

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH

ZBIERKA PRÍKLADOV Z ATÓMOVEJ A JADROVEJ FYZIKY

Janka Vrláková, Adela Kravčáková, Stanislav Vokál



Prírodovedecká fakulta, Ústav fyzikálnych vied

Košice 2016

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
Prírodovedecká fakulta
Ústav fyzikálnych vied



Janka Vrláková, Adela Kravčáková, Stanislav Vokál

Zbierka príkladov z atómovej a jadrovej fyziky

Košice, 2016

ZBIERKA PRÍKLADOV Z ATÓMOVEJ A JADROVEJ FYZIKY

Vysokoškolská učebnica

© 2016 Janka Vrláková, Adela Kravčáková, Stanislav Vokál

Ústav fyzikálnych vied

Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach

Recenzenti:

doc. RNDr. Júlia Hlaváčová, CSc.

Technická univerzita v Košiciach

Fakulta elektrotechniky a informatiky, Katedra fyziky

prof. RNDr. Gabriela Martinská, CSc.

Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

*Prírodovedecká fakulta, Ústav fyzikálnych vied, Katedra jadrovej fyziky
a subjadrovej fyziky*

Všetky práva vyhradené. Toto dielo ani žiadnu jeho časť nemožno reprodukovať, ukladať do informačných systémov alebo inak rozširovať bez súhlasu majiteľov práv.

Za odbornú a jazykovú stránku tohto vysokoškolského učebného textu zodpovedá autor. Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

Vydavateľ: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Umiestnenie: <http://unibook.upjs.sk/predaj-vydanych-titulov/prirodovedecka-fakulta>

Dostupné od: jún 2016

ISBN 978-80-8152-421-9

Obsah

Úvod	2
1 ATÓMOVÁ FYZIKA	3
1.1 Fotoefekt a fotóny	3
1.2 Comptonov efekt	9
1.3 De Broglieho vlnová dĺžka, princíp neurčitosti	17
1.4 Rutherfordov rozptyl	24
1.5 Bohrov model atómu vodíka	34
1.6 Röntgenové spektrá, Moseleyho zákon	43
2 JADROVÁ FYZIKA	50
2.1 Základné charakteristiky jadier, väzbová energia	50
2.2 Základné zákony rádioaktívnej premeny	56
2.3 Alfa, beta premena a gama žiarenie jadier	63
2.4 Jadrové reakcie	71
3 EXPERIMENTÁLNE METÓDY JADROVEJ FYZIKY	79
3.1 Prechod žiarenia prostredím	79
3.2 Urýchľovače častíc	87
VÝSLEDKY:	95
ATÓMOVÁ FYZIKA	95
JADROVÁ FYZIKA	108
EXPERIMENTÁLNE METÓDY JADROVEJ FYZIKY	115
TABUĽKY	118
Zoznam obrázkov	123
Zoznam použitej literatúry	124

Úvod

Táto zbierka príkladov je určená predovšetkým študentom druhého ročníka bakalárskeho stupňa jednodborového štúdia fyziky a medziodborového štúdia v kombinácii s fyzikou na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, ako učebná pomôcka ku kurzu prednášok a cvičení Všeobecná fyzika IV.

Príklady obsiahnuté v zbierke pokrývajú všetky oblasti základného kurzu prednášok z atómovej a jadrovej fyziky.

Zbierka príkladov je rozdelená na tri hlavné časti - Atómovú fyziku, Jadrovú fyziku a Experimentálne metódy jadrovej fyziky, ktoré sú ďalej členené na tematické kapitoly.

Každá z kapitol predstavuje samostatný celok s teoretickým úvodom do danej problematiky, obsahujúcim základné pojmy a vzťahy nevyhnutné na riešenie úloh z danej oblasti. Nasleduje súbor podrobne riešených vzorových príkladov. Vzorové príklady sú návodom na riešenie ďalších neriešených príkladov uvedených na konci každej kapitoly. Ich výsledky sú uvedené samostatne.

Skriptá sú doplnené tabuľkami, v ktorých sú základné fyzikálne konštanty a údaje umožňujúce riešiť príklady aj bez použitia ďalšej literatúry.

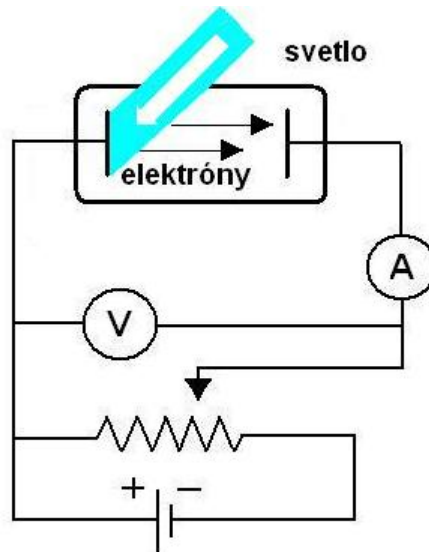
Autori

Kapitola 1

ATÓMOVÁ FYZIKA

1.1 Fotoefekt a fotóny

- **Fotoelektrický jav (fotoefekt):** experimentálne pozorovaný jav, ktorý prebieha na viazaných elektrónoch. Pri dopade svetla vhodnej vlnovej dĺžky na kov alebo polovodič, sú vyrazené z atómov látky elektróny, ktoré sa potom voľne pohybujú v látke a zvyšujú jej vodivosť (*vnútorný* fotoelektrický jav) alebo opustia látku (*vonkajší* fotoelektrický jav).



Obr. 1.1: Schéma zariadenia na pozorovanie vonkajšieho fotoelektrického javu.

- **Einsteinova teória** vysvetlila zákonitosti pozorované pri experimentálnych štúdiách fotoelektrického javu. Podľa Einsteinovej *fotónovej hypotézy* sa elektromagnetická vlna skladá z častíc (korpuskúl), ktoré sa nazývajú *svetelné kvantá*, resp. *fotóny*.

- **Základné vlastnosti fotoefektu:**

- počet elektrónov, ktoré vyletujú z katódy za jednotku času, je priamo úmerný intenzite svetla dopadajúceho na katódu (jeden fotón je v interakcii s jedným elektrónom),
- kinetická energia elektrónov závisí na frekvencii svetla a nezávisí od jeho intenzity (počtu fotónov),
- pre každú látku existuje minimálna frekvencia žiarenia ν_0 (tzv. červená hranica fotoefektu), pri ktorej je možný vonkajší fotoefekt (hodnota ν_0 závisí od chemickej povahy látky a stavu jej povrchu).

- **Korpuskulárne charakteristiky fotónu:**

Fotón existuje iba v pohybe, pričom sa vždy pohybuje rýchlosťou svetla c a jeho pokojová energia je rovná nule. Jeho energia a hybnosť sú dané iba jeho frekvenciou, resp. vlnovou dĺžkou.

Pomocou relativistického vzťahu $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ môžeme energiu a hybnosť fotónu vyjadriť:

$$E = pc, \quad E = h\nu, \quad (1.1)$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}, \quad (1.2)$$

kde ν - frekvencia žiarenia ($\nu = \frac{c}{\lambda}$, λ - vlnová dĺžka žiarenia), h - Planckova konštanta, c - rýchlosť svetla vo vákuu.

- **Zákon zachovania energie pri fotoefekte:**

- pre kovy

$$h\nu = A + \frac{1}{2}mv^2, \quad (1.3)$$

kde A - výstupná práca elektrónu z kovu (konštantná charakteristika kovu), energia potrebná na uvoľnenie elektrónu z kovu.

- elektróny možno urýchľovať alebo brzdiť napätím medzi elektródami

$$h\nu = A + eU, \quad (1.4)$$

kde U - napätie medzi elektródami, e - elementárny náboj.

Riešené úlohy:

1. Výstupná práca draslíka je $2,15 \text{ eV}$. Aká bude maximálna kinetická energia fotoelektrónov v elektrónvoltoch, ak na povrch draslíka dopadá ultrafialové svetlo s vlnovou dĺžkou $3500 \cdot 10^{-10} \text{ m}$?

Riešenie:

Zo zákona zachovania energie pre fotoefekt platí:

$$T_{max} = h\nu - A, \quad (1.5)$$

kde $A = h\nu_0$ predstavuje výstupnú prácu elektrónu z kovu.

Keďže $\nu = \frac{c}{\lambda}$, dostávame:

$$T_{max} = h\frac{c}{\lambda} - A. \quad (1.6)$$

Pre prevod jednotiek energie z joulov na elektrónvolty platí:

$$1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Po dosadení číselných hodnôt máme:

$$T_{max} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{3500 \cdot 10^{-10} \text{ m}} - 2,15 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J},$$

$$T_{max} = 2,24 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Alebo v elektrónvoltoch:

$$T_{max} = \frac{2,24 \cdot 10^{-19}}{1,602 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 1,4 \text{ eV}.$$

2. Dokážte nemožnosť fotoefektu na voľnom elektróne.

Riešenie:

Dôkaz sporom:

Predpokladajme, že fotoefekt je možný na voľnom elektróne. Výstupná práca elektrónu z kovu je teda rovná nule ($A = 0 \text{ J}$).

$$ZZE : h\nu = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.7)$$

$$ZZH : \frac{h\nu}{c} = mv \quad (1.8)$$

Zo zákona zachovania hybnosti vyplýva $h\nu = mcv$.

Tento výraz dosadíme do rovnice (1.7), t.j.

$$m c v = \frac{1}{2} m v^2. \quad (1.9)$$

Po vykrátení a úprave výrazu dostávame:

$$v = 2c,$$

čo je ale spor s neprekonateľnosťou rýchlosti svetla hmotnými časticami.

3. Povrch hliníka je osvetlený elektromagnetickým žiarením s vlnovou dĺžkou λ . Pri určitej maximálnej hodnote brzdného napätia je tok fotoelektrónov z povrchu hliníka prerušený. Pri dvojnásobnom zmenšení vlnovej dĺžky je pre prerušenie toku fotoelektrónov nevyhnutné zväčšiť brzdné napätie 11-krát. Výstupná práca pre hliník je $3,74 \text{ eV}$. Vypočítajte vlnovú dĺžku.

Riešenie:

Zostavíme sústavu rovníc:

$$\frac{hc}{\lambda} - A = eU \quad (1.10)$$

$$\frac{2hc}{\lambda} - A = 11eU \quad (1.11)$$

Po ich odčítaní dostávame výraz:

$$\frac{hc}{\lambda} = 10eU. \quad (1.12)$$

Z neho vyjadríme vzťah pre napätie:

$$U = \frac{hc}{10e\lambda}. \quad (1.13)$$

Tento výraz dosadíme napr. do rovnice (1.10):

$$\frac{hc}{\lambda} - A = \frac{hc}{10\lambda} \quad (1.14)$$

a vyjadríme vlnovú dĺžku:

$$\lambda = \frac{9}{10} \frac{hc}{A}. \quad (1.15)$$

Po dosadení číselných hodnôt máme:

$$\lambda = \frac{9}{10} \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{3,74 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Neriešené príklady:

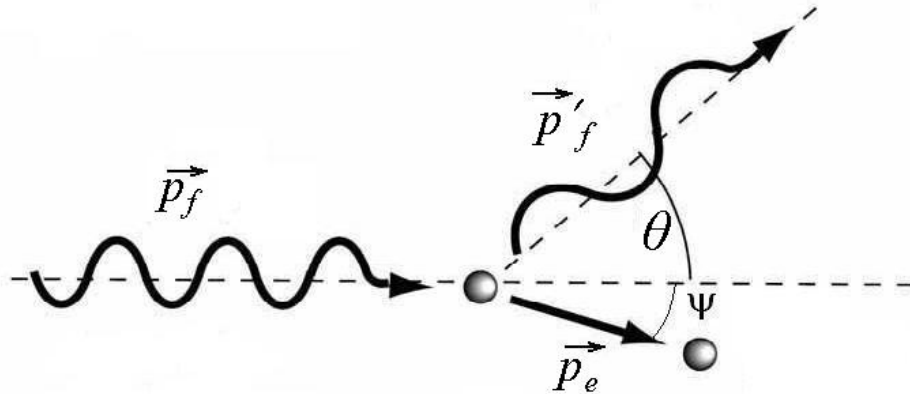
1. Vypočítajte frekvenciu, energiu a hybnosť fotónu s vlnovou dĺžkou $7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.
2. Aká je frekvencia, energia a hybnosť fotónu
 - (a) viditeľného svetla s vlnovou dĺžkou $\lambda = 6 \cdot 10^{-8} \text{ m}$,
 - (b) röntgenového žiarenia s vlnovou dĺžkou $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$,
 - (c) kozmického žiarenia s vlnovou dĺžkou $\lambda = 10^{-14} \text{ m}$?
3. Vlnová dĺžka fotónov je rovná $0,5 \mu\text{m}$, $2,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ a $0,02 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Vypočítajte ich hybnosti v jednotkách eV/c , kde c je rýchlosť svetla.
4. Vypočítajte vlnovú dĺžku a hybnosť fotónu, ktorého energia sa rovná pokojovej energii elektrónu.
5. Maximálna vlnová dĺžka, pri ktorej je možný fotoefekt na wolfráme, je rovná $2,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Aká musí byť vlnová dĺžka použitého svetla, aby boli uvoľňované elektróny s maximálnou energiou $1,5 \text{ eV}$?
6. Minimálna frekvencia, pri ktorej je možný fotoefekt na medi, je $1,1 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$. Nájdite energiu fotoelektrónov, ak dopadá na povrch medi svetlo s frekvenciou $1,5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$.
7. Výstupná práca sodíka je $2,27 \text{ eV}$. Aká je maximálna vlnová dĺžka svetla, pri ktorej je možný fotoefekt na sodíku? Aká bude maximálna kinetická energia fotoelektrónu, ak na povrch sodíka dopadá svetlo o vlnovej dĺžke $2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$?
8. Výstupná práca pre cézium je $1,9 \text{ eV}$.
 - (a) Určte prahovú frekvenciu a prahovú vlnovú dĺžku fotoelektrického efektu pre cézium.
 - (b) Aká musí byť vlnová dĺžka svetla, ak chceme získať fotoelektróny s energiou $1,5 \text{ eV}$?
9. Za priaznivých okolností môže ľudské oko zaregistrovať 10^{-18} J elektromagnetickej energie. Akému množstvu fotónov s vlnovou dĺžkou $6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ to odpovedá?
10. Koľko fotónov za sekundu emituje desať wattová žiarovka? (Predpokladajme, že svetlo je monochromatické s vlnovou dĺžkou $6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.)
11. Aká je výstupná práca elektrónov, ak pri osvetlení povrchu svetlom s vlnovou dĺžkou $2,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ majú fotoelektróny rýchlosť $183 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$?
12. Fotoefekt na železe sa začína pri frekvencii dopadajúceho svetla $1,05 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$.
 - (a) Vypočítajte frekvenciu svetla, pri ktorej sa uvoľňované elektróny z povrchu kovu zabrzdia napätím $4,5 \text{ V}$.

