* t, $t + h \in T$ *platí*

$$p_{i,j}(t,\, t+h) = p_{i,j}(h)\,.$$

Poznámka 2.3 V homogénnom Markovovom reťazci pravdepodobnosť prechodu je invariantná voči posunutiu v čase, t.j. nezávisí od koncových bodov intervalu t, $t + h$, v ktorom sa prechod realizuje, iba od dĺžky tohto intervalu.

Definícia 2.6 ***Diagram (graf) prechodu*** *Markovovho reťazca je orientovaný graf, kde vrcholy reprezentujú stavy Markovovho reťazca a hrany znázornené šípkami označujú možné prechody medzi stavmi.*



Obr. 2.1: Príklad diagramu prechodu Markovovho reťazca s tromi stavmi

Poznámka 2.4 Markovove reťazce rozlišujeme podľa charakteru časového priestoru T na Markovov reťazec so spojitým časom a Markovov reťazec s diskrétnym časom. V tejto kapitole sa budeme venovať Markovovým reťazcom s diskrétnym časom. Špeciálnym reťazcom so spojitým časom bude venovaná 3. kapitola.

2.2 Markovove reťazce s diskrétnym časom

Definícia 2.7 *Postupnosť celočíselných náhodných veličín* $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *s množinou stavov* $S \subset \mathbb{Z}$ *a časovým priestorom* $T = \{0, 1, 2, \dots\} \equiv \mathbb{N}_0$ *sa nazýva* ***Markovov reťazec s diskrétnym časom****, ak spĺňa Markovskú vlastnosť v tvare: pre každé* $n \in \mathbb{N}_0$ *a ľubovoľné* $i_1, \dots, i_n \in S$ *je*

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_1 = i_1,\ \dots,\ X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)\,.$$

Poznámka 2.5 Definícia 2.7 je špeciálnym prípadom definície 2.1. Realizácia procesu tu prebieha tak, že proces v diskrétnych časových okamihoch (krokoch) prechádza (skočí) zo stavu i do stavu j. Označenie pravdepodobnosti prechodu je

$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{i,j}(n, n+1)$	...	pravdepodobnosť prechodu po jednom kroku
$P(X_{n+k} = j \mid X_n = i) = p_{i,j}(n, n+k)$	...	pravdepodobnosť prechodu po k krokoch.

Poznámka 2.6 Ak je Markovov reťazec *homogénny*, tak pre každé $n \in \mathbb{N}_0$

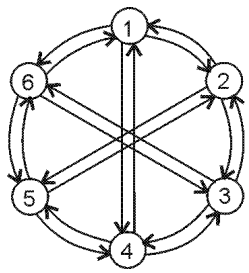
$$\begin{aligned} p_{i,j}(n, n+1) &= p_{i,j}(1) = p_{ij}, \\ p_{i,j}(n, n+k) &= p_{i,j}(k). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pokiaľ nebude povedané inak, v tejto kapitole budeme uvažovať homogénne Markovove reťazce s diskrétnym časom, zadávané maticou $\widetilde{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$.

Príklad 2.1 Na kružnici je rovnomerne rozložených 6 bodov. Častica sa môže premiestňovať z bodu do bodu za časovú jednotku (1 krok) nasledovne: z daného bodu, v ktorom sa nachádza, sa premiestni do jedného z najbližších susedných bodov s rovnakou pravdepodobnosťou 1/4 alebo do bodu symetrického podľa stredu s pravdepodobnosťou 1/2. Zapíšme maticu pravdepodobnosti prechodu, nakreslime diagram prechodu a zistime, či je matica dvojne stochastická.

Riešenie. Náhodný proces, ktorý modeluje reálny pohyb častice je zrejme homogénny Markovov reťazec s diskrétnym časom, s pravdepodobnosťami prechodu $p_{i,j}(n, n+1) = p_{i,j}(1) = p_{i,j}$, $i, j = 1, 2 \dots, 6$, $n \in \mathbb{N}_0$. Matica pravdepodobnosti prechodu je $\widetilde{P}(1) = \widetilde{P}$, diagram prechodu je na obrázku. Keďže súčet prvkov v každom riadku aj v každom stĺpci je 1, matica $\widetilde{P}$ je dvojne stochastická.

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$



□

Veta 2.3 *Nech $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ je homogénny Markovov reťazec s konečným počtom stavov $|S| = s < \infty$ a maticou pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P} = (p_{i,j})_{i,j\in S}$. Potom pre maticu pravdepodobnosti prechodu po n krokoch platí*

$$\widetilde{P}(n) = \widetilde{P}^n, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.5}$$

Dôkaz. Použijeme metódu matematickej indukcie.
1. krok: Dokážeme (2.5) pre $n = 2$, t.j. že platí $\widetilde{P}(2) = \widetilde{P}^2$. Podľa Chapman–Kolmogorovových rovníc

$$p_{i,k}(2) = \sum_{j\in S} p_{i,j}(1) \cdot p_{j,k}(1), \quad i, j, k \in S\,.$$

Zápis v maticovom tvare je: $\widetilde{P}(2) = \widetilde{P}(1) \cdot \widetilde{P}(1) = \widetilde{P}^2$.
2. krok: Predpokladajme platnosť (2.5) pre $n-1$, teda indukčný predpoklad je: $\widetilde{P}(n-1) = \widetilde{P}^{n-1}$. Dokážeme, že z platnosti (2.5) pre $n-1$ vyplýva platnosť (2.5) aj pre n. Podľa Chapman–Kolmogorovových rovníc

$$p_{i,k}(n) = \sum_{j\in S} p_{i,j}(n-1) \cdot p_{j,k}(1)\,.$$

Ekvivalentný maticový zápis je

$$\widetilde{P}(n) = \widetilde{P}(n-1) \cdot \widetilde{P}(1) = \widetilde{P}^{n-1} \cdot \widetilde{P} = \widetilde{P}^n\,. \qquad \square$$

Veta 2.4 *Nech $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ je konečný homogénny Markovov reťazec s maticou pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P} = (p_{i,j})_{i,j\in S}$. Nech absolútna pravdepodobnosť stavu j po n krokoch je $p_j(n)$. Potom pre vektor absolútnych pravdepodobností po n krokoch platí*

$$\bar{p}(n) = \bar{p}(n-1) \cdot \widetilde{P} = \bar{p}(0) \cdot \widetilde{P}^n, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.6}$$

Dôkaz. Použijeme opäť metódu matematickej indukcie.
1. krok: Dokážeme (2.6) pre $n = 1$, t.j. že platí $\bar{p}(1) = \bar{p}(0) \cdot \widetilde{P}$. Podľa vety o úplnej pravdepodobnosti

$$p_j(1) = P(X_1 = j) = \sum_{i\in S} P(X_0 = i) \cdot P(X_1 = j \mid X_0 = i) = \sum_{i\in S} p_i(0) \cdot p_{i,j}(1)\,.$$

V maticovom tvare teda platí $\bar{p}(1) = \bar{p}(0) \cdot \widetilde{P}$.
2. krok: Predpokladáme platnosť (2.6) pre $n-1$, teda indukčný predpoklad je: $\bar{p}(n-1) = \bar{p}(0) \cdot \widetilde{P}^{n-1}$. Podľa vety o úplnej pravdepodobnosti a využitím indukčného predpokladu dostaneme

$$p_j(n) = P(X_n = j) = \sum_{i\in S} p_i(n-1) \cdot p_{i,j}(1)\,.$$

Maticový zápis

$$\bar{p}(n) = \bar{p}(n-1) \cdot \widetilde{P} = \bar{p}(0) \cdot \widetilde{P}^{n-1} \cdot \widetilde{P} = \bar{p}(0) \cdot \widetilde{P}^n\,. \qquad \square$$

Príklad 2.2 Automat na predaj lístkov môže fungovať po vhodení mince o hodnote 50 centov alebo 1 euro. V prvom prípade vydá lístok, ak ešte nie je plný zásobník na 50-centové mince, do ktorého ich vojde 100. Po vhodení 1 eurovej mince automat vydá lístok a vráti 50 centov, pokiaľ má v zásobníku aspoň jednu 50-centovku. Ak sa zásoba 50-centových mincí minie alebo je zásobník plný, automat sa vypína. Je známe, že 50-centovky resp. 1-eurové mince sú vhadzované s pravdepodobnosťou 0,7 resp. 0,3. Nech stav j znamená, že v zásobníku je j 50-centoviek. Nájdime maticu pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P}$ a absolútne pravdepodobnosti po vhodení 2 mincí, ak predtým bola v zásobníku jedna 50-centová minca.

Riešenie. Zrejme $S = \{0, 1, \ldots, 100\}$; $\bar{p} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$. Máme určiť $\widetilde{P}$ a $\bar{p}(2)$. Platí

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{p}(1) = \bar{p}(0) \cdot \widetilde{P} = (0, 1, 0, \ldots, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (0{,}3; 0; 0{,}7; 0, \ldots, 0)\,.$$

$$\bar{p}(2) = \bar{p}(1) \cdot \widetilde{P} = (0{,}3; 0; 0{,}7; 0, \ldots, 0) \cdot \widetilde{P} = (0{,}3; 0{,}21; 0; 0{,}49; 0; \ldots; 0)\,. \qquad \square$$

Klasifikácia Markovových reťazcov s diskrétnym časom sa koná na základe vlastností, uvedených v nasledujúcich definíciách.

Definícia 2.8 *Markovov reťazec sa nazýva*

- ***konečný****, ak má konečný počet stavov, čo označíme $|S| = s < \infty$,*
- ***nerozložiteľný****, ak každý stav j je dosiahnuteľný z každého iného stavu i, t.j. ak existuje $n \in \mathbb{N}$: $p_{i,j}(n) > 0$ pre každé $i, j \in S$, inak je reťazec* ***rozložiteľný****,*
- ***periodický****, ak existuje také celé číslo $d > 1$, že návrat do ľubovoľného stavu je možný len po celočíselnom násobku d krokov (číslo d sa nazýva* ***perióda****),*
- ***absorpčný****, ak obsahuje uzavretú triedu C takých stavov, z ktorých žiaden stav mimo tejto triedy nie je dosiahnuteľný. Ak C je jednoprvková množina, tak daný stav j je absorpčný a platí $p_{j,j} = 1$.*

- ***regulárny***, *ak existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že n-tá mocnina matice pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P}^n$ neobsahuje nulové prvky.*

Príklad 2.3 Markovov reťazec má maticu pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Zistime, či spĺňa vlastnosti z definície 2.8.

Riešenie. Keďže $|S| = 3 < \infty$, MR je konečný. Stav 1, 2, 3 sú navzájom dosiahnuteľné, teda MR je nerozložiteľný a nie je absorpčný. Je neperiodický, lebo na hlavnej diagonále sú kladné prvky. Čo sa týka regulárnosti, podľa definície stačí nájsť také $n \in \mathbb{N}$, že $\widetilde{P}^n$ bude mať všetky prvky kladné. Už pre $n = 2$ je $p_{i,j}(2) > 0$, pre všetky $i, j = 1, 2, 3$

$$\widetilde{P}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}49 & 0{,}45 & 0{,}06 \\ 0{,}08 & 0{,}70 & 0{,}22 \\ 0{,}40 & 0{,}45 & 0{,}15 \end{pmatrix},$$

takže daný Markovov reťazec je regulárny. □

Definícia 2.9 *Homogénny neperiodický Markovov reťazec sa nazýva* ***ergodický****, ak existujú limitné pravdepodobnosti*

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = \pi_j\,, \quad i, j \in S\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

nezávisle na počiatočnom stave i. Vektor $\bar{\pi} = (\pi_j)_{j\in S}$ sa nazýva ***stacionárne rozdelenie*** *Markovovho reťazca.*

Veta 2.5 *Nech $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ je ergodický Markovov reťazec. Potom stacionárne rozdelenie $\bar{\pi} = (\pi_j)_{j\in S}$ nájdeme ako jediné riešenie sústavy*

$$\begin{aligned} \bar{\pi} &= \bar{\pi} \cdot \widetilde{P} \\ \sum_{j\in S} \pi_j &= 1\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dôkaz. a) Najprv dokážeme existenciu riešenia, teda že stacionárne rozdelenie $\bar{\pi}$ vyhovuje (2.7). Podľa Chapman - Kolmogorovovej vety

$$p_{i,k}(n) = \sum_{j\in S} p_{i,j}(n-1) \cdot p_{j,k}(1)\,. \tag{2.8}$$

Z predpokladu ergodicity vieme, že existujú limity: $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n-1) = \pi_j$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,k}(n) = \pi_k$. Limitným prechodom v (2.8) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,k}(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} p_{i,j}(n-1) \cdot p_{j,k}(1) = \sum_{j\in S} \lim_{n\to\infty} p_{i,j}(n-1) \cdot p_{j,k}\,,$$

$\pi_k = \sum_{j\in S} \pi_j \cdot p_{j,k}$, resp. $\bar{\pi} = \bar{\pi} \cdot \widetilde{P}$. Teda $\bar{\pi}$ je riešením (2.7).
b) Teraz dokážeme jednoznačnosť riešenia (2.7). Nech okrem $\bar{\pi}$ existuje aj iné pravdepodobnostné rozdelenie $\bar{q} = (q_j)_{j\in S}$ vyhovujúce (2.7), t. j. nech platí

$$q_k = \sum_{j\in S} q_j \cdot p_{j,k}(1), \quad \sum_{j\in S} q_j = 1. \tag{2.9}$$

Ak vynásobíme prvú rovnicu číslom $p_{k,l}(1)$ a sčítame cez $k \in S$, dostaneme využitím Chapman - Kolmogorovovej rovnice

$$\begin{aligned} \sum_{k\in S} q_k \cdot p_{k,l}(1) &= \sum_{k\in S}\sum_{j\in S} q_j \cdot p_{j,k}(1) \cdot p_{k,l}(1) \\ q_l &= \sum_{j\in S} q_j \cdot p_{j,l}(2) \end{aligned}$$

Ak tento postup násobenia s sčitovania opakujeme n-krát, dostaneme

$$q_m = \sum_{j\in S} q_j \cdot p_{j,m}(n).$$

Využitím limity

$$q_m = \sum_{j\in S} q_j \lim_{n\to\infty} p_{j,m}(n) = \sum_{j\in S} q_j \pi_m = \pi_m \cdot \sum_{j\in S} q_j \overset{(2.9)}{=} \pi_m$$

Teda $\bar{q} \equiv \bar{\pi}$, čiže riešenie je jednoznačné. □

Poznámka 2.7 V ergodickom reťazci podmienka $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = \pi_j$, $i, j \in S$, znamená $\lim_{n\to\infty} \widetilde{P}(n) = \widetilde{\pi}$, pričom každý riadok matice $\widetilde{\pi}$ bude rovnaký a rovný $\bar{\pi} = (\pi_j)_{j\in S}$.

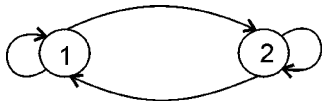
Príklad 2.4 Podnik dodáva na trh nový výrobok, ktorý možno charakterizovať dvoma stavmi:

1. výrobok je úspešný (predá sa aspoň určitý počet),
2. výrobok je neúspešný (predá sa menej ako požadovaný počet).

Vieme, že ak je výrobok úspešný v jednom období, ostáva úspešný aj v ďalšom období s pravdepodobnosťou 0,5 a stáva sa neúspešným s pravdepodobnosťou 0,5. Ak bol výrobok neúspešný, ostáva neúspešný s pravdepodobnosťou 0,6 a stáva sa úspešným s pravdepodobnosťou 0,4. Určme maticu pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P}$, diagram prechodu a stacionárne rozdelenie Markovovho reťazca.
Riešenie.

$$\left.\begin{aligned} p_{1,1} &= 0{,}5\,; \quad p_{1,2} = 0{,}5 \\ p_{2,1} &= 0{,}4\,; \quad p_{2,2} = 0{,}6 \end{aligned}\right\} \quad \widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Diagram prechodu je na obrázku 2.2:



Obr. 2.2

Stacionárne rozdelenie určíme riešením sústavy:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\pi} &= \bar{\pi} \cdot \widetilde{P} \\ \sum_{j=1}^{2} \pi_j &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}5\pi_1 + 0{,}4\pi_2 \\ \pi_2 &= 0{,}5\pi_1 + 0{,}6\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \pi_1 = \frac{4}{9}, \quad \pi_2 = \frac{5}{9} \Rightarrow \bar{\pi} = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right).$$

□

2.3 Klasifikácia stavov Markovovho reťazca

Pri klasifikácii stavov Markovovho reťazca vychádzame z pravdepodobnosti prechodu $p_{i,j}(n)$, resp. z pravdepodobnosti 1. návratu do daného stavu $f_{j,j}(n)$, ktorú zadefinujeme neskôr.

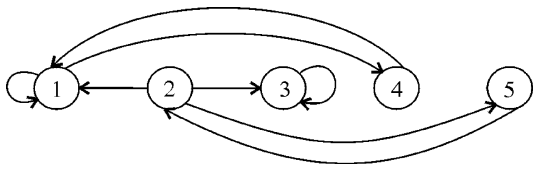
Definícia 2.10 *Hovoríme, že stav j je **dosiahnuteľný** zo stavu i, ak existuje $n \in \mathbb{N}$: $p_{i,j}(n) > 0$. Stavy i, j sú **navzájom dosiahnuteľné (komunikujúce, súsledné)**, ak existujú $m, n \in \mathbb{N}$ také, že $p_{i,j}(n) > 0$ a $p_{j,i}(m) > 0$.*

Definícia 2.11 *Hovoríme, že stav j je **absorpčný**, ak do stavu j existuje vstup ($\exists n \in \mathbb{N} : p_{i,j}(n) > 0$), ale neexistuje výstup ($\forall m \in \mathbb{N} : p_{j,j}(m) = 1$).*

Poznámka 2.8 Zrejme Markovov reťazec, ktorý má absorpčné stavy dosiahnuteľné zo všetkých neabsorpčných stavov, pre $n \to \infty$ končí v niektorom absorpčnom stave.

Príklad 2.5 Zistime podľa diagramu prechodu, či má Markovov reťazec, daný množinou stavov $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a maticou pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P}$, absorpčné stavy a či je rozložiteľný, ak

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Obr. 2.3

Riešenie.
Z diagramu prechodu na obrázku 2.3 vidieť, že $\{1,4\}$ a $\{3\}$ tvoria uzavreté podmnožiny, teda reťazec je rozložiteľný. Stav $j = 3$ je absorpčný stav. □

Definícia 2.12 *Hovoríme, že* ***stav*** *j* ***je periodický*** *s periódou $d > 1$, ak*

1. *$p_{j,j}(k) > 0 \Leftrightarrow k$ je celočíselný násobok d, inak $p_{j,j}(k) = 0$,*
2. *d je najmenšie celé číslo s vlastnosťou 1.*

Príklad 2.6 Zistime, či Markovov reťazec so stavmi $S = \{1,2,3,4\}$ a s maticou pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ má periodické stavy.

Riešenie.

Stavy $\{3,4\}$ sú periodické s periódou $d = 2$, tvoria uzavretý systém a platí:
$p_{3,3}(2n) = p_{4,4}(2n) = 1$ a $p_{3,3}(2n-1) = p_{4,4}(2n-1) = 0$, pre všetky $n \in \mathbb{N}$.
Stavy $\{1,2\}$ sú tiež periodické s periódou $d = 2$, keďže $p_{1,1}(2n) = p_{2,2}(2n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ a $p_{1,1}(2n-1) = p_{2,2}(2n-1) = 0$. Ich limitné pravdepodobnosti návratu sú však nulové, ako to vidieť z prvých mocnín matice $\widetilde{P}$:

$$\widetilde{P}^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{P}^4 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Teraz zavedieme pojmy, ktoré budeme potrebovať pri ďalšej klasifikácii stavov Markových reťazcov.

Definícia 2.13 ***Dobou 1. návratu*** *do stavu j nazývame náhodný (Markovský) čas*

$$\tau_j(1) = \inf\{n \in \mathbb{N};\ X_n = j\}\,.$$

Dobou k-tého návratu *do stavu j nazývame náhodný čas*

$$\tau_j(k) = \inf\{n \in \mathbb{N};\ n > \tau_j(k-1);\ X_n = j\}\,.$$

Poznámka 2.9 Označme si pravdepodobnosť toho, že 1. návrat do stavu j nastáva po n krokoch ako $f_{j,j}(n)$, pravdepodobnosť toho, že sa Markovov reťazec vôbec niekedy vráti do stavu j ako $f_{j,j}$. Potom rozdelenie doby 1. návratu definujeme vzťahom

$$\begin{aligned} f_{j,j}(n) &= P(X_n = j, X_{n-1} \neq j,\ \ldots,\ X_1 \neq j \mid X_0 = j)\,, \\ f_{j,j} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{j,j}(n)\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Označme si ďalej ako $f_{i,j}(n)$ pravdepodobnosť toho, že 1. vstup do stavu j nastáva po n krokoch, ak počiatočný stav bol i. Potom zrejme

$$\begin{aligned} f_{i,j}(n) &= P(X_n = j, X_{n-1} \neq j,\ \ldots,\ X_1 \neq j \mid X_0 = i)\,, \\ f_{i,j} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}(n) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Definícia 2.14 *Stav j sa nazýva* ***trvalý (rekurentný, návratný)****, ak $f_{j,j} = 1$. Stav j sa nazýva* ***prechodný (transientný, nenávratný)****, ak $f_{j,j} < 1$.*

Definícia 2.15 ***Trvalý*** *stav j sa nazýva* ***nenulový****, ak stredná doba 1. návratu je konečná, t.j. platí*

$$\mu_j = E\big(\tau_j(1)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{j,j}(n) < \infty\,.$$

Trvalý stav j je ***nulový****, ak $\mu_j = \infty$.*

Definícia 2.16 *Stavy trvalé, nenulové, neperiodické sa nazývajú* ***ergodické****.*

Veta 2.6 *V homogénnom Markovovom reťazci platia nasledujúce rekurentné vzťahy*

a) $p_{i,j}(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_{i,j}(k) \cdot p_{j,j}(n-k)$,

b) $f_{i,j}(1) = p_{i,j}$
$f_{i,j}(n) = \sum\limits_{k \neq j} p_{i,k} \cdot f_{k,j}(n-1), \quad n \geq 2.$

Dôkaz. Ad a) Podľa vety o úplnej pravdepodobnosti a využitím Markovskej vlastnosti

$$\begin{aligned} p_{i,j}(n) &= P(X_n = j \mid X_0 = i) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X_k = j, X_{k-1} \neq j,\ \ldots,\ X_1 \neq j \mid X_0 = i) \cdot \\ &\quad \cdot P(X_n = j \mid X_k = j, X_{k-1} \neq j,\ \ldots,\ X_1 \neq j, X_0 = i) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{i,j}(k) \cdot P(X_n = j \mid X_k = j) = \sum_{k=1}^{n} f_{i,j}(k) \cdot p_{j,j}(n-k)\,. \end{aligned}$$

Ad b) Zrejme $f_{i,j}(1) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{i,j}(1) = p_{i,j}$.

Pre druhý vzťah je dôkaz podobný ako v bode a), opäť využívame vetu o úplnej pravdepodobnosti a Markovskú vlastnosť

$$\begin{aligned}
&f_{i,j}(n) = P(X_n = j,\, X_{n-1} \neq j,\, \ldots,\, X_1 \neq j \mid X_0 = i) = \\
&= \sum_{k \in S} P(X_1 = k \mid X_0 = i) \cdot P(X_n = j,\, X_{n-1} \neq j,\, \ldots,\, X_1 \neq j \mid X_1 = k, X_0 = i) = \\
&= \sum_{k \in S, k \neq j} p_{i,k}(1) \cdot P(X_n = j, X_{n-1} \neq j,\, \ldots,\, X_2 \neq j \mid X_1 = k) = \\
&= \sum_{k \in S, k \neq j} p_{i,k} \cdot f_{k,j}(n-1).
\end{aligned}$$

□

Poznámka 2.10 Podľa Vety 2.6 pre $i = j$ a $|S| = s < \infty$ platí

$$\begin{aligned}
f_{j,j}(1) &= p_{j,j} \\
f_{j,j}(n) &= \sum_{k \in S, k \neq j} p_{j,k} \cdot f_{k,j}(n-1), \quad n \geq 2,
\end{aligned}$$

resp.

$$f_{j,j}(n) = (p_{j,1}, p_{j,2}, \ldots, p_{j,j-1}, p_{j,j+1}, \ldots, p_{j,s}) \cdot {}^{j}\widetilde{P}^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} p_{1,j} \\ p_{2,j} \\ \vdots \\ p_{j-1,j} \\ p_{j+1,j} \\ \vdots \\ p_{s,j} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

kde zápis ${}^{j}\widetilde{P}^{n-2}$ znamená, že v pôvodnej matici $\widetilde{P} = (p_{i,j})_{i,j \in S}$ je vynechaný j-ty riadok a j-ty stĺpec, pričom nová matica je umocnená na $n-2$.

Príklad 2.7 Markovov reťazec je daný stavmi $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a maticou pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P}$. Klasifikujme jeho stavy podľa f_{jj}.

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Stavy reťazca klasifikujeme podľa Definícií 2.14, 2.15 a využitím Vety 2.6. Označme si ako ${}^{i}\widetilde{P}$ maticu, ktorú dostaneme z matice $\widetilde{P}$ vynechaním i-tého riadku a i-tého stĺpca. Riadkový resp. stĺpcový vektor pri výpočte $f_{i,i}(n)$ získame

vynechaním i-tého prvku v i-tom riadku resp. stĺpci matice $\widetilde{P}$.
Stav $j = 1$

$$\begin{aligned}
f_{1,1}(1) &= p_{1,1} = 1/2 \\
f_{1,1}(2) &= \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right) \cdot \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^T = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
f_{1,1}(3) &= \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right) \cdot {}^1\widetilde{P} \cdot \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^T = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
&\vdots \\
f_{1,1}(n) &= \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^n .
\end{aligned}$$

Potom $f_{1,1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{1,1}(n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \Rightarrow$ stav j je trvalý.
Stredná doba 1. návratu je

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{1,1}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 < \infty ,$$

teda stav $j = 1$ je trvalý nenulový.
Stav $j = 2$

$$\begin{aligned}
f_{2,2}(1) &= p_{2,2} = 1/2 \\
f_{2,2}(2) &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0\right) \cdot (0, 0, 0, 0)^T = 0 \\
&\vdots \\
f_{2,2}(n) &= 0
\end{aligned}$$

Potom $f_{2,2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{2,2}(n) = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ stav $j = 2$ je prechodný.