(b) Nájdite výstupnú prácu.

13. Hraničná vlnová dĺžka pri fotoelektrickom jave na platinovej katóde je 235 nm . Po zohriatí katódy na vysokú teplotu sa hraničná vlnová dĺžka zväčšila o 240 nm . O koľko sa zmenila výstupná práca zohriatím katódy?
14. Vypočítajte brzdné napätie nevyhnutné pre ukončenie emisie elektrónov z fotokatódy, ak sa jej povrch osvetľuje žiarením s vlnovou dĺžkou $0,4 \text{ }\mu\text{m}$ a červená hranica fotoefektu pre katódy daného typu je $0,67 \text{ }\mu\text{m}$.
15. Vlnová dĺžka svetla, pri ktorej sa na zlate začína prejavovať fotoefekt je $2,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Aká je rýchlosť fotoelektrónov vyletujúcich z povrchu zlata osvetleného monochromatickým svetlom s vlnovou dĺžkou $1,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$?
16. Pri osvetlení povrchu kovu svetlom s vlnovou dĺžkou $2790 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ a $2450 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ je brzdné napätie rovné $0,66 \text{ V}$ a $1,26 \text{ V}$. Určite hodnotu Planckovej konštanty.
17. Povrch kovu je osvetľovaný svetlom s vlnovou dĺžkou 200 nm . Pri istom brzdnom napätí bude tok elektrónov rovný nule. Pri zmene vlnovej dĺžky o 70 nm , sa brzdné napätie zvýšilo o $3,34 \text{ V}$. Vypočítajte náboj elektrónu.
18. Svetelné kvantum s vlnovou dĺžkou $342 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ vyráža z povrchu kovového lítia elektrón, ktorý v magnetickom poli s intenzitou $1194 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ opisuje kružnicu s polomerom $1,2 \text{ cm}$. Vypočítajte energiu potrebnú na uvoľnenie elektrónu z atómu lítia, ak výstupná práca pre lítium je $2,39 \text{ eV}$.
19. Aká je výstupná práca elektrónov pri platine, keď pri osvetlení povrchu svetlom vlnovej dĺžky $1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ majú fotoelektróny rýchlosť $827 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$?
20. Vypočítajte rýchlosť fotoelektrónov vyletujúcich z povrchu striebra osvetleného monochromatickým svetlom s vlnovou dĺžkou $1500 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, ak vlnová dĺžka svetla, pri ktorej sa pri striebre začína prejavovať fotoelektrický jav, je $2600 \cdot 10^{-10} \text{ m}$?

1.2 Comptonov efekt

- **Comptonov efekt:** rozptyl fotónov na voľnom, alebo slabo viazanom elektróne vo vyššej energetickej hladine, pri ktorom fotón odovzdá časť svojej energie elektrónu (obr. 1.2).
 - Pri tejto zrážke dochádza medzi fotónom a elektrónom k výmene energie a hybnosti, čo vedie k zmene pohybového stavu elektrónu, ako aj k zmene frekvencie a smeru pohybu fotónu.



Obr. 1.2: Schematické znázornenie Comptonovho efektu.

- Vlnová dĺžka rozptýlených fotónov (λ') sa vzhľadom na pôvodnú (λ) zmení o $\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (1.16)$$

kde θ je uhol rozptylu a λ_c - Comptonova vlnová dĺžka ($\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$).

- Keďže fotón s elektrónom tvoria izolovanú sústavu, potom platí zákon zachovania energie a zákon zachovania hybnosti:

$$ZZE : \quad h\nu + m_e c^2 = h\nu' + E_e$$

$$ZZH : \quad \vec{p}_f = \vec{p}'_f + \vec{p}_e$$

• **Hmotnosť a energia:**

- Častica s hmotnosťou m , voľne sa pohybujúca s rýchlosťou \vec{v} , má hybnosť \vec{p} a celkovú energiu E , pre ktoré z Einsteinovej teórie relativity platí:

$$\vec{p} = \vec{v}E/c^2 \quad (1.17)$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \quad (1.18)$$

kde $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s je rýchlosť svetla vo vákuu.

- Zo vzťahu (1.18) pre hmotnosť častice m platí

$$m = \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - p^2c^2}, \quad (1.19)$$

kde m je invariantná veličina, nezávisí od sústavy súradníc ani od rýchlosti častice.

- Zo vzťahov (1.17) a (1.18) vyplýva pre energiu častice E výraz

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = mc^2\gamma, \quad (1.20)$$

kde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$.

- Pre hybnosť \vec{p} platí

$$\vec{p} = m\vec{v}\gamma. \quad (1.21)$$

- V prípade, keď rýchlosť častice $v = 0$, celková energia častice E je totožná s pokojovou energiou $E_0 = mc^2$.

- Pre časticu s rýchlosťou $\vec{v} \neq 0$ je celková energia E

$$E = E_0 + T, \quad (1.22)$$

kde T je kinetická energia.

- Kinetická energia častice je

$$T = E - E_0 = mc^2\gamma - mc^2 = mc^2(\gamma - 1). \quad (1.23)$$

Riešené úlohy:

1. Dokážte pomocou zákonov zachovania, že voľný elektrón nemôže pohltiť fotón.

Riešenie:

Dôkaz sporom:

Predpokladajme, že voľný elektrón môže pohltiť fotón.

$$ZZE : \quad E_f + E_e = E'_e \quad (1.24)$$

$$ZZH : \quad \vec{p}_f = \vec{p}_e \quad (1.25)$$

Platia vzťahy:

$$E_f = h\nu, \quad E_e = m_e c^2, \quad E'_e = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$
$$p_f = \frac{h\nu}{c}, \quad p_e = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.26)$$

Dosadením vzťahov do rovníc ZZE, ZZH dostávame:

$$h\nu + m_e c^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.27)$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.28)$$

Dosadením rovnice (1.27) do rovnice (1.28) máme:

$$\frac{m_e v c}{\sqrt{1 - \beta^2}} + m_e c^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.29)$$

$$m_e c^2 = \frac{m_e c}{\sqrt{1 - \beta^2}} (c - v) \quad (1.30)$$

$$\frac{c}{c - v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.31)$$

Po úprave a s použitím vzťahu $\beta = \frac{v}{c}$ dostávame:

$$1 - \beta \neq \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{SPOR!}$$

2. Vypočítajte (zo zákona zachovania energie a hybnosti) zmenu vlnovej dĺžky rozptýleného röntgenového žiarenia na elektróne pri Comptonovom rozptyle.

Riešenie:

$$ZZE : \quad E_f + E_e = E'_f + E'_e \quad (1.32)$$

$$ZZH : \quad \vec{p}_f + \vec{p}_e = \vec{p}'_f + \vec{p}'_e, \quad \text{kde } \vec{p}_e = 0. \quad (1.33)$$

Platia vzťahy:

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} \quad E'_f = \frac{hc}{\lambda'} \quad E_e = m_e c^2 \quad E'_e = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.34)$$

$$p_f = \frac{h}{\lambda} \quad p'_f = \frac{h}{\lambda'} \quad p'_e = \frac{m_e c \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.35)$$

Podľa kosínusovej vety:

$$p_e'^2 = p_f^2 + p_f'^2 - 2p_f p_f' \cos \theta. \quad (1.36)$$

Dosadením predchádzajúcich vzťahov do rovnice ZZE a kosínusovej vety dostávame:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.37)$$

$$\frac{m_e^2 \beta^2 c^2}{1 - \beta^2} = \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta \quad (1.38)$$

Vynásobením rovnice (1.37) členom $\frac{1}{m_e c^2}$ a rovnice (1.38) členom $\frac{1}{m_e^2 c^2}$, využitím vzťahu pre výpočet Comptonovej vlnovej dĺžky $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ máme:

$$\frac{\lambda_c}{\lambda} + 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda'} + \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad /^2 \quad (1.39)$$

$$\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{\lambda_c^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_c^2}{\lambda'^2} - \frac{2\lambda_c^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta. \quad (1.40)$$

Po úprave

$$\frac{\lambda_c^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_c^2}{\lambda'^2} - \frac{2\lambda_c^2}{\lambda \lambda'} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)^2 \quad (1.41)$$

$$\frac{\lambda_c^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_c^2}{\lambda'^2} - \frac{2\lambda_c^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}. \quad (1.42)$$

Po odčítaní a úprave vzťahov dostaneme:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = \frac{\lambda_c^2}{\lambda \lambda'} (1 - \cos \theta). \quad (1.43)$$

Z rovnice (1.39) máme:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda} - \frac{\lambda_c}{\lambda'}. \quad (1.44)$$

Porovnaním rovnice (1.43) a (1.44) dostávame:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos \theta), \quad (1.45)$$

keďže platí:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta. \quad (1.46)$$

Po úprave dostaneme:

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = 2 \lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (1.47)$$

3. Fotón s hybnosťou $60 \text{ keV}/c$ sa comptonovsky rozptýlil pod uhlom 120° na voľnom elektróne, a potom uvoľnil z atómu molybdénu elektrón, ktorého energia väzby je 20 keV . Nájdite kinetickú energiu fotoelektrónu.

Riešenie:

Pre kinetickú energiu uvoľneného fotoelektrónu platí:

$$E_e = E'_f - E_{v\u00e4zb}. \quad (1.48)$$

Pre energiu rozptýleného fotónu platí:

$$E'_f = \frac{hc}{\lambda'}, \quad (1.49)$$

pričom platí:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos \theta), \quad \lambda = \frac{hc}{E_f}. \quad (1.50)$$

Po dosadení a úprave dostávame:

$$E'_f = \frac{E_f}{1 + \frac{E_f}{hc} \lambda_c(1 - \cos \theta)} = \frac{E_f}{1 + \frac{2E_f}{m_e c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (1.51)$$

Po dosadení číselných hodnôt máme:

$$E'_f = \frac{60 \text{ keV}}{1 + \frac{2 \cdot 60 \text{ keV}}{511 \text{ keV}} \sin^2 \frac{120^\circ}{2}} = 51 \text{ keV}.$$

Potom pre kinetickú energiu fotoelektrónu dostávame:

$$E_e = (51 - 20) \text{ keV} = 31 \text{ keV}.$$

Neriešené príklady:

1. Fotóny röntgenového žiarenia sa rozptyľujú na voľnom elektróne. Lúče sú rozptýlené pod uhlom 45° a majú vlnovú dĺžku $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$. Aká je vlnová dĺžka dopadajúceho röntgenového žiarenia?
2. Fotón s energiou $0,46 \text{ MeV}$ sa rozptyľuje pod uhlom $\theta = 120^\circ$ na nehybnom voľnom elektróne. Nájdite :
 - (a) energiu rozptýleného fotónu,
 - (b) energiu odovzdanú elektrónu.
3. Fotón s energiou 1 MeV sa rozptýlil na voľnom elektróne. Nájdite kinetickú energiu elektrónu po zrážke, ak sa v dôsledku Comptonovho rozptylu vlnová dĺžka fotónu zmenila o 25%.
4. Fotón s hybnosťou $1,02 \text{ MeV}/c$ je rozptýlený na nehybnom voľnom elektróne. Vypočítajte vlnovú dĺžku rozptýleného fotónu, ak
 - (a) sa fotón pohybuje pod uhlom 30° vzhľadom na pôvodný smer fotónu,
 - (b) fotón bude mať po rozptyle hybnosť $0,51 \text{ MeV}/c$.
5. Pri ožiarení látky tvrdým monochromatickým žiarením s vlnovou dĺžkou λ sa zistilo, že maximálna kinetická energia Comptonových elektrónov je $0,44 \text{ MeV}$. Určte vlnovú dĺžku dopadajúceho žiarenia.
6. Fotón s vlnovou dĺžkou $3,64 \text{ pm}$ sa rozptyľuje na voľnom elektróne tak, že kinetická energia odrazeného elektrónu tvorí 25% energie nalietaujúceho fotónu. Nájdite:
 - (a) zmenu vlnovej dĺžky dopadajúceho fotónu,
 - (b) uhol θ , pod ktorým sa rozptyľuje fotón.
7. Pri Comptonovom rozptyle má dopadajúci fotón vlnovú dĺžku $0,05 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ a rozptýlený fotón bude mať $0,062 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Nájdite príslušný uhol rozptylu fotónu a uhol, pod ktorým vyletí vyrazený elektrón.
8. Gama žiarenie s pôvodnou energiou $0,8 \text{ MeV}$ má po rozptyle na voľnom elektróne vlnovú dĺžku rovnú Comptonovej vlnovej dĺžke λ_c . Určte uhol, pod ktorým sa fotón rozptýli.
9. Fotóny röntgenových lúčov s vlnovou dĺžkou $0,124 \text{ nm}$ sa comptonovsky rozptýlia.
 - (a) Pod akým uhlom je vlnová dĺžka rozptýlených röntgenových lúčov o 1% väčšia ako dopadajúcich röntgenových lúčov?
 - (b) Pod akým uhlom je o 0,05% väčšia?

10. Vypočítajte comptonovu zmenu vlnovej dĺžky pri rozptyle röntgenového žiarenia na protónoch pod uhlom 120° k počiatočnému smeru fotónov.
11. Porovnajzte maximálne comptonove zmeny vlnových dĺžok pri rozptyle na voľných elektrónoch a na jadre atómu vodíka.
12. Maximálna zmena vlnovej dĺžky pozorovaná pri rozptyle svetla na protónoch je $2,65 \cdot 10^{-15} \text{ m}$. Aká je hmotnosť protónu?
13. Ako sa zmení vlnová dĺžka fotónu, ak sa zrazí s elektrónom, za predpokladu, že fotón sa odchyli od svojho pôvodného smeru o uhol $\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ a 180° ?
14. Pod akým uhlom odletí elektrón, ak sa zrazí s fotónom o vlnovej dĺžke $0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ za predpokladu, že fotón sa odchyli od svojho pôvodného smeru o uhol $\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ a 180° ?
15. Vypočítajte hybnosť elektrónu po Comptonovom rozptyle, ak vieme, že fotón, ktorého vlnová dĺžka je $0,05 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, sa rozptýlil pod uhlom 90° .
16. Pri Comptonovom efekte bol fotón pri zrážke s elektrónom rozptýlený o uhol 90° . Energia rozptýleného fotónu je $0,4 \text{ MeV}$. Určte, akú energiu mal fotón pred rozptýlením.
17. Fotón s energiou $0,3 \text{ MeV}$ sa comptonovsky rozptýlil pod uhlom 120° . Vypočítajte energiu rozptýleného fotónu a kinetickú energiu elektrónu po zrážke.
18. Fotón röntgenového žiarenia, ktorému prislúcha vlnová dĺžka 10^{-10} m , dopadne na slabo viazaný elektrón atómu ľahkého prvku a odchyli sa od svojho pôvodného smeru o $\theta = 90^\circ$. Vypočítajte:
 - (a) Akú energiu získa elektrón pri zrážke?
 - (b) V akom smere sa bude elektrón po zrážke pohybovať?
19. Pod akým uhlom k pôvodnému zväzku röntgenových lúčov s vlnovou dĺžkou $0,01 \text{ nm}$ je rozdiel vlnových dĺžok pred a po rozptyle rovný $2,4 \text{ pm}$? Aká energia bola odovzdaná odrazeným elektrónom?
20. Fotón röntgenového žiarenia pri zrážke so slabo viazaným elektrónom mu odovzdáva 25% svojej energie. Vypočítajte vlnovú dĺžku fotónu, ak rozptyl prebieha pod uhlom 90° k počiatočnému smeru dopadajúceho žiarenia.
21. Fotón röntgenového žiarenia s vlnovou dĺžkou $0,214 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ sa comptonovsky rozptýlil pod uhlom 90° k počiatočnému smeru. Akú časť svojej energie fotón odovzdal elektrónu?
22. Úzky zväzok röntgenového žiarenia s vlnovou dĺžkou λ dopadá na rozptyľujúcu látku. Nájdite λ , ak sa vlnové dĺžky zložiek rozptýleného žiarenia, rozptýleného pod uhlami $\theta_1 = 60^\circ$ a $\theta_2 = 120^\circ$ odlišujú navzájom 2-krát.

23. Ak má pri Comptonovom rozptyle dopadajúci fotón energiu rovnú pokojovej energii elektrónu, aká je minimálna energia rozptýleného fotónu a maximálna hybnosť elektrónu?
24. Ak sa fotón rozptyľuje na protóne, aká je Comptonova vlnová dĺžka protónu? Ak energia, ktorú získa odrazený protón je $5,7 \text{ MeV}$, aká je minimálna energia dopadajúceho fotónu?
25. Fotón s energiou $3,0 \text{ keV}$ sa zráža s nehybným elektrónom a rozptyľuje sa pod uhlom 45° k pôvodnému smeru. Aká je energia rozptýleného fotónu? Aká je energia, hybnosť a smer pohybu odrazeného elektrónu?

1.3 De Broglieho vlnová dĺžka, princíp neurčitosti

- **Časticovo - vlnový dualizmus:**

- všetky častice (častice látky aj poľa) majú okrem časticových vlastností (m, p) aj vlnové vlastnosti (ν, λ) ,
- vlnenie a mechanický pohyb sú len dva rozličné prejavy toho istého fyzikálneho deja.

- **De Broglieho vlnová dĺžka:**

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \quad (1.52)$$

kde h - Planckova konštanta, p - hybnosť častice,
 m - hmotnosť častice, v - rýchlosť častice.

- **Heisenbergov princíp neurčitosti:**

- jeden zo základných pojmov kvantovej mechaniky. Podľa tohto princípu isté dvojice pozorovateľných veličín (ako napr. poloha a hybnosť alebo čas a energia) nemôžu byť súčasne známe s vyššou presnosťou, aká je daná hornou hranicou, vyjadrenou pomocou Planckovej konštanty. Čím presnejšie zmeriame jednu veličinu, tým nepresnejšie zmeriame druhú veličinu.
- v klasickej mechanike je častica charakterizovaná tým, že sa v ľubovoľnom čase stanoví jej presná poloha (určená súradnicami jej ťažiska) a jej hybnosť,
- vo svete mikročastíc však platí obmedzenie: súčasne presne určiť polohu mikročastice a jej hybnosť je principiálne nemožné (Heisenbergov princíp).

- **Matematické vyjadrenie princípu neurčitosti:**

pre polohu a hybnosť:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar, \quad (1.53)$$

pre určenie času a energie:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \quad (1.54)$$

kde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Riešené úlohy:

1. Nájdite vlnovú dĺžku de Broglieho vln priradených molekulám vodíka pohybujúcich sa s najpravdepodobnejšou rýchlosťou v plyne pri 0°C .

Riešenie:

De Broglieho vlnová dĺžka je daná vzťahom:

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad (1.55)$$

kde h - Planckova konštanta,

m - hmotnosť molekúl vodíka (${}^1_1\text{H}$)₂,

v - rýchlosť molekúl vodíka.

Z Maxwellovho zákona rozdelenia molekúl podľa rýchlostí pre najpravdepodobnejšiu rýchlosť platí vzťah:

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad (1.56)$$

kde k - Boltzmanova konštanta,

T - termodynamická teplota,

m - hmotnosť molekuly vodíka.

Použitím rovníc (1.56) a (1.55) získavame konečný vzťah pre de Broglieho vlnovú dĺžku:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2kTm}},$$

a dosadením číselných hodnôt dostávame:

$$\lambda = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 273,15 \text{ K} \cdot 2(9,108 \cdot 10^{-31} \text{ kg} + 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg})}}$$

$$\lambda = 1,32 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

2. Elektróny boli urýchlené potenciálovým rozdielom $5 \cdot 10^5 \text{ V}$. Určite ich de Broglieho vlnovú dĺžku bez relativistickej korekcie aj s relativistickou korekciou a výsledky porovnajte.

Riešenie:

Pre kinetickú energiu nerelativistického elektrónu platí vzťah:

$$E_k = \frac{1}{2}m_e v^2 = eU. \quad (1.57)$$

Jeho de Broglieho vlnová dĺžka je potom:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}}, \quad (1.58)$$

a po dosadení dostávame hodnotu:

$$\lambda = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ V}}} = 1,73 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

Pre kinetickú energiu relativistického elektrónu platí vzťah:

$$E_k = E - m_e c^2 = eU. \quad (1.59)$$

Relativistický vzťah pre energiu častice je:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (m_e c^2)^2}. \quad (1.60)$$

Odtiaľ po úprave

$$\sqrt{p^2 c^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 = E_k, \quad (1.61)$$

a

$$p^2 c^2 = E_k^2 + 2E_k m_e c^2. \quad (1.62)$$

Pre hybnosť dostaneme:

$$p = \frac{\sqrt{E_k(E_k + 2m_e c^2)}}{c} = \frac{\sqrt{e^2 U^2 + 2eU m_e c^2}}{c}. \quad (1.63)$$

De Broglieho vlnová dĺžka relativistického elektrónu je potom:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{(eU)^2 + 2eU m_e c^2}}. \quad (1.64)$$

Po dosadení číselných hodnôt máme:

$$\lambda = (6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}) \cdot \{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ V})^2 + 2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1})^2\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\lambda = 1,42 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

3. S využitím Heisenbergovho vzťahu pre Δx a Δp_x nájdite analogický vzťah pre ΔE a Δt , kde ΔE je neurčitost' v určení energie a Δt je neurčitost' v určení času, v priebehu ktorého sa meria energia.

Riešenie:

Heisenbergov vzťah pre Δx a Δp_x je definovaný ako

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}, \quad (1.65)$$

pričom

$$\Delta p_x = m \Delta v_x. \quad (1.66)$$

Pre kinetickú energiu platí:

$$E = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{p_x^2}{2m}. \quad (1.67)$$

Po zderivovaní máme:

$$\Delta E = \frac{2p_x \Delta p_x}{2m} = \frac{m v_x \Delta p_x}{m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta p_x, \quad (1.68)$$

a po úprave

$$\Delta E \Delta t = \Delta x \Delta p_x, \quad (1.69)$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}. \quad (1.70)$$

Neriešené príklady:

1. Aká de Broglieho vlnová dĺžka je priradená:
 - (a) tenisovej loptičke ($m = 60 \text{ g}$, $v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$),
 - (b) projektilu ($m = 1 \text{ g}$, $v = 90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$),
 - (c) elektrónu ($m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $E = 250 \text{ keV}$).
2. De Broglieho vlnová dĺžka protónu v časticovom urýchľovači je $1,3 \cdot 10^{-14} \text{ m}$. Určte kinetickú energiu protónu (v jouloch).
3. Častica má rýchlosť $6 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jej vlnová dĺžka je $8,4 \cdot 10^{-14} \text{ m}$. Aká je hmotnosť častice?
4. De Broglieho vlnová dĺžka priradená elektrónu je $\lambda = 10^{-10} \text{ m}$. Aká je jeho rýchlosť a kinetická energia?
5. (a) Vypočítajte vlnové dĺžky de Broglieho vln priradených elektrónu a protónu s kinetickou energiou 1 keV .
(b) Pri akých hodnotách kinetickej energie je ich vlnová dĺžka rovná 10^{-10} m ?
6. Vypočítajte de Broglieho vlnovú dĺžku protónu, ktorého kinetická energia sa rovná pokojovej energii elektrónu.
7. Elektrón urýchlime potenciálovým rozdielom 100 V . Aká bude jeho rýchlosť a jeho de Broglieho vlnová dĺžka?
8. Nájdite de Broglieho vlnovú dĺžku elektrónu s rýchlosťou $0,88c$. Uvažujte relativistické efekty.
9. Častica má de Broglieho vlnovú dĺžku $3,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Potom sa jej kinetická energia zdvojnásobí. Aká je nová de Broglieho vlnová dĺžka častice za predpokladu, že relativistické efekty môžeme zanedbať?
10. O koľko sa líšia de Broglieho vlnové dĺžky protónu a atómu vodíka pohybujúcich sa s rovnakou kinetickou energiou 1 eV ?
11. Vypočítajte kinetickú energiu molekuly kyslíka a častice, ktorá má polomer $0,1 \mu\text{m}$ a hustotu $2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, ak každej z častíc odpovedá de Broglieho vlnová dĺžka 10^{-10} m .
12. Vypočítajte de Broglieho vlnovú dĺžku pre α -častice, neutróny a molekuly dusíka pohybujúce sa pri teplote $25 \text{ }^\circ\text{C}$.
13. Pri akej hodnote kinetickej energie je de Broglieho vlnová dĺžka elektrónu rovná jeho Comptonovej vlnovej dĺžke?

14. Pri zväčšení kinetickej energie elektrónu o 200 eV sa vlnová dĺžka de Broglieho vln, ktoré sú mu priradené, zmení 2-násobne. Nájdite pôvodnú kinetickú energiu a vlnovú dĺžku elektrónu.
15. Akú dodatočnú energiu treba dodať elektrónom s hybnosťou $15 \text{ keV}/c$, aby ich vlnová dĺžka bola $0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$?
16. Elektrón sa pohybuje po kružnici s polomerom $0,5 \text{ cm}$ v homogénnom magnetickom poli, ktorého intenzita je $4 \cdot 10^3 \text{ Am}^{-1}$. Aká je jeho de Broglieho vlnová dĺžka?
17. Aké urýchľovacie napätie bolo použité v elektrónovom mikroskope, ak vlnová dĺžka zväzku elektrónov je $0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$? Vzhľadom k malej rýchlosti netreba prihliadať na relativistickú korekciu.
18. V obrazovke televízneho prijímača sú elektróny urýchľované potenciálovým rozdielom 15 kV .
 - (a) Vypočítajte rýchlosť, ktorú elektróny urýchlené v tomto poli získajú.
 - (b) Aká je de Broglieho vlnová dĺžka týchto elektrónov?
19. Vypočítajte neurčitosť v určení rýchlosti elektrónu v atóme vodíka, ak rozmer atómu je rádu 10^{-8} cm . Porovnajme získanú hodnotu s rýchlosťou elektrónu na 1. Bohrovej dráhe.
20. Vzbudený atóm emituje fotón za čas rovný $0,01 \mu\text{s}$. Nájdite, s akou presnosťou môže byť určená energia fotónu.
21. Vypočítajte najmenšiu kinetickú energiu elektrónu, ktorý je lokalizovaný v oblasti s rozmerom $r = 0,1 \text{ nm}$.
22. Elektrón s kinetickou energiou 10 eV je lokalizovaný v oblasti s rozmerom $r = 1 \mu\text{m}$. Vypočítajte relatívnu neurčitosť v určení rýchlosti elektrónu.
23. Poloha voľného elektrónu je určená optickou metódou s presnosťou 10^{-6} m . Vypočítajte neurčitosť v určení rýchlosti elektrónu.
24. Atóm vysiela fotóny viditeľného svetla v čase 10^{-9} s . Aká je neurčitosť energie fotónu?
25. Určte najmenšiu chybu, s ktorou je možné odhadnúť rýchlosť elektrónu, protónu a atómu uránu lokalizovaných v oblasti $1 \mu\text{m}$.
26. Predpokladajme, že poloha objektu je určená tak presne, že neurčitosť v meraní jeho polohy je iba $\Delta y = 1,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.
 - (a) Vypočítajte minimálnu presnosť určenia hybnosti objektu.