Podobným výpočtom dostaneme pre stavy $j = 3, 4, 5$ nasledujúce výsledky:
Stav $j = 3$ – je trvalý, nenulový, $\mu_3 = 2 < \infty$, $f_{3,3}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 1$.
Stav $j = 4$ – je prechodný, $f_{4,4}(1) = \frac{1}{2}$, $f_{4,4}(n) = 0$, $n \geq 2$.
Stav $j = 5$ – je prechodný, $f_{5,5}(n) = 0$, pre $n \geq 1$. □

Teraz v nadväznosti na predchádzajúce úvahy o typoch stavov reťazcov uvedieme 10 tvrdení, ktoré budú slúžiť ako kritéria pre klasifikáciu stavov Markovovho reťazca. Dôkazy uvedených tvrdení záujemca nájde napríklad v citovanej literatúre [1], [16] alebo [26].

Kritéria klasifikácie stavov Markovových reťazcov:

K1 – Stav j je trvalý, ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{j,j}(n) = \infty$ a prechodný, ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{j,j}(n) < \infty$.

K2 – Trvalý stav je nenulový, ak $\lim\limits_{n\to\infty} p_{j,j}(n) > 0$, nulový, ak $\lim\limits_{n\to\infty} p_{j,j}(n) = 0$.

K3 – Ak je stav j prechodný, potom $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = 0$, t.j. stav j „vymizne“ pri $n \to \infty$ (opak neplatí).

K4 – Nech stav j je ergodický, potom platí
$\lim\limits_{n\to\infty} p_{j,j}(n) = \frac{1}{\mu_j} > 0\,; \quad \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = \frac{1}{\mu_j} f_{i,j}, \;\; i \neq j.$

K5 – V konečnom Markovovom reťazci platí

a) nemôžu byť všetky stavy prechodné,
b) neexistujú stavy trvalé nulové.

K6 – V nerozložiteľnom Markovovom reťazci sú všetky stavy rovnakého typu.

K7 – V nerozložiteľnom Markovovom reťazci existuje stacionárne rozdelenie práve vtedy, ak sú všetky stavy trvalé, nenulové.

K8 – V nerozložiteľnom Markovovom reťazci s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ sú všetky stavy prechodné, ak systém rovníc

$$x_j = \sum_{k=1}^{\infty} p_{j,k} \cdot x_k \,, j = 1, 2, \dots,$$

má netriviálne, ohraničené riešenie z intervalu $(0, 1\rangle$.

K9 – Konečný Markovov reťazec je rozložiteľný, ak po prípadnej permutácii (prečíslovaní) riadkov a stĺpcov je matica pravdepodobnosti prechodu tvaru

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix},$$

pričom $\widetilde{P}_1$ a $\widetilde{P}_4$ sú štvorcové matice a $\widetilde{P}_1$ odpovedá uzavretej podmnožine stavov.

K10 – Ak má Markovov reťazec absorpčný stav j, tak pravdepodobnosť absorpcie týmto stavom dostaneme ako riešenie sústavy

$$\bar{b} = \widetilde{P} \cdot \bar{b}\,,$$

kde $\bar{b}$ je stĺpcový vektor pravdepodobností absorpcie stavom j, ak počiatočný stav bol i, pričom položíme $b_j = 1$ a $b_k = 0$, ak k je tiež absorpčný stav.

Príklad 2.8 Zistime, či Markovov reťazec daný stavmi $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ a maticou pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P}$ má stacionárne rozdelenie a klasifikujme jeho stavy

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & \dots \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Markovov reťazec je nerozložiteľný, teda všetky stavy sú rovnakého typu podľa K6. Stacionárne rozdelenie nájdeme riešením sústavy

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \dots \\ \pi_1 &= \frac{1}{2}\pi_0 \\ \pi_2 &= \frac{2}{3}\pi_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\pi_0 = \frac{1}{3}\pi_0 \\ &\vdots \\ \pi_j &= \frac{j}{j+1}\pi_{j-1} = \dots = \frac{1}{j+1}\pi_0 \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

Podľa normovacej podmienky má platiť $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, ale v našom prípade je $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \pi_j = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1}\pi_0 = \pi_0 \cdot \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} \neq 1$ pre všetky $\pi_0 \in (0, 1)$, preto stacionárne rozdelenie neexistuje. Teda podľa K6 sú všetky stavy buď prechodné, alebo trvalé nulové. Podľa K8 zistíme, či sú stavy prechodné. Riešením sústavy $x_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{jk} \cdot x_k$, $j = 1, 2, \dots$ dostávame $x_1 = \frac{2}{3}x_2$; $x_2 = \frac{3}{4}x_3, \dots, x_{k-1} = \frac{k}{k+1}x_k$ pre $k = 1, 2, \dots$. Postupným dosadzovaním do rekurentného vzorca

$$x_k = \frac{k+1}{k}x_{k-1} = \frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k-1}x_{k-2} = \dots = \frac{k+1}{2}x_1 .$$

Keďže $x_k \to \infty$ pre $k \to \infty$, neexistuje netriviálne ohraničené riešenie danej sústavy, teda stavy nie sú prechodné. Všetky stavy sú teda trvalé nulové. □

2.4 Markovove reťazce s ocenením prechodu

Uvažujme prípad, kedy každej pravdepodobnosti prechodu $p_{i,j}$ v Markovovom reťazci je priradené určité *ocenenie prechodu* $r_{i,j}$, $i, j \in S$, teda matici pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P} = (p_{i,j})_{i,j\in S}$ odpovedá matica ocenenia prechodu $\widetilde{R} = (r_{i,j})_{i,j\in S}$. Ocenenie pritom môže znamenať výnos (zisk), alebo náklady (stratu).

Veta 2.7 *Nech celkový očakávaný výnos za n období je*

$$\bar{v}(n) = \Big(v_1(n), v_2(n),\ \ldots,\ v_s(n)\Big)^T, \quad s = |S|\,,$$

kde $v_i(n)$ je očakávaný výnos za n období, ak počiatočný stav bol $i \in S$. Položme $\bar{v}(0) = 0$, $\bar{v}(1) = \bar{q} = (q_1, \ldots, q_s)^T$, kde $q_i = \sum_{j\in S} p_{i,j} r_{i,j}$. Potom pre celkový očakávaný výnos za n období platia rekurentné vzťahy

$$\bar{v}(n) = \bar{q} + \widetilde{P} \cdot \bar{v}(n-1)\,, \tag{2.13}$$

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j\in S} p_{i,j} \cdot v_j(n-1)\,,\ i \in S,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Dôkaz. Realizácia $(X_0 = i, X_1 = i_1,\ \ldots,\ X_n = i_n)$ dáva ocenenie Markovovho reťazca po n krokoch $r_{i,i_1} + r_{i_1,i_2} + \ldots + r_{i_{n-1},i_n}$. Pravdepodobnosť tejto realizácie je $p_{i,i_1} \cdot p_{i_1,i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1},i_n}$. Stredný (očakávaný) výnos za n období pri počiatočnom stave i je teda

$$\begin{aligned}
v_i(n) &= \sum_{i_1}\sum_{i_2}\ldots\sum_{i_n}\big(r_{i,i_1} + r_{i_1,i_2} + \ldots + r_{i_{n-1},i_n}\big)p_{i,i_1} \cdot p_{i_1,i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1},i_n} = \\
&= \sum_{i_1} p_{i,i_1} r_{i,i_1} \underbrace{\Big[\sum_{i_2} p_{i_1,i_2} \sum_{i_3} p_{i_2,i_3} \cdot \ldots \cdot \sum_{i_n} p_{i_{n-1},i_n}\Big]}_{1} + \\
&+ \sum_{i_1} p_{i,i_1} \Big[\sum_{i_2}\ldots\sum_{i_n}\big(r_{i_1,i_2} + \ldots + r_{i_{n-1},i_n}\big)p_{i_1,i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1},i_n}\Big] = \\
&= \sum_{i_1} p_{i,i_1} \cdot r_{i,i_1} + \sum_{i_1} p_{i,i_1} \cdot v_{i_1}(n-1) = q_i + \sum_{j\in S} p_{i,j} \cdot v_j(n-1).
\end{aligned}$$

□

Dôsledok 2.8 *Zo vzťahu* (2.13) *dostávame*

$$\bar{v}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{P}^k \cdot \bar{q}, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.15}$$

Dôkaz. Postupným dosadzovaním vzťahu (2.13) dostávame

$$\begin{aligned}
\bar{v}(n) &= \bar{q} + \widetilde{P} \cdot \bar{v}(n-1) = \bar{q} + \widetilde{P} \cdot \big[\bar{q} + \widetilde{P} \cdot \bar{v}(n-2)\big] = \\
&= \bar{q} + \widetilde{P} \cdot \bar{q} + \widetilde{P}^2 \cdot \big[\bar{q} + \widetilde{P} \cdot \bar{v}(n-3)\big] = \\
&= \bar{q} + \widetilde{P} \cdot \bar{q} + \widetilde{P}^2 \cdot \bar{q} + \widetilde{P}^3 \cdot \big[\bar{q} + \widetilde{P} \cdot \bar{v}(n-4)\big] = \ldots \\
&= \bar{q} + \widetilde{P} \cdot \bar{q} + \widetilde{P}^2 \cdot \bar{q} + \ldots + \widetilde{P}^{n-1} \cdot \bar{q} = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{P}^k \cdot \bar{q}\,.
\end{aligned}$$

□

Poznámka 2.11 Vzorec (2.15) je vhodný iba pre malé n. Ak je n veľké, určenie $\widetilde{P}^n$ je prácne. V prípade, že Markovov reťazec je ergodický, existuje stacionárne rozdelenie $\bar{\pi}$ a pre výpočet $\bar{v}(n)$ sa používa približný vzorec

$$\bar{v}(n) \approx (n-1)\widetilde{\pi} \cdot \bar{q} + \left[\tilde{I} - (\widetilde{P} - \tilde{\pi})\right]^{-1} \cdot \bar{q}\,, \tag{2.16}$$

kde A^{-1} je inverzná matica k A (pozri [26], s. 62).

Príklad 2.9 Úspešnosť výrobku na trhu modeluje Markovov reťazec s ocenením, pričom $S = \{1, 2\}$, kde 1 – znamená úspešnosť, 2 – neúspešnosť,

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{R} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}.$$

Určme celkový očakávaný výnos $\bar{v}(n)$ pre $n = 1$, $n = 2$ a približne pre $n = 20$.

Riešenie. Očakávaný výnos za 1 obdobie je $\bar{q} = (q_1, q_2)^T$, kde $q_i = \sum\limits_{j=1}^{2} p_{i,j} r_{i,j}$, teda

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \sum_{j=1}^{2} p_{1,j} r_{1,j} = 0,8 \cdot 10 + 0{,}2 \cdot 5 = 9 \\ q_2 &= \sum_{j=1}^{2} p_{2,j} r_{2,j} = 0,3 \cdot 10 + 0{,}7 \cdot (-20) = -11 \end{aligned}\right\} \quad \bar{v}(1) = \bar{q} = (9, -11)^T.$$

Výnos za $n = 2$ obdobia podľa vzťahu (2.13)

$$\bar{v}(2) = \bar{q} + \widetilde{P} \cdot \bar{v}(1) = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Výnos za $n = 20$ období odhadneme, podľa vzťahu (2.16). Najprv nájdeme stacionárne rozdelenie Markovovho reťazca riešením sústavy (2.7):

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}8\pi_1 + 0{,}3\pi_2 \\ \pi_2 &= 0{,}2\pi_1 + 0{,}7\pi_2 \\ \pi_1 &+ \pi_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \pi_1 = 0{,}6\,, \quad \pi_2 = 0{,}4, \quad \bar{\pi} = (0{,}6; 0{,}4).$$

Označme si $\widetilde{A} = \widetilde{I} - (\widetilde{P} - \widetilde{\pi})$ a nájdeme inverznú maticu $\widetilde{A}^{-1}$.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A = \frac{1}{0{,}5} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & -0{,}4 \\ -0{,}6 & 1{,}6 \end{pmatrix}.$$

Podľa (2.16) pre veľké n je

$$\bar{v}(n) \approx (n-1)\cdot\widetilde{\pi}\cdot\bar{q} + \left[\widetilde{I} - (\widetilde{P} - \widetilde{\pi})\right]^{-1}\cdot\bar{q} =$$
$$= (n-1)\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}4 & -0{,}4 \\ -0{,}6 & 1{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+16 \\ n-24 \end{pmatrix}.$$

Pre $n = 20$ je $\bar{v}(20) \approx (36, -4)^T$, t.j. očakávaný zisk je 36, ak výrobok na začiatku bol úspešný a očakávaná strata je -4, ak výrobok na začiatku bol neúspešný. □

2.5 Markovove reťazce s diskontovaným ocenením

Tento model sa používa hlavne v súvislosti s investíciami a obnovami. V dôsledku časovej hodnoty peňazí treba budúci výnos diskontovať faktorom $\beta = \frac{1}{1+i}$, kde i je úroková sadzba. Keďže $\beta \in (0,1)$, hodnota výnosu diskontovaním sa zmenšuje.

Veta 2.9 *Celkový očakávaný výnos za n období, diskontovaný k počiatočnému okamihu (predlehotne), je daný rekurentným vzťahom*

$$\begin{aligned} \bar{v}(n) &= \bar{q} + \beta\cdot\widetilde{P}\cdot\bar{v}(n-1), \\ v_i(n) &= q_i + \beta\cdot\sum_{j\in S} p_{i,j}v_j(n-1), \quad n > 1. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dôkaz. Uvažujeme analogicky ako pri dôkaze Vety 2.7, len všetky výnosy diskontujeme predlehotne, t.j. upravujeme vzťah

$$v_i(n) = \sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_n}\left(r_{i,i_1} + \beta r_{i_1,i_2} + \beta^2 r_{i_2,i_3} + \ldots + \beta^{n-1} r_{i_{n-1},i_n}\right)\cdot$$
$$\cdot\, p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_{n-1},i_n} = \cdots = \sum_j p_{i,j}\cdot r_{i,j} + \sum_j p_{i,j}\cdot v_j(n-1).$$

□

Dôsledok 2.10 *Zo vzťahu* (2.17) *vyplýva*

$$\bar{v}(n) = \sum_{k=0}^{n-1}\beta^k\cdot\widetilde{P}^k\cdot\bar{q}\,. \tag{2.18}$$

Dôkaz. Analogicky ako dôkaz Dôsledku 2.8, postupným dosadzovaním vzťahu (2.17):

$$\bar{v}(n) = \bar{q} + \beta\cdot\widetilde{P}\cdot\bar{v}(n-1) = \bar{q} + \beta\cdot\widetilde{P}\cdot\left[\bar{q} + \beta\cdot\widetilde{P}\cdot\bar{v}(n-2)\right] =$$
$$= \cdots = \bar{q} + \beta\cdot\widetilde{P}\cdot\bar{q} + \beta^2\cdot\widetilde{P}^2\cdot\bar{q} + \cdots + \beta^{n-1}\cdot\widetilde{P}^{n-1}\cdot\bar{q}.$$

□

Poznámka 2.12 Ak sa v Markovovom reťazci ocenenie ustaľuje (stabilizuje), existuje limitná hodnota $\bar{v} = \lim_{n\to\infty}\bar{v}(n)$, ktorú dostaneme riešením sústavy

$$\bar{v} = \bar{q} + \beta\cdot\widetilde{P}\cdot\bar{v}\,. \tag{2.19}$$

Príklad 2.10 Nájdime limitný očakávaný výnos v stabilizovanom procese, pre ktorý $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, $\widetilde{R} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$, $\beta = \frac{1}{2}$.

Riešenie. $q_1 = \sum\limits_{j=1}^{2} p_{1,j} r_{1,j} = 6$, $q_2 = \sum\limits_{j=1}^{2} p_{2,j} r_{2,j} = -3$,

$$v_1 = q_1 + \beta \sum_{j=1}^{2} p_{1,j} v_j = 6 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\, v_1 + \frac{1}{2}\, v_2\right),$$

$$v_2 = q_2 + \beta \sum_{j=1}^{2} p_{2,j} v_j = -3 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\, v_1 + \frac{3}{5}\, v_2\right).$$

Odtiaľ $v_1 = \frac{138}{19}$, $v_2 = -\frac{42}{19}$, teda $\bar{v} = \left(\frac{138}{19}, -\frac{42}{19}\right)^T$. □

2.6 Riadenie Markovových reťazcov s ocenením

Uvažujme Markovov reťazec, v ktorom pravdepodobnosti prechodu resp. ocenenia nie sú jednoznačne dané, ale v každom kroku možno rozhodnúť medzi niekoľkými alternatívami $p_{i,j}$ resp. $r_{i,j}$. V takom prípade hovoríme o *Markovových rozhodovacích procesoch* alebo o *riadení Markovových reťazcov.*

Predpoklady:

1. Je daná množina všetkých alternatív (rozhodnutí) Z.
2. Pre všetky rozhodnutia $z \in Z$ poznáme odpovedajúce pravdepodobnosti ${}^z p_{i,j}$ a ocenenia ${}^z r_{i,j}$.

Úlohou je nájsť takú postupnosť rozhodnutí $\{\bar{z}(n)\}_{n \in N}$, pre ktorú bude stredná hodnota celkového očakávaného výnosu maximálna. *Kritériom optimality* je maximum $v_i(n)$, takže podľa vzťahu (2.14) požadujeme

$$\operatorname{opt} v_i(n) \equiv \hat{v}_i(n) = \max_{z \in Z} \left\{ {}^z q_i + \sum_{j \in S} {}^z p_{i,j} \hat{v}_j(n-1) \right\}. \tag{2.20}$$

Riešením je postupnosť optimálnych rozhodnutí, ktorú nájdeme metódou iterácií. Najčastejšie sa používa *Howardov iteračný postup* pre ergodické reťazce, ktorý spočíva v nasledujúcich dvoch krokoch (pozri [14]):

1. fáza určovania hodnôt ${}^z q_i$, $z \in \mathbb{Z}$, $i \in S$ a stratégie $\bar{z}(1)$,
2. fáza postupného zlepšovania stratégie $\bar{z}(n)$ s rastúcim n.

Ad 1). Prvá fáza vychádza zo vzťahu $\hat{v}_i(1) = \max\limits_{z \in Z}\{{}^z q_i\}$, $i \in S$.
Ad 2). Postupné zlepšovanie znamená opakovanie jednotlivých cyklov pre $n \geq 2$, pričom v ďalšom kroku vychádzame z optimálnej stratégie predchádzajúceho kroku podľa vzťahu (2.20). Iteračný postup končí, akonáhle riešenia dvoch po sebe idúcich iterácií sú rovnaké, t. j. $\bar{z}(n+1) = \bar{z}(n)$.

Vlastnosti Howardovho iteračného postupu:

1. každé ďalšie riešenie, ktoré sa našlo ako výsledok iteračného cyklu, zabezpečuje aspoň takú hodnotu očakávaného výnosu ako predchádzajúci cyklus,

2. iteračný postup končí po konečnom (nie veľkom) počte krokov.

Príklad 2.11 Určité zariadenie môže byť v dvoch stavoch: 1 – bezporuchová prevádzka, 2 – prevádzka s poruchami. Nech na začiatku každej zmeny (kroku) vieme, v akom stave zariadenie je a nech možno rozhodnúť vždy medzi dvoma alternatívami takto:

a) ak je zariadenie v stave 1, potom rozhodnutie je:
   1 ... nerob nič (pasívna stratégia),
   2 ... vykonaj údržbu (aktívna stratégia),
b) ak je zariadenie v stave 2, alternatívy sú:
   1 ... nerob nič (pasívna stratégia),
   2 ... vykonaj opravu (aktívna stratégia).

Nájdime optimálne riadenie odpovedajúceho Markovovho reťazca, ak uvedené alternatívy sa líšia hodnotami $p_{i,j}$, $r_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2\}$ podľa nasledujúcej tabuľky.

Stav i	Alternatíva z	${}^z p_{i,1}$	${}^z p_{i,2}$	${}^z r_{i,1}$	${}^z r_{i,2}$
$i = 1$	1	0,3	0,7	10	5
	2	0,65	0,35	7	-1
$i = 2$	1	0,2	0,8	5	1
	2	0,9	0,1	3	-20

Riešenie. Podľa Howardovho iteračného postupu realizujeme postupne
<u>1. krok</u>: Určíme všetky alternatívy výnosu a optimálne riadenie (za 1. krok).

$$\left.\begin{aligned} {}^1q_1 &= \sum_{j=1}^{2} {}^1p_{1,j}\,{}^1r_{1,j} = 0{,}3 \cdot 10 + 0{,}7 \cdot 5 = 6{,}5 \\ {}^2q_1 &= \sum_{j=1}^{2} {}^2p_{1,j}\,{}^2r_{1,j} = 0{,}65 \cdot 7 - 0{,}35 = 4{,}2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\hat{v}_1(1) = \max_{z \in Z}\left\{{}^1q_1, {}^2q_1\right\} = 6,5 \\ &z_1(1) = 1\,, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} {}^1q_2 &= \sum_{j=1}^{2} {}^1p_{2,j}\,{}^1r_{2,j} = 0{,}2\cdot 5 + 0{,}8\cdot 1 = 1{,}8 \\ {}^2q_2 &= \sum_{j=1}^{2} {}^2p_{2,j}\,{}^2r_{2,j} = 0{,}9\cdot 3 + 0{,}1(-20) = 0{,}7 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\hat{v}_2(1) = \max_{z\in Z}\{{}^1q_2, {}^2q_2\} = 1,8 \\ &z_2(1) = 1\,. \end{aligned}$$

Optimálna stratégia po 1. kroku je teda $\bar{z}(1) = (1,1)^T$.

<u>2. krok</u>: Podľa vzťahu (2.20) pre $n = 2$ má platiť

$$\begin{aligned} \hat{v}_1(2) &= \max_{z\in Z}\left\{{}^zq_1 + \sum_{j=1}^{2} {}^zp_{1,j}\cdot \hat{v}_j(1)\right\} = \\ &= \max\{6{,}5 + 0{,}3\cdot 6{,}5 + 0{,}7\cdot 1{,}8;\quad 4{,}2 + 0{,}65\cdot 6,5 + 0{,}35\cdot 1{,}8\} = \\ &= \max\{9{,}71;\ 9{,}055\} = 9{,}71 \Rightarrow z_1(2) = 1, \\ \hat{v}_2(2) &= \max_{z\in Z}\left\{{}^zq_2 + \sum_{j=1}^{2} {}^zp_{2,j}\cdot \hat{v}_j(1)\right\} = \\ &= \max\{1{,}8 + 0{,}2\cdot 6{,}5 + 0{,}8\cdot 1{,}8;\quad 0{,}7 + 0{,}9\cdot 6,5 + 0{,}1\cdot 1{,}8\} = \\ &= \max\{4{,}54;\ 6{,}73\} = 6{,}73 \Rightarrow z_2(2) = 2. \end{aligned}$$

Optimálna stratégia po 2. kroku je $\bar{z}(2) = (1,2)^T$.

<u>3. krok</u>: Podobne ako v 2. kroku zo vzťahu (2.20) pre $n = 3$

$$\begin{aligned} \hat{v}_1(3) &= \max\{14{,}124;\ 12{,}867\} = 14{,}124 \Rightarrow z_1(3) = 1, \\ \hat{v}_2(3) &= \max\{9{,}126;\ 10{,}112\} = 10{,}112 \Rightarrow z_2(3) = 2. \end{aligned}$$

Optimálna stratégia po 3. kroku je $\bar{z}(3) = (1,2)^T = \bar{z}(2)$, iteračný postup končí. Optimálne riadenie pre $n \geq 2$ je: $\bar{z}(n) = (1,2)^T$, teda ak je zariadenie na začiatku v stave 1, zvolíme si pasívnu alternatívu, ak na začiatku bolo zariadenie v stave 2, zvolíme aktívnu stratégiu. □

2.7 Cvičenia

2.1 Nech Y_k, $k = 1, 2, \ldots$ sú celočíselné, nezávislé náhodné veličiny. Nech $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, $X_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ tvorí Markovov reťazec.

2.2 Uvažujte symetrickú náhodnú prechádzku s diskrétnym časom, teda Markovov reťazec $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, pre ktorý

$$P(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = P(X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k) = \frac{1}{2}.$$

Ukážte, že náhodný proces $\{M_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, kde $M_n = \max\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ nemá Markovskú vlastnosť.

2.3 Hráči A, B hrajú opakovane hazardnú hru, ktorá môže skončiť len výhrou jedného z nich (remíza je vylúčená). V hre je kapitál K jednotiek, pričom na začiatku mal hráč A kapitál a, hráč B kapitál b. Ak vyhrá A, získa od B jednu jednotku kapitálu, ak prehrá, jednu jednotku kapitálu stratí (získa ju B). Hráči hrajú tak dlho, kým jeden z nich zbankrotuje. Pravdepodobnosť výhry hráčov A resp. B je p resp. q v každom kroku, výsledky pri opakovaní sú nezávislé. Nech X_n označuje kapitál, ktorý vlastní hráč A po n-tom kroku. Určte maticu pravdepodobnosti prechodu.

2.4 Uvažujte 2 urny A, B pričom každá obsahuje na začiatku N guličiek. Pri každom pokuse (kroku) sa náhodne vyberie z niektorej urny gulička a preloží sa do druhej. Nech X_n je počet guličiek v urne A po n krokoch. Nájdite počiatočné rozdelenie a maticu pravdepodobnosti prechodu.

2.5 Dokážte, že všetky dvojne stochastické matice $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$, kde $a \in (0,1)$, majú identické stacionárne rozdelenie.

2.6 Zistite, či je Markovov reťazec rozložiteľný a regulárny. Určte $\bar{\pi}$, ak existuje.

a) $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

2.7 Dvaja šachisti A, B hrajú spolu turnaj. Hráč A vyhrá každú partiu s pravdepodobnosťou p nezávisle na úspešnosti predchádzajúcich partií, prehrá s pravdepodobnosťou q a remizuje s pravdepodobnosťou $r = 1 - p - q$. Hráč B vyhrá partiu s pravdepodobnosťou $p + \varepsilon$, $p - \varepsilon$ resp. p v závislosti od toho, či v predchádzajúcej partii vyhral, prehral resp. remizoval. Analogicky prehrá s pravdepodobnosťou $q - \varepsilon$, $q + \varepsilon$ resp. q. Ktorý z hráčov má väčšiu šancu na výhru z dlhodobého hľadiska?

2.8 Klasifikujte stavy Markovovho reťazca s maticou pravdepodobnosti prechodu

a) $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$.

2.9 Nech množina stavov Markovovho reťazca je $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nájdite všetky uzavreté podmnožiny množiny stavov, ak prvky matice pravdepodobností prechodov sú: $p_{1,1} = p_{1,2} = p_{3,2} = \frac{1}{2}$, $p_{3,4} = p_{3,5} = p_{4,5} = \frac{1}{4}$, $p_{4,3} = \frac{3}{4}$, $p_{2,1} = p_{5,5} = 1$, $p_{i,j} = 0$ inak. Nájdite pravdepodobnosti absorpcie absorpčným stavom pri $X_0 = 3$.

2.10 Uvažujte súbor áut poistených v určitom roku. Predpokladajte tri možné stavy: 1 – auto je v prevádzke, 2 – auto je v oprave, 3 – auto je vyradené. Dokážte, že MR je rozložiteľný a ergodický. Určte $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3)$ a $\bar{p}(2)$, ak $\bar{p}(0) = (1/3, 1/3, 1/3)$. Stanovte pravdepodobnosť absorpcie stavom 3, ak matica pravdepodobnosti prechodu je

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.11 Dvaja hráči A, B dali dohromady do hry 5 eur. Hráč A hádže mincou. Ak padne rub (pravdepodobnosť 1/2) vyhráva 1 euro, ak padne líce prehráva 1 euro. Aká je pravdepodobnosť toho, že hráč A prehrá všetko, ak má v danom okamihu 3 eurá?

2.12 Študent univerzity počas štúdia úspešne ukončí ročník a postúpi do ďalšieho ročníka s pravdepodobnosťou p, opakuje ročník s pravdepodobnosťou r a zanechá štúdium s pravdepodobnosťou q $(p + q + r = 1)$. Predpokladajte, že pravdepodobnosti p, q, r sú konštantné. Výsledky štúdia potom možno popísať Markovovým reťazcom s množinou stavov i - štúdium v $i-$tom ročníku pre $i = 1, 2, \ldots, 5$; 6 - úspešné ukončenie štúdia, 7 - zanechanie štúdia.
Načrtnite diagram prechodu MR, nájdite maticu pravdepodobností prechodu $\widetilde{P}$ a určte pravdepodobnosť, že študent úspešne ukončí štúdium, ak je momentálne v prvom ročníku.

2.13 Pre homogénny Markovov reťazec je $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a pravdepodobnosti prechodu sú: $p_{0,4} = 1$, pre stav $i > 0$ sú možné prechody iba do stavov $j = 0, \ldots, i-1$ a to s rovnakou pravdepodobnosťou. Nájdite stacionárne rozdelenie (ak existuje) a klasifikujte stavy MR. Vypočítajte $P(X_1 = 2, X_2 = 0, X_3 = 4)$ a určte $\bar{p}(2)$ pri počiatočnom stave 3.

2.14 Markovov reťazec je daný nasledovne: $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $p_{i,i+1} = p$, pre $i = 0, 1, 2, \ldots$, $p_{0,0} = p_{i,i-1} = q$, pre $i = 1, 2, 3, \ldots$, pričom $q = 1–p$, $p \in (0, 1)$. Inak $p_{i,j} = 0$. Rozhodnite, či je Markovov reťazec rozložiteľný a periodický. Dokážte, že stacionárne rozdelenie existuje len pre prípad $p < q$ a že je to geometrické rozdelenie. Nakreslite diagram prechodu Markovovho reťazca.

2.15 Markovov reťazec so stavmi $S = \{0, 1, \ldots, 5\}$ má pravdepodobnosti prechodu $p_{0,0} = p_{5,5} = 1$, $p_{j,j+1} = 2/3$, $p_{j,j-1} = 1/3$, $p_{j,j} = 0$, pre $j = 1, 2, \ldots, 4$. Určte pravdepodobnosť absorpcie stavom $j = 0$. Klasifikujte stavy $j = 0$ a $j = 1$ podľa $f_{j,j}$ a určte μ_j, ak existuje.

2.16 Uvažujte postupnosť nezávislých hodov hracou kockou. Nech X_n znamená maximálny počet bodiek dosiahnutých do n-tého hodu. Potom zrejme $\{X_n\}$ je homogénny MR s množinou stavov $S = \{1, \ldots, 6\}$. Nájdite maticu prechodu po n krokoch a klasifikujte stavy reťazca podľa kritérií K1 a K2.

2.17 Náhodná prechádzka na priamke: Predpokladajte, že častica na priamke sa môže premiestňovať v každom kroku o jednotkovú dĺžku, pričom každé premiestnenie sa uskutočňuje s pravdepodobnosťou $0 < p < 1$ vpravo a s pravdepodobnosťou $q = 1 - p$ vľavo. Stavom systému v čase n sa rozumie poloha častice po n-tom premiestnení. Klasifikujte stavy takého reťazca.

2.18 Homogénny Markovov reťazec s ocenením prechodu je daný maticami $\widetilde{P}$, $\widetilde{R}$:

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{R} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Určte očakávané výnosy $\bar{q}$, $\bar{v}(2)$, $\bar{v}(n)$ a celkový očakávaný výnos v stabilizovanom procese, ak uvážime diskontný faktor $\beta = 0,2$.

2.19 Letecká spoločnosť pri zavádzaní nových liniek sleduje týždenne ich vyťaženosť. Označte: stav 1– dostatočná vyťaženosť linky, stav 2 – nedostatočná. Pri najjednoduchšom modeli riadenia sa vedenie rozhoduje medzi 2 alternatívami: 1 – prevádzkovať linku bez zmien, 2 – ponúknuť viac lacných leteniek. Nájdite optimálne riadenie po n krokoch, ak pravdepodobnosti a ocenenia prechodu sú:

Stav i	Alternatíva z	${}^z p_{i,1}$	${}^z p_{i,2}$	${}^z r_{i,1}$	${}^z r_{i,2}$
$i = 1$	1	0,6	0,4	80	70
	2	0,8	0,2	50	50
$i = 2$	1	0,4	0,6	30	-43
	2	0,7	0,3	20	-12

2.20 Výrobca pravidelne sleduje, či je jeho výrobok úspešný (1) alebo nie je (2). V oboch prípadoch sa môže rozhodnúť pre jednu z dvoch alternatív: 1 – pokračovať vo výrobe bez zmeny, 2 – vynaložiť prostriedky na reklamu. Nájdite optimálne riadenie MR a celkový očakávaný výnos v stabilizovanom procese pre prvú alternatívu, ak uvažujeme diskontný faktor 0,5.

Stav i	Alternatíva z	${}^z p_{i,1}$	${}^z p_{i,2}$	${}^z r_{i,1}$	${}^z r_{i,2}$
$i = 1$	1	0,5	0,5	9	3
	2	0,8	0,2	4	4
$i = 2$	1	0,4	0,6	3	-7
	2	0,7	0,3	1	-19

Kapitola 3

Špeciálne reťazce so spojitým časom

3.1 Markovove reťazce so spojitým časom

Definícia 3.1 *Náhodný proces* $\{X_t,\ t \in T\}$, *pre ktorý* $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, $T = \langle 0, \infty)$, *sa nazýva* ***Markovov reťazec so spojitým časom****, ak spĺňa Markovskú vlastnosť, t.j. pre všetky* $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < s < t$ *a ľubovoľné* $i_1, i_2, \dots, i_n$, $i, j \in S$ *platí*

$$P(X_t = j \mid X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2,\ \dots,\ X_{t_n} = i_n, X_s = i) = P(X_t = j \mid X_s = i)\,.$$

Pravdepodobnosť $P(X_t = j \mid X_s = i) = p_{i,j}(s,t)$ *sa nazýva* ***pravdepodobnosť prechodu*** *zo stavu* i *v čase* s *do stavu* j *v čase* t.

Poznámka 3.1 Markovov reťazec so spojitým časom sa vo všeobecnosti nezadáva maticou pravdepodobnosti prechodu ako to bolo pri Markovovom reťazci s diskrétnym časom, ale maticou intenzít prechodu, ktoré vyjadrujú elementárne zmeny pravdepodobnosti prechodu.

Definícia 3.2 *Matica* $\widetilde{Q}(t) = (q_{i,j}(t))_{i,j \in S}$, *pre ktorú platí* $q_{i,j}(t) = \lim\limits_{h \to 0_+} \frac{p_{i,j}(t,t+h)}{h}$, $i \neq j$; $q_{j,j}(t) = -\lim\limits_{h \to 0_+} \frac{1-p_{j,j}(t,t+h)}{h}$, $\sum\limits_{\forall j \in S} q_{i,j}(t) = 0$, *sa nazýva* ***matica intenzity prechodu****. Veličina* $q_{i,j}(t)$, $i \neq j$ *sa nazýva* ***intenzita prechodu*** *zo stavu* i *do stavu* j *v čase* t; $q_j(t) = -q_{j,j}(t)$ *sa nazýva* ***intenzita zotrvania*** *v stave* j *(intenzita výstupu) v čase* t.

Poznámka 3.2 Matica intenzity prechodu na rozdiel od matice pravdepodobnosti prechodu nie je stochastická, lebo súčet prvkov v riadkoch je 0, nie 1.

Poznámka 3.3 Dynamiku vývoja Markovovho reťazca so spojitým časom popisujú diferenciálne rovnice, ktoré odvodil A. N. Kolmogorov. Budeme rozlišovať prospektívne a retrospektívne Kolmogorovove diferenciálne rovnice (KDR).

Veta 3.1 (prospektívne KDR) *Nech platia nasledujúce predpoklady:*

1. $p_{i,j}(s,t)$ *sú spojitými funkciami času* s, t *a existujú limity*

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{p_{i,j}(t,t+h)}{h} = q_{i,j}(t), \quad i \neq j, \quad i,j \in S\,, \tag{3.1}$$

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{1-p_{i,i}(t,t+h)}{h} = q_i(t), \quad i \in S\,, \tag{3.2}$$

2.

$$\sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} q_{i,j}(t) = -q_{i,i}(t) = q_i(t) < \infty\,. \tag{3.3}$$

Potom $p_{i,k}(s,t)$ *pre* $0 \le s < t$, $i,k \in S$ *vyhovuje sústave prospektívnych Kolmogorovových diferenciálnych rovníc (KDR):*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{i,k}(s,t) &= -p_{i,k}(s,t)\cdot q_k(t) + \sum_{j\neq k} p_{i,j}(s,t)\cdot q_{j,k}(t) \\ p_{i,k}(s,s) &= \begin{cases} 0, & ak\ k \neq i, \\ 1, & ak\ k = i\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dôkaz. Podľa Chapman–Kolmogorovových rovníc pre $0 \le s < t < t+h$

$$p_{i,k}(s,t+h) = \sum_{j\in S} p_{i,j}(s,t)\cdot p_{j,k}(t,t+h)\,.$$

Po odpočítaní $p_{i,k}(s,t)$ od obidvoch strán rovnice a predelení hodnotou $h > 0$ dostávame pre $h \to 0_+$

$$p_{i,k}(s,t+h) - p_{i,k}(s,t) = -p_{i,k}(s,t)\cdot\big(1-p_{k,k}(t,t+h)\big) + \sum_{j\neq k} p_{i,j}(s,t)p_{j,k}(t,t+h),$$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0_+} \frac{p_{i,k}(s,t+h)-p_{i,k}(s,t)}{h} &= -p_{i,k}(s,t)\lim_{h\to 0_+}\frac{1-p_{k,k}(t,t+h)}{h} + \\ &\quad + \sum_{j\neq k} p_{i,j}(s,t)\lim_{h\to 0_+}\frac{p_{j,k}(t,t+h)}{h}\,. \end{aligned}$$

Podľa predpokladov vety uvedené limity existujú, teda podľa (3.1) a (3.2) platí

$$\frac{\partial p_{i,k}(s,t)}{\partial t} = -p_{i,k}(s,t)\cdot q_k(t) + \sum_{j\neq k} p_{i,j}(s,t)\cdot q_{j,k}(t)\,.$$

Jednoznačnosť riešenia zaručujú počiatočné podmienky $p_{i,i}(0) = 1$, $p_{i,k}(0) = 0$ pre $k \neq i$. □

Veta 3.2 (retrospektívne KDR) *Nech platia nasledujúce predpoklady:*

1. $p_{i,j}(s,t)$ *sú spojitými funkciami času* s, t *a existujú limity*

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{p_{i,j}(s-h,s)}{h} = q_{i,j}(s), \quad j \neq i, \quad i,j \in S\,,$$
$$\lim_{h\to 0_+} \frac{1-p_{i,i}(s-h,s)}{h} = q_i(s), \quad i \in S\,,$$

2. $$\sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} q_{i,j}(s) = -q_{i,i}(s) = q_i(s) < \infty\,.$$

Potom pravdepodobnosti prechodu $p_{i,j}(s,t)$ *spĺňajú sústavu retrospektívnych Kolmogorovových diferenciálnych rovníc*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} p_{i,k}(s,t) &= q_i(s)\cdot p_{i,k}(s,t) - \sum_{j\neq i} q_{i,j}(s)\cdot p_{j,k}(s,t) \\ p_{i,k}(t,t) &= \begin{cases} 0, & ak\ i \neq k, \\ 1, & ak\ i = k\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dôkaz. Je analogický dôkazu Vety 3.1, len tu upravujeme $p_{i,j}(s-h,t)$ pre $0 \leq s-h < s < t$. □

Poznámka 3.4 Prospektívne KDR nazývame aj *rovnice „vpred“*, retrospektívne ako *rovnice „nazad“* alebo *inverzné* KDR.

Poznámka 3.5 Maticový tvar KDR je

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{P}(s,t) = \widetilde{P}(s,t)\cdot\widetilde{Q}(t)\,; \quad \widetilde{P}(s,s) = \widetilde{I} \qquad \ldots \qquad \text{pre prospektívne KDR,}$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{P}(s,t) = -\widetilde{Q}(s)\cdot\widetilde{P}(s,t)\,; \quad \widetilde{P}(t,t) = \widetilde{I} \qquad \ldots \qquad \text{pre retrospektívne KDR.}$$

Poznámka 3.6 Ak je *Markovov reťazec homogénny*, t.j. $p_{i,j}(s,s+t) = p_{i,j}(t)$ nezávisí na s, intenzita prechodu je konštantná vzhľadom na čas $q_{i,j}(s) = q_{i,j}$, $s \geq 0$ a v KDR máme obyčajnú deriváciu označenú čiarkou

$$\widetilde{P}'(t) = \widetilde{P}(t)\cdot\widetilde{Q}\,, \quad \widetilde{P}(0) = \widetilde{I}\,. \tag{3.6}$$

Pre absolútne pravdepodobnosti KDR majú tvar

$$\bar{p}'(t) = \bar{p}(t)\cdot\widetilde{Q}\,. \tag{3.7}$$

Poznámka 3.7 Ak je *Markovov reťazec stabilizovaný* (*ergodický*), t.j. existuje stacionárne rozdelenie $\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = \pi_j$, $j \in S$, potom KDR prejdú v sústavu lineárnych algebraických rovníc pre absolútne pravdepodobnosti

$$\bar{0} = \bar{\pi}\cdot\widetilde{Q}\,. \tag{3.8}$$

Príklad 3.1 Uvažujme dodávku elektrického prúdu. Nech N zváračov odoberá elektrinu v náhodných intervaloch. Zvárač, ktorý v čase $t \geq 0$ neodoberá prúd začne odber v intervale $(t, t+h)$ s pravdepodobnosťou $\lambda h + o(h)$. Zvárač, ktorý v čase t zvára, skončí odber v intervale $(t, t+h)$ s pravdepodobnosťou $\mu h + o(h)$. Zvárači pracujú nezávisle. Určme absolútne pravdepodobnosti stavov v stabilizovanom systéme a odpovedajúci typ rozdelenia, ak X_t znamená počet zváračov odoberajúcich prúd v čase t.

Riešenie. Ak v čase t odoberá prúd j zváračov, tak počas intervalu $(t, t+h)$ sa ich počet zvýši o 1 s pravdepodobnosťou $p_{j,j+1}(h) = (N-j)\lambda h + o(h)$, zníži sa o 1 s pravdepodobnosťou $p_{j,j-1}(h) = j\mu h + o(h)$ a nezmení sa s pravdepodobnosťou $p_{j,j}(h) = 1-(N-j)\lambda h - j\mu h + o(h)$. Systém $\{X_t,\, t \geq 0\}$, kde X_t je počet zváračov, ktorí odoberajú prúd v čase t, predstavuje Markovov reťazec so spojitým časom a s maticou intenzity prechodu

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} -N\lambda & N\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -[(N-1)\lambda+\mu] & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -[\lambda+(N-1)\mu] & \lambda \\ 0 & 0 & \dots & N\mu & -N\mu \end{pmatrix}.$$

Kolmogorovove diferenciálne rovnice pre stabilizovaný systém sú $\bar{0} = \bar{\pi} \cdot \widetilde{Q}$, teda

$$\begin{aligned} 0 &= -N\lambda\pi_0 + \mu\pi_1\,, \\ 0 &= \big[N-(j-1)\big]\lambda\pi_{j-1} - \big[(N-j)\lambda + j\mu\big]\pi_j + (j+1)\mu\pi_{j+1},\ 1 \leq j \leq N-1, \\ 0 &= \lambda\pi_{N-1} - N\mu\pi_N\,. \end{aligned}$$

Ak označíme $K_j = j\mu\pi_j - \big[N-(j-1)\big]\lambda\pi_{j-1}$, pre $1 \leq j \leq N$, možno rovnice prepísať do tvaru

$$K_1 = 0; \quad K_j = K_{j+1},\ \text{pre } 1 \leq j \leq N-1; \quad K_N = 0,$$

teda dostávame $K_1 = K_2 = \dots = K_N = 0$ a odtiaľ rekurentný vzťah

$$\pi_j = \big[N-(j-1)\big]\lambda\pi_{j-1}/j\mu,\ \text{pre } 1 \leq j \leq N\,.$$

Postupným dosadzovaním dostaneme $\pi_k = \binom{N}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0$, pričom z normovacej podmienky vyplýva

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} = \frac{1}{(1+\lambda/\mu)^N} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^N.$$

Rozdelenie je binomické s parametrami N, $\lambda/(\lambda+\mu)$, pretože pravdepodobnosti sú

$$\pi_k = \binom{N}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^N = \binom{N}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{N-k},$$
$$k = 0, 1, 2, \dots, N. \qquad \square$$

3.2 Poissonov proces

Poissonov proces je špeciálnym prípadom Markovovho reťazca so spojitým časom, ktorý je homogénny a ordinárny proces s nezávislými prírastkami v zmysle odseku 1.3.

Definícia 3.3 *Homogénny Markovov reťazec so spojitým časom $\{N_t,\, t \geq 0\}$, v ktorom pravdepodobnosti prechodu sú dané pre $i, j \in S = \{0, 1, 2, \dots\}$ a pre $h > 0, h \to 0_+$ vzťahmi*

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(h) &= \lambda h + o(h)\,, \\ p_{i,i}(h) &= 1 - \lambda h + o(h)\,, \\ p_{i,j}(h) &= o(h), \quad \text{pre } j < i \ \text{ a } \ j > i+1\,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

*sa nazýva **Poissonov proces** s konštantnou intenzitou $\lambda > 0$.*

Poznámka 3.8 Podľa vzťahov (3.9) a pri platnosti $\lim\limits_{h\to 0_+} \frac{o(h)}{h} = 0$, pre intenzity prechodu v Poissonovom procese platí

$$\begin{aligned} q_{i,i+1} &= \lim_{h\to 0_+} \frac{p_{i,i+1}(h)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{\lambda h + o(h)}{h} = \lambda\,, \\ q_{i,i} &= -q_i = -\lim_{h\to 0_+} \frac{1 - p_{i,i}(h)}{h} = -\lim_{h\to 0_+} \frac{1 - (1 - \lambda h + o(h))}{h} = -\lambda\,, \\ q_{i,j} &= \lim_{h\to 0_+} \frac{p_{i,j}(h)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{o(h)}{h} = 0, \ \text{pre } j \neq i, i+1\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Matica intenzity prechodu je teda

$$\begin{aligned} q_{i,i+1} &= \lambda \\ q_{i,i} &= -\lambda \\ q_{i,j} &= 0, \quad j \neq i, i+1 \end{aligned} \qquad \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Veta 3.3 *Nech $\{N_t,\, t \geq 0\}$ je Poissonov proces s konštantnou intenzitou $\lambda > 0$. Potom $N_t \sim P_0(\lambda t)$, teda platí*

$$p_k(t) = P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\, e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots\,. \tag{3.12}$$

Dôkaz. Absolútne pravdepodobnosti $p_k(t)$, $t \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, nájdeme riešením sústavy KDR $\quad \bar{p}'(t) = \bar{p}(t) \cdot \widetilde{Q} \quad$ využitím (3.11)

$$\begin{aligned} &p_0'(t) + \lambda p_0(t) = 0, \quad \text{pri} \;\; p_0(0) = 1, \\ &p_k'(t) + \lambda p_k(t) = \lambda p_{k-1}(t); \quad \text{pri } p_k(0) = 0, k = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Keďže ide o rekurentné rovnice, riešime (3.13) postupne.
<u>Pre $k = 0$</u> je KDR bez pravej strany a platí

$$p'(t) = \frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda p_0(t) \implies \int \frac{\mathrm{d}p_0(t)}{p_0(t)} = -\int \lambda \mathrm{d}t \implies$$
$$\ln p_0(t) = -\lambda t + \ln c_0 \implies p_0(t) = c_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Konštantu c_0 určíme z podmienky $p_0(0) = c_0 = 1$. Teda riešením (3.13) pre $k = 0$ je $p_0(t) = e^{-\lambda t}$.
<u>Pre $k = 1$</u> ide o KDR s pravou stranou, ktorú riešime metódou variácie konštánt. Všeobecné riešenie (3.13) pre $k = 1$ bez pravej strany je $z_1(t) = c_1 e^{-\lambda t}$. Pri hľadaní všeobecného riešenia (3.13) s pravou stranou predpokladáme, že $p_1(t) = c_1(t) \cdot e^{-\lambda t}$. Pre deriváciu riešenia platí

$$p_1'(t) = c_1'(t) \cdot e^{-\lambda t} - c_1(t) \cdot \lambda e^{-\lambda t}\,.$$

Dosadením $p_1(t)$ a $p_1'(t)$ do (3.13) dostávame $c_1'(t) = \lambda$, resp. po zintegrovaní $c_1(t) = \lambda t + k_1$. Konštantu k_1 určíme z podmienky $p_1(0) = k_1 = 0$, teda riešenie (3.13) pre $k = 1$ je $p_1(t) = \lambda t \cdot e^{-\lambda t}$.
<u>Pre $k = 2$</u> podobným postupom dostávame riešenie (3.13) v tvare $p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}$. Všeobecne, pre ľubovoľné $k = 0, 1, 2, \ldots$, platí $p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$. □

Veta 3.4 *Nech $\{N_t,\, t \geq 0\}$ je Poissonov proces s konštantnou intenzitou λ, popisujúci tok nejakých udalostí. Potom doba medzi dvoma nasledujúcimi udalosťami, aj doba čakania na najbližšiu udalosť majú exponenciálne rozdelenie s parametrom $1/\lambda$.*

Dôkaz. Označme si ako t_k okamih k-tej udalosti, ako τ_k dobu medzi $(k-1)$-vou a k-tou udalosťou, nech $\tau_1 = t_1$, ako je znázornené na obr. 3.1.

Obr. 3.1

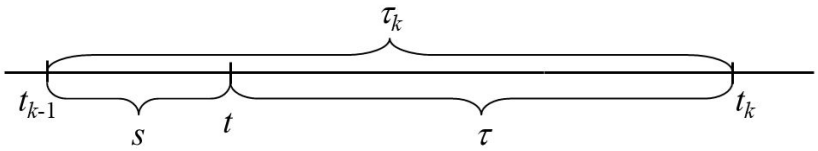
Pre rozdelenie doby čakania na 1. udalosť τ_1 platí

$$F_{\tau_1}(t) = P(\tau_1 \leq t) = 1 - P(\tau_1 > t) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - p_0(t)\,.$$

Po dosadení za $p_0(t)$ podľa vzťahu (3.12)

$$F_{\tau_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \Leftrightarrow \tau_1 \sim \mathrm{Ex}(1/\lambda)\,.$$

Pre dobu medzi dvoma udalosťami τ_k, resp. pre dobu čakania na najbližšiu udalosť $\tau \in (0, \tau_k\rangle$ podľa označenia na obr. 3.2 platí



Obr. 3.2

$$\begin{aligned}
P(\tau \le x) &= 1 - P(\tau > x) = 1 - P(\tau_k > s + x \mid \tau_k > s) = \\
&= 1 - P(N_{s+x} = 0 \mid N_s = 0) = 1 - \frac{P(N_{s+x} = 0, N_s = 0)}{P(N_s = 0)} = \\
&= 1 - \frac{P(N_{s+x} = 0)}{P(N_s = 0)} = 1 - \frac{e^{-\lambda(s+x)}}{e^{-\lambda s}} = 1 - e^{-\lambda x}\,,
\end{aligned}$$

čo znamená, že doba čakania τ má rozdelenie $\mathrm{Ex}(1/\lambda)$. □

3.3 Proces vzniku (rastu populácie)

Tento proces je zovšeobecnením Poissonovho procesu v tom zmysle, že pripúšťame závislosť intenzity prechodu na stave, v ktorom sa proces nachádza, t.j. platí

$$\begin{aligned}
q_{i,i+1} &= \lambda_i\,, \\
q_{i,i} &= -\lambda_i\,, \\
q_{i,j} &= 0 \quad \text{inak,}
\end{aligned}
\qquad
\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Sústava KDR pre absolútne pravdepodobnosti je

$$\begin{aligned}
p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t)\,, \\
p_k'(t) &= -\lambda_k p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t)\,.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Pri začiatočnej podmienke $p_0(0) = 1$, $p_k(0) = 0$ pre $k \ge 1$, postupným riešením metódami použitými pri dôkaze Vety 3.3 dostávame

$$\begin{aligned}
p_0(t) &= e^{-\lambda_0 t}\,, \\
p_1(t) &= -\tfrac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_0 t} - e^{-\lambda_1 t}\right) = -\lambda_0 \left[\tfrac{e^{-\lambda_0 t}}{\lambda_0 - \lambda_1} + \tfrac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_0}\right]\,, \\
p_2(t) &= \lambda_0 \lambda_1 \left[\tfrac{e^{-\lambda_0 t}}{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)} + \tfrac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \tfrac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right]\,, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Všeobecne pre $k \geq 1$

$$p_k(t) = (-1)^k \cdot \lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k} (\lambda_j - \lambda_i)} \,. \tag{3.15}$$

Poznámka 3.9 V prípade, že závislosť intenzity na stave je lineárna, teda $\lambda_i = i \cdot \lambda$, pre $i = 1, 2, \ldots$, hovoríme, že ide o *lineárny proces rastu* alebo *Yuleov proces.*

Ak počiatočná podmienka pre KDR v (3.14) je $p_1(0) = 1$, potom riešenie (3.14) reprezentuje *geometrické rozdelenie* s parametrom $e^{-\lambda t}$, teda

$$p_k(t) = e^{-\lambda t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.16}$$

Ak počiatočná podmienka je $p_i(0) = 1$, $i > 1$, tak riešenie KDR je tvaru

$$p_k(t) = \binom{k-1}{k-i} \left(e^{-\lambda t}\right)^i \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{k-i}, \quad k = i, i+1, i+2, \ldots. \tag{3.17}$$

3.4 Proces zániku (vymretia populácie)

Proces zániku je homogénny Markovov reťazec so spojitým časom, v ktorom intenzita prechodu je závislá na stave j a prechod je možný iba do najbližšieho nižšieho stavu. Predpokladáme, že $p_N(0) = 1$ a pre $j = 1, 2, \ldots, N$ platí

$$\begin{aligned} q_{j,j-1} &= \mu_j \,, \\ q_{j,j} &= -\mu_j \,, \\ q_{j,k} &= 0 \quad \text{inak,} \end{aligned} \qquad \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_N & -\mu_N \end{pmatrix}.$$

Sústava KDR pre absolútne pravdepodobnosti je

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= \mu_1 p_1(t) \,, \\ p_k'(t) &= -\mu_k p_k(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1, \\ p_N'(t) &= -\mu_N p_N(t) \,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Riešenie (3.18) pri počiatočnej podmienke $p_N(0) = 1$, $p_k(0) = 0$ pre $k < N$ dostávame postupne (od konca)

$$\begin{aligned} p_N(t) &= e^{-\mu_N t} \,, \\ p_k(t) &= (-1)^{N-k} \mu_N \mu_{N-1} \ldots \mu_{k+1} \sum_{j=k}^{N} \frac{e^{-\mu_j t}}{\prod\limits_{\substack{i=k \\ i \neq j}}^{N} (\mu_j - \mu_i)} \,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Poznámka 3.10 V prípade, že intenzita prechodu je lineárne závislá na stave j, v ktorom sa proces nachádza, teda $\mu_j = j \cdot \mu$, tak ide o *lineárny proces zániku.* Vtedy riešenie KDR (3.18) pri počiatočnej podmienke $p_N(0) = 1$ reprezentuje *binomické rozdelenie* s parametrami N, $e^{-\mu t}$, teda je tvaru

$$p_k(t) = \binom{N}{k} \left(e^{-\mu t}\right)^k \left(1 - e^{-\mu t}\right)^{N-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, N\,. \tag{3.20}$$

3.5 Proces vzniku a zániku

Tento Markovov reťazec je kombináciou predchádzajúcich dvoch procesov. Intenzita prechodu závisí od stavu, v ktorom sa proces nachádza a prechod je možný do najbližšieho vyššieho, aj nižšieho stavu. Pri počiatočnej podmienke $p_i(0) = 1$, $p_j(0) = 0$ pre $j \neq i$ dostávame

$$\begin{aligned} q_{j,j+1} &= \lambda_j\,, \\ q_{j,j-1} &= \mu_j\,, \\ q_{j,j} &= -(\lambda_j + \mu_j)\,, \\ q_{j,k} &= 0 \text{ pre } k \neq j, j \pm 1, \end{aligned} \qquad \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \ldots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Sústava KDR pre absolútne pravdepodobnosti je

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t)\,, \\ p_k'(t) &= -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t),\ k = 1, 2, \ldots\,. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Riešenie sústavy (3.21) je dosť komplikované, pretože všetky rovnice sú s pravou stranou. Namiesto metódy postupného riešenia sa dá použiť metóda vytvárajúcich funkcií (bližšie pozri [26]).