- (b) Nájdite zodpovedajúcu minimálnu presnosť určenia rýchlosti objektu, ak objektom je elektrón,
- (c) alebo pingpongová loptička ($m = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$).

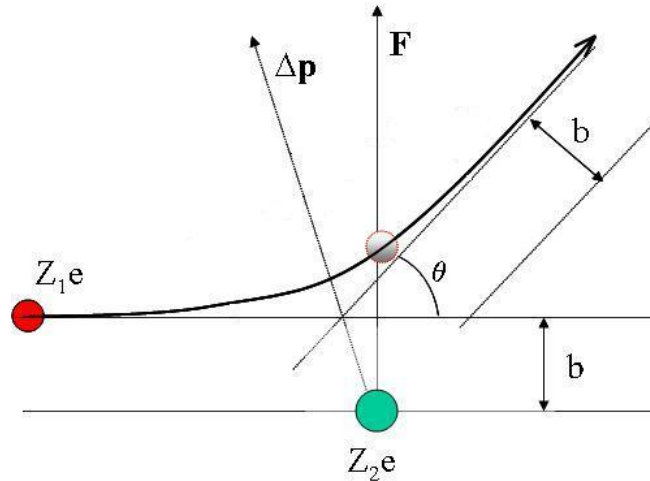
1.4 Rutherfordov rozptyl

- **Rutherfordov rozptyl** - rozptyl nabitých častíc (napr. α -častíc) v silovom poli jadra atómu:

- **zámerná vzdialenosť b** - minimálna vzdialenosť, na ktorú by sa nabitá častica s hmotnosťou m a rýchlosťou v priblížila k jadrú v prípade, že by na ňu nepôsobili žiadne sily,
- **uhol rozptylu θ** - uhol medzi asymptotickým smerom priletu nabitej častice a asymptotickým smerom, v ktorom odlieta

$$\cotg \frac{\theta}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0 m v^2 b}{Z_1 Z_2 e^2}, \text{ resp. } \cotg \frac{\theta}{2} = \frac{8\pi\epsilon_0 T b}{Z_1 Z_2 e^2}, \quad (1.71)$$

kde $Z_1 e$ - náboj nabitej častice,
 $Z_2 e$ - náboj terčového jadra,
 ϵ_0 - permitivita vákua ($\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$),
 T - kinetická energia nabitej častice.



Obr. 1.3: Rozptyl nabitej častice v coulombovskom poli ťažkého nabitého jadra.

- **Rutherfordov rozptylový zákon:**

$$dN(\theta) = N_0 n \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (1.72)$$

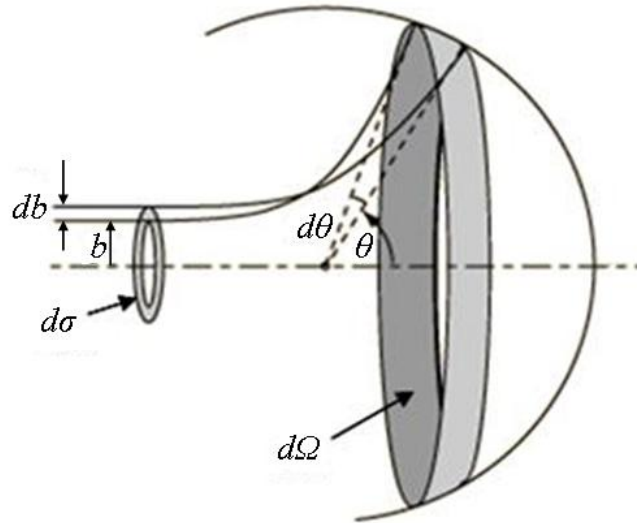
kde:

$dN(\theta)$ - počet nabitých častíc rozptýlených pod určitým uhlom θ na jednotke plochy,

N_0 - počet všetkých nabitých častíc dopadajúcich za 1s na povrch rozptyľujúceho terča,

n - počet rozptyľových centier terča v objeme určenom jednotkovou plochou a hrúbkou terča ($n = \frac{\rho}{A} N_A x$, kde ρ - hustota látky terča, A -atómová hmotnosť terča, x - hrúbka terča, N_A - Avogadrova konštanta).

$d\Omega$ - priestorový uhol rezu medzikružľa.



Obr. 1.4: Hyperbolická trajektória častice α .

Riešené úlohy:

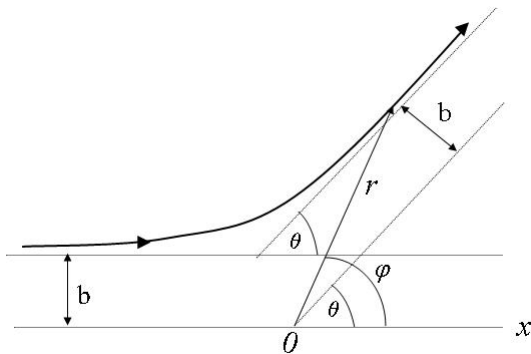
1. Vypočítajte minimálnu vzdialenosť, na ktorú sa priblíži protón s kinetickou energiou $0,87 \text{ MeV}$ k jadru Hg pri rozptyle pod uhlom 90° . Porovnajte túto vzdialenosť so zodpovedajúcou hodnotou zámernej vzdialenosti.

Riešenie:

Pre riešenie centrálného pohybu častice v coulombovskom poli jadra je vhodné použiť rovinné polárne súradnice. Vzťah medzi pravouhlými súradnicami a polárnymi súradnicami r, φ je zrejmý z obr. 1.5:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (1.73)$$

kde r je polohový vektor a φ polárny uhol v rovine (x, y) .



Obr. 1.5: Dráha častice v poli jadra, ktoré je v bode 0.

Vychádzame zo zákonov zachovania energie a momentu hybnosti. V polárnych súradniciach majú tieto zákony tvar:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \kappa \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = E = \text{konšt.} \quad (1.74)$$

a

$$mr^2\dot{\varphi} = L = \text{konšt.}, \quad (1.75)$$

kde $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ je azimutálna zložka rýchlosti a $\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Pre počiatočný moment hybnosti (pri $\varphi = \pi$) máme:

$$L = mv_0 b \quad (1.76)$$

Z rovníc (1.75) a (1.76) dostaneme:

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0 b}{r^2} \quad (1.77)$$

Hľadáme r_{min} preto $\dot{r} = 0$. Potom má rovnica (1.74) tvar:

$$\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + \kappa\frac{Z_1Z_2e^2}{r} = T = \text{konšt.}, \quad (1.78)$$

kde T je kinetická energia protónu.

Po dosadení z rovnice (1.77):

$$\frac{m}{2}v_0^2\frac{b^2}{r^2} + \kappa\frac{Z_1Z_2e^2}{r} = T \quad (1.79)$$

a úpravou na:

$$T\frac{b^2}{r^2} + \kappa\frac{Z_1Z_2e^2}{r} = T \quad / \cdot r^2 \quad (1.80)$$

dostávame kvadratickú rovnicu:

$$Tr^2 - \kappa Z_1Z_2e^2r - Tb^2 = 0. \quad (1.81)$$

Jej riešenie je

$$r_{min} = \frac{\kappa Z_1Z_2e^2}{2T} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4T^2b^2}{\kappa^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4}} \right) = \quad (1.82)$$

$$= \frac{\kappa Z_1Z_2e^2}{2T} \left(1 + \sqrt{1 + \cotg^2\frac{\theta}{2}} \right) \quad (1.83)$$

Po dosadení číselných hodnôt:

$$r_{min} = \frac{9 \cdot 10^9 \text{ C}^{-1}\text{Vm} \cdot 80 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{2 \cdot 0,87 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ CV}} \left(1 + \sqrt{1 + \cotg^2\frac{\pi}{4}} \right) \quad (1.84)$$

dostaneme

$$r_{min} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ m}. \quad (1.85)$$

Z rovnice (1.71) vyjadríme pre b :

$$b = \frac{\kappa Z_1Z_2e^2}{\text{tg}\frac{\theta}{2} 2T} \quad (1.86)$$

a po dosadení číselných hodnôt:

$$b = \frac{9 \cdot 10^9 \text{ C}^{-1}\text{Vm} \cdot 80 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{\text{tg}\frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot 0,87 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ CV}} = 6,6 \cdot 10^{-14} \text{ m}. \quad (1.87)$$

Pomer minimálnej vzdialenosti, na ktorú sa priblíži pri rozptyle protón k jadrú a zámernej vzdialenosti je

$$\frac{r_{min}}{b} = 2,4. \quad (1.88)$$

2. Odvodte vzťah pre diferenciálny účinný prierez rozptylu α -častíc na zlatom terčíku. Interakcia medzi α -časticou a jadrom je tvorená iba elektrostatickým poľom.

Riešenie:

Diferenciálny účinný prierez pre daný uhol rozptylu θ je definovaný ako pravdepodobnosť $d\sigma$, že dopadajúce α častice sa rozptýlia pod uhlom θ až $\theta + d\theta$:

$$d\sigma = \frac{dN(\theta)}{N_0}, \quad (1.89)$$

kde N_0 - počet všetkých nalietaujúcich α častíc na 1cm^2 terčíka,

$dN(\theta)$ - počet α častíc rozptýlených pod určitým uhlom θ a vychádzajúcich z 1cm^2 terčíka.

Z rovnice (1.71) vyjadríme

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 T} \cotg \frac{\theta}{2}. \quad (1.90)$$

Podľa obrázka 1.4 platí:

$$dN(\theta) = |N_0 2\pi b db|. \quad (1.91)$$

Po umocnení vzťahu (1.90) dostávame:

$$b^2 = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \cotg^2 \frac{\theta}{2}. \quad (1.92)$$

Po jeho zderivovaní:

$$2bdb = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 T} \right)^2 2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{1}{2} d\theta. \quad (1.93)$$

Po úprave:

$$2bdb = - \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta. \quad (1.94)$$

Po dosadení do vzťahu (1.91) dostávame:

$$dN(\theta) = N_0 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \pi \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta. \quad (1.95)$$

Z obrázka 1.4 vyplýva

$$d\Omega = \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (1.96)$$

kde $d\Omega(\theta)$ - priestorový uhol celého rezu medzikružľa.

Využijeme vzťah pre sínus dvojnásobného uhla:

$$\sin 2\frac{\theta}{2} = 2 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}, \text{ odkiaľ: } \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (1.97)$$

Po dosadení do vzťahu (1.95) dostávame:

$$dN(\theta) = N_0 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \frac{\pi \sin \theta}{2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} d\theta. \quad (1.98)$$

S využitím vzťahu (1.96) môžeme vzťah (1.98) prepísať:

$$dN(\theta) = N_0 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (1.99)$$

takže podľa (1.89) a (1.99) dostaneme:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (1.100)$$

Toto platí pre jedno rozptylové centrum.

3. Nájdite pravdepodobnosť toho, že α častice s kinetickou energiou 5 MeV po prechode zlatou fóliou ($^{197}_{79}\text{Au}$) s hrúbkou $2 \mu\text{m}$, sa rozptýlia pod uhlom $59^\circ - 61^\circ$. Hustota zlata je $\rho(\text{Au}) = 19\,320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Riešenie:

Hľadaná pravdepodobnosť, že α častice sa rozptýlia pod uhlom θ v intervale $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ je daná:

$$P = \frac{\Delta N(\theta_1, \theta_2)}{N_0}, \quad (1.101)$$

kde $\Delta N(\theta_1, \theta_2)$ - počet rozptýlených častíc v intervale $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$.

Platí, že

$$\begin{aligned} \Delta N &= \int_{\Omega(\theta_1)}^{\Omega(\theta_2)} \frac{dN(\theta)}{d\Omega} d\Omega = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{dN(\theta)}{d\Omega} 2\pi \sin \theta d\theta = \\ &= N_0 n \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\theta = \\ &= N_0 n \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 8\pi \left[\frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}} \right], \end{aligned} \quad (1.102)$$

pričom $n = \frac{\rho}{A} N_A x$,

kde n - počet rozptylových centier terčika v objeme určenom jednotkovou plochou a hrúbkou terčika, N_A - Avogradova konštanta, x - hrúbka fólie, A - atómová hmotnosť terčika, ρ - hustota látky terčika.