Poznámka 3.11 V prípade, že závislosť intenzít na stave je lineárna, teda $\lambda_i = i \cdot \lambda$, $\mu_i = i \cdot \mu$, ide o *lineárny proces vzniku a zániku.* Vtedy riešenie KDR (3.21) pri počiatočnej podmienke $p_1(0) = 1$, $p_k(0) = 0$ pre $k \neq 1$ je tvaru

a) v prípade $\lambda = \mu$:

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \frac{\lambda t}{1 + \lambda t}, \\ p_k(t) &= \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(1 + \lambda t)^{k+1}}, \quad \text{pre} \quad k \geq 1, \end{aligned} \tag{3.22}$$

b) v prípade $\lambda \neq \mu$:

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \mu A(t), \\ p_k(t) &= (1-\lambda A(t))(1-\mu A(t))(\lambda A(t))^{k-1}, \quad \text{pre} \quad k \geq 1, \\ \text{kde} \quad A(t) &= \frac{1-e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}\,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

3.6 Stabilizovaný proces vzniku a zániku

Presné, ale obtiažne riešenie KDR pre všeobecný proces vzniku a zániku potrebujeme iba vtedy, ak nás zaujíma dynamika modelovaného systému v krátkom časovom horizonte (prechodné riešenie). Ak sa kladie dôraz na dlhodobé fungovanie systému, stačí poznať stacionárne riešenie (ak existuje). Vtedy $\lim\limits_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = \pi_j$, teda derivácia na ľavej strane (3.21) bude nulová. Takto dostaneme systém homogénnych algebraických rovníc

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1\,, \\ 0 &= -(\lambda_k+\mu_k)\pi_k + \lambda_{k-1}\pi_{k-1} + \mu_{k+1}\pi_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots\,, \end{aligned} \tag{3.24}$$

ktorý riešime postupne

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0\,, \\ \pi_2 &= \frac{1}{\mu_2}\big[(\lambda_1+\mu_1)\pi_1 - \lambda_0\pi_0\big] = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0\,, \\ &\vdots \\ \pi_k &= \frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}\pi_0\,, \quad \text{pričom} \quad \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j = 1\,. \end{aligned}$$

Z normovacej podmienky dostaneme

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\dots\mu_j}\right]^{-1}. \tag{3.25}$$

3.7 Cvičenia

3.1 Geiger–Müllerov počítač slúži na registráciu častíc, ktoré dopadajú na počítadlo s intenzitou λ. Počítač istú dobu po registrácii častice nie je citlivý na dopad ďalšej častice. Určte druh stochastického procesu $\{X_t,\ t \geq 0\}$, ktorý udáva počet častíc registrovaných Geiger–Müllerovým počítačom za čas t. Aká je stredná hodnota počtu zaregistrovaných častíc za časovú jednotku?

3.2 Určte hodnoty parametra $q \in \mathbb{R}$, pre ktoré je uvedená matica maticou intenzity prechodu pre nejaký homogénny Markovov reťazec so spojitým časom

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} -q^3 & 1 & 0 \\ 0 & -q & q \\ 1 & -q & q-1 \end{pmatrix}.$$

3.3 Počet katastrofických udalostí evidovaných v poisťovacej spoločnosti môže byť modelovaný homogénnym Poissonovým procesom s intenzitou 3 za rok.

a) Aká je pravdepodobnosť, že v druhom polroku tohto roka nastanú aspoň dve katastrofické udalosti?

b) Určte rovnakú pravdepodobnosť za predpokladu, že v prvom polroku už dve katastrofické udalosti nastali.

3.4 Na autobusovú zastávku prichádzajú autobusy linky č.1 a č.2. Predpokladajte, že príchody autobusov oboch liniek tvoria Poissonove procesy s intenzitami λ_1 resp. λ_2, a že sú príchody nezávislé. Priemerný počet všetkých autobusov, ktoré prídu na zastávku za dobu t je $(\lambda_1 + \lambda_2)t$. Nech S je doba čakania na príchod autobusu č.1 a T doba čakania na autobus linky č.2. Určte pravdepodobnosť toho, že

a) na zastávku príde ako prvý autobus linky č.2,

b) prvé dva autobusy, ktoré prídu na zastávku, budú autobusy linky č.2.

3.5 Do elektronického systému prichádzajú nezávisle na sebe dva typy šokov, ktoré možno popísať ako Poissonove procesy s intenzitami $\lambda_1 = 0,002$ a $\lambda_2 = 0,01$ za hodinu. Šok prvého typu vždy spôsobí zlyhanie systému, šok druhého typu spôsobí zlyhanie s pravdepodobnosťou 0,4. Aká je pravdepodobnosť, že systém zlyhá počas 24 hodín dôsledkom šoku?

3.6 Určitý súbor jednotiek sa opotrebováva (zaniká) s konštantnou intenzitou päť jednotiek za minútu. Súbor obsahuje sto jednotiek. Aká je pravdepodobnosť toho, že za dvadsať minút

a) zanikne nanajvýš jedna jednotka súboru,

b) zanikne polovica súboru?

3.7 Uvažujte chemickú reakciu, pri ktorej sa molekuly látky A nezávisle od seba premieňajú na molekuly látky B. Počas krátkeho časového intervalu $(t, t+h)$ sa zmení molekula látky A na molekulu látky B s pravdepodobnosťou $\mu h + o(h)$. Nech počet molekúl látky A v čase t je X_t. Určte pravdepodobnosť toho, že

do okamihu t sa zmenia všetky molekuly látky A na molekuly látky B, ak na začiatku bolo N molekúl látky A.

3.8 Do mesta dodávajú elektrickú energiu dve elektrárne. Doba bezporuchovej dodávky elektrickej energie obidvoch elektrární má exponenciálne rozdelenie s parametrom $1/\lambda$. Doba do obnovy prerušenej dodávky elektrickej energie má takisto exponenciálne rozdelenie s parametrom $1/\mu$. Nájdite pravdepodobnosť toho, že obe elektrárne budú dodávať elektrickú energiu

a) v stabilizovanom režime,

b) v dynamickom systéme v čase t, riešením odpovedajúcej sústavy KDR.

3.9 Stroj môže byť v jednom z nasledujúcich stavov: 1− pracuje, 2− nepracuje, hľadá sa chyba, 3− chyba sa našla a odstraňuje sa, 4− oprava sa dokončila, stroj sa pripravuje na spustenie. Priemerný čas bezporuchovej prevádzky je pol dňa, chybu hľadajú v priemere pol hodiny, oprava trvá priemerne šesť hodín a po skončení trvá spustenie priemerne hodinu. Nájdite pravdepodobnosti jednotlivých stavov.

3.10 Dokážte pre lineárny proces vzniku, že riešenie KDR pri počiatočnej podmienke $p_1(0) = 1$ reprezentuje geometrické rozdelenie s parametrom $e^{-\lambda t}$, teda je v tvare (3.16).

3.11 Dokážte pre lineárny proces zániku, že riešenie KDR pri počiatočnej podmienke $p_N(0) = 1$ reprezentuje binomické rozdelenie s parametrami N, $e^{-\mu t}$, teda je v tvare (3.20).

3.12 Traja kamaráti si vyšli na horskú chatu. Pri príchode na chatu v čase $t = 0$ je jeden z nich chorý. Vlastnosti choroby sú také, že ak sú spolu zdravý a chorý jedinec, tak zdravý sa nakazí v časovom intervale $(t, t + h\rangle$ s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}h + o(h)$. Jedinec chorý v čase t sa uzdraví v časovom intervale $(t, t + h\rangle$ s pravdepodobnosťou $\frac{1}{3}h + o(h)$. Uzdravenie a infikovanie jednotlivých jedincov prebieha nezávisle. Zdravý jedinec nemôže nakaziť nikoho. Nech Markovov reťazec $\{X_t, t \geq 0\}$ udáva počet chorých kamarátov na chate v čase t. Nájdite maticu intenzity prechodu daného MR.

3.13 Stroj sa môže nachádzať v dvoch stavoch: 1− pracuje, 2 − je pokazený a opravuje sa. Doba bezporuchovej činnosti stroja, resp. doba jeho opravy majú exponenciálne rozdelenie s parametrom $1/\lambda$, resp. $1/\mu$. Určte riešením odpovedajúcej sústavy KDR pravdepodobnosť, že stroj bude pracovať v čase $t > 0$, ak viete, že v čase $t = 0$ pracoval. Aká bude hodnota hľadanej pravdepodobnosti v čase $t = 2$ pri $\lambda = 1/4$ a $\mu = 1$?

Kapitola 4

Teória hromadnej obsluhy

4.1 Definícia a klasifikácia systémov hromadnej obsluhy

Teória hromadnej obsluhy (THO) sa zaoberá modelovaním takých reálnych systémov, v ktorých vznikajú rady (fronty) alebo straty. Cieľom THO nie je odstrániť, ale minimalizovať čakanie, resp. udržať straty v rozumných medziach.

Systém hromadnej obsluhy (SHO) je taký reálny systém, do ktorého prichádzajú zákazníci s určitou požiadavkou a po obslúžení systém opúšťajú. Štruktúra SHO je daná nasledovne:

1. *Zákazníci*, požadujúci obsluhu, prichádzajú do SHO individuálne a tvoria tok požiadaviek.
2. *Linky* (*kanály*) sú zariadenia, ktoré poskytujú obsluhu požadovaného typu.
3. *Obsluha* je proces uspokojenia požiadaviek. Po skončení obsluhy zákazník opúšťa SHO a začne obsluha ďalšieho zákazníka. Ak zákazníci nie sú obslúžení ihneď, môžu (ale nemusia) na obsluhu čakať.

Základné komponenty SHO (zákazník – linka – obsluha) chápeme všeobecne, napr. lietadlo – pristávacia dráha – pristátie, stroj – údržbár – oprava, atď.

Zakladateľom THO bol dánsky matematik *Erlang*, ktorý v roku 1909 publikoval článok s názvom „Aplikácie teórie pravdepodobnosti na problémy telefónnej prevádzky“. Zavedenie pojmu THO súvisí s menami ruských matematikov Kolmogorov a Chinčin, ktorí sa v 30. rokoch zaslúžili o rozvoj THO. Všeobecnú klasifikáciu SHO však zaviedol až anglický matematik Kendall v roku 1953. Táto sa používa dodnes a má 3 symboly (A, B, n), pričom A – vyjadruje rozdelenie vstupného prúdu (doby medzi vstupmi), B – označuje rozdelenie výstupného prúdu (doby obsluhy), n – je počet paralelných liniek.

Poznámka 4.1 V ďalšom sa budeme zaoberať tzv. Markovskými SHO, kde za symboly A a B dosadzujeme M, čo znamená, že vstupný prúd je Poissonov (doba medzi

vstupmi má exponenciálne rozdelenie) a doba obsluhy má exponenciálne rozdelenie. V praxi sa vyskytujú aj nemarkovské SHO, kde A resp. B možno interpretovať ako Erlangovo, chí-kvadrát, deterministické alebo iné všeobecné rozdelenie.

Poznámka 4.2 Kendallova klasifikácia A, B, n nie je úplná, nehovorí nič o osude zákazníkov, ktorí nemôžu byť ihneď obslúžení, resp. o spôsobe obsluhy. Preto každý konkrétny model charakterizujeme ďalšími tromi prvkami x, y, z, pričom x je kapacita SHO (maximálny počet zákazníkov v SHO), y je kapacita zdroja (počet potenciálnych zákazníkov), z udáva disciplínu obsluhy.

Podľa „x“ delíme SHO na

- systémy *bez čakania* (so stratami), kedy $x = n$,
- systémy *s čakaním*, kedy $x > n$.

Systémy s čakaním ďalej delíme na SHO *s neohraničeným čakaním* a na SHO *s ohraničeným čakaním*. Pri poslednom type môže byť obmedzená dĺžka radu, alebo čas čakania v rade.

Podľa „y“ delíme SHO na

- *otvorené* SHO, kedy je zdroj nekonečný ($y = \infty$),
- *uzavreté* SHO, kedy zdroj má konečný počet potenciálnych zákazníkov ($y = m < \infty$).

Podľa „z“ delíme disciplínu obsluhy na

- FIFO (first in, first out – poradie sa dodržuje),
- LIFO (last in, first out – poradie je opačné),
- PRI (priority – v SHO existujú prioritné zákazky),
- GD (general discipline – všeobecná disciplína),
- SIRO (selection in random order – výber v náhodnom poradí).

Poznámka 4.3 Ak nebude povedané inak, v ďalšom sa budeme zaoberať Markovskými systémami (M, M, n), disciplína bude FIFO a vo väčšine prípadov nás bude zaujímať iba stabilizovaný systém, modelovaný Markovovým reťazcom podľa (3.8).

Poznámka 4.4 Okrem základných charakteristík $(A, B, n; x, y, z)$ každý SHO má svoje *ukazovatele* (číselné charakteristiky), ktoré svedčia o kvalite obsluhy alebo o využití kanálov.

Hlavné ukazovatele SHO:

- *intenzita vstupu* λ – vyjadruje priemerný počet zákazníkov vstupujúcich do SHO za jednotku času,
- *intenzita výstupu* $\mu = 1/\bar{\tau}$, kde $\bar{\tau}$ je priemerná doba obsluhy,
- *intenzita prevádzky* $\rho = \lambda/\mu$.

Ukazovatele kvality obsluhy (efektívnosti z hľadiska zákazníka):

- pravdepodobnosť odmietnutia (straty) zákazníka: p_{st}
- relatívna kapacita SHO: $K_r = 1 - p_{st}$
- absolútna kapacita SHO: K_a
- priemerná doba strávená v SHO ($\bar{t}_s$) a v rade ($\bar{t}_r$)
- priemerný počet zákazníkov v rade ($\bar{r}$)
- pravdepodobnosť vzniku radu, atď.

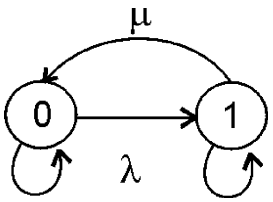
Ukazovatele využitia kanálov (efektívnosti z hľadiska SHO):

- priemerný počet obsadených kanálov $\bar{n}_o$,
- priemerný počet voľných kanálov $\bar{n}_v$,
- koeficient využitia kanálov $\bar{n}_0/n$,
- koeficient prestoja kanálov $\bar{n}_v/n$, atď.

4.2 Otvorený SHO bez čakania

Pravidlo – zákazník, ktorý nemôže byť ihneď obslúžený, lebo všetky linky sú obsadené, je odmietnutý (vznik straty). Maximálny počet zákazníkov sa teda rovná počtu liniek.

Systém $(\boldsymbol{M, M, 1; 1, \infty})$
Ide o otvorený SHO bez čakania, s jednou linkou, $x = 1$, $y = \infty$, z – FIFO. Zrejme pre modelový Markovov reťazec je $S = \{0, 1\}$, pričom stav SHO znamená počet zákazníkov v SHO. Intenzity vstupu a výstupu sú dané v matici $\widetilde{Q}$, možné prechody sú vyznačené v diagrame.



$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Systém KDR pre absolútne pravdepodobnosti $\bar{p}'(t) = \bar{p}(t) \cdot \widetilde{Q}$ je

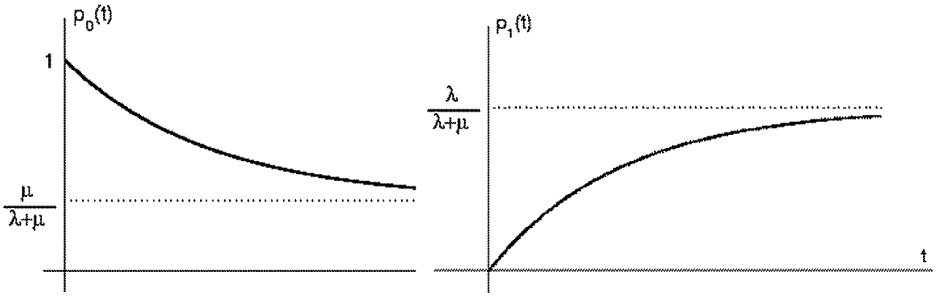
$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)\,, \\ p_1'(t) &= \lambda p_0(t) - \mu p_1(t)\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Počiatočné podmienky sú $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$, navyše má platiť $p_0(t) + p_1(t) = 1$. Riešenie (4.1) za uvedených podmienok je

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}\,, \\ p_1(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Limitné riešenie pre stabilizovaný systém pri $t \to \infty$ dáva stacionárne rozdelenie znázornené na obr. 4.1.

$$p_0 = \lim_{t\to\infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,; \qquad p_1 = \lim_{t\to\infty} p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,. \tag{4.3}$$



Obr. 4.1

Príklad 4.1 Na danú telefónnu linku prichádza za minútu priemerne 0,8 výziev, priemerná dĺžka hovoru je 1,5 min. Určme

a) intenzitu vstupu, výstupu a prevádzky SHO,

b) pravdepodobnosť odmietnutia a relatívnu kapacitu v stabilizovanom systéme.

Riešenie. Zvolíme si časovú jednotku č.j. = 1 min. Potom platí

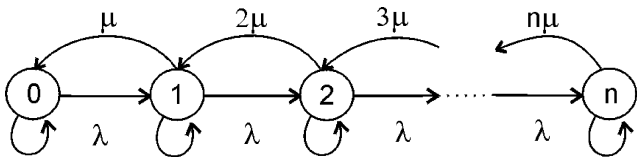
a) $\lambda = 0{,}8 = \frac{4}{5}$; $\bar{\tau} = 1{,}5$ min $\Rightarrow \mu = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{5}$,

b) $p_{st} = p_1 = ?$; $\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} -4/5 & 4/5 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, $\bar{p} = (p_0, p_1)$.

Riešime systém rovníc $\bar{0} = \bar{p} \cdot \widetilde{Q}$, teda $0 = -\frac{4}{5}\,p_0 + \frac{2}{3}\,p_1$, pri podmienke $p_0 + p_1 = 1$. Riešením je $p_0 = 0{,}45$; $p_1 = 0{,}55$.
Pravdepodobnosť odmietnutia zákazníka je $p_{st} = 0{,}55$; relatívna kapacita SHO je $K_r = 1 - p_{st} = 0{,}45$. □

Systém $(M, M, n; n, \infty)$

Tento SHO má n liniek, teda $S = \{0, 1, \ldots, n\}$, intenzity vstupu a výstupu sú dané maticou $\widetilde{Q}$, možné prechody sú znázornené v diagrame.



$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -n\mu \end{pmatrix}.$$

Systém rovníc v stabilizovanom režime je $\bar{0} = \bar{p} \cdot \widetilde{Q}$, teda

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1\,, \\ 0 &= \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1}\,, \quad \text{pre} \quad k = 1, 2 \ldots, n-1\,, \\ 0 &= \lambda p_{n-1} - n\mu p_n\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Riešením sústavy (4.4) pri podmienke $\sum\limits_{i=0}^{n} p_i = 1$ je

$$p_k = \frac{\lambda}{k\mu} p_{k-1} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot p_0, \quad \text{kde} \quad p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1},$$

resp. pri označení $\rho = \lambda/\mu$ dostávame

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!}\left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}\right]^{-1}. \tag{4.5}$$

Ukazovatele systému:

- pravdepodobnosť straty (odmietnutia): $p_{st} = p_n$,
- relatívna kapacita SHO: $K_r = 1 - p_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1}$,
- absolútna kapacita SHO: $K_a = \lambda(1 - p_n)\,,$
- priemerný počet obsadených liniek: $\bar{n}_o = \sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot p_k = \rho(1 - p_n)\,,$
- koeficient využitia liniek: $\bar{n}_o/n\,.$

Príklad 4.2 Na počítač je napojených niekoľko terminálov. Priemerný počítací čas na vybavenie jedného programu sú dve minúty. Za ten čas prichádzajú v priemere tri požiadavky. Počítač môže obslúžiť najviac päť terminálov. Aká je pravdepodobnosť toho, že sa požiadavka odmietne? Určme relatívnu a absolútnu kapacitu systému. Zistime priemerný počet obsluhovaných terminálov.

Riešenie. Nech č.j. = 1 minúta. Potom $\lambda = 3/2$, $\mu = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 3$.
Ide o systém $(M, M, 5; 5, \infty)$ bez čakania, kde pravdepodobnosť odmietnutia požiadavky je

$$p_{st} = p_5 = \frac{1}{5!}\,3^5 \left(\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!}\,3^k \right)^{-1} = 0{,}116.$$

Relatívna a absolútna kapacita sú $K_r = 1 - p_{st} = 0{,}884$, $K_a = \lambda(1 - p_n) = 1,32$. Priemerný počet obsluhovaných terminálov je $\bar{n}_o = \rho \cdot (1 - p_{st}) = 2{,}64$. □

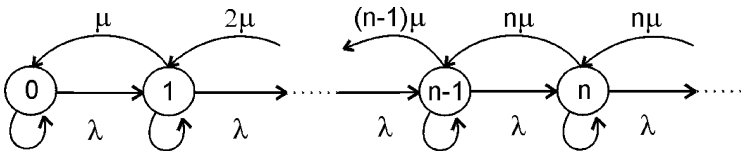
4.3 Otvorený SHO s čakaním

Pravidlo – zákazník, ktorý nemôže byť ihneď obslúžený, sa postaví do radu a čaká na obsluhu (vznik radu). Čakanie môže byť

1. neohraničené (neobmedzené), kde $m = \infty$,
2. ohraničené (obmedzené), kde $n < m < \infty$.

4.3.1 Otvorený SHO s neohraničeným čakaním

Stav systému znamená celkový počet zákazníkov v SHO, teda súčet tých, ktorí sú obsluhovaní a tých, čo čakajú v rade. Zrejme $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, intenzity prechodu sú vyznačené v diagrame prechodu.



Poznámka 4.5 Z priestorových dôvodov v ďalšom nebudeme vypisovať maticu intenzity prechodu $\widetilde{Q}$, ale sústavu rovníc zostavíme podľa diagramu. Šípky vedúce von z daného stavu pritom znamenajú záporné znamienko pred intenzitou, šípky vedúce do daného stavu kladné znamienko, slučky neuvažujeme.