Po dosadení do (1.101) dostávame vzťah:

$$P = \frac{\rho}{A} N_A x \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 8\pi \left[\frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}} \right], \quad (1.103)$$

v ktorom sú po dosadení číselných hodnôt jednotlivé časti rovné:

$$n = \frac{\rho}{A} N_A x = \frac{19320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{197 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}} \cdot 6,022 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,18 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-2};$$

$$\left(\frac{2 \cdot 79 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{16\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ CV}^{-1} \text{m}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ CV}} \right)^2 = 1,29 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2;$$

$$8\pi \left[\frac{1}{2 \sin^2 \frac{59^\circ}{2}} - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{61^\circ}{2}} \right] = 3,04.$$

Pravdepodobnosť, že sa α častica rozptýli v danom intervale uhlov je potom rovná:

$$P = 4,63 \cdot 10^{-5}.$$

Neriešené príklady:

- (a) Vypočítajte minimálnu vzdialenosť, na ktorú sa priblíži α častica s energiou 10 MeV k jadru uránu (${}_{92}\text{U}$) pri jej rozptyle coulombovským poľom pod uhlom 180° .
(b) Pri akej zámernej vzdialenosti bude α častica rozptýlená o uhol 90° ?
- Deutérium s kinetickou energiou 15 keV a s parametrom $b = 0,6 \cdot 10^{-10} \text{ cm}$ sa rozptýlilo v coulombovskom poli jadra (${}^4_2\text{He}$). Nájdite uhol rozptylu.
- α častica s kinetickou energiou 5 MeV priletí k atómovému jadru zlata (${}_{79}\text{Au}$) so zámernou vzdialenosťou $2,6 \cdot 10^{-13} \text{ m}$. Pod akým uhlom sa rozptýli?
- Aká je zámerná vzdialenosť α častice s kinetickou energiou 5 MeV , ktorá sa rozptýli pod uhlom 20° pri prelete okolo atómového jadra zlata (${}_{79}\text{Au}$)?
- (a) Ak sa α častica s kinetickou energiou 5 MeV rozptýlila pod uhlom 90° na jadre zlata, aká bola jej zámerná vzdialenosť?
(b) Ak je hrúbka zlatej fólie $1 \mu\text{m}$, v akom percente prípadov sa pôvodná α častica rozptýli pod uhlami väčšími ako 90° ?
- α častica s hybnosťou $53 \text{ MeV}/c$ sa rozptýlila pod uhlom 60° v coulombovskom poli jadra uránu (${}_{92}\text{U}$). Určte zámernú vzdialenosť α častice.
- α častica RaC' (člen rozpadového radu ${}^{238}\text{U}$) s kinetickou energiou $7,68 \text{ MeV}$ preletela okolo jadra zlata (${}_{79}\text{Au}$) pri zámernej vzdialenosti $2 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$.
(a) Vypočítajte uhol odklonenia α častíc od počiatočného smeru pohybu.
(b) Pri akej hodnote zámernej vzdialenosti je uhol rozptylu 1° ?
- Nájdite vzdialenosť najtesnejšieho priblíženia protónov s kinetickou energiou 1 MeV , ktoré dopadajú na atómové jadrá zlata (${}_{79}\text{Au}$).
- Aká je minimálna vzdialenosť, na ktorú sa priblíži α častica s energiou $4,5 \text{ MeV}$ k jadru zlata pri centrálnej zrážke? Aká bude táto vzdialenosť, ak zameníme jadro zlata jadrom lítia?
- Ak sa α častice s kinetickými energiami až do $7,7 \text{ MeV}$ rozptyľujú na zlatej fólii a platí Rutherfordov vzťah, odhadnite veľkosť jadra zlata.
- Pri rozptyle α častíc s kinetickou energiou $8,8 \text{ MeV}$ na jadre uránu (${}_{92}\text{U}$) bolo pozorované, že α častice sa rozptyľujú v súlade s Rutherfordovým vzťahom. Odhadnite hornú hranicu polomeru jadra uránu.
- Na akú vzdialenosť sa α častica môže priblížiť k jadru zinka (${}_{30}\text{Zn}$), ak rýchlosť α častíc predstavuje $0,05$ - násobok rýchlosti svetla.

13. α častica s energiou $5,4 \text{ MeV}$ po prechode tenkou zlatou fóliou (${}_{79}\text{Au}$) sa odkloní od počiatočného smeru o uhol 60° . Vypočítajte hodnotu zámernej vzdialenosti a porovnajte ju s efektívnym polomerom jadra terča získaného z podmienky, pri ktorej je zámerná vzdialenosť rovná 0.
14. Zväzok α častíc s energiou $5,6 \text{ MeV}$ dopadá na hliníkovú fóliu (${}_{13}\text{Al}$). Ukazuje sa, že experimentálne pozorovaný rozptyl odpovedá Rutherfordovmu vzťahu pri uhloch rozptylu prevyšujúcich 60° . Za predpokladu, že polomer α častice je $2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, nájdite polomer atómového jadra hliníka.
15. Pri rozptyle α častice s kinetickou energiou 29 keV v coulombovskom poli jadra lítia (${}^6_3\text{Li}$) sa α častica odchyľila od pôvodného smeru o uhol $\theta = 45^\circ$. Na akú minimálnu vzdialenosť sa priblížili obe častice v procese vzájomného pôsobenia?
16. Ukážte, že do uhla medzi 60° a 90° sa rozptýli 2-krát toľko α častíc než do uhla väčšieho ako 90° .
17. Aká časť zo zväzku α častíc s energiou $7,7 \text{ MeV}$, ktoré dopadajú na zlatú fóliu (${}^{197}_{79}\text{Au}$) s hrúbkou $3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ sa rozptyľuje o uhol menší ako 1° ? [hustota zlata je $\rho(\text{Au}) = 19\,320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$]
18. Koľko α častíc bude mať odchýlku medzi uhlami 44° a 46° , ak na medenú fóliu (${}^{64}_{29}\text{Cu}$) s hrúbkou $0,005 \text{ mm}$ dopadne 10^4 α častíc s energiou 1 MeV ? [$\rho(\text{Cu}) = 8\,900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$]
19. Diferenciálny účinný prierez rozptylu α častíc coulombovským poľom jadra je $\frac{d\sigma}{d\Omega} = 7 \cdot 10^{-22} \frac{\text{cm}^2}{\text{ster.}}$ pre uhol $\theta_0 = 30^\circ$. Vypočítajte prierez rozptylu alfa častíc v intervale uhlov $\theta > \theta_0$.
20. Alfa častice s kinetickou energiou $1,7 \text{ MeV}$ sa rozptyľujú coulombovským poľom jadier atómov olova (${}_{82}\text{Pb}$). Určite diferenciálny účinný prierez jadier $\frac{d\sigma}{d\theta}$ a $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ pre $\theta = \frac{\pi}{2}$.
21. Po zámene zlatej fólie (${}^{197}_{79}\text{Au}$) striebornou (${}^{108}\text{Ag}$) pri pokusoch s rozptylom α častíc tenkými fóliami (s hrúbkou $10^{-4} \mu\text{m}$), sa počet zaregistrovaných α častíc pod uhlom θ zmenšil 2,84-krát. Určite atómové číslo striebra, ak viete, že atómové číslo zlata je 79. Predpokladajte fólie rovnako hrubé. [$\rho(\text{Au}) = 19\,320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho(\text{Ag}) = 10\,500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$]
22. V jednom z pokusov pri štúdiu pružného rozptylu protónov zameníme zinkovú fóliu (${}^{65}_{30}\text{Zn}$) za kadmiovú (${}^{112}\text{Cd}$) s tou istou hrúbkou a hmotnosťou. Dôjde k zväčšeniu počtu rozptýlených protónov v sledovanom intervale 1,5-krát. Vypočítajte náboj jadra atómu kadmia, ak poznáte atómové číslo zinku.
23. Vypočítajte prierez jadra atómu zlata, zodpovedajúci rozptylu protónov s kinetickou energiou $1,20 \text{ MeV}$ v intervale uhlov od $\theta = \frac{\pi}{3}$ do $\theta = \pi$.

24. Úzky zväzok protónov s kinetickou energiou 1 MeV dopadá kolmo na zlatú fóliu s hustotou $\rho \cdot x = 1,5 \text{ mg/cm}^2$. Počítač registruje protóny rozptýlené pod uhlom 60° . Okienko počítača má plochu $1,5 \text{ cm}^2$ a jeho vzdialenosť od miesta rozptylu vo fólii je 10 cm . Protóny naň dopadajú pod pravým uhlom. Aký je podiel zaregistrovaných protónov k protónom dopadajúcim na fóliu?
25. Úzky zväzok protónov s kinetickou energiou 2 MeV dopadá kolmo na zlatú fóliu s hustotou $\rho \cdot x = 1,5 \text{ mg/cm}^2$. Prúd zväzku je 10^{-9} A . Počítač, ktorého okienko má priemer 4 mm , je umiestnený 10 cm od fólie. Okienko počítača je pod uhlom 160° k primárnemu zväzku protónov. Koľko protónov zaregistruje detektor za 10 minút?
26. Hrúbku tenkej zlatej vrstvy na silikónovej podložke môžeme určiť pomocou Rutherfordovho spätného rozptylu. Protónový zväzok z urýchľovača s energiou 2 MeV dopadá kolmo na tenkú zlatú vrstvu a detektor s priemerom 1 mm je umiestnený 5 cm od vzorky. Rozptýlené protóny sú registrované pod uhlom 160° . Pri naakumulovaní náboja nalietaujúcich protónov na $100 \mu\text{C}$ bol počet zaregistrovaných protónov $N' = 12500$. Aká je hrúbka zlatej vrstvy? [$\rho(\text{Au}) = 19\,320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$]

1.5 Bohrov model atómu vodíka

- Bohrove postuláty:

1. Bohrov postulát: Elektrón môže okolo jadra atómu obiehať len po kruhových dráhach určených kvantovou podmienkou:

$$2\pi r m_e v = n h; \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (1.104)$$

kde m_e - hmotnosť elektrónu,
 v - rýchlosť elektrónu,
 r - polomer kruhovej dráhy,
 n - hlavné kvantové číslo (určuje počet dovolených dráh).

2. Bohrov postulát: Ak elektrón obieha iba po jednej dráhe, atóm nevyžaruje energiu, jeho energia sa nemení. Vtedy je rovnováha medzi elektrickou a odstredivou silou.

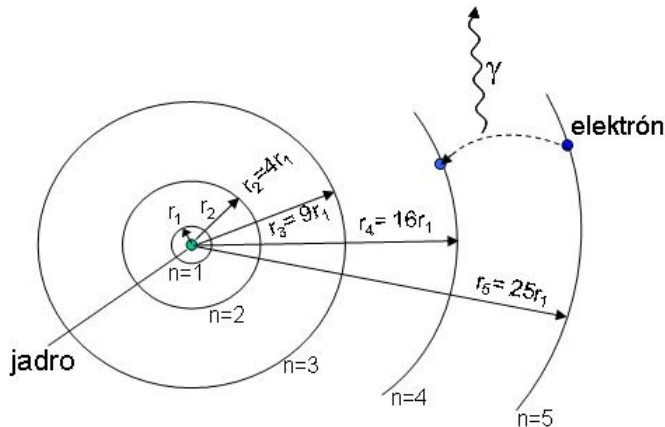
$$F_e = F_{od}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad (1.105)$$

3. Bohrov postulát: Atóm vyžiari energiu len pri prechode z vyššej energetickej hladiny n_2 na nižšiu n_1 a platí (tzv. frekvenčná podmienka):

$$E_{n_2} - E_{n_1} = h\nu \quad (n_2 > n_1), \quad (1.106)$$

kde E_{n_i} - energia elektrónu na n_i - tej kvantovej dráhe.



Obr. 1.6: Bohrov model.

• **Vodíkový atóm:**

- polomer
- rýchlosť
- energia

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2, \quad v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} \frac{1}{n}, \quad E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}. \quad (1.107)$$

• **Vlnočet žiarenia pre vodíkový atóm:**

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_\infty \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (1.108)$$

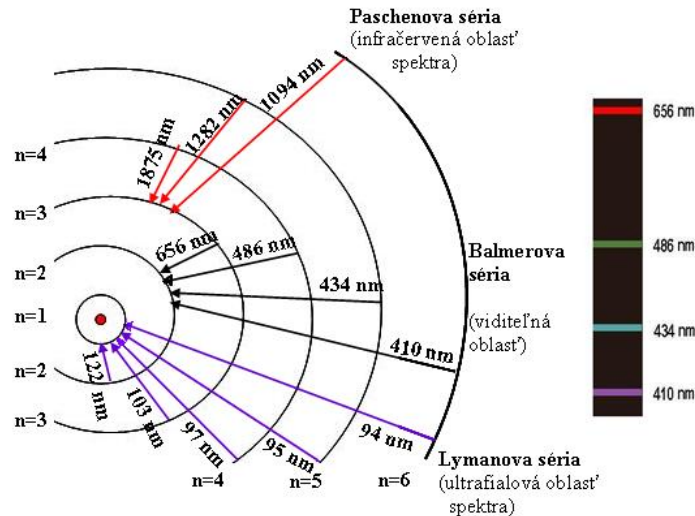
kde R_∞ - Rydbergova konštanta ($R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 1,097\,373 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$)

$$n_1 = 1, 2, 3, \dots$$

$$n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3, \dots$$

• **Spektrálne série vodíkového atómu:**

- Lymanova séria $n_1 = 1$ $n_2 = 2, 3, 4, \dots$ ultrafialová oblasť
- Balmerova séria $n_1 = 2$ $n_2 = 3, 4, 5, \dots$ viditeľná oblasť
- Paschenova séria $n_1 = 3$ $n_2 = 4, 5, 6, \dots$ infračervená oblasť
- Brackettova séria $n_1 = 4$ $n_2 = 5, 6, 7, \dots$ infračervená oblasť
- Pfundova séria $n_1 = 5$ $n_2 = 6, 7, 8, \dots$ infračervená oblasť
- Humphreyova séria $n_1 = 6$ $n_2 = 7, 8, 9, \dots$ infračervená oblasť



Obr. 1.7: Spektrálne série vodíkového atómu.

Vlnočet, ktorý dostaneme pri danom n_1 , keď $n_2 = n_1 + 1$, prislúcha čiare, ktorú nazývame hlavnou čiarou príslušnej série. Ak $n_2 = \infty$ (pri danom n_1), túto čiaru nazývame hranou série.

• **Atómy vodíkového typu:**

- polomer • rýchlosť • energia

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi Z e^2 \mu} n^2, \quad v_n = \frac{Z e^2}{2 \varepsilon_0 h} \frac{1}{n}, \quad E_n = -Z^2 \frac{R_Z h c}{n^2}. \quad (1.109)$$

kde Z - atómové číslo,

R_Z - Rydbergova konštanta pre príslušný prvok

$$R_Z = \frac{\mu e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^3 c}, \quad R_Z = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m_e}{M}}, \quad (1.110)$$

μ - redukovaná hmotnosť elektrónu

$$\mu = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{M}}, \quad (1.111)$$

kde m_e - hmotnosť elektrónu, M - hmotnosť jadra atómu.

• **Vlnočet žiarenia pre atómy vodíkového typu:**

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_Z Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (1.112)$$

Riešené úlohy:

1. Vypočítajte vlnovú dĺžku hrany Lymanovej série.

Riešenie:

Pre vlnocet žiarenia pre vodíkový atóm platí

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (1.113)$$

kde R_H - Rydbergova konštanta vodíka,

n_1 - hlavné kvantové číslo (pre Lymanovu sériu je $n_1 = 1$).

Hranu Lymanovej série dostaneme pri preskoku z kvantovej dráhy s kvantovým číslom $n_2 \rightarrow \infty$ na prvú kvantovú dráhu ($n_1 = 1$).

$$\lambda = \frac{n_1^2}{R_H}. \quad (1.114)$$

Po dosadení číselných hodnôt máme:

$$\lambda = \frac{1}{1,096\,776 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}} = 9,12 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

2. Vypočítajte polomer prvej kvantovej dráhy v Bohrovom modeli atómu vodíka a rýchlosť elektrónu na tejto dráhe.

Riešenie:

Pri pohybe elektrónu okolo jadra je odstredivá sila rovná príťažlivej sile coulombovskej:

$$F_e = F_{od},$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r}. \quad (1.115)$$

Podľa Bohrovej kvantovej podmienky je

$$2\pi r m_e v = nh. \quad (1.116)$$

Z týchto dvoch rovníc potom vyplýva:

$$v = \frac{e^2}{2nh\epsilon_0}, \quad (1.117)$$

$$r = \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{\pi m_e e^2}. \quad (1.118)$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame:

$$v = \frac{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{2 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ CV}_s \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ CV}^{-1}\text{m}^{-1}} = 2,187 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$r = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \text{ CV}^{-1}\text{m}^{-1} \cdot 1 \cdot (6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2}{3,14 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

3. Vypočítajte celkovú energiu elektrónu na n -tej kvantovej dráhe v Bohrovom modeli atómu vodíka. S využitím tohto vzťahu vypočítajte celkovú energiu na 2. kvantovej dráhe.

Riešenie:

Pre celkovú energiu elektrónu obiehajúceho na n -tej kvantovej dráhe platí:

$$E = E_k + E_p. \quad (1.119)$$

Platia vzťahy:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{e^2}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e^2}{r} \right]_{\infty}^r = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.120)$$

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}, \quad (1.121)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.122)$$

Po dosadení do vzťahu pre celkovú energiu dostaneme:

$$E = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (1.123)$$

Pre polomer n -tej kvantovej dráhy platí vzťah:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2. \quad (1.124)$$

Po dosadení do vzťahu (1.123) dostaneme:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}. \quad (1.125)$$

Ak $n = 2$, pre celkovú energiu po dosadení číselných hodnôt platí:

$$E_2 = -\frac{9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^4}{8 \cdot (8,854 \cdot 10^{-12} \text{ CV}^{-1}\text{m}^{-1})^2 \cdot (6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$E_2 = -5,45 \cdot 10^{-19} \text{ J} = -3,4 \text{ eV}.$$

4. Porovnajete vlnové dĺžky fotónov emitovaných

- (a) atómom He zo stavu $n_2 = 4 \rightarrow n_1 = 2$
- (b) atómom H zo stavu $n_2 = 2 \rightarrow n_1 = 1$

Riešenie:

Všeobecný vzťah pre spektrálne čiary atómov vodíkového typu s atómovým číslom Z je

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\mu Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3} \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] = Z^2 R_Z \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] \quad (1.126)$$

- (a) Prechod He zo stavu $n_2 = 4 \rightarrow n_1 = 2$

$$\tilde{\nu}_{He} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\mu Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right] = \frac{\mu Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3} \cdot \frac{3}{16} = \frac{\mu e^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3} \cdot \frac{3}{4},$$

kde $Z = 2$ a $\mu = \frac{m_e M_{He}}{m_e + M_{He}}$.

- (b) prechod H zo stavu $n_2 = 2 \rightarrow n_1 = 1$

$$\tilde{\nu}_H = \frac{1}{\lambda} = \frac{\mu' Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right] = \frac{\mu' e^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3} \cdot \frac{3}{4},$$

kde $Z = 1$ a $\mu' = \frac{m_e M_H}{m_e + M_H}$.

$$\Rightarrow \tilde{\nu}_H = \tilde{\nu}_{He},$$

prechod (a) je sprevádzaný rovnakou vlnovou dĺžkou ako prechod (b). Malý rozdiel vlnových dĺžok je spôsobený rôznou hmotnosťou He a H , čo sa prejaví v rozdieloch μ' a μ .

Neriešené príklady:

1. Vypočítajte kvantové číslo n vzbuđeného stavu atómu vodíka, ak je známe, že pri prechode do základného stavu atóm vyžiari:
 - (a) fotón s vlnovou dĺžkou $97,25 \text{ nm}$;
 - (b) 2 fotóny s vlnovými dĺžkami $656,3$ a $121,6 \text{ nm}$.
2. V spektre žiarenia atomárneho vodíka sú známe dve vlnové dĺžky Balmerovej série: $410,2 \text{ nm}$ a $486,1 \text{ nm}$. K akej sérii patrí spektrálna čiara, ktorá zodpovedá prechodu medzi týmito dvoma hladinami? Aká je jej vlnová dĺžka?
3. U akého vodíku podobného iónu rozdiel vlnových dĺžok hlavných čiar Balmerovej a Lymanovej série je $59,3 \text{ nm}$?
4. Vypočítajte Rydbergovu konštantu ak viete, že rozdiel vlnových dĺžok medzi hlavnou čiarou Balmerovej série a rezonančnou čiarou pre ión He je $133,68 \text{ nm}$ (rezonančná čiara zodpovedá prechodu $n_2 = 2 \rightarrow n_1 = 1$).
5. Nájdite intervaly vlnových dĺžok spektrálnych čiar patriacich do série:
 - (a) Lymanovej,
 - (b) Balmerovej,
 - (c) Paschenovej.

Hranice intervalu vlnových dĺžok tvorí tzv. hlavná čiara a hrana série. Viditeľná oblasť svetla je $480 - 750 \text{ nm}$. Určte, ktorá séria a ktoré čiary sú viditeľné.
6. Častica s hmotnosťou m sa pohybuje po dráhe tvaru kružnice v centrálnom poli jadra s potenciálnou energiou $U = \chi \cdot r^2/2$. Nájdite pomocou Bohrových podmienok kvantovania dovolené polomery dráh a energetické hladiny.
7. Aké čiary obsahuje absorpčné spektrum atomárneho vodíka v intervale vlnových dĺžok od $94,5$ do 130 nm ?
8. V spektre niektorých vodíku podobných iónov dĺžka vlny tretej čiar Balmerovej série je $108,5 \text{ nm}$. Nájdite energiu väzby elektrónu v základnom stave iónov.
9. Vypočítajte pomer hmotnosti protónu k hmotnosti elektrónu, ak vieme, že pomer Rydbergových konštánt ťažkého a ľahkého vodíka je $1,000272$ a pomer hmotností jadier je 2 .
10. Aké sú vlnočty, vlnové dĺžky a frekvencie prvých 3 čiar
 - (a) Balmerovej,
 - (b) Paschenovej,

- (c) Brackettovej série?
11. Akú vlnovú dĺžku má fotón vyžiarený pri preskoku elektrónu
 - (a) z 5. na 3. kvantovú dráhu,
 - (b) zo 6. na 2. kvantovú dráhu v Bohrovom modeli atómu vodíka?
 12. Aký je vlnčet, vlnová dĺžka a frekvencia fotónu, ktorý sa vyžiari, keď sa elektrón vráti vo vodíkovom atóme:
 - (a) z 2. dráhy,
 - (b) z 3. dráhy,
 - (c) z nekonečna do základného stavu?

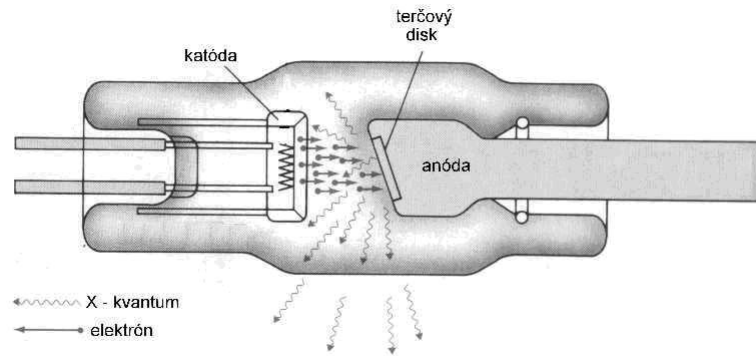
Ako sa volá táto séria?
 13. Predpokladajme, že vodíkový atóm v základnom stave absorboval fotón s energiou $12,75 \text{ eV}$.
 - (a) V akom vzbuđenom stave bude po absorpcii?
 - (b) Ukážte na energetickom diagrame možné prechody z tohoto vzbuđeného stavu. Aká je najkratšia vlnová dĺžka fotónov z týchto prechodov?
 14. Pri preskoku elektrónu vo vodíkovom atóme z jednej kvantovej dráhy na dráhu bližšiu k jadru sa zmenší energia atómu o $1,892 \text{ eV}$. Pri tomto prechode vyšle atóm vodíka svetelné kvantum.
 - (a) Určte vlnovú dĺžku tohoto žiarenia.
 - (b) Ktorá časť viditeľného spektra prislúcha tomuto žiareniu?
 15. Známe sodíkové žlté čiary pozostávajú zo spektrálnych čiar s vlnovou dĺžkou $5890 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ a $5896 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Vypočítajte interval medzi týmito čiarami v jednotkách cm^{-1} a eV .
 16. V spektre atomárneho vodíka, interval medzi prvými 2 čiarami, ktoré patria Balmerovej sérii, predstavuje $1,71 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Vypočítajte Rydbergovu konštantu pre vodík.
 17. Najväčšia vlnová dĺžka spektrálnej vodíkovej čiary Balmerovej série je $656,3 \text{ nm}$. Vypočítajte na základe tejto vlnovej dĺžky najväčšiu vlnovú dĺžku v Lymanovej sérii.
 18. Rozdiel medzi hlavnými čiarami Balmerovej a Lymanovej série vo vlnových dĺžkach v spektre atomárneho vodíka je $534,7 \text{ nm}$. Vypočítajte Planckovu konštantu.
 19. Vypočítajte frekvenciu kruhového pohybu elektrónu v klasickom vodíkovom atóme. V ktorej oblasti sú elektromagnetické vlny s touto frekvenciou? [Pozn.: Využite fakt, že experimentálne zistená hodnota väzbovej energie v atóme vodíka je $13,6 \text{ eV}$.]

20. Dokážte, že pre atóm vodíka na stacionárnych Bohrových dráhach platí, že elektrón sa pohybuje po dráhach, ktoré sú celočíselným násobkom de Broglieho vln. Vypočítajte vlnové dĺžky na 1. a 3. dráhe.
21. Kvantum svetla s energiou 15 MeV uvoľňuje elektrón z atómu vodíka nachádzajúceho sa v základnom stave. Akou rýchlosťou sa bude pohybovať od jadra? [Pozn.: Využite fakt, že experimentálne zistená hodnota väzbovej energie v atóme vodíka je $13,6 \text{ eV}$.]
22. Vypočítajte pomer síl coulombovského a gravitačného pôsobenia medzi elektrónom a jadrom atómu vodíka.
23. Vypočítajte indukciu magnetického poľa, ktoré je tvorené elektrónom obiehajúcim v Bohrovom modeli atómu vodíka po 1. dovolenej dráhe v strede tejto dráhy.
24. Kvantum svetla, vznikajúce pri prechode medzi prvými dvoma energetickými hladinami v 1x ionizovanom atóme hélia He^+ , uvoľňuje elektrón z atómu vodíka, ktorý sa nachádza v základnom stave. Nájdite rýchlosť tohto elektrónu, ktorou sa pohybuje od jadra vodíka.
25. V spektre hviezdy bolo objavené spektrum vodíkového typu, ktorého vlnové dĺžky sú 4-krát kratšie ako u atómu vodíka. Akému prvku patrí toto spektrum?