Systém rovníc pre stabilizovaný SHO:

$$
\begin{aligned}
k=0 \quad &\Rightarrow \quad 0=-\lambda p_0+\mu p_1\,,\\
k=1 \quad &\Rightarrow \quad 0=-(\lambda+\mu)p_1+\lambda p_0+2\mu p_2\,,\\
k=2 \quad &\Rightarrow \quad 0=-(\lambda+2\mu)p_2+\lambda p_1+3\mu p_3\,,\\
&\vdots\\
k=n-1 \quad &\Rightarrow \quad 0=-\big(\lambda+(n-1)\mu\big)p_{n-1}+\lambda p_{n-2}+n\mu p_n\,,\\
k=n \quad &\Rightarrow \quad 0=-(\lambda+n\mu)p_n+\lambda p_{n-1}+n\mu p_{n+1}\,,\\
k=n+1 \quad &\Rightarrow \quad 0=-(\lambda+n\mu)p_{n+1}+\lambda p_n+n\mu p_{n+2}\,,\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Sústavu (4.6) riešime postupným sčítavaním rovníc. Takto dostávame využitím podmienok $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ a $\rho < n$ riešenie

$$
\begin{aligned}
p_k &= \frac{1}{k!}\,\rho^k p_0, \quad \text{pre} \;\; k=0,1,\ldots,n\,,\\
p_k &= \frac{1}{n^{k-n}\cdot n!}\,\rho^k p_0, \quad \text{pre} \;\; k\geq n+1\,,\\
p_0 &= \left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Ukazovatele systému

- pravdepodobnosť vzniku radu

$$p_r = p_{n+1}+p_{n+2}+\ldots = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\,p_0\,,$$

- priemerný počet zákazníkov v rade

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_{n+k} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2}\,p_0\,,$$

- priemerná doba čakania v rade

$$
\begin{aligned}
\bar{t}_r &= \frac{1}{n\mu}\cdot p_n+\frac{2}{n\mu}\cdot p_{n+1}+\frac{3}{n\mu}\,p_{n+2}+\ldots =\\
&= \frac{1}{n\mu}\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_{n+k-1} = \frac{1}{\mu\rho}\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{\rho^{n+k}}{n^k\cdot n!}\,p_0 = \frac{\bar{r}}{\lambda}\,,
\end{aligned}
$$

- priemerný počet obsadených liniek

$$
\begin{aligned}
\bar{n}_o &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot p_k+\sum_{k=n+1}^{\infty} n\cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{\rho^k}{k!}\,p_0+\sum_{k=n+1}^{\infty} n\cdot\frac{\rho^k}{n^{k-n}\cdot n!}\,p_0 =\\
&= \rho\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!}\,p_0+\rho\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho^k}{n^{k-n}\cdot n!}\,p_0 = \rho\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \rho\cdot 1 = \rho\,.
\end{aligned}
$$

Príklad 4.3 Dvaja dispečeri povoľujú výjazd automobilov. Každých desať minút prichádza v priemere 2,2 šoférov. Povolenie jazdy trvá v priemere päť minút. Určme

- pravdepodobnosť vzniku radu,
- priemerný počet vozidiel v rade,
- priemernú dobu čakania v rade,
- priemerný počet obsadených liniek,
- koľko percent pracovnej doby sú dispečeri zamestnaní vybavovaním automobilov (koeficient využitia liniek),
- aká by mala byť intenzita vstupu automobilov, aby vyťaženie dispečerov bolo na 70%?

Riešenie. Ide o systém $(M, M, 2, \infty, \infty)$. Nech č.j. = 10 minút. Potom $\lambda = 2{,}2$; $\mu = \frac{1}{1/2} = 2$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}1$.
Pravdepodobnosť vzniku radu pre $n = 2$ je

$$p_r = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\, p_0 = \frac{1{,}1^3}{2!(2-1{,}1)} \left[1 + 1{,}1 + \frac{1{,}1^2}{2!} + \frac{1{,}1^3}{2 \cdot 0{,}9}\right]^{-1} \doteq 0{,}214\,.$$

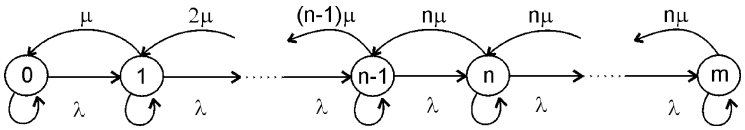
Priemerná dĺžka radu $\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2}\, p_0 = \frac{1{,}1^3}{1!0{,}9^2} \cdot \frac{9}{31} \doteq 0{,}476$.
Priemerná doba čakania v rade $\bar{t}_r = \frac{\bar{r}}{\lambda} \doteq 0{,}217$ minút.
Priemerný počet obsadených liniek $\bar{n}_o = \rho = 1{,}1$.
Koeficient využitia liniek $\frac{\bar{n}_0}{n} = \frac{1{,}1}{2} = 0{,}55$, t.j. 55%.
Má byť $\frac{\bar{n}_o^*}{n} = 0{,}7 \Rightarrow \bar{n}_o^* = 1{,}4 = \rho^* = \frac{\lambda^*}{\mu} \Rightarrow \lambda^* = 2{,}8$. □

4.3.2 Otvorený SHO s ohraničeným čakaním

Tento SHO delíme ďalej na dva typy

1. ohraničená je dĺžka radu,
2. ohraničená je doba čakania v rade.

1. SHO s ohraničenou dĺžkou radu



Zrejme $S = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, m\}$ a sústava rovníc v stabilizovanom SHO vyzerá nasledovne

$$
\begin{aligned}
0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1, \\
0 &= -(\lambda + k\mu)p_k + \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1}, \quad 0 < k < n, \\
0 &= -(\lambda + n\mu)p_k + \lambda p_{k-1} + n\mu p_{k+1}, \quad n \le k < m, \\
0 &= -n\mu p_m + \lambda p_{m-1}.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Riešime sústavu (4.8) opäť postupne, tak dostávame

$$
\begin{aligned}
p_k &= \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad \text{pre } \ 0 \le k \le n, \\
p_k &= \frac{\rho^k}{n^{k-n} n!} p_0, \quad \text{pre } \ n < k \le m, \ \text{kde} \\
p_0 &= \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\rho^k}{n^{k-n} n!} \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Ukazovatele SHO

- pravdepodobnosť odmietnutia $p_{st} = p_m$,
- pravdepodobnosť vzniku radu $p_r = p_{n+1} + \cdots + p_m$,
- priemerný počet zákazníkov v rade $\bar{r} = \sum\limits_{k=1}^{m-n} k \cdot \frac{\rho^{n+k}}{n^k \cdot n!} p_0$,
- priemerná doba čakania v rade $\bar{t}_r = \frac{1}{n\mu} p_n + \ldots + \frac{m-n}{n\mu} p_{m-1}$.

Príklad 4.4 V holičstve pracujú traja holiči. Každý z nich obsluhuje jedného zákazníka v priemere desať minút. Za hodinu prichádza priemerne dvanásť ľudí. Zákazníci sa postavia do radu iba ak čakajú menej než traja ľudia, inak opúšťajú holičstvo. Určme

a) pravdepodobnosť, že v holičstve nie sú žiadni zákazníci,
b) pravdepodobnosť, že zákazník odíde bez obslúženia,
c) pravdepodobnosť, že všetci holiči sú zamestnaní prácou,
d) priemerný počet zákazníkov v rade.

Riešenie. Ide o systém $(M, M, 3; 6, \infty)$, intenzity vstupu a výstupu pri časovej jednotke č.j. = 1 hod. sú $\lambda = 12$, $\mu = 6 \Rightarrow \rho = 2$.

a) $p_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{3 \cdot 3!} + \frac{\rho^5}{3^2 \cdot 3!} + \frac{\rho^6}{3^3 \cdot 3!} \right]^{-1} = 0{,}1218$,

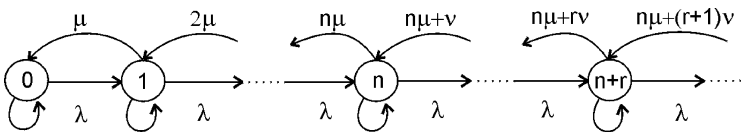
b) $p_{st} = p_6 = \frac{\rho^6}{3^{6-3} \cdot 3!} p_0 \doteq 0{,}0481$,

c) $p_3 + p_4 + p_5 + p_6 \doteq 0{,}391$,

d) $\bar{r} = \sum\limits_{k=1}^{3} k \cdot p_{3+k} \doteq 0{,}397$. □

2. SHO s ohraničeným časom čakania v rade

Pravidlo – zákazník, ktorý nemôže byť ihneď obslúžený, postaví sa do radu a čaká na obsluhu. Avšak po uplynutí určitej doby dobrovoľne opúšťa SHO s intenzitou ν. Diagram prechodu znázorňuje intenzity vstupu, výstupu a opúšťania radu.



Sústava rovníc pre stabilizovaný SHO

$$
\begin{aligned}
0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1, \\
0 &= -(\lambda + k\mu)p_k + \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \\
0 &= -(\lambda + n\mu + r\nu)p_{n+r} + \lambda p_{n+r-1} + \big(n\mu + (r+1)\nu\big)p_{n+r+1}, \; r = 1, 2, \ldots .
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Systém (4.10) riešime postupným sčitovaním rovníc

$$
\begin{aligned}
p_k &= \frac{\rho^k}{k!}\, p_0, \quad \text{pre} \;\; k = 1, 2, \ldots, n\,, \\
p_{n+r} &= \frac{\rho^n}{n!} \frac{\lambda^r}{\prod\limits_{j=1}^{r} (n\mu + j\nu)}\, p_0, \quad r = 1, 2 \ldots ,
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

kde p_0 sa určuje z normovacej podmienky

$$
p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{\prod\limits_{j=1}^{r} (n\mu + j\nu)} \right]^{-1} . \tag{4.12}
$$

Poznámka 4.6 V tomto systéme je pravdepodobnosť straty zákazníka daná ako $p_{st} = 1 - p_{obsl}$, pričom pravdepodobnosť obslúženia zákazníka sa určuje ako podiel $\bar{n}_{ot}/\bar{n}_{o\infty}$, kde

$\bar{n}_{ot}$ je priemerný počet obsadených liniek, pri čakaní t časových jednotiek, teda

$$
\bar{n}_{ot} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k + \sum_{r=1}^{\infty} n \cdot p_{n+r} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k + n(1 - \sum_{k=0}^{n} p_k) \tag{4.13}
$$

$\bar{n}_{o\infty}$ je priemerný počet obsadených liniek v SHO, kde nedochádza k dobrovoľnému odchodu zákazníkov, t.j. ide o neohraničené čakanie, $\bar{n}_{o\infty} = \rho$.

Poznámka 4.7 Nekonečný rad v (4.12) nie je geometrický, ale jeho súčet sa odhaduje s požadovanou presnosťou pomocou konvergentného geometrického radu. Postup ukážeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 4.5 Na letisku sú k dispozícii dve pristávacie dráhy. Pristávací manéver trvá priemerne desať minút, lietadlá prilietajú priemerne každú štvrťhodinu. Lietadlo, ktoré nie je okamžite prijaté, krúži nad letiskom priemerne polhodiny a potom odlieta. Odhadnime hodnotu p_0 s presnosťou na tri desatinné miesta. Aký je priemerný počet obsadených pristávacích dráh? Aká je pravdepodobnosť toho, že lietadlo na letisku pristane (pravdepodobnosť obslúženia)?

Riešenie. Ide o systém $(M, M, 2)$ s ohraničeným časom čakania. Nech č.j. = 1 hod. $\Rightarrow \lambda = 4$, $\mu = 6$, $\nu = 2$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$. V stabilizovanom SHO podľa (4.11) určíme p_k, $k = 1, 2, \ldots$ a p_0 z normovacej podmienky (4.12). S presnosťou na tri desatinné miesta odhadneme súčet nekonečného radu.

$$
\begin{aligned}
1 &= p_0 \left[\sum_{k=0}^{2} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^2}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{\prod\limits_{j=1}^{r} (2\mu + j\nu)} \right] = \\
&= p_0 \left[1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \Big(\frac{4}{2 \cdot 6 + 2} + \frac{4^2}{(2 \cdot 6 + 2)(2 \cdot 6 + 2 \cdot 2)} + \ldots \Big) \right] = \\
&= p_0 \left[\frac{5}{3} + \frac{2}{9} \Big(1 + \frac{2}{7} + \frac{2^2}{7 \cdot 8} + \frac{2^3}{7 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{2^4}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \ldots \Big) \right] = \\
&= p_0 \left\{ \frac{5}{3} + \frac{2}{9} \left[\frac{289}{210} + \frac{2^5}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} \Big(1 + \frac{2}{12} + \frac{2^2}{12 \cdot 13} + \ldots \Big) \right] \right\}.
\end{aligned}
$$

Súčet radu v zátvorkách $\big(1 + \frac{2}{12} + \frac{2^2}{12 \cdot 13} + \ldots\big)$ odhadneme súčtom geometrického radu s kvocientom $q = \frac{1}{6}$, teda hodnotou $\frac{1}{1-q} = \frac{6}{5}$. Odhad zvyšku pôvodného radu v hranatých zátvorkách je $R_6 < \frac{2}{9} \cdot \frac{2^5}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} \cdot \frac{6}{5} = 0{,}00015$, čo vyhovuje požiadavke o presnosti na 3 desatinné miesta. Pre p_0 dostaneme $1 \doteq p_0 \cdot 1{,}973 \Rightarrow p_0 \doteq 0{,}507 \Rightarrow p_1 = \rho p_0 = 0{,}338$.

Priemerný počet obsadených liniek

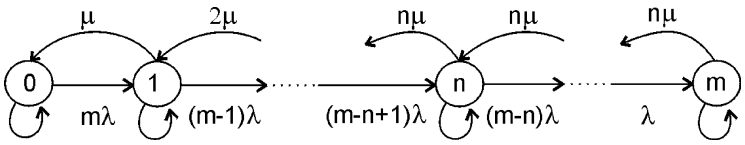
$$
\begin{aligned}
\bar{n}_{ot} &= \sum_{k=1}^{2} k \cdot p_k + \sum_{k=3}^{\infty} 2 \cdot p_k = p_1 + 2p_2 + 2 \sum_{k=3}^{\infty} p_k = \\
&= p_1 + 2 \sum_{k=2}^{\infty} p_k = p_1 + 2(1 - p_0 - p_1) = 2 - 2p_0 - p_1 = 0{,}648.
\end{aligned}
$$

Pravdepodobnosť toho, že lietadlo pristane na letisku, je pravdepodobnosť obslúženia

$$
p_{obsl} = \frac{\bar{n}_{ot}}{\bar{n}_{o\infty}} = \frac{\bar{n}_{ot}}{\rho} = \frac{0{,}648}{2/3} \doteq 0{,}972\,. \qquad \square
$$

4.4 Uzavretý SHO

Pravidlo – zdroj je ohraničený kapacitou SHO, teda intenzita vstupu je závislá na počte zákazníkov v zdroji. Ak je v SHO j zákazníkov, v zdroji je ich $m - j$. Ak je $m = n$, ide o systém bez čakania, ak $m > n$, o SHO s čakaním. V ďalšom stručne opíšeme SHO s čakaním podľa diagramu prechodu.



Príslušná sústava rovníc pre stabilizovaný SHO

$$
\begin{aligned}
0 &= -m\lambda p_0 + \mu p_1 \\
0 &= (m-k+1)\lambda p_{k-1} - \big[(m-k)\lambda + k\mu\big]p_k + (k+1)\mu p_{k+1},\ 1 \le k < n, \\
0 &= (m-k+1)\lambda p_{k-1} - \big[(m-k)\lambda + n\mu\big]p_k + n\mu p_{k+1},\ n \le k < m, \\
0 &= \lambda p_{m-1} - n\mu p_m .
\end{aligned}
$$

Po predelení rovníc konštantou μ a označení $\rho = \lambda/\mu$

$$
\begin{aligned}
0 &= -m\rho p_0 + p_1, \\
0 &= (m-k+1)\rho p_{k-1} - \big[(m-k)\rho + k\big]p_k + (k+1)p_{k+1},\ 1 \le k < n, \\
0 &= (m-k+1)\rho p_{k-1} - \big[(m-k)\rho + n\big]p_k + np_{k+1},\ n \le k < m, \\
0 &= \rho p_{m-1} - np_m .
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Substitúciou

$$
\begin{aligned}
z_k &= (m-k+1)\rho p_{k-1} - kp_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \\
z_k^* &= (m-k+1)\rho p_{k-1} - np_k, \quad k = n+1, \ldots, m\,, \\
z_1 &= 0 = z_m^*\,,
\end{aligned}
$$

dostávame pre sústavu (4.14) $z_1 = z_2 = \cdots = z_m^* = 0$ a odtiaľ rekurentné vzťahy

$$
\begin{aligned}
p_k &= \frac{m-k+1}{k} \cdot \rho \cdot p_{k-1}, \quad \text{pre} \ \ k = 1, 2, \ldots, n\,, \\
p_k &= \frac{m-k+1}{n} \cdot \rho \cdot p_{k-1}, \quad \text{pre} \ \ k = n+1, \ldots, m\,.
\end{aligned}
$$

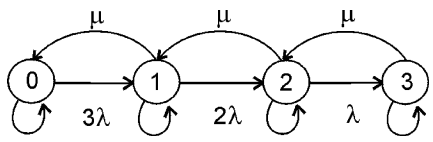
Postupným dosadzovaním a po úprave dostaneme riešenie (4.14) v tvare

$$
\begin{aligned}
p_k &= \binom{m}{k} \cdot \rho^k \cdot p_0, \quad \text{pre} \ \ 1 \le k \le n, \\
p_k &= \frac{m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} \cdot \rho^k \cdot p_0, \quad \text{pre} \ \ n < k \le m, \\
p_0 &= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \rho^k + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} \cdot \rho^k \right]^{-1} .
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Poznámka 4.8 Čo sa týka ukazovateľov uzavretého SHO, najčastejšie sa určuje pravdepodobnosť využitia, resp. prestoja liniek, pravdepodobnosť vzniku radu, priemerný počet zákazníkov v SHO a v rade. Keďže odpovedajúce rady sú konečné, všeobecné vzorce nie je potrebné odvodiť.

Príklad 4.6 Pracovník obsluhuje tri stroje. Každý z nich sa zastaví v priemere dvakrát za hodinu. Oprava trvá v priemere desať minút. Určme aká je pravdepodobnosť toho, že pracovník je zamestnaný opravou a zistime aký je priemerný prestoj pracovníka za osemhodinovú pracovnú dobu. Vypočítajme pravdepodobnosť vzniku radu a priemernú dĺžku radu.

Riešenie. Ide o systém $(M, M, 1; 3, 3)$. Nech č.j. $= 1$ hodina, potom $\lambda = 2$, $\mu = 6$, $\rho = 1/3$. Stav j znamená počet strojov, ktoré nepracujú v dôsledku poruchy, $j = 0, 1, 2, 3$. Intenzity prechodu sú znázornené v diagrame.



Pracovník je zamestnaný opravou, ak aspoň jeden stroj je pokazený a pravdepodobnosť toho je $1 - p_0$. Podľa (4.15)

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{0} \frac{3!}{(3-k)!k!}\rho^k + \sum_{k=1}^{3} \frac{3!}{(3-k)!}\rho^k\right]^{-1} = \left[1 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right]^{-1} = \frac{9}{26},$$

$$1 - p_0 = \frac{17}{26} \doteq 0{,}654.$$

Prestoj pracovníka za 8 hodinovú pracovnú dobu je

$$(8 \cdot p_0) \text{ hodín} = 8 \cdot 0{,}654 \text{ hodín} = 2{,}768 \text{ hodín} \sim 166 \text{ minút}.$$

Pravdepodobnosť vzniku radu

$$p_r = p_{n+1} + \cdots + p_m = 1 - \sum_{k=0}^{n} p_k = 1 - p_0 - p_1,$$

kde

$$p_1 = \binom{3}{1} \cdot \rho \cdot p_0 = \frac{9}{26} = p_0.$$

Hľadaná pravdepodobnosť je teda $p_r = 1 - 2 \cdot \dfrac{9}{26} = \dfrac{4}{13}$.

Priemerná dĺžka radu

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^{2} k \cdot p_{k+1} = p_2 + 2 \cdot p_3,$$

kde $p_2 = 3! \cdot \rho^2 \cdot p_0 = \dfrac{3}{13}$, $\quad p_3 = 3! \cdot \rho^3 \cdot p_0 = \dfrac{1}{13}$, $\quad$ teda $\quad \bar{r} = \dfrac{5}{13}$. $\square$

4.5 Cvičenia

4.1 Priemerná dĺžka telefónneho hovoru je pol minúty, za minútu prichádzajú priemerne tri požiadavky. Nájdite minimálny počet potrebných liniek tak, aby sa uspokojilo 75% požiadaviek. Pre daný SHO určte ukazovatele $p_{st}, K_r, K_a, \bar{n}_o$.

4.2 Dávku odpadovej vody vypúšťa továreň priemerne raz za dva dni. Jedna čistička spracuje toto množstvo za pol dňa. Koľko čističiek treba postaviť, aby sme sa s 99% spoľahlivosťou vyhli havárii, t.j. vypusteniu odpadu do rieky alebo zastavenia výroby? Určte ukazovatele odpovedajúceho SHO.

4.3 Rozhlasová stanica skúma sledovanosť istého programu vysielaného v danom časovom období. Prieskum ukázal, že priemerný počet poslucháčov, ktorí v tomto období počúvajú danú stanicu je 20000 za hodinu. Po zapnutí stanice priemerná doba posluchu je 45 minút. Určte priemerný hodinový počet poslucháčov, ktorí sledujú daný program.

4.4 Do malej pobočky banky s dvomi okienkami sa dostaví priemerne päť osôb za hodinu. Priemerná doba vybavenia klienta je pätnásť minút. Určte

a) pravdepodobnosť vzniku radu,

b) priemernú dĺžku radu,

c) priemerný čas strávený v banke.

4.5 Na colnici sa automobily vybavujú v dvoch linkách. Priemerný čas vybavenia sú tri minúty, na colnicu prichádza priemerne jedno auto za dve minúty. Aká je pravdepodobnosť vzniku radu? Aká je priemerná dĺžka radu a priemerný čas čakania v rade? Ako sa čas čakania v rade zmení, ak colníci zdvojnásobia intenzitu práce, resp. ak prijmú ďalšieho pracovníka?

4.6 Benzínové čerpadlo obsluhuje zákazníkov na jednom mieste obsluhy s intenzitou štyridsať vozidiel za hodinu. Počet vozidiel v rade je neobmedzený. Za predpokladu, že intenzita príchodu vozidiel ku čerpadlu je tridsať za hodinu, určte:

a) pravdepodobnosť toho, že vozidlo bude obslúžené bez čakania,

b) priemerný počet vozidiel pri benzínovom čerpadle.

4.7 V čakárni u lekára je šesť stoličiek, ostatní pacienti musia čakať postojačky. V priemere stoja traja pacienti. Príchod pacientov sa riadi Poissonovým procesom, priemerný čas prehliadky je pätnásť minút. Nájdite

a) pravdepodobnosť, že pacient po príchode nájde lekára obsadeného,

b) pravdepodobnosť, že pacient musí zo začiatku čakať postojačky,

c) priemerný čas, ktorý pacient strávi u lekára,

d) pravdepodobnosť, že pacient nebude ošetrený, ak môže čakať iba v prípade, že po príchode nájde voľnú stoličku .

4.8 Do malej autodielne s dvomi opravármi, ktorí pracujú nezávisle a samostatne, prichádzajú zákazníci s intenzitou šesť za hodinu. Obsluha trvá v priemere dvadsať minút, miest pre autá je spolu päť, vrátane práve opravovaných. Identifikujte typ odpovedajúceho SHO a nakreslite diagram prechodu. Určte

a) pravdepodobnosť, že opravári nepracujú,

b) pravdepodobnosť odmietnutia zákazníka,

c) pravdepodobnosť vzniku radu.

4.9 Na stanicu technickej kontroly (STK) prichádzajú autá s intenzitou osem za hodinu. Stanica má tri linky, pričom prehliadka na každej trvá v priemere štvrť hodiny. Čakať môžu maximum štyri autá. Určte

a) pravdepodobnosť odmietnutia zákazníka,

b) relatívnu a absolútnu kapacitu STK,

c) koeficient využitia liniek,

d) pravdepodobnosť vzniku radu,

e) priemerný čas strávený v STK.

4.10 Do potravinárskeho závodu prichádza zásielka surovín priemerne raz za desať dní, jej spracovanie trvá päť dní. Suroviny môžu čakať na spracovanie priemerne dva dni, po tomto čase sa už nedajú použiť. K dispozícii sú dve výrobné linky. Aký je stredný počet obsadených liniek? Aká je pravdepodobnosť toho, že sa zásielka prijme do výroby? (Určte p_0 s presnosťou na tri desatinné miesta.)

4.11 K okienku na pošte sa dostaví priemerne osem osôb za hodinu. Intenzita obsluhy je desať za hodinu. Rad sa tvorí dvomi spôsobmi: a) dĺžka radu je neohraničená, b) doba čakania je maximálne pol hodiny. Určte v prípade a) pravdepodobnosť vzniku radu a priemernú dĺžku radu, v prípade b) pravdepodobnosť p_0 s presnosťou na jedno desatinné miesto a koeficient využitia linky.

4.12 Ošetrovateľka má na starosti päť pacientov. Pacient vyžaduje ošetrenie priemerne každých sto minút, ošetrenie trvá asi desať minút. Určte pravdepodobnosť využitia ošetrovateľky a priemerný počet pacientov, ktorí potrebujú ošetrenie. Načrtnite diagram prechodu.

4.13 Prevádzkovateľ kyvadlovej dopravy má k dispozícii štyri mikrobusy. Mikrobus sa pokazí v priemere raz za dva mesiace, stredná doba opravy trvá týždeň (jednu opravu vykonáva jeden opravár). Navrhnite minimálny počet opravárov tak, aby so spoľahlivosťou 0,90 fungovali aspoň tri mikrobusy. Určte koeficient využitia liniek pre nájdené n.

4.14 Pracovník obsluhuje štyri stroje, ktoré pracujú nezávisle. Dĺžka bezporuchovej práce každého z nich má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 0,1 hodiny. Doba opravy má takisto exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 0,05 hodiny. Určte priemerný prestoj pracovníka za osemhodinovú pracovnú dobu.

4.15 V dielni má poruchovosť strojov intenzitu tri za hodinu. Prestojové náklady jedného stroja možno oceniť na desať eur na hodinu. Existuje možnosť voľby medzi

a) skúseným mechanikom, ktorý opravuje stroje s intenzitou štyri za hodinu a požaduje hodinovú mzdu 5 eur,

b) špičkovým mechanikom s intenzitou opravy päť strojov za hodinu za hodinovú mzdu 6,5 eur.

Ktorého z nich treba najať do práce?

Kapitola 5

Teória obnovy

5.1 Základné pojmy teórie obnovy

Teória obnovy sa zaoberá modelovaním takých reálnych systémov, v ktorých dochádza k náhodnému zlyhaniu prvku (porucha) a k následnému nahradeniu pokazeného prvku novým (obnova).

Matematická teória obnovy sa vyvinula z poistnej matematiky, ktorej vznik sa datuje 17. storočím. Prvý praktický problém riešil však až v roku 1933 Lotka, ktorý skúmal obnovu strojového parku. V 50.–60. rokoch o rozvoj teórie obnovy sa zaslúžili Feller a Fréchet, ktorí zaviedli pojem spoľahlivosti do teórie obnovy.

Základnými pojmami teórie obnovy sú:
Prvok – je objekt, ktorý je predmetom nášho skúmania (napríklad zariadenie, stroj, súčiastka stroja).
Porucha – čiastočná alebo úplná strata vlastnosti prvku, ktorá spôsobuje nemožnosť jeho ďalšieho použitia, teda jeho vyradenie.
Obnova – nahradenie vyradeného prvku novým.
Životnosť prvku (náhodná veličina X) – je doba bezporuchovej činnosti prvku, teda doba do poruchy.
Rozdelenie doby do poruchy je dané distribučnou funkciou $F(x) = P(X \leq x)$.
Funkcia spoľahlivosti, nazývaná aj *funkcia prežitia*, je definovaná vzťahom

$$R(x) = 1 - F(x) = P(X > x)\,. \tag{5.1}$$

Funkcia $R(x)$ je nerastúca, $R(0) = 1$ a $R(\infty) = 0$.

Definícia 5.1 *Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezáporné, nezávislé náhodné veličiny s identickým rozdelením $F(x)$. Položme*

$$\begin{aligned} S_0 &\equiv 0\,, \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Potom náhodný proces $\{S_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ *sa nazýva* ***proces obnovy (obyčajný)****. Ak vo vzťahu* (5.2) *je* $S_0 = x_0 > 0$*, proces* $\{S_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ *sa nazýva* ***proces obnovy s oneskorením****.*

Poznámka 5.1 Interpretácia náhodných veličín X_k, S_n v definícii 5.1 je nasledovná: X_k je doba medzi $(k-1)$-vou a k-tou obnovou, teda reprezentuje dobu životnosti k-tého prvku; S_n je okamih n-tej obnovy.

Poznámka 5.2 V ďalšom budeme uvažovať len obyčajný proces obnovy, slovo "obyčajný"preto vynecháme. Proces obnovy je bodový proces, ktorý sa podobne ako Poissonov proces, dá definovať aj pomocou celkového počtu udalostí (obnov, porúch) za dobu t, $\{N_t,\, t \geq 0\}$, kde

$$\begin{aligned} &N_t = \max\{n \in \mathbb{N}_0;\ S_n \leq t\}\,, \\ &\{S_n \leq t\} \Leftrightarrow \{N_t \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Definícia 5.2 *Nech* $\{N_t,\, t \geq 0\}$ *je proces obnovy. Nenáhodná funkcia* $H(t)$*,* $t \geq 0$ *definovaná vzťahom*

$$H(t) = E(N_t), \quad t \geq 0\,,$$

sa nazýva ***funkcia obnovy*** *a vyjadruje stredný počet porúch za dobu* t*.*

Veta 5.1 *Nech* $H(t)$*,* $t \geq 0$ *je funkcia obnovy. Potom platí*

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t)\,.$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} H(t) = E(N_t) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(N_t = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(N_t = k) = \\ &= 1 \cdot P(N_t = 1) + 2 \cdot P(N_t = 2) + 3 \cdot P(N_t = 3) + \ldots = \\ &= P(N_t \geq 1) + P(N_t \geq 2) + P(N_t \geq 3) + \ldots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N_t \geq n) \overset{(5.3)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t)\,. \end{aligned}$$

□

Veta 5.2 (Waldova) *Nech* $\{S_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$*, resp.* $\{N_t,\, t \geq 0\}$ *je proces obnovy. Nech stredná doba životnosti* X_i *je konečná,* $E(X_i) = E(X) < \infty$*, pre všetky* i*. Potom platí* ***Waldova identita***

$$E(S_{N_t}) = E(X) \cdot E(N_t)\,.$$

Dôkaz. Definujme pomocné náhodné veličiny

$$Z_i = 1, \quad \text{ak } i \leq N_t$$
$$Z_i = 0, \quad \text{ak } i > N_t\,.$$

Keďže náhodná veličina Z_i je jednoznačne daná javom $\{N_t < i\}$, Z_i nezávisí na X_i, preto

$$E(S_{N_t}) = E\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^{\infty} Z_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E(Z_i X_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} E(Z_i)\cdot E(X_i) = E(X)\cdot E\left(\sum_{i=1}^{\infty} Z_i\right) = E(X)\cdot E(N_t)\,. \qquad \square$$

5.2 Diskrétny model obnovy

Predpoklady modelu:

1. Čas t nadobúda iba celočíselné hodnoty $0, 1, 2, \ldots,$ ktoré nazývame *bodmi obnovy* (časová jednotka je napr. 1 deň). Intervaly medzi bodmi obnovy nazývame *obdobia*, presnejšie interval $(k-1, k\rangle$ sa nazýva k-té obdobie.

2. K obnove dochádza vždy ku koncu obdobia a to buď sa zachová konštantný počet prvkov (*jednoduchá obnova*, kedy jeden pokazený prvok sa vymení za jeden nový), alebo počet prvkov sa zväčší (*rozšírená obnova*, kedy pri obnove sa pridá $c > 0$ nových prvkov).

Uvažujme najjednoduchší prípad, kedy počet prvkov sa nemení (jednoduchá obnova), na začiatku sú všetky prvky nové (rovnorodá štruktúra) a prvky majú rovnakú maximálnu životnosť (technicky homogénne prvky).

Označme si základné charakteristiky modelu nasledovne:

u_0 – počet nových prvkov v čase $t = 0$,

u_k – počet obnov na konci k-teho obdobia, $k = 1, 2, \ldots,$

T – maximálna doba životnosti prvkov,

a_k – pravdepodobnosť zlyhania prvku v k-tom období, $k = 1, 2, \ldots, T$.

R_k – pravdepodobnosť prežitia k-tého obdobia.

Zrejme platí $R_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_T$; $R_T = 0$, $R_0 = \sum_{k=1}^{T} a_k = 1$.

Budeme sledovať dva aspekty tohto modelu:

a) pravdepodobný počet obnov na konci jednotlivých období,

b) vekovú štruktúru prvkov v jednotlivých obdobiach.

Určenie počtu obnov:
Pre pravdepodobný počet obnov v jednotlivých obdobiach platí

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \cdot a_1 \\ u_2 &= u_0 a_2 + u_1 a_1 \\ u_3 &= u_0 a_3 + u_1 a_2 + u_2 a_1 \\ &\vdots \\ u_{T-1} &= u_0 a_{T-1} + u_1 a_{T-2} + \ldots + u_{T-2} a_1 \\ u_T &= u_0 a_T + u_1 a_{T-1} + \ldots + u_{T-1} a_1 \,. \end{aligned}$$

Pre $n \geq T$ platí všeobecne *diskrétna rovnica obnovy*

$$u_n = u_{n-T} a_T + u_{n-T+1} a_{T-1} + \ldots + u_{n-1} a_1 = \sum_{k=1}^{T} u_{n-k} a_k \,. \tag{5.4}$$

Poznámka 5.3 Rovnica obnovy (5.4) vyjadruje konvolúciu dvoch postupností, teda $u_n = \{u_n\} * \{a_n\}$ a vo všeobecnosti sa rieši pomocou diferenčných rovníc za počiatočných podmienok pre u_k, $k = 0, 1, \ldots, T-1$.

Príklad 5.1 V podniku je 1 000 ks strojov určitého typu. Určme pravdepodobný počet obnov na obdobie 5 rokov, ak $T = 4$ roky: $a_1 = 0{,}1$; $a_2 = 0{,}2$; $a_3 = 0{,}4$; $a_4 = 0{,}3$.
Riešenie.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 a_1 = 100 \\ u_2 &= 200 + 10 = 210 \\ u_3 &= 400 + 20 + 21 = 441 \\ u_4 &= 300 + 40 + 42 + 44{,}1 \doteq 426 \\ u_5 &= 30 + 84 + 88{,}2 + 42{,}6 \doteq 245 \,. \end{aligned}$$

Celkový počet obnov za obdobie 5 rokov je $\sum_{k=1}^{5} u_k = 1422$. □

Určenie vekovej štruktúry:
Podľa predpokladov modelu na začiatku máme u_0 nových prvkov a celkový počet prvkov sa nemení v jednotlivých obdobiach, len ich zloženie. Rozpisom vekovej štruktúry dostaneme:
Na konci 1. *obdobia* je u_1 nových, $u_0 R_1$ rok starých, teda

$$u_0 = u_1 + u_0 \cdot R_1 \,.$$

Na konci 2. *obdobia* je u_2 nových, $u_1 R_1$ rok starých, $u_0 R_2$ dva roky starých, teda

$$u_0 = u_2 + u_1 \cdot R_1 + u_0 \cdot R_2 \,.$$

$$\vdots$$

Na konci $(T-1)$*. obdobia* máme zloženie

$$u_0 = u_{T-1} + u_{T-2} \cdot R_1 + u_{T-3} \cdot R_2 + \cdots + u_0 \cdot R_{T-1}\,.$$

Na konci n-tého obdobia pre $n \geq T$ je veková štruktúra daná vzťahom

$$u_0 = u_n + u_{n-1} \cdot R_1 + \ldots u_{n-T+1} \cdot R_{T-1} = \sum_{k=0}^{T-1} u_{n-k} \cdot R_k\,. \tag{5.5}$$

Tabuľka vekovej štruktúry obsahuje prehľadne usporiadané výpočty pre n období

vek/obdobie	0	1	2	...	$T-1$	T	...	n
0	u_0	u_1	u_2	...	u_{T-1}	u_T	...	u_n
1	–	u_0R_1	u_1R_1	...	$u_{T-2}R_1$	$u_{T-1}R_1$	...	$u_{n-1}R_1$
2	–	–	u_0R_2	...	$u_{T-3}R_2$	$u_{T-2}R_2$	...	$u_{n-2}R_2$
3	–	–		...	$u_{T-4}R_3$	$u_{T-3}R_3$	...	$u_{n-3}R_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$T-1$	–	–	–	...	u_0R_{T-1}	u_1R_{T-1}	...	$u_{n-T+1}R_{T-1}$
Súčet	u_0	u_0	u_0	...	u_0	u_0	...	u_0

Príklad 5.2 Pre údaje z predchádzajúceho príkladu ($T = 4$ roky, $a_1 = 0{,}1$; $a_2 = 0{,}2$; $a_3 = 0{,}4$; $a_4 = 0{,}3$) určme vekovú štruktúru 1000 nových prvkov pre obdobie 5 rokov.

Riešenie. V predchádzajúcom príklade sme určili $u_1 = 100$, $u_2 = 210$, $u_3 = 441$, $u_4 = 426$, $u_5 = 245$. Ďalej máme $R_0 = 1$, $R_1 = a_2+a_3+a_4 = 0{,}9$, $R_2 = a_3+a_4 = 0{,}7$, $R_3 = a_4 = 0,3$. Tabuľka vekovej štruktúry bude

vek/obdobie	0	1	2	3	4	5
0	1000	100	210	441	426	245
1	–	900	90	189	397	383
2	–	–	700	70	147	309
3	–	–	–	300	30	63
Súčet	1000	1000	1000	1000	1000	1000

□

5.3 Markovove reťazce v teórii obnovy

Nevýhodou tabuľkovej metódy, uvedenej v predchádzajúcej časti pri hľadaní vekovej štruktúry prvkov je, že sa počíta vekové zloženie za každé obdobie zvlášť, a že tabuľka musí byť kompletná. Takto prognóza na 10–20 rokov je veľmi prácnou záležitosťou. Ak je počet období n veľký, resp. nás zaujíma limitný počet obnov,

prípadne limitná veková štruktúra, je výhodnejšie aplikovať teóriu Markovových reťazcov.

Uvažujme Markovov reťazec s diskrétnym časom, pre ktorý stav vyjadruje vek prvku, teda

$$S = \{0, 1, 2, \ldots, T-1\}\,.$$

Zrejme prechod je možný len do susedného vyššieho stavu, alebo do stavu 0 a to s podmienenými pravdepodobnosťami

$$\begin{aligned} p_{k,k+1} &= \frac{R_{k+1}}{R_k}; \quad p_{k,0} = \frac{a_{k+1}}{R_k} \quad \text{pre } k = 0, 1, \ldots, T-1 \\ p_{k,j} &= 0, \quad \text{pre } j \neq 0,\ j \neq k+1\,. \end{aligned}$$

Matica pravdepodobnosti prechodu je potom

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} a_1 & R_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2/R_1 & 0 & R_2/R_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_T/R_{T-2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & R_{T-1}/R_{T-2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Absolútne pravdepodobnosti jednotlivých stavov (vekov) po n krokoch (obdobiach) sú zložkami vektora

$$\begin{aligned} \bar{p}(n) &= \big(p_0(n), p_1(n), \ldots, p_{T-1}(n)\big)\,, \\ \bar{p}(0) &= (1, 0, 0, \ldots, 0)\,. \end{aligned}$$

Vekovú štruktúru po n obdobiach dostaneme tak, že vynásobíme vektor absolútnych pravdepodobností $\bar{p}(n)$ s celkovým počtom prvkov u_0, teda ako vektor $u_0 \cdot \bar{p}(n)$.

Ak nás zaujíma limitná veková štruktúra, musíme zistiť, či sa systém obnovy stabilizuje, t.j. či existuje stacionárne rozdelenie $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{p}(n) = \bar{\pi}$. Ak áno, podľa Vety 2.5 nájdeme ho ako jediné riešenie sústavy $\bar{\pi} = \bar{\pi} \cdot \widetilde{P}$, $\sum\limits_{i=0}^{T-1} \pi_i = 1$.

$$(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{T-1}) = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{T-1}) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & R_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2/R_1 & 0 & R_2/R_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \pi_0 a_1 + \pi_1 \cdot \frac{a_2}{R_1} + \pi_2 \cdot \frac{a_3}{R_2} + \ldots + \pi_{T-1} \\
\pi_1 &= \pi_0 R_1 \\
\pi_2 &= \pi_1 \cdot \frac{R_2}{R_1} = \pi_0 R_1 \cdot \frac{R_2}{R_1} = \pi_0 R_2 \\
\pi_3 &= \pi_2 \cdot \frac{R_3}{R_2} = \pi_0 R_2 \cdot \frac{R_3}{R_2} = \pi_0 R_3 \\
&\vdots \\
\pi_{T-1} &= \pi_{T-2} \cdot \frac{R_{T-1}}{R_{T-2}} = \pi_0 R_{T-2} \cdot \frac{R_{T-1}}{R_{T-2}} = \pi_0 R_{T-1}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} \pi_k = 1 = \pi_0 + \sum_{k=1}^{T-1} \pi_k = \pi_0 + \pi_0 \cdot \sum_{k=1}^{T-1} R_k = \pi_0 \big[1 + R_1 + \ldots + R_{T-1}\big] = \\
= \pi_0 \big[(a_1 + a_2 + \ldots + a_T) + (a_2 + a_3 + \cdots + a_T) + \cdots + a_T\big] = \\
= \pi_0 \big[a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + Ta_T\big] = \pi_0 \cdot \sum_{k=1}^{T} k \cdot a_k = \pi_0 \cdot E(X)\,,
\end{aligned}
$$

kde $E(X)$ je stredná doba životnosti prvkov.
Odtiaľ dostaneme stacionárne rozdelenie

$$
\begin{aligned}
&\pi_k = \pi_0 R_k, \quad k = 1, 2, \ldots, T-1, \text{resp.} \\
&\bar{\pi} = \pi_0 (1, R_1, R_2, \ldots, R_{T-1})\,, \text{kde} \quad \pi_0 = \frac{1}{E(X)}.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Limitnú vekovú štruktúru dostaneme v tvare

$$
u_0 \cdot \bar{\pi} = \frac{u_0}{E(X)} \cdot \big(1, R_1, R_2, \ldots, R_{T-1}\big)\,. \tag{5.7}
$$

Príklad 5.3 Podnik zakúpil vo východiskovom roku 1100 rovnakých súčiastok s maximálnou životnosťou 3 roky. Zistime vekovú štruktúru na konci 3. roku a limitnú vekovú štruktúru, ak sa očakáva, že v 1., 2., 3. roku zlyhá 20%, 40%, 40% súčiastok.

Riešenie. $T = 3$ roky; $a_1 = 0{,}2$; $a_2 = a_3 = 0{,}4 \Rightarrow R_1 = 0{,}8$; $R_2 = 0{,}4$.

$$
\widetilde{P} = \begin{pmatrix} a_1 & R_1 & 0 \\ a_2/R_1 & 0 & R_2/R_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Podľa Vety 2.4 je $\bar{p}(n) = \bar{p}(n-1) \cdot \widetilde{P}$, pričom $\bar{p}(0) = (1, 0, 0)$.

$$
\begin{aligned}
\bar{p}(1) &= \bar{p}(0) \cdot \widetilde{P} = (0{,}2; 0{,}8; 0) \\
\bar{p}(2) &= \bar{p}(1) \cdot \widetilde{P} = (0{,}44; 0{,}16; 0{,}4) \\
\bar{p}(3) &= \bar{p}(2) \cdot \widetilde{P} = (0{,}568; 0{,}352; 0{,}08)\,.
\end{aligned}
$$

Veková štruktúra na konci 3. roka bude

$$u_0 \cdot \bar{p}(3) = 1100(0{,}568; 0{,}352; 0{,}08) \doteq (625; 387; 88),$$

teda v systéme sa očakáva 625 nových, 387 rok starých a 88 dva roky starých súčiastok.

Limitnú vekovú štruktúru nájdeme podľa vzťahu (5.7), pričom

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{3} k \cdot a_k = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}4 = 2{,}2\,\text{rokov},\\
\bar{\pi} &= \frac{1}{2{,}2}(1; 0{,}8; 0{,}4) = \left(\frac{5}{11}, \frac{4}{11}, \frac{2}{11}\right),\\
u_0 \cdot \bar{\pi} &= 1100\left(\frac{5}{11}, \frac{4}{11}, \frac{2}{11}\right) = (500, 400, 200)\,.
\end{aligned}$$

□

Poznámka 5.4 Či sa proces obnovy stabilizuje, dá sa zistiť pomocou koreňov λ_i, charakteristickej rovnice matice pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P}$, t.j. rovnice

$$|\lambda \cdot \widetilde{I} - \widetilde{P}| = 0\,. \tag{5.8}$$

Fréchet ukázal, že k stabilizácii dôjde za podmienky, že pre korene rovnice (5.8) platí

$$\lambda_1 = 1, \quad |\lambda_i| < 1,\ i = 2, 3, \ldots, T. \tag{5.9}$$

Príklad 5.4 Overme Fréchetovu podmienku stabilizácie procesu obnovy z predchádzajúceho príkladu.
Riešenie.

$$\begin{aligned}
|\lambda \cdot \widetilde{I} - \widetilde{P}| &= \begin{vmatrix} \lambda - 0{,}2 & -0{,}8 & 0 \\ -0{,}5 & \lambda & -0{,}5 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} =\\
&= \lambda^3 - 0{,}2\lambda^2 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 - \lambda 0{,}8 \cdot 0{,}5 = \lambda^3 - 0{,}2\lambda^2 - 0{,}4\lambda - 0{,}4\,.
\end{aligned}$$

Zrejme $\lambda_1 = 1$ je riešením rovnice $\lambda^3 - 0{,}2\lambda^2 - 0{,}4\lambda - 0{,}4 = 0$, teda platí

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 0{,}8\lambda + 0{,}4) = 0\,.$$

Ďalšími koreňmi sú

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_2 &= -0{,}4 + i\sqrt{0{,}24}\\
\lambda_3 &= -0{,}4 - i\sqrt{0{,}24}
\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow |\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{0{,}4} < 1\,.$$

Fréchetova podmienka je splnená, proces sa stabilizuje.

□

5.4 Spojitý model obnovy

Predpoklady modelu:

1. Čas je nezáporná spojitá veličina z intervalu $\langle 0, \infty)$.
2. V prípade poruchy je prvok okamžite vymenený za nový (okamih poruchy $\equiv$ okamih obnovy).

Podobne ako v diskrétnom modeli obnovy, aj tu budeme ďalej predpokladať, že na začiatku sú všetky prvky nové, počet prvkov je konštantný a doby životnosti prvkov majú identické rozdelenie.
V úvodnej časti kapitoly sme zaviedli základné pojmy a označenia
X – doba životnosti prvku (doba do poruchy),
$F(x) = P(X \leq x)$ – distribučná funkcia doby životnosti,
$R(x) = P(X > x)$ – funkcia prežitia (spoľahlivosti) prvku.
V spojitom modeli, kde distribučná funkcia je absolútne spojitá, pribudnú ďalšie pojmy
$f(x) = F'(x) = -R'(x)$ – *hustota doby životnosti*,
$q(x)$– *intenzita poruchy* (miera zlyhania prvku).

Definícia 5.3 *Nech doba životnosti prvkov X má spojité rozdelenie.* ***Intenzitu poruchy*** *$q(x)$ definujeme ako elementárnu zmenu podmienenej pravdepodobnosti toho, že na intervale $(x, x + \triangle x\rangle$ dôjde k poruche za predpokladu, že sa prvok dožil veku x, teda vzťahom*

$$q(x) = \lim_{\triangle x \to 0_+} \frac{P\left(x < X \leq x + \triangle x \mid X > x\right)}{\triangle x} \tag{5.10}$$

Veta 5.3 *Nech distribučná funkcia doby životnosti prvkov $F(x)$ je absolútne spojitá, $f(x)$ je odpovedajúca hustota, $q(x)$ intenzita poruchy, $R(x)$ funkcia prežitia. Potom platí*

$$q(x) = \frac{f(x)}{R(x)}, \tag{5.11}$$

$$R(x) = e^{-\int\limits_0^x q(y)dy}, \quad x \geq 0\,. \tag{5.12}$$

Dôkaz. Podľa definície intenzity poruchy máme

$$\begin{aligned} q(x) &= \lim_{\triangle x \to 0_+} \frac{P(x < X \leq x + \triangle x)}{\triangle x \cdot P(X > x)} = \frac{1}{R(x)} \cdot \lim_{\triangle x \to 0_+} \frac{P(x < X \leq x + \triangle x)}{\triangle x} = \\ &= \frac{1}{R(x)} \cdot F'(x) = \frac{1}{R(x)} \cdot f(x)\,. \end{aligned}$$

Dostávame teda vzťah medzi intenzitou poruchy, hustotou doby životnosti a funkciou prežitia v tvare

$$q(x) = \frac{f(x)}{R(x)}\,.$$

Podľa vzťahu (5.11) je

$$q(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = -\frac{R'(x)}{R(x)} = -\big(\ln R(x)\big)'\,,$$

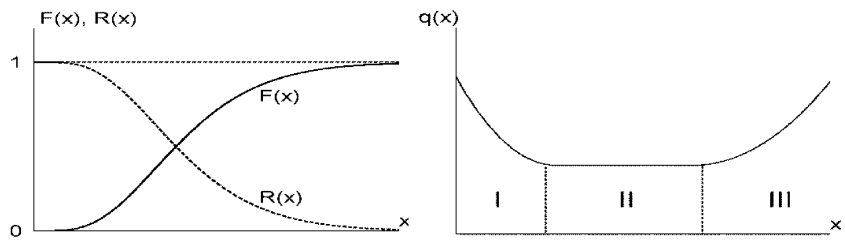
$$\int\limits_0^y q(x)dx = -\big[\ln R(y) - \ln R(0)\big] = -\ln R(y)\,,$$

$$e^{-\int\limits_0^y q(x)dx} = R(y) \quad \Leftrightarrow \quad R(x) = e^{-\int\limits_0^x q(y)dy}\,. \qquad \square$$

Poznámka 5.5 Zrejme pre distribučnú funkciu $F(x)$ a odpovedajúcu hustotu $f(x)$ podľa Vety 5.3 platí

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - R(x) = 1 - e^{-\int\limits_0^x q(y)dy}\,, \\ f(x) &= -R'(x) = q(x)\cdot e^{-\int\limits_0^x q(y)dy}\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Grafické znázornenie funkcií $F(x)$ a $R(x)$ vidíme na obrázku 5.1 vľavo. Typický priebeh intenzity poruchy $q(x)$ v reálnych procesoch obnovy je znázornený na obrázku 5.1 vpravo.



Obr. 5.1

Celkový priebeh intenzity poruchy sa dá rozdeliť na tri obdobia:

I – obdobie zábehu, kedy sa prejavujú výrobné chyby prvku a intenzita porúch vekom klesá,

II – obdobie bezproblémového fungovania prvku, kedy intenzita poruchy je približne konštantná,

III – obdobie opotrebovania, kedy intenzita vekom narastá až do okamihu poruchy.

Význam zavedenia pojmu intenzity poruchy $q(x)$ spočíva okrem iného aj v tom, že umožní lepšie rozlíšiť *chvost* rozdelenia doby životnosti ako $f(x)$ a $F(x)$. Na druhej strane je obtiažne vyjadriť analyticky elegantne $q(x)$ pre všetky tri obdobia (podľa obr. 5.1) naraz. Špeciálne typy rozdelenia, ktoré sa javia ako vhodné, budú uvedené v ďalšom odseku. Našťastie niektoré prvky (napr. žiarovky) nemajú obdobie I a III, takže ich intenzitu poruchy možno považovať za konštantnú $q(x) = q =$ konšt. V tomto prípade platí, podľa vzťahu (5.13), že $f(x) = q \cdot e^{-qx}$, čo znamená, že X má exponenciálne rozdelenie s parametrom $1/q$, teda pre strednú dobu životnosti prvku dostávame $E(X) = 1/q$.
Ak $q(x)$ nie je konštanta, pre strednú dobu životnosti platí

$$E(X) = \int_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.14}$$

Uvedený vzťah dokážeme všeobecnejšie, pre k–tý počiatočný moment, $k \geq 1$, pričom v (5.14) je $k = 1$.

Veta 5.4 *Nech doba životnosti prvku X má spojité rozdelenie dané hustotou $f(x)$, nech $R(x)$ je odpovedajúca funkcia spoľahlivosti. Nech $X \in L^k$, $k \geq 1$. Potom platí*

$$E(X^k) = k \cdot \int_0^\infty x^{k-1} R(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.15}$$

Dôkaz. Uvažujme integrál

$$I_b = \int_0^b x^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{pre } b > 0\,. \tag{5.16}$$

Užitím metódy per partes pri $\big[u = x^k, v' = f(x)\big]$ je

$$\begin{aligned} I_b &= \big[x^k \cdot F(x)\big]_0^b - k \int_0^b x^{k-1} \cdot F(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= b^k \cdot F(b) - k \int_0^b x^{k-1}\big(1 - R(x)\big)\,\mathrm{d}x = \\ &= b^k \cdot F(b) - b^k + k \int_0^b x^{k-1} R(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= b^k \cdot \big[F(b) - 1\big] + k \int_0^b x^{k-1} R(x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Uvažujme teraz limitu pre $b \to \infty$. Podľa (5.16) je

$$\lim_{b\to\infty} I_b = \int_0^\infty x^k f(x)\,\mathrm{d}x = E(X^k)\,. \tag{5.18}$$

Podľa (5.17) dostávame

$$\lim_{b\to\infty} I_b = \lim_{b\to\infty}\Big(b^k\big[F(b)-1\big]\Big) + k\int_0^\infty x^{k-1}R(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.19}$$

Vzhľadom na predpoklad $X \in L^k$, platí

$$\Big|b^k\cdot\big(F(b)-1\big)\Big| = b^k\cdot\big|F(b)-1\big| = b^k\int_b^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_b^\infty x^k f(x)\,\mathrm{d}x \to 0\,,$$

pre $b \to \infty$. Podľa (5.18) a (5.19) to však znamená

$$E(X^k) = k\int_0^\infty x^{k-1}R(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad \square$$

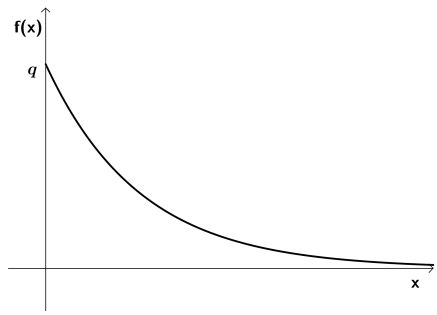
5.5 Rozdelenie doby životnosti

Ako sme uviedli už v predchádzajúcom odseku, predpoklad konštantnej intenzity poruchy $q(x) = q =$ konšt., vedie k exponenciálnemu rozdeleniu doby životnosti s parametrom $1/q$. Ak $q(x)$ nie je konštanta, najčastejšie sa používa na modelovanie doby životnosti prvkov lognormálne, gama, beta a Weibullovo rozdelenie, ktoré sú dvojparametrové. Voľbou parametrov α, β môžeme dosiahnuť rôzne priebehy hustoty resp. intenzity poruchy, ako uvidíme v ďalšom. Pri všetkých spomenutých typoch rozdelení uvedieme hustotu, znázorníme jej graf a odvodíme strednú dobu životnosti prvku. Distribučná funkcia vo väčšine prípadov nemá analytický tvar.