1.6 Röntgenové spektrá, Moseleyho zákon

- **Röntgenové žiarenie** - elektromagnetické žiarenie (prúd fotónov) s veľmi krátkou vlnovou dĺžkou (od 100 pikometrov do 10 nanometrov), ktorá je zhruba 1000-krát kratšia ako u viditeľného svetla. Vzniká prudkým zabrzdnením urýchlených elektrónov (brzdné žiarenie) alebo prechodom elektrónov na nižšie energetické hladiny v atóme (charakteristické žiarenie).

Umelo sa dá získať v röntgenovej trubici bombardovaním anódy elektrónmi urýchlenými napätím v rozmedzí $10^4 - 10^5$ V.



Obr. 1.8: Röntgenova trubica.

- **Spektrum röntgenového žiarenia** - obsahuje dve zložky:
 - brzdné žiarenie (spojité)
 - charakteristické žiarenie (čiarové).
- **Energia fotónov röntgenového žiarenia** - spĺňa Einsteinovu rovnicu pre fotoefekt:

$$h\nu - A = eU = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1.127)$$

kde A - výstupná práca, U - potenciál, ktorým sa elektrón zabrzdí. Keďže energia fotónov $h\nu \gg A$, A zanedbávame. Máme

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = eU. \quad (1.128)$$

- **Moseleyho zákon** - vlnočty zodpovedajúce charakteristickému spektru u rôznych prvkov sa s rastúcim atómovým číslom zväčšujú, t.j.

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = aR_{\infty}(Z - b)^2, \quad (1.129)$$

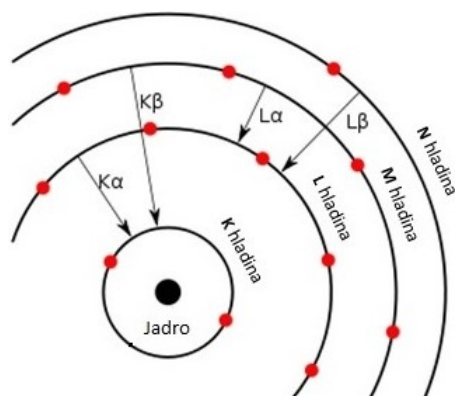
kde R_∞ -Rydbergova konštanta,

Z - atómové číslo prvku,

a, b - konštanty, ktoré majú pre každú čiaru inú hodnotu:

– pre K_α čiaru: $a = \frac{3}{4}, b = 1,$

– pre L_α čiaru: $a = \frac{5}{36}, b = 7,5.$



Obr. 1.9: Vznik charakteristického röntgenového žiarenia prechodom elektrónov na nižšie energetické hladiny.

Riešené úlohy:

1. Určte vlnovú dĺžku K_α čiary prvku periodického systému, od ktorého môžeme pozorovať L - sériu charakteristického röntgenového žiarenia.

Riešenie:

Stav elektrónu v obale atómu popisujú 4 kvantové čísla (tab. 1.1):

- hlavné kvantové číslo n - vyjadruje energiu hladiny; nadobúda hodnotu $1 - 7$ (alebo sú označované K, L, M, N, O, P, Q)
- vedľajšie kvantové číslo l - nadobúda hodnoty od 0 do $(n - 1)$;
- magnetické kvantové číslo m_l - nadobúda hodnoty $-l \dots 0 \dots +l$
- spinové magnetické kvantové číslo m_s - nadobúda hodnoty $+1/2$ alebo $-1/2$.

Elektrónová vrstva	n	l	m_l	m_s	Max. počet elektrónov
K	1	0	0	$\pm 1/2$	2
L	2	0	0	$\pm 1/2$	2
		1	-1, 0, +1	$\pm 1/2$	6
M	3	0	0	$\pm 1/2$	2
		1	-1, 0, +1	$\pm 1/2$	6
		2	-2, -1, 0, +1, +2	$\pm 1/2$	10

Tab. 1.1: Kvantové čísla

Prvýkrát sa L_α čiara môže objaviť u prvku, ktorý má na hladine M (t.j. v stave s $n = 3$) aspoň jeden elektrón.

Číže: $2e^-(K \text{ hladina}) + 8e^-(L \text{ hladina}) + 1e^-(M \text{ hladina}) = 11e^-$

t.j. $Z = 11 \dots \dots Na$

Vo všeobecnosti pre vlnovú dĺžku ľubovoľnej čiary platí:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = aR_\infty(Z - b)^2, \quad (1.130)$$

pre K_α čiaru: $a = \frac{3}{4}, b = 1$,

$$\text{t.j.:} \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{4}R_\infty(Z - 1)^2. \quad (1.131)$$

Po dosadení číselných hodnôt:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{3}{4} \cdot 1,097\,373 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}(11 - 1)^2,$$

$$\lambda = 12,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

2. Pri zväčšení napätia na röntgenovej trubici z 10 kV na 20 kV rozdiel vlnových dĺžok K_α čiary a krátkovlnovej hranice spojitého röntgenového spektra sa zväčšil 3-krát. Aký prvok sa používa ako anóda?

Riešenie:

Vo všeobecnosti pre vlnučet ľubovoľnej čiary platí:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = aR_\infty(Z - b)^2, \quad (1.132)$$

pre K_α čiary: $a = \frac{3}{4}, b = 1$.

Pre λ_{min} platí:

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU}. \quad (1.133)$$

Zo zadania úlohy zostavíme sústavu rovníc:

$$(\lambda_{K_\alpha} - \lambda_{min}) = \frac{4}{3R_\infty(Z - 1)^2} - \frac{hc}{eU_1} \quad (1.134)$$

$$3(\lambda_{K_\alpha} - \lambda_{min}) = \frac{4}{3R_\infty(Z - 1)^2} - \frac{hc}{eU_2} \quad (1.135)$$

Po odčítaní dostávame:

$$2(\lambda_{K_\alpha} - \lambda_{min}) = \frac{hc}{eU_1} - \frac{hc}{eU_2}. \quad (1.136)$$

Po úprave:

$$\lambda_{K_\alpha} - \lambda_{min} = \frac{hc}{2e} \left(\frac{U_2 - U_1}{U_1 U_2} \right). \quad (1.137)$$

Po dosadení číselných hodnôt:

$$\lambda_{K_\alpha} - \lambda_{min} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \left(\frac{20 \cdot 10^3 \text{ V} - 10 \cdot 10^3 \text{ V}}{10^4 \text{ V} \cdot 20 \cdot 10^3 \text{ V}} \right)$$

$$\lambda_{K_\alpha} - \lambda_{min} = 3,102 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

Z rovnice (1.134) si vyjadríme protónové číslo:

$$Z = \sqrt{\frac{4eU_1}{hc + eU_1(\lambda_{K_\alpha} - \lambda_{min})} \cdot \frac{1}{3R_\infty}} + 1. \quad (1.138)$$

Dosadíme číselné hodnoty:

$$Z = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10 \cdot 10^3 \text{ V}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ CVs} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} + 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^4 \text{ V} \cdot 3,102 \cdot 10^{-11} \text{ m}}}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 1,097 \cdot 373 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}}} + 1.$$

$$Z = 29 \dots \text{Cu}.$$

3. Vypočítajte rýchlosť elektrónov, uvoľnených z K - sféry atómov molybdénu ($_{42}Mo$) žiarením zodpovedajúcim K_α čiare röntgenového žiarenia striebra ($_{47}Ag$). (Absorpčná hrana K série molybdénu je $0,619 \cdot 10^{-10} m$.)

Riešenie:

Platí vzťah:

$$E_k = E_\alpha - E_K. \quad (1.139)$$

Pre jednotlivé členy platia vzťahy:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_\alpha = \frac{hc}{\lambda_\alpha}, \quad E_K = \frac{hc}{\lambda_K}. \quad (1.140)$$

Po dosadení:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{hc}{\lambda_\alpha} - \frac{hc}{\lambda_K}. \quad (1.141)$$

Odtiaľ si vyjadríme rýchlosť:

$$v = \sqrt{\frac{2hc(\lambda_K - \lambda_\alpha)}{m\lambda_K\lambda_\alpha}}. \quad (1.142)$$

Pre λ_α platí:

$$\frac{1}{\lambda_\alpha} = \frac{3}{4}R_\infty(Z - 1)^2. \quad (1.143)$$

Po dosadení číselných hodnôt:

$$\frac{1}{\lambda_\alpha} = \frac{3}{4} \cdot 1,097\,373 \cdot 10^7 (47 - 1)^2, \quad (1.144)$$

$$\lambda_\alpha = 5,745 \cdot 10^{-11} m.$$

Dosadíme číselné hodnoty do vzťahu pre rýchlosť (1.142):

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} Js \cdot 3 \cdot 10^8 ms^{-1} (6,19 - 5,75) \cdot 10^{-11}m}{9,109 \cdot 10^{-31}kg \cdot 6,19 \cdot 10^{-11}m \cdot 5,75 \cdot 10^{-11}m}}, \quad (1.145)$$

$$v = 2,3 \cdot 10^7 m \cdot s^{-1}.$$

Neriešené príklady:

1. Vypočítajte vlnové dĺžky K_α a L_α čiar v röntgenovom spektre molybdénu ($_{42}Mo$).
2. Môže K_α čiara röntgenového žiarenia železa ($_{26}Fe$) vzbudiť sekundárne gama žiarenie chrómu ($_{24}Cr$) a kobaltu ($_{27}Co$)?
3. S využitím Moseleyho zákona vypočítajte vlnové dĺžky a energie fotónov, ktoré odpovedajú K_α čiaram hliníka ($_{13}Al$) a kobaltu ($_{27}Co$).
4. Aký je vlnčet, vlnová dĺžka, frekvencia a energia K_α a L_β čiar u röntgenového spektra chrómu ($_{24}Cr$), wolfrámu ($_{74}W$) a uránu ($_{92}U$)?
5. Vypočítajte vlnovú dĺžku, odpovedajúcu absorpčnej hrane L -série röntgenového spektra hliníka, ak je známa vlnová dĺžka K_α čiary ($8,32 \cdot 10^{-10} \text{ m}$) a absorpčná hrana K -série röntgenového spektra ($7,936 \cdot 10^{-10} \text{ m}$).
6. Vypočítajte napätie na röntgenovej trubici s niklovou anódou, ak rozdiel vlnových dĺžok K_α čiary a krátkovlnnej hranice spojitého spektra je rovný 84 pm .
7. Vypočítajte vlnovú dĺžku K_α čiary charakteristického röntgenového spektra, získaného v röntgenovej trubici s molybdénovou ($_{42}Mo$) anódou. Môžeme dostať túto čiaru spektra, ak priložíme k röntgenovej trubici napätie 4 kV ?
8. Pri napätí 62 kV na elektródach röntgenovej trubice sa vlnová dĺžka krátkovlnnej hranice spojitého röntgenového spektra rovná $0,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Vypočítajte číselnú hodnotu Planckovej konštanty.
9. Vypočítajte hodnotu rozdielu potenciálov na röntgenovej trubici, pri ktorej sa začínajú objavovať K_α čiary platiny ($_{78}Pt$), zlata ($_{79}Au$) a uránu ($_{92}U$).
10. Vypočítajte kritické napätie na röntgenovej trubici nevyhnutné pre excitáciu K -série striebra ($_{47}Ag$), ak je známe, že absorpčná hrana K -série röntgenového spektra odpovedá vlnovej dĺžke $0,4845 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Ako objasníte, že K_α čiara má väčšiu vlnovú dĺžku ako vlnová dĺžka odpovedajúca absorpčnej hrane K -série röntgenového spektra?
11. Vypočítajte vlnové dĺžky absorpčnej hrany K -série röntgenového spektra zlata, olova a uránu, ak je známe, že napätia, pri ktorých sa začínajú objavovať všetky čiary K -série týchto prvkov sú rovné $80,7$; $88,3$ a $115,3 \text{ kV}$.
12. Určte vlnovú dĺžku krátkovlnnej hranice spojitého röntgenového žiarenia, ak viete, že pri zväčšení urýchľovacieho napätia na röntgenovej trubici 2-krát, vlnová dĺžka sa zmenší o $5 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$.

13. Porovnajete hodnotu výstupnej práce elektrónu z povrchu wolfrámu, u ktorého červená hranica fotoefektu odpovedá vlnovej dĺžke $2760 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ a prácu, potrebnú na uvoľnenie elektrónu z K -sféry atómu wolfrámu. Vlnová dĺžka absorpčnej hrany K -série röntgenového spektra wolfrámu je $0,1782 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.
14. Vypočítajte najväčšiu rýchlosť elektrónov prilietajúcich k anóde röntgenovej trubice, ak minimálna vlnová dĺžka v spojitom spektre röntgených lúčov je rovná 1 nm .
15. Vypočítajte najväčšiu rýchlosť elektrónov, ktoré sú brzdené na anóde röntgenovej trubice, ak najmenšia vlnová dĺžka spojitého röntgenového žiarenia je rovná $5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.
16. Rýchlosť elektrónov letiacich k anóde röntgenovej trubice sa rovná polovici rýchlosti svetla vo vákuu.
 - (a) Aká je najmenšia vlnová dĺžka spojitého spektra elektromagnetického žiarenia, ktoré vzniká zabrzdением elektrónov?
 - (b) Určte urýchľovacie napätie na röntgenovej trubici.
17. Pri napätí 28 kV na röntgenovej trubici rozdiel vlnových dĺžok K_α čiary a krátkovlnovej hranice spojitého röntgenového spektra predstavuje $1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Ktorý prvok sa javí antikatódou danej trubice?
18. Vieme, že K_α čiara jedného prvku má vlnovú dĺžku $0,788 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ a druhého $0,713 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Rozhodnite, či tieto prvky nasledujú v periodickej tabuľke za sebou a ktoré sú to prvky.
19. Ukážte na základe Pauliho princípu, aký je najvyšší možný počet elektrónov na n -tej kvantovej dráhe, keď $n = 4$.