1. Exponenciálne rozdelenie Ex$(1/q)$

Hustota rozdelenia
$f(x) = qe^{-qx}, \quad x > 0,\ q > 0$

Stredná doba životnosti
$E(X) = 1/q$



Odvodenie $E(X)$

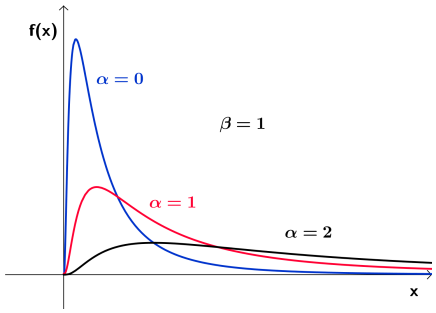
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} x \cdot q e^{-qx}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} S_1 : qx = y \in (0,\infty) \\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{q}\,\mathrm{d}y \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{y}{q} \cdot q e^{-y} \frac{\mathrm{d}y}{q} = \frac{1}{q} \int_{0}^{\infty} y e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{q}\,\Gamma(2) = \frac{1}{q}\,.$$

2. Lognormálne rozdelenie $\mathrm{LN}(\alpha, \beta^2)$

Hustota rozdelenia
$f(x) = \dfrac{1}{\beta x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}}, \quad x > 0, \beta > 0$

Stredná doba životnosti
$E(X) = e^{\alpha + \frac{1}{2}\beta^2}$



Odvodenie $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\beta x \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} S_1 : \dfrac{\ln x - \alpha}{\beta\sqrt{2}} = y \in (-\infty,\infty) \\ \mathrm{d}x = e^{\beta\sqrt{2}y + \alpha} \cdot \beta\sqrt{2}\,\mathrm{d}y \end{array} \right\} =$$

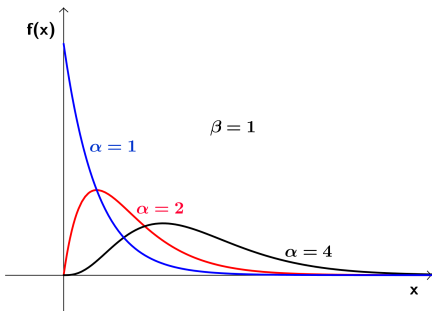
$$= \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot e^{\beta\sqrt{2}y + \alpha} \cdot \beta\sqrt{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y^2 - 2\frac{\beta\sqrt{2}}{2}y + \frac{\beta^2}{2}\right) + \frac{\beta^2}{2}}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} S_2 : y - \dfrac{\beta}{\sqrt{2}} = z \in (-\infty,\infty) \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}z \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{\alpha + \frac{1}{2}\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = e^{\alpha + \frac{1}{2}\beta^2}\,.$$

3. Gama rozdelenie $\Gamma(\alpha, \beta)$

Hustota rozdelenia
$f(x) = \dfrac{1}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha - 1} \cdot e^{-x/\beta}$
$x > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$

Stredná doba životnosti
$E(X) = \alpha \cdot \beta$



Odvodenie $E(X)$

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-x/\beta} \, \mathrm{d}x =$$

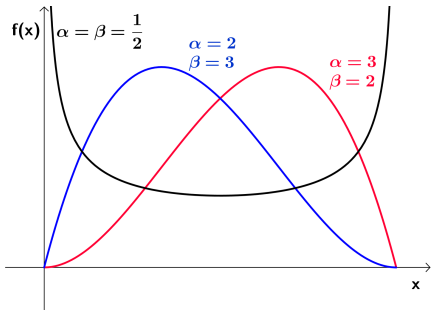
$$= \left\{ \begin{array}{l} S_1 : \dfrac{x}{\beta} = y \in (0, \infty) \\ \mathrm{d}x = \beta \, \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (\beta y)^\alpha \cdot e^{-y} \beta \, \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha \cdot e^{-y} \, \mathrm{d}y = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha + 1) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \cdot \alpha \cdot \Gamma(\alpha) = \alpha \cdot \beta \, .$$

4. Beta rozdelenie $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$

Hustota rozdelenia
$f(x) = \dfrac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}$,
$x \in (0, 1)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Stredná doba životnosti
$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$



Odvodenie $E(X)$

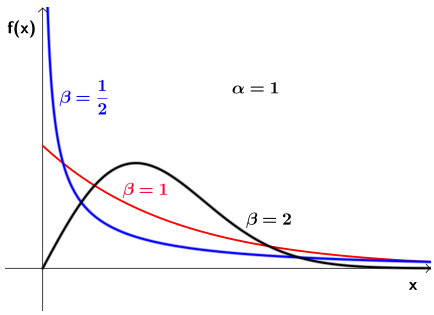
$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^\alpha (1-x)^{\beta-1} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\alpha \cdot \Gamma(\alpha)}{(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \, .$$

5. Weibullovo rozdelenie $\mathrm{W}(\alpha, \beta)$

Hustota rozdelenia
$f(x) = \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}$,
$x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.
Stredná doba životnosti
$E(X) = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$



Odvodenie $E(X)$

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} S_1 : \alpha \cdot x^\beta = y \in (0,\infty) \\ \alpha\beta x^{\beta-1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \\ x = \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha^{1/\beta}} \int_0^\infty y^{\frac{1}{\beta}} e^{-y}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{\alpha^{1/\beta}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right) = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \cdot \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right).$$

Poznámka 5.6 Pri Weibullovom rozdelení sa dá odvodiť v analytickom tvare aj distribučná funkcia, navyše odpovedajúca intenzita poruchy dokáže pri vhodnej voľbe parametrov modelovať aj všeobecný tvar znázornený na obr. 5.1.

$$F(x) = \int_0^x \alpha\beta t^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha t^\beta}\,\mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{c} S_1 : \alpha t^\beta = y \in (0, \alpha x^\beta) \\ \alpha\beta t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}y \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{\alpha x^\beta} e^{-y}\,\mathrm{d}y = \left[-e^{-y}\right]_0^{\alpha x^\beta} = 1 - e^{-\alpha x^\beta}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0\,.$$

$$R(x) = 1 - F(x) = e^{-\alpha x^\beta}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$q(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \alpha\beta x^{\beta-1}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Príklad 5.5 Životnosť určitého druhu prvku má Weibullovo rozdelenie s parametrami $\alpha = 0{,}1$; $\beta = 0{,}5$ (časová jednotka je 1 hodina). Určme funkciu spoľahlivosti, hustotu a intenzitu poruchy. Vypočítajme strednú dobu životnosti prvku a pravdepodobnosť toho, že bude slúžiť dlhšie ako 300 hodín.

Riešenie.

$$R(x) = e^{-0{,}1\sqrt{x}}, \quad x > 0,$$

$$f(x) = 0{,}05 \cdot x^{-0{,}5} \cdot e^{-0{,}1\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

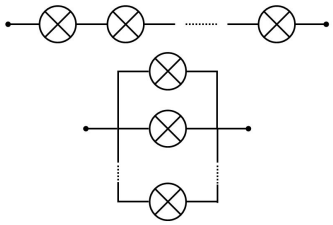
$$q(x) = 0{,}05 \cdot x^{-0{,}5}, \quad x > 0$$

$$E(X) = \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) = 0{,}1^{-2} \cdot \Gamma(1+2) = 100 \cdot \Gamma(3) = 200 \text{ hodín},$$

$$P(X > 300) = R(300) = e^{-\alpha \cdot 300^\beta} = e^{-0{,}1 \cdot \sqrt{300}} \doteq 0{,}177\,. \qquad \square$$

5.6 Doba životnosti systému prvkov

Uvažujme systém n nezávisle fungujúcich prvkov so životnosťami X_i a intenzitami poruchy $q_i(x) = q_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zaujíma nás spoľahlivosť a stredná doba životnosti systému pri



a) sériovom zapojení prvkov,

b) paralelnom zapojení prvkov.

Sériové zapojenie prvkov – znamená, že systém funguje, ak fungujú všetky jeho prvky. Doba životnosti takéhoto systému je teda

$$X_S = \min\{X_1, X_2, \ \ldots, \ X_n\}\,.$$

Keďže prvky fungujú nezávisle, spoľahlivosť systému je daná súčinom spoľahlivosti jednotlivých sériovo zapojených prvkov (ide o pravdepodobnosť prieniku n nezávislých javov)

$$R_S(x) = P(X_S > x) = P\left[\min(X_1, \ldots, X_n) > x)\right] = P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > x)\right] =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = \prod_{i=1}^{n} R_i(x).$$

Keďže intenzity sú $q_i =$ konšt., dostaneme

$$R_i(x) = e^{-q_i x} \Longrightarrow R_S(x) = \prod_{i=1}^{n} e^{-q_i x} = e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} q_i x} = e^{-q_S x} \tag{5.20}$$

Funkcia spoľahlivosti $R_S(x)$ je exponenciálneho typu, odpovedajúca intenzita poruchy systému je teda súčtom intenzít porúch jednotlivých prvkov

$$q_S = \sum_{i=1}^{n} q_i = \text{konšt.} \tag{5.21}$$

Stredná doba životnosti systému je harmonický priemer strednej doby životnosti prvkov

$$E(X_S) = \frac{1}{q_S} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i} = \frac{1}{\frac{1}{E(X_1)} + \frac{1}{E(X_2)} + \ldots + \frac{1}{E(X_n)}}\,. \tag{5.22}$$

Poznámka 5.7 Ak je navyše $q_i = q$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$, potom

$$\begin{aligned} R_S(x) &= e^{-nqx}, \\ E(X_S) &= \frac{1}{nq}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Príklad 5.6 Aká má byť spoľahlivosť a intenzita poruchy jednotlivých prvkov pri sériovom zapojení dvoch rovnakých prvkov, ak celková spoľahlivosť systému má byť 0,95 za časovú jednotku 1 hodina? Aká bude stredná doba životnosti systému?
Riešenie.

Keďže $q_1 = q_2 = q =$ konšt., pre spoľahlivosť systému máme

$$R_S(1) = 0{,}95 = e^{-2q} = (e^{-q})^2 \Rightarrow R_i(1) = e^{-q} = \sqrt{0{,}95} \doteq 0{,}975,\ i = 1, 2.$$

Odtiaľ $q \doteq 0{,}025$ (za hodinu).

$$E(X_S) = \frac{1}{nq} \doteq \frac{1}{2 \cdot 0,025} = 20\,\text{hodín}. \qquad \square$$

Paralelné zapojenie prvkov – znamená, že systém funguje, ak funguje aspoň jeden z jeho prvkov. Doba životnosti takého systému je

$$X_P = \max\{X_1, X_2,\ \ldots,\ X_n\}\,.$$

Spoľahlivosť systému je daná pravdepodobnosťou zjednotenia n nezávislých javov, takže $R_P(x)$ nie je exponenciálneho typu

$$\begin{aligned} R_P(x) &= P\left[\bigcup_{i=1}^{n}(X_i > x)\right] = 1 - P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \le x)\right] = 1 - \prod_{i=1}^{n} F_i(x) = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(x)) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - e^{-q_i x}\right). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Poznámka 5.8 Ak pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ je $q_i = q =$ konšt., tak

$$R_P(x) = 1 - \left(1 - e^{-qx}\right)^n. \tag{5.25}$$

V tomto prípade použitím binomickej vety rozpíšeme n–tú mocninu

$$\begin{aligned} R_P(x) &= 1 - \left[1 - \binom{n}{1}e^{-qx} + \binom{n}{2}e^{-2qx} - \ldots + (-1)^n e^{-nqx}\right] = \\ &= \binom{n}{1}e^{-qx} - \binom{n}{2}e^{-2qx} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot e^{-nqx}\,. \end{aligned}$$

Podľa Vety 5.4 platí

$$\begin{aligned} E(X_P) &= \int_0^\infty R_P(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left[\binom{n}{1}e^{-qx} - \binom{n}{2}e^{-2qx} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot e^{-nqx}\right]\mathrm{d}x = \\ &= \left[\binom{n}{1}\frac{e^{-qx}}{-q} - \binom{n}{2}\frac{e^{-2qx}}{-2q} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{e^{-nqx}}{-nq}\right]_0^\infty = \\ &= \frac{1}{q}\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n}\right]. \end{aligned}$$

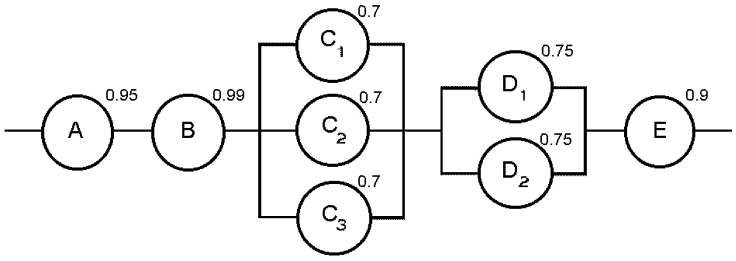
Matematickou indukciou sa dá dokázať, že výraz v hranatých zátvorkách je $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, teda pre $n \geq 2$ dostaneme

$$E(X_P) = \frac{1}{q}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right). \tag{5.26}$$

Príklad 5.7 Systém pozostáva z 8 nezávisle fungujúcich prvkov so spoľahlivosťami podľa obrázku 5.2. Určme

a) spoľahlivosť systému,

b) strednú dobu životnosti systému.



Obr. 5.2

Riešenie. a) Spoľahlivosť systému určíme postupne. Prvky C_1, C_2, C_3 sú zapojené paralelne a tvoria podsystém $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Spoľahlivosť $R_C = 1 - (1 - 0{,}7)^3 = 0{,}973$.
Podobne vypočítame pre paralelne zapojené prvky D_1, D_2 spoľahlivosť podsystému $D = D_1 \cup D_2$. Platí $R_D = 1 - (1 - 0{,}75)^2 = 0{,}9375$.
Teraz uvažujeme sériové zapojenie piatich prvkov $S = A \cap B \cap C \cap D \cap E$, teda spoľahlivosť celého systému je

$$R_S(1) = \prod_{i=1}^{5} R_i(1) = 0{,}95 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}973 \cdot 0{,}9375 \cdot 0{,}9 = 0{,}772\,.$$

b) Strednú dobu životnosti systému určíme tiež postupne. Najprv vypočítame intenzitu poruchy pre všetky prvky, pričom položíme $x = 1$ č.j.

$$\begin{aligned}
R_A(1) &= 0{,}95 = e^{-q_A} \;\Rightarrow q_A = 0{,}051\\
R_B(1) &= 0{,}99 = e^{-q_B} \;\Rightarrow q_B = 0{,}010\\
R_{C_i}(1) &= 0{,}70 = e^{-q_{C_i}} \Rightarrow q_{C_i} = 0{,}357,\;\; i = 1,2,3\\
R_{D_j}(1) &= 0{,}75 = e^{-q_{D_j}} \Rightarrow q_{D_j} = 0{,}288,\;\; j = 1,2\\
R_E(1) &= 0{,}90 = e^{-q_E} \;\Rightarrow q_E = 0{,}105\,.
\end{aligned}$$

Teraz určíme strednú dobu životnosti blokov $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ a $D = D_1 \cup D_2$:

$$E(X_C) = \frac{1}{q_{C_i}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{0{,}357} \cdot \frac{11}{6} \doteq 5{,}1 \Rightarrow q_C = \frac{1}{5{,}1} = 0{,}195\,,$$

$$E(X_D) = \frac{1}{q_{D_i}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{0{,}288} \cdot \frac{3}{2} \doteq 5{,}2 \Rightarrow q_D = \frac{1}{5{,}2} = 0{,}192\,.$$

Pre strednú dobu životnosti systému 5 sériovo zapojených prvkov A, B, C, D, E platí

$$E(X_S) = \frac{1}{q_A + q_B + q_C + q_D + q_E} = \frac{1}{0{,}051 + 0{,}01 + 0{,}195 + 0{,}192 + 0{,}105} =$$
$$= \frac{1}{0{,}553} \doteq 1{,}8 \text{ časových jednotiek.} \qquad \square$$

5.7 Integrálna rovnica obnovy

Veta 5.5 *Nech $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ je jednoduchý proces obnovy. Nech distribučná funkcia $F(x)$ doby životnosti X je spojitá. Potom funkcia obnovy $H(t) = E(N_t)$, $t \geq 0$ spĺňa* ***integrálnu rovnicu obnovy***

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-s)\,\mathrm{d}F(s)\,. \tag{5.27}$$

Dôkaz. (konvolúciou distribučných funkcií) Predpoklad, že $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je jednoduchý (obyčajný) proces obnovy znamená, že $S_0 = 0$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, kde X_i sú nezáporné, nezávislé, identicky rozdelené náhodné veličiny s distribučnou funkciou $F(x)$. Označme si ďalej ako $F_n(x)$ distribučnú funkciu súčtu S_n, $n = 1, 2, \ldots$. Podľa Vety 5.1 je

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\,.$$

Uvažujme súčet $S_n = S_{n-1} + X_n$ a využime, že ide o nezávislé veličiny, teda pre distribučnú funkciu súčtu platí

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-s) \cdot \mathrm{d}F(s),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t F_{n-1}(t-s)\,\mathrm{d}F(s) = \int_0^t \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}(t-s)\,\mathrm{d}F(s)\,.$$

Pripočítaním člena $F_1(t) = F(t)$ k obom stranám rovnice a prepisom sumy $\sum\limits_{n=2}^{\infty} F_{n-1}(t-s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(t-s) = H(t-s)$ dostávame

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) = H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-s)\,\mathrm{d}F(s)\,. \qquad \square$$

Poznámka 5.9 Integrálnu rovnicu obnovy ako prvý uverejnil taliansky matematik Volterra v roku 1910. Feller v roku 1941 dokázal, že uvedená rovnica má jediné neklesajúce riešenie. Metódou per partes pre Lebesque-Stieltiesov integrál možno odvodiť aj iný tvar integrálnej rovnice obnovy (pozri napr. [12], s. 78)

$$H(t) = F(t) + \int_0^t F(t-s)\,\mathrm{d}H(s). \tag{5.28}$$

Definícia 5.4 *Nech funkcia obnovy $H(t)$ je spojitá. Potom derivácia funkcie obnovy (ak existuje) sa nazýva* ***hustota obnovy*** *a označuje sa ako*

$$h(t) = H'(t) = \lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{E(N_{t+\Delta t}) - E(N_t)}{\Delta t}\,.$$

Poznámka 5.10 Podľa Vety 5.1 zrejme $h(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$, kde $f_n(t)$ je hustota rozdelenia súčtu S_n a spĺňa rovnicu obnovy v tvare

$$h(t) = f(t) + \int_0^t h(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{5.29}$$

5.8 Limitné vety v teórii obnovy

Limitné vety v teórii obnovy súvisia so štúdiom asymptotických vlastností procesu obnovy, resp. veličín N_t a H_t.

Veta 5.6 (Silný zákon veľkých čísel) *Nech $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\{N_t, t \geq 0\}$ je proces obnovy. Nech doba životnosti X_i má konečnú strednú hodnotu $E(X_i) = a < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom s pravdepodobnosťou jedna platí*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{a}\,.$$

Dôkaz. Označme si $S_{N_t} = \sum\limits_{i=1}^{N_t} X_i$. Zrejme $S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$. Pre dostatočne veľké t je $S_{N_t} > 0$, $N_t > 0$, preto platí

$$\frac{N_t}{S_{N_t}} \geq \frac{N_t}{t} \geq \frac{N_t}{S_{N_t+1}} \cdot \frac{N_t+1}{N_t+1} \tag{5.30}$$

Keďže $\frac{N_t}{N_t+1} \to 1$, pre $t \to \infty$ a podľa zákona veľkých čísel $\frac{S_{N_t}}{N_t} \to a$, $\frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \to a$ skoro iste, podľa vzťahu (5.30) musí platiť aj

$$\frac{N_t}{t} \to \frac{1}{a}, \text{ skoro iste, pri } t \to \infty\,. \qquad \square$$

Veta 5.7 (Elementárna veta obnovy) *Nech* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, *resp.* $\{N_t, t \geq 0\}$ *je proces obnovy. Nech doba životnosti má konečnú strednú hodnotu* $E(X_i) = a < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Potom pre funkciu obnovy* $H(t)$ *s pravdepodobnosťou jedna platí*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{a}\,.$$

Dôkaz. Označme si ako τ_t „zvyškovú dobu života“ prvku v čase t, teda $S_{N_t+1} = t+\tau_t$. Uvažujme k–nezávislých realizácií procesu obnovy a označme

$\left\{X_i^{(j)}\right\}_{j=1}^{k}$ – postupnosť k nezávislých realizácii dôb životnosti

$\left\{S_{N_t}^{(j)}\right\}_{j=1}^{k}$ – realizácie odpovedajúcich okamihov poruchy

$\left\{N_t^{(j)}\right\}_{j=1}^{k}$ – realizácie počtu obnov za čas t

Definujme teraz pomocné veličiny

$$M_k = N_t^{(1)} + N_t^{(2)} + \cdots + N_t^{(k)}\,,$$
$$T_k = S_{N_t+1}^{(1)} + S_{N_t+1}^{(2)} + \cdots + S_{N_t+1}^{(k)}\,.$$

Zrejme veličina T_k je súčtom

a) $k + M_k$ náhodných veličín X_i, ktoré sú nezávislé, nezáporné a rovnako rozdelené, $E(X_i) = a < \infty$

b) k nezávislých náhodných veličín typu $t + \tau_t^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Uvažované veličiny spĺňajú silný zákon veľkých čísel, teda

$$\frac{T_k}{k + M_k} \longrightarrow E(X_i) = a, \text{ s.i. pri } k \to \infty \tag{5.31}$$

$$\frac{T_k}{k} \longrightarrow E(t + \tau_t) = t + E(\tau_t), \text{ s.i. pri } k \to \infty \tag{5.32}$$

$$\frac{M_k}{k} \longrightarrow E(N_t) = H(t), \text{ s.i. pri } k \to \infty. \tag{5.33}$$

Využitím vzťahov (5.31)–(5.33) a ich postupnou úpravou dostaneme

$$\frac{T_k}{k + M_k} \longrightarrow a, \text{ s.i. pri } k \to \infty,$$

$$\frac{T_k}{k + M_k} = \frac{T_k/k}{1 + M_k/k} \longrightarrow \frac{t + E(\tau_t)}{1 + H(t)}, \text{ s.i. pri } k \to \infty$$

teda

$$t + E(\tau_k) = a(1 + H(t))\,,$$
$$\frac{H(t)}{t} = \frac{1}{a} + \frac{1}{t}\left(\frac{E(\tau_t)}{a} - 1\right)\,.$$

Limitným prechodom pri $t \to \infty$ a za predpokladu konečnosti strednej doby životnosti prvku s pravdepodobnosťou jedna platí

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{a}\,. \qquad \square$$

5.9 Riadenie procesu obnovy

Doteraz sme uvažovali obnovu prvku až po jeho zlyhaní (poruche), teda „represívnu“ výmenu. V praxi však niekedy potrebujeme vykonať obnovu skôr, než dôjde k poruche, vtedy ide o „preventívnu“ výmenu. Dôvodov je niekoľko: zlyhanie môže spôsobiť ohrozenie výroby, života ľudí, vysoké finančné straty, atď. Uvažujme teda dva typy výmeny:

1. *represívna výmena* po poruche pri náklade c_1,
2. *preventívna výmena* pri náklade c_2.

Predpokladajme, že $c_1 > c_2 > 0$ a okamih preventívnej výmeny určíme podľa určitých pravidiel (stratégií).
Stratégia obnovy – je súhrn pravidiel, ktoré určujú okamihy a spôsob preventívnej výmeny prvkov. Ide vlastne o riadenie procesu obnovy.
Rozlišujeme dva typy stratégií:

a) deterministickú (pravidelná výmena),

b) stochastickú (náhodná výmena).

Deterministická stratégia – môže byť

1. *periodická výmena* – vždy po uplynutí konštantnej doby T, teda výmena sa realizuje v časoch $T, 2T, 3T, \ldots$. Nevýhodou je výmena aj relatívne nových prvkov.
2. *veková výmena* – vždy po dosiahnutí vopred daného konštantného veku prvku. Problémom je tu určenie optimálneho veku na výmenu $d = \tau_{opt}$.

Stochastická stratégia – spočíva v preventívnej výmene prvku po dosiahnutí tzv. *kritického veku*, ktorý vo všeobecnosti nie je konštantný, ale určený realizáciou riadeného náhodného procesu $\{Z_t, t \geq 0\}$. Pri nákladovom prístupe k riadeniu procesu *kritériom optimality* je minimalizácia priemerných nákladov.

Označme celkové náklady na výmenu prvkov za čas t ako C_t, nech N_t^i je počet výmen i-tého typu za čas t, $i = 1, 2$. Potom celkové náklady reprezentujú náhodný proces $\{C_t, t \geq 0\}$, kde

$$C_t = c_1 N_t^1 + c_2 N_t^2 \,. \tag{5.34}$$

Priemerné náklady za jednotku času označme

$$\Theta(x) = \frac{c_1 F(x) + c_2 R(x)}{\int\limits_0^\infty R(y)\,\mathrm{d}y} \,,$$

kde integrál v menovateli zlomku podľa Vety 5.4 reprezentuje strednú dobu životnosti prvku. V práci [21] sú uvedené podmienky optimality, za ktorých priemerné náklady konvergujú k minimálnej hodnote. Pri vyšetrovaní asymptotických vlastností celkového priemerného nákladu C_t/t, $t \to \infty$ sú použité náročné martingalové metódy, prekračujúce zámer predloženého učebného textu.

V práci [29] je prezentovaný iný spôsob riadenia obnovy, tzv. *impulzné riadenie*, ktoré spočíva vo voľbe intenzity zastavenia procesu. Kritériom optimality v tomto prípade je minimalizácia očakávaného diskontovaného nákladu $E_x^Z \int\limits_0^\infty e^{-\beta t} \mathrm{d}C_t$, kde x je počiatočný vek prvku, β diskontný faktor a $\{Z_t,\, t \geq 0\}$ reprezentuje riadenie zastavenia procesu. Uvažovaný integrál podľa náhodného procesu $\{C_t, t \geq 0\}$ je stochastický integrál, ktorému sa venuje v druhej časti predmetu "Náhodné procesy" na PF UPJŠ v Košiciach.

5.10 Cvičenia

5.1 Proces obnovy je daný nasledovne: $T = 4$ roky, $u_0 = 500$; $a_1 = 0{,}1$; $a_2 = 0{,}3$; $a_3 = 0{,}4$; $a_4 = 0{,}2$. Určte počet obnov a zostrojte tabuľku vekovej štruktúry na obdobie päť rokov. Nájdite limitný počet obnov a limitnú vekovú štruktúru.

5.2 Systém má na začiatku dvetisíc nových súčiastok. Maximálna doba životnosti súčiastky sú štyri roky. Pravdepodobnosti zlyhania sú postupne $a_1 = 0{,}2$; $a_2 = 0{,}25$; $a_3 = 0{,}25$; $a_4 = 0{,}3$. Určte počet obnov v šiestom roku prevádzky systému a limitný počet obnov. Zostrojte maticu pravdepodobnosti prechodu $\widetilde{P}$ v odpovedajúcom Markovovom reťazci.

5.3 V systéme je na začiatku osemdesiat nových prvkov s maximálnou dobou životnosti tri roky. Pravdepodobnosti zlyhania sú $a_1 = 0$; $a_2 = 0{,}4$; $a_3 = 0{,}6$. Určte celkový počet obnov za päť období a $u_0 \cdot \bar{p}(5)$. Overte Fréchetovu podmienku stabilizácie systému a nájdite limitný počet obnov a limitnú vekovú štruktúru.

5.4 Proces obnovy $u_0 = 2000$ objektov s maximálnou životnosťou tri roky je daný stavmi $S = \{0, 1, 2\}$ a maticami pravdepodobnosti prechodu a ocenenia prechodu

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{R} = \begin{pmatrix} -80 & -20 & 0 \\ -90 & 0 & -30 \\ -120 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Predpokladajte diskontovanie nákladov s faktorom $\beta = 0{,}5$. Určte a) pravdepodobnosti zlyhania a_i, $i = 1, 2, 3$, b) priemernú dobu životnosti prvku, c) limitnú vekovú štruktúru, d) limitné náklady na obnovu.

5.5 V mliekarni majú prepravky maximálnu životnosť štyri roky. Koľko prepraviek bude treba priemerne nahradiť novými na konci druhého roka, ak na začiatku v mliekarni bolo 25 nových, 20 jednoročných, 35 dvojročných a 40 trojročných prepraviek? Zo skúsenosti viete, že pravdepodobnosti zničenia prepraviek v prvom až treťom roku sú 0,2; 0,1 a 0,3.

5.6 Riešte diskrétnu rovnicu obnovy metódou diferenčných rovníc, ak $T = 2$ roky a poznáte u_0, u_1, u_2.

5.7 Istá súčiastka má exponenciálnu dobu životnosti a intenzitu poruchy 0,0045/hod. Vypočítajte a) pravdepodobnosť toho, že prvok zlyhá do 250 hodín, b) pravdepodobnosť, že prvok prežije 100 hodín činnosti, c) priemernú dobu životnosti prvku.

5.8 Prvok má dobu životnosti, riadiacu sa podľa Weibullovho rozdelenia $W(\alpha, \beta)$, kde $\alpha = 0{,}05$; $\beta = 0{,}25$ (č.j. = 1 sekunda). Nájdite a) strednú dobu životnosti prvku, b) pravdepodobnosť toho, že bude fungovať aspoň 5000 sekúnd.

5.9 Intenzita poruchy sledovaného prvku je $q(x) = \beta \cdot (1 - \frac{x}{\alpha})$ pre $x \in (0, \alpha)$, kde $\alpha > 0$ je maximálna životnosť prvku v rokoch. Určte hustotu doby životnosti $f(x)$. Odhadnite parameter β tak, aby pravdepodobnosť prežitia dvoch rokov bola aspoň 0,95 pri $\alpha = 4$.

5.10 Na vianočnom stromčeku je zapojených sedem rovnakých žiaroviek. Akú spoľahlivosť majú mať žiarovky, aby spoľahlivosť celého systému bola 0,9? Uvažujte zapojenie prvkov a) sériové, b) paralelné.

5.11 Systém pozostáva zo šiestich prvkov s intenzitami poruchy postupne 1,8; 2,4; 2,0; 1,3; 3,0; 1,5 za 1000 hodín. Prvky majú exponenciálnu dobu životnosti a sú zapojené: a) sériovo, b) paralelne. Určte spoľahlivosť systému.

5.12 Systém pozostáva z troch nezávisle fungujúcich prvkov rovnakého typu. Doba životnosti každého z nich má rovnomerné rozdelenie na intervale (0,10). Určte funkciu spoľahlivosti a intenzitu poruchy prvkov a rozhodnite, či je intenzita rastúca, klesajúca, prípadne konštantná. Porovnajte pri časovej jednotke 1 hodina spoľahlivosť a strednú dobu životnosti systému pri sériovom a paralelnom zapojení prvkov.

5.13 Systém pozostáva z niekoľkých paralelne zapojených prvkov a má mať intenzitu poruchy nanajvýš $5 \cdot 10^{-5}$/hod. Aký je najmenší počet prvkov n_{min}, ak prvky majú konštantnú intenzitu poruchy $q_i = q = 2 \cdot 10^{-4}$/hod., $i = 1, 2, \ldots, n_{min}$?

Literatúra

[1] Beichelt, F. *Applied Probability and Stochastic Processes*, 2nd ed. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2016.

[2] Brémaud, P. *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics.* Springer, New York, 1981.

[3] Chung, K. L., AitSahlia, F. *Elementary Probability Theory: With Stochastic Processes and an Introduction to Mathematical Finance.* Springer, 2014.

[4] Cox, D. R., Smith, W. L. *Queues (Teorija vosstanovlenija).* Mathuen & Co (Sovjetskoje radio), London (Moskva), 1961 (1967).

[5] Desbazeille, G. *Cvičenia a úlohy z operačnej analýzy.* Alfa, Bratislava, 1971.

[6] Dupač, V., Dupačová, J. *Markovovy procesy I (II).* SPN, Praha, 1975 (1976).

[7] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 3rd ed. Wiley, 1968.

[8] Grimmett, G. R., Stirzaker, D. R. *One Thousand Exercises in Probability.* Oxford University Press, Oxford, 2001.

[9] Grimmett, G. R., Stirzaker, D. R. *Probability and Random Processes*, 3rd ed. Oxford University Press, Oxford, 2001.

[10] Hančová, M., Skřivánková, V. Výherná stratégia a bankrot v rulete. *Matematika - fyzika - informatika 12*, 2 (2002/2003), 70–76.

[11] Hančová, M., Skřivánková, V. Výherná stratégia a bankrot v rulete: dokončenie. *Matematika - fyzika - informatika 12*, 3 (2002/2003), 133–138.

[12] Hurt, J. *Teorie spolehlivosti.* SPN, Praha, 1984.

[13] Janková, K., Kilianová, S., Brunovský, P., Bokes, P. *Markovove reťazce a ich aplikácie.* Epos, Bratislava, 2014.

[14] Kalas, J. *Markovove reťazce.* MFF UK, Bratislava, 1993.

[15] Karlin, S., Taylor, H. M. *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd ed. Academic Press, New York, 1975.

[16] Lefebvre, M. *Applied Stochastic Processes.* Springer, New York, 2007.

[17] Levin, B. R. *Teorie náhodných procesů a jejich aplikace v radiotechnice.* SNTL, Praha, 1965.

[18] Majstrov, L. E. *Razvitie ponjatija verojatnostej.* Nauka, Moskva, 1980.

[19] Mandl, P. *Podmínky optimality řízených náhodných procesů.* JČSMF, Praha, 1979.

[20] Mandl, P. *Pravděpodobnostní dynamické modely.* Academia, Praha, 1985.

[21] Menyhértová (Skřivánková), V. On adaptive replacement policies. *Kybernetika 16*, 6 (1980), 512–525.

[22] Neuts, M. F. *Probability.* Allyn and Bacon, Boston, 1973.

[23] Peško, Š., Smieško, J. *Stochastické modely operačnej analýzy.* Žilinská univerzita, Žilina, 1999.

[24] Pfeiffer, P. E. *Probability for Applications.* Springer, New York, 1990.

[25] Potocký, R., Kalas, J., Komorník, J., Lamoš, F. *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.* Alfa, Bratislava, 1991.

[26] Prášková, Z., Lachout, P. *Základy náhodných procesů.* Karolinum - nakladatelství UK, Praha, 1998.

[27] Rényi, A. *Teorie pravděpodobnosti (Probability Theory).* Akademia (Dover Publications), Praha, (Mineola, N.Y), 1972 (2007).

[28] Ross, S. M. *Introduction to Probability Models*, 11th ed. Academic Press, Amsterdam; Boston, Feb. 2014.

[29] Skřivánková, V. On concerning a certain quasivariational inequality. *Acta Math. Univ. Comenianae LIV-LV* (1988), 101–119.

[30] Stirzaker, D. R. *Stochastic Processes and Models.* Oxford University Press, Oxford, 2005.

[31] Svešnikov, A. A. *Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a teorie náhodných funkcí.* SNTL, Praha, 1971.

[32] Štěpán, J. *Teorie pravděpodobnosti.* Academia, Praha, 1987.

[33] Unčovský, L. *Stochastické modely operačnej analýzy.* Alfa, Bratislava, 1980.

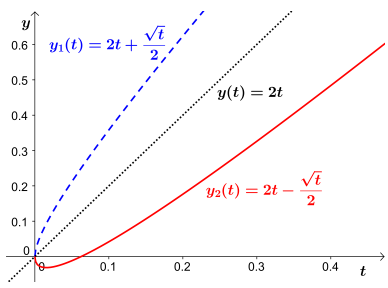
[34] Viniotis, Y. *Probability & Random Processes for Electrical Engineers.* McGraw-Hill Companies, Boston, 1998.

[35] Zítek, F. *Ztracený čas: Elementy teorie hromadné obsluhy.* Academia, Praha, 1969.

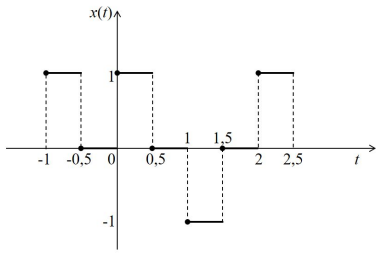
Výsledky cvičení

1. POPIS NÁHODNÉHO PROCESU

1. $E(X_t) = e^{-t\sin\omega t}$; $D(X_t) = \frac{1}{2}e^{-2t\sin\omega t}$; $K(s,t) = \frac{1}{2}e^{-(s\sin\omega s + t\sin\omega t)}$.
2. $K_Y(s,t) = \mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \mathrm{cov}\big(X_s + f(s), X_t + f(t)\big) = K_X(s,t)$.
3. $E(X_t) = 2t^2 + 3\cos t, K(s,t) = 4s^2t^2 + s^2\cos t + t^2\cos s + 3\cos s \cdot \cos t$.
4. Nie. $E(X_t) = t \cdot \sqrt{\pi}/2 \neq$ konšt.
5. $E(X_t) = \mu t, D(X_t) = \sigma^2 t$, náčrt: viď obrázok nižšie.
6. $E(X_t) = 0$; $K(s,t) = \frac{1}{2}a^2\cos(\omega|s-t|) \Rightarrow$ proces je slabo stacionárny.
7. $E(Z_t) = 0; K_Z(s,t) = K(|s-t|) \cdot \cos(\omega\,|s-t|)$.
8. Áno; $E(X_t) = 0$; $K(s,t) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \cdot \cos(\omega_j|s-t|)$.
9. $E(X_t) = 2t$; $D(X_t) = 0{,}2$; $K(s,t) = 0{,}2\cos(\omega|t-s|)$.
10. $R_X(s,t) = \cos(\lambda\,|s-t|)$.
11. $K(s,t) = 1, \quad \text{pre} \quad n \leq s,t < n+1/2,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; inak je $K(s,t) = 0$.
12. $E(X_n) = n(2p-1)$; $K(s,t) = 4spq$ pre $s < t$, proces teda nie je stacionárny.
13. $R(T_s, T_{s+t}) = e^{-2\lambda t}$.



Príklad 1.5



Príklad 1.11

2. MARKOVOVE REŤAZCE

1. Návod: využitie ekvivalencie $X_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j = i_k \Leftrightarrow Y_k = i_k - i_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $X_n = i \Leftrightarrow Y_n = i - i_{n-1}$; $X_{n+1} = j \Leftrightarrow Y_{n+1} = j - i$.

2. Návod: Vyjadrite pravdepodobnostné rozdelenie M_4 za podmienky, že a) $M_3 = 1, M_1 = 0$ a b) $M_3 = 1, M_1 = 1$.

3. $p_{0,0} = p_{k,k} = 1$; $p_{i,i} = 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $p_{i,i+1} = p$ pre $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $p_{i,i-1} = q$ pre $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $p_{i,j} = 0$ pre $j > i+1$ alebo $j < i-1$; $p_{0,1} = p_{k,k-1} = 0$.

4. $\bar{p}(0) = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, kde $1 = p_N(0)$; $p_{i,i} = 0$ pre $i = 0, 1, \ldots, 2N$; $p_{0,1} = p_{2N,2N-1} = 1$; $p_{i-1} = i/2N$; $p_{i,i+1} = 1 - i/2N$ pre $i = 1, 2, \ldots, 2N-1$.

5. $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$.

6. a) Nerozložiteľný; regulárny, lebo $p_{i,j}(2) > 0$, $\forall i, j$; $\bar{\pi} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
   b) Nerozložiteľný, regulárny, lebo $p_{i,j}(3) > 0$, $\forall i, j$; $\bar{\pi} = \left(\frac{6}{17}, \frac{7}{17}, \frac{2}{17}, \frac{2}{17}\right)$.

7. Ak $p = q$, potom majú rovnakú šancu. Ak $p > q$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, potom B má dlhodobo väčšiu šancu. Podobne je to v prípade, že $p < q$, $\varepsilon < 0$. Inak má výhodu A.

8. a) Stavy sú trvalé, nenulové, periodické s periódou 3.
   b) Stavy sú trvalé, nenulové, neperiodické.

9. $c_1 = \{1, 2\}$, $c_2 = \{5\}$, $b_3 = 5/13$.

10. Rozložiteľný, lebo obsahuje uzavretú triedu stavov $\{3\}$.
    Ergodický, lebo existuje $\bar{\pi} = (0, 0, 1)$,
    $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3) = 0,00\bar{3}$, $\bar{p}(2) = (0,563; 0,063; 0,373)$,
    $\bar{b} = (1, 1, 1)^T$.

11. $b_3 = 2/5$.

12. Pre $i = 1, 2, \ldots 5 : p_{i,i} = r$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,7} = q$. $p_{6,6} = p_{7,7} = 1$, inak $p_{i,j} = 0$.
    Pravdepodobnosť, že prvák úspešne ukončí štúdium: $p^5/(p+q)^5$.

13. $\bar{\pi} = \left(\frac{12}{37}, \frac{6}{37}, \frac{4}{37}, \frac{3}{37}, \frac{12}{37}\right)$. Všetky stavy sú trvalé, nenulové.
    $P(X_1 = 2, X_2 = 0, X_3 = 4) = 1/6$; $\bar{p}(2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, 0, \frac{1}{3})$.

14. MR je nerozložiteľný a neperiodický.

15. $\bar{b} = (1, \frac{15}{31}, \frac{7}{31}, \frac{3}{31}, \frac{1}{31}, 0)^T$,
    stav 0 je trvalý, nenulový, neperiodický, $\mu_0 = 1$, stav 1 je prechodný.

16. $p_{i,i} = i/6$, $i = 1, \ldots, 6$; $\quad p_{i,j} = 0$, $i > j$; $\quad p_{i,j} = 1/6$, $i < j$.
    Stavy $1, 2, \ldots, 5$ sú prechodné, stav 6 je trvalý, nenulový, neperiodický.

17. Stavy sú periodické s periódou 2. Ak $p \neq q$, tak všetky stavy sú prechodné, ak $p = q = 1/2$, tak všetky stavy sú trvalé, nulové.

18. $\bar{q} = \left(\frac{25}{4}, -5\right)^T$; $\bar{v}(2) = \left(\frac{155}{16}, -10\right)^T$; $\bar{v}(n) = (-5n+45; -5n)^T$; $\bar{v} = (\frac{475}{68}, -\frac{25}{4})^T$.

19. Optimálne riadenie pre $n \geq 1$ je $\bar{z}(n) = (1, 2)^T$.

20. Optimálne riadenie pre $n \geq 2$ je $\bar{z}(n) = (2, 2)^T$, $\bar{v} = (\frac{138}{19}, -\frac{42}{19})^T$.

3. ŠPECIÁLNE REŤAZCE SO SPOJITÝM ČASOM

1. Ide o Poissonov proces s konštantnou intenzitou λ. Stredný počet zaregistrovaných častíc za časovú jednotku je λ.

2. $q = 1$.

3. a) 0,4422, $\qquad$ b) 0,4422.

4. a) $P(T < S) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$; $\quad$ b) $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2$.

5. 0,1341.

6. a) $p_N(20) + p_{N-1}(20) = 101 \cdot e^{-100}$; $\quad$ b) $p_{50}(20) = \frac{100^{50}}{50!}\, e^{-100}$.

7. $p_k = \binom{N}{k} e^{-k\mu t} \cdot (1 - e^{-\mu t})^{N-k}$, $k = 0, 1, \ldots, N$, $p_0(t) = (1 - e^{-\mu t})^N$.

8. a) $p_0 = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2$, $p_1 = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}$, $p_2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2$,
   b) $p_0(t) = \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}\left[\mu^2 + 2\lambda\mu\, e^{-(\lambda+\mu)t} + \lambda^2\, e^{-2(\lambda+\mu)t}\right]$,
   $p_1(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left[\mu + (\lambda-\mu)\, e^{-(\lambda+\mu)t} - \lambda\, e^{-2(\lambda+\mu)t}\right]$,
   $p_2(t) = \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}\left[1 - 2\, e^{-(\lambda+\mu)t} + e^{-2(\lambda+\mu)t}\right]$.

9. $\bar{p} = (\frac{24}{39}, \frac{1}{39}, \frac{12}{39}, \frac{2}{39})$.

10. Návod: Postupným riešením KDR, prípadne metódou vytvárajúcich funkcií.

11. Návod: Postupným riešením KDR, prípadne metódou vytvárajúcich funkcií.

12. $\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & -7/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

13. $p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}$, $\qquad p_1(2) \doteq 0,816$.

4. TEÓRIA HROMADNEJ OBSLUHY

1. Potrebujeme 3 linky, $p_{st} \doteq 0,134$, $K_r \doteq 0,866$, $K_a \doteq 2,598$, $\bar{n}_o \doteq 1,299$.

2. $n = 3$, $p_{st} \doteq 0,002$, $K_r \doteq 0,998$, $K_a \doteq 0,499$, $\bar{n}_o \doteq 0,249$.

3. $\bar{n}_o = \rho(1-0) = 15000$ za hodinu; ide o systém (M, M, ∞) bez čakania.

4. a) $p_r = 125/416$, b) $\bar{r} = 125/156$, $\bar{t}_s = 16/39$.

5. $p_r = 1 - p_0 - p_1 - p_2 = 27/56$; $\bar{r} = 27/14$; $\bar{t}_r = 3{,}857$ min; $\bar{t}_r^* = 0{,}246$ min; $\bar{t}_r^{**} = 0{,}474$ min.

6. a) $(M, M, 1, \infty)$, č.j. = 1 hodina; $\rho = 3/4$; $p_0 = 1 - \rho = 0{,}25$.
   b) $\bar{r} = 9/4$; $\bar{n}_o = 3/4 \Rightarrow \bar{r} + \bar{n}_o = 3$.

7. Návod: Najprv určte λ odvodením vzťahu pre priemerný počet pacientov u lekára $\bar{n}_s$: $\bar{n}_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{40}{11}$, $\rho = \frac{10}{11}$, $p_0 = \frac{1}{11}$.
   a) $1 - p_0 = \frac{10}{11}$, b) $\sum_{k=7}^{\infty} p_k = 1 - \sum_{k=0}^{6} p_k \doteq 0,5133$,
   c) $\bar{t}_r = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{99}{40} \doteq 2,475$ hodín čaká na vyšetrenie,
   $\bar{t}_s = \frac{1}{\mu} + \bar{t}_r = \frac{109}{40} \doteq 2,725$ hodín strávi u lekára,
   d) $p_{st} = p_7 \doteq 0,0958$.

8. $(M, M, 2, 5, \infty)$ - SHO s ohraničeným radom.
   a) $p_0 = \frac{1}{11}$ b) $p_{st} = p_5 = \frac{2}{11}$ c) $p_r = p_3 + p_4 + p_5 = \frac{6}{11}$.

9. $(M, M, 3, 7, \infty)$; $\rho = 2$; $p_0 = 0{,}118$.
   a) $p_7 \doteq 0{,}031$; b) $K_r = 0{,}969$, $K_a = 7{,}752$/hod.
   c) $K_v = 0{,}646$; d) $p_r \doteq 0,25$; e) $\bar{t}_s = \bar{t}_r + \frac{1}{\mu} = 0{,}3136$ hodín.

10. $(M, M, 2)$ s ohraničeným časom čakania, č.j.= 10 dní $\Rightarrow \lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 5$.
    Odhad $p_0 \doteq 0{,}610 \Rightarrow p_{obsl} = \frac{\bar{n}_{ot}}{\bar{n}_{o\infty}} = \frac{0{,}475}{0{,}5} = 0{,}95$.

11. $(M, M, 1)$, č.j.= 1 hodina $\Rightarrow \lambda = 8$, $\mu = 10$. a) $p_r = 16/25$, $\bar{r} = 16/5$,
    b) $\nu = 2$, $p_0 = 945/2701$, koeficient využitia liniek 0,65.

12. Uzavretý SHO $(M, M, 1, 5, 5)$, č.j.= 1 minúta $\Rightarrow \lambda = 0,01$; $\mu = 0,1$.
    Pravdepodobnosť využitia $1 - p_0 \doteq 0,436$, priemerný počet pacientov, ktorí potrebujú ošetrenie $\bar{n}_s = \bar{r} + \bar{n}_o \doteq 0,203 + 0,436 = 0,639$.

13. Uzavretý SHO $(M, M, n, 4, 4)$, č.j.= 1 mesiac $\Rightarrow \lambda = 1/2$; $\mu = 4$.
    Potrební aspoň dvaja opravári. Koeficient využitia liniek $\frac{\bar{n}_o}{n} \doteq \frac{0{,}444}{2} \doteq 0,222$.

14. Uzavretý SHO $(M, M, 1, 4, 4)$, č.j.= 1 hodina $\Rightarrow \lambda = 10$, $\mu = 20$.
    Priemerný prestoj $8 \cdot p_0 = 8 \cdot 0,095 \doteq 46$ minút.

15. Návod: Odvodiť priemerný počet strojov v systéme $(M, M, 1, \infty)$:
$\bar{n}_s = \bar{n}_o + \bar{r} = \frac{\rho}{1-\rho}$. Potom pri č.j.= 1 hodina platí
a) $\bar{n}_{s_1} = \frac{3/4}{1-3/4} = 3$; prestoj strojov za 8 hodín je $8 \cdot 3 = 24$ hodín; náklady na mechanika $24 \cdot 10 + 8 \cdot 5 = 280$ eur.
b) $\bar{n}_{s_2} = \frac{3/5}{1-3/5} = \frac{3}{2}$; prestojový čas $8 \cdot \frac{3}{2} = 12$ hodín; náklady na mechanika $12 \cdot 10 + 8 \cdot 6{,}5 = 172$ eur.
Záver: Najať špičkového mechanika.

5. TEÓRIA OBNOVY

1. $u_5 = 160$, $u_0 \cdot \bar{\pi} = \frac{500}{2{,}7}\,(1; 0{,}9; 0{,}6; 0{,}2) \doteq (185, 167, 111, 37)$.

2. $u_6 \doteq 728$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \doteq 755$.
$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 5/16 & 0 & 11/16 & 0 \\ 5/11 & 0 & 0 & 6/11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $u_5 \doteq 38$; $u_0 \cdot \bar{p}(5) = (38, 13, 29)$; $u_0\bar{\pi} = (31, 31, 18)$.

4. a) $a_1 = 0{,}2$; $a_2 = 0{,}24$; $a_3 = 0{,}56$; b) $E(X) = 2{,}36$ roka;
c) $u_0\bar{\pi} = (848; 678; 474)$; d) $\bar{v} = (-88{,}3; -118{,}7; -164{,}2)$.

5. Po 2 rokoch bude potrebné nahradiť 38 prepraviek.

6. $u_n = \frac{u_0}{1+a_2} \cdot \left[1 - (-a_2)^{n+1}\right]$.

7. a) $P(X \leq 250) \doteq 0{,}675$; b) $R(100) \doteq 0{,}6376$; c) $E(X) = 222{,}2$ hodín.

8. a) $E(X) \doteq 44{,}4$ dní; b) $P(X > 5000) \doteq 0{,}6567$.

9. $f(x) = \beta(1 - \frac{x}{\alpha}) \cdot e^{-\beta x(1-\frac{x}{2\alpha})}$, $0 < x < \alpha$, $\beta > 0$.
$0 < \beta < 0{,}03$.

10. a) $R_i = 0{,}985, i = 1, \ldots 7$; b) $R_i = 0{,}72, i = 1, \ldots 7$.

11. a) $R_S \doteq 0{,}000006$; b) $R_P \doteq 0{,}6475$.

12. $R(x) = -\frac{x}{10} + 1$, pre $x \in (0, 10)$, $q(x) = -\frac{1}{x-10}$, pre $x \in (0, 10)$,
$R_s(1) = e^{-1/3} \doteq 0{,}717$,
$R_p(1) = 1 - (1 - e^{-1/9}) \doteq 0{,}999$.

13. $n_{\min} = 31$.

Náhodné procesy a ich aplikácie
Vysokoškolský učebný text

Autorky: doc. RNDr. Valéria Skřivánková, CSc.
RNDr. Martina Hančová, PhD.

Vydavateľ: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Umiestnenie: http://unibook.upjs.sk
Dostupné od: 11.04.2018
Vydanie: druhé doplnené
Rok : 2018
Počet strán: 105
Rozsah: 5,25 AH

ISBN 978-80-8152-604-6