Kapitola 2

JADROVÁ FYZIKA

2.1 Základné charakteristiky jadier, väzbová energia

- Polomer jadra R :

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}}, \quad (2.1)$$

kde r_0 - konštanta ($r_0 = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$),
 A - nukleónové číslo.

- Náboj jadra:

$$Q = Z \cdot e. \quad (2.2)$$

Elektrický náboj jadra je kladný a udáva ho počet protónov v jadre Z .

- Celková energia jadra E :

$$E = M_j c^2, \quad (2.3)$$

kde M_j hmotnosť jadra.

- Hmotnosť jadra M_j je daná výrazom:

$$M_j = Zm_p + (A - Z)m_n - \Delta M, \quad (2.4)$$

kde m_p - pokojová hmotnosť protónu,
 m_n - pokojová hmotnosť neutrónu,
 Z - počet protónov v jadre,
 A - počet nukleónov v jadre,
 ΔM - hmotnostný úbytok (rozdiel hmotnosti medzi súčtom hmotností nukleónov a hmotnosťou jadra, charakterizuje väzbovú energiu).

- **Väzbová energia W :** vyjadruje tú mieru energie, ktorú treba vynaložiť na to, aby sme rozdelili dané jadro na jeho jednotlivé komponenty, nukleóny (je mierou jeho stability).

$$W = \Delta M c^2 = (Z m_p + (A - Z) m_n - M_j) \cdot c^2 \quad (2.5)$$

Výraz pre väzbovú energiu môže byť vyjadrený pomocou hmotností atómov nasledovne:

$$W = [Z m_H + (A - Z) m_n - M_{at}(A, Z)] \cdot c^2, \quad (2.6)$$

kde m_H je hmotnosť atómu vodíka,

$M_{at}(A, Z)$ je hmotnosť atómu s daným A, Z .

Hmotnosti atómov v atómových hmotnostných jednotkách u ($1u \approx 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$) sú uvedené v tabuľkách v prílohe (Tabuľka vlastností izotopov).

Energia zodpovedajúca atómovej hmotnostnej jednotke je $1u \cdot c^2 = 931,5 \text{ MeV}$ (odkiaľ $1u = 931,5 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, alebo $c^2 = \frac{931,5 \text{ MeV}}{u}$).

- **Merná väzbová energia ε :** charakterizuje strednú väzbovú energiu pripadajúcu na jeden nukleón v jadre:

$$\varepsilon = \frac{W}{A} = \frac{\Delta M c^2}{A} \quad (2.7)$$

- **Poloempirický vzorec pre väzbovú energiu jadier:**

(Weizsäckerov vzťah)

$$W(\text{MeV}) = 14A - 13A^{\frac{2}{3}} - 0,584 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - 19,3 \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \frac{33,5}{A^{\frac{3}{4}}} \delta, \quad (2.8)$$

kde $\delta = +1$ pre párne Z a A (párno - párne jadro),

$\delta = 0$ pre nepárne A (nepárne jadro),

$\delta = -1$ pre nepárne Z a nepárne A (nepárno - nepárne jadro).

Riešené úlohy:

1. Prvé modely jadra pokladali jadrá za sférické útvary, v ktorých pre polomer jadra platí vzťah $R = r_0 A^{1/3}$. Nech experimentálna hodnota $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, hmotnosť nukleónov je približne rovnaká a rovná sa $m_N = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Ukážte, že hustota jadra bude pre všetky nuklidy rovnaká a odhadnite ju!

Riešenie:

Ak predpokladáme sférický tvar jadra, bude pre hustotu platiť

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx \frac{3m}{4\pi r_0^3 A}, \quad (2.9)$$

pretože pre polomer jadra platí: $R = r_0 A^{1/3}$.

Pre hmotnosť nuklidu môžeme približne odhadnúť: $m \approx A \cdot m_N$, kde m_N je hmotnosť nukleónu, $m_N \approx m_p \approx m_n \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Potom

$$\rho = \frac{3Am_N}{4\pi r_0^3 A} \approx \frac{3 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{4\pi (1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m})^3} \approx 1,5 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (2.10)$$

Z výsledku vidieť, že hustota nezávisí od nukleónového čísla A a môžeme ju považovať za rovnakú pre všetky nuklidy.

2. Vypočítajte väzbovú energiu jadra izotopu:

(a) ${}^1_7\text{N}$,

(b) ${}^{207}_{82}\text{Pb}$.

Aká merná väzbová energia pripadá na jeden nukleón?

Riešenie:

- (a) Pre väzbovú energiu platí (2.6):

$$W = [Zm_H + (A - Z)m_n - M_{at}(A, Z)] \cdot c^2$$

Po dosadení číselných hodnôt pre jadro ${}^1_7\text{N}$ dostávame:

$$W = (7 \cdot 1,007825 + 7 \cdot 1,008665 - 14,003074) \cdot 931,5 \text{ MeV} = 104,66 \text{ MeV}.$$

Merná väzbová energia je daná vzťahom (2.7):

$$\varepsilon = \frac{W}{A} = \frac{104,66}{14} = 7,48 \text{ MeV}.$$

(b) Pre jadro ${}^{207}_{82}\text{Pb}$ dostaneme po dosadení:

$$W = (82 \cdot 1,007825 + 125 \cdot 1,008665 - 207,02410) \cdot 931,5 \text{ MeV} = 1584,2 \text{ MeV}.$$

$$\varepsilon = \frac{W}{A} = \frac{1584,2}{207} = 7,65 \text{ MeV}.$$

3. Pomocou Weizsäckerovho poloempirického vzťahu pre väzbovú energiu jadra určte náboj jadra, ktoré má najmenšiu hmotnosť medzi jadrami s danou hodnotou nukleónového čísla A .

Riešenie:

Poloempirický Weizsäckerov vzťah pre väzbovú energiu jadier je (2.8):

$$W(\text{MeV}) = 14A - 13A^{\frac{2}{3}} - 0,584 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - 19,3 \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \frac{33,5}{A^{\frac{3}{4}}} \delta.$$

Minimálnu hmotnosť má jadro, ktoré má maximálnu väzbovú energiu pri danej hodnote nukleónového čísla A . Podmienka maxima väzbovej energie je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 &\Rightarrow -2 \cdot 0,584 \frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}} + 2 \cdot 19,3 \cdot 2 \frac{(A - 2Z)}{A} = 0 \\ \frac{38,6A - 77,2Z}{A} - 0,584 \frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}} &= 0 \quad / \cdot A \\ 38,6A - 77,2Z - 0,584ZA^{\frac{2}{3}} &= 0 \\ Z(77,2 + 0,584A^{\frac{2}{3}}) &= 38,6A \\ Z &= \frac{A}{2 - 0,0151A^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Neriešené príklady:

1. Vypočítajte väzbovú energiu jadra, ktoré má rovnaký počet protónov a neutrónov a polomer 1,5-krát menší ako polomer jadra ^{27}Al .
2. Určte energiu väzby neutrónu a alfa častice v jadre ^{21}Ne .
3. Vypočítajte väzbovú energiu:
 - (a) deuterónu,
 - (b) α častice.
4. Odhadnite a číselne vyjadrite hustotu jadrovej hmoty, koncentráciu nukleónov a objemovú hustotu elektrického náboja v jadre.
5. Určte energiu potrebnú na rozdelenie jadra ^{16}O na 4 rovnaké časti.
6. Vypočítajte minimálnu energiu potrebnú na rozdelenie atómu ^{12}C na tri atómy ^4He .
7. Vypočítajte väzbovú energiu jadra $^{96}_{42}\text{Mo}$, ktorá pripadá na jeden nukleón (hmotnosť atómu $^{96}_{42}\text{Mo}$ je 95,904 u).
8. Aká energia by sa uvoľnila, keby sa z 82 protónov a 126 neutrónov utvorilo jadro $^{208}_{82}\text{Pb}$?
9. Nájdite väzbovú energiu pripadajúcu na jeden nukleón v jadre atómu kyslíka ^{16}O .
10. Vypočítajte úbytok hmotnosti pri spálení 0,1 kg síry. Horenie síry prebieha podľa reakcie: $\text{S} + \text{O}_2 \rightarrow \text{SO}_2 + 70,9 \text{ kcal/mol}$.
11. Vypočítajte, aký je hmotnostný úbytok pri tvorbe α častice z dvoch protónov a dvoch neutrónov a aká je väzbová energia vzniknutej α častice.
12. Určte väzbovú energiu neutrónu v jadre ^{14}N , ak je známe, že väzbová energia jadier ^{14}N a ^{13}N je 104,66 a 94,1 MeV.
13. Určte energiu potrebnú na rozštiepenie jadra ^{16}O na α časticu a jadro ^{12}C ak je známe, že väzbové energie jadier ^{16}O , ^{12}C , ^4He sú 127,62 MeV, 92,16 MeV, 28,30 MeV.
14. Určte energiu vznikajúcu pri tvorbe dvoch α častíc, ktoré sú výsledkom syntézy jadier ^2_1H a ^6_3Li . Vieme, že väzbová energia pripadajúca na jeden nukleón pre ^2_1H je 1,1 MeV, pre ^4_2He je 7,08 MeV a pre ^6_3Li je 5,33 MeV.
15. Nájdite energiu vzбудenia jadra ^{207}Pb vznikajúceho pri záchyť pomalého neutrónu jadrom ^{206}Pb .
16. Vypočítajte pomocou Weizsäckerovho poloempirického vzťahu:

- (a) energiu väzby jadier ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ a ${}^{107}_{47}\text{Ag}$,
- (b) energiu väzby na 1 nukleón jadra ${}^{50}_{23}\text{V}$,
- (c) hmotnosť atómu ${}^{45}_{21}\text{Sc}$.
17. Nájdite hmotnosti atómov izotopov ${}^1\text{H}$, ${}^2\text{H}$ a ${}^{16}\text{O}$, ak poznáme rozdiely hmotností (v atómových hmotnostných jednotkách) troch fundamentálnych dubletov:
 ${}^1\text{H}_2 - {}^2\text{H} = 0,001548$;
 ${}^2\text{H}_3 - \frac{1}{2} {}^{12}\text{C} = 0,042306$;
 ${}^{12}\text{C} {}^1\text{H}_4 - {}^{16}\text{O} = 0,036386$.
18. Vypočítajte, aká energia (v J a eV) zodpovedá $1 u$.
19. Ukážte, že pri rovnomernom rozdelení náboja v objeme jadra, je energia coulombovského odpudzovania protónov $E_{coul} \approx 0,6Z^2e^2/R$, kde Z a R sú náboj a polomer jadra.
20. Určte rozdiel väzbových energií zrkadlových jadier ${}^{33}\text{S}$ a ${}^{33}\text{Cl}$, ak vieme, že hmotnosť ${}^{33}\text{S}$ je o $0,00599 u$ menšia ako hmotnosť ${}^{33}\text{Cl}$. Získanú hodnotu porovnajte s rozdielom energií coulombovského odpudzovania protónov v týchto jadrách. Objasnite príčinu zhody výsledkov. (Pozn.: zrkadlové jadrá - atómové jadrá s rovnakým počtom nukleónov, líšiace sa vymeneným počtom protónov a neutrónov)
21. Za predpokladu, že rozdiel väzbových energií zrkadlových jadier ${}^{23}\text{Na}$ a ${}^{23}\text{Mg}$ je daný len rozdielom energie coulombovského odpudzovania protónov v týchto jadrách, určte ich polomer. Získaný výsledok porovnajte s výsledkom zo vzťahu pre polomer jadra.

2.2 Základné zákony rádioaktívnej premeny

- **Zákon rádioaktívnej premeny:**

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (2.11)$$

kde N - počet jadier v čase t ,
 N_0 - počet jadier v čase $t = 0$,
 λ - konštanta premeny.

Počet rozpadnutých jadier rádioaktívnej látky N' sa rovná rozdielu $N_0 - N$, t.j.

$$N'(t) = N_0 \cdot (1 - e^{-\lambda t}). \quad (2.12)$$

- **Polčas premeny (doba polpremeny):** (doba, za ktorú dôjde k rozpadu polovice z pôvodného počtu jadier rádionuklidu)

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (2.13)$$

- **Stredná doba života:** (čas, za ktorý klesne pôvodný počet atómových jadier N_0 na hodnotu $N = \frac{N_0}{e}$)

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.14)$$

- **Aktivita rádioaktívneho prvku:** (počet jadier rozpadnutých za jednotku času)

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N. \quad (2.15)$$

Jednotkou aktivity je becquerel, Bq ($1Bq = 1$ rozpad/1 sekundu).

Veličiny odvodené od aktivity:

– hmotnostná aktivita:

$$a_m = \frac{A}{m}, [a_m] = Bq \cdot kg^{-1}, \quad (2.16)$$

– objemová aktivita:

$$a_V = \frac{A}{V}, [a_V] = Bq \cdot m^{-3}, \quad (2.17)$$

– plošná aktivita:

$$a_S = \frac{A}{S}, [a_S] = Bq \cdot m^{-2}, \quad (2.18)$$

kde m je hmotnosť a V je objem rádioaktívnej látky, S je plocha, na ktorej je aktívita A rozložená.

Tieto zákony platia iba v prípade jednej izolovanej rádioaktívnej látky.

Ak sú aj rozpadom vzniknuté jadrá rádioaktívne, hovoríme o tzv. **postupnej premeny**:

- Ak uvažujeme premenu $A \rightarrow B$:

$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A, \quad (2.19)$$

kde N_A - počet jadier v čase t ,
 λ - konštanta premeny.

- Ak uvažujeme premenu $A \rightarrow B \rightarrow C$:

$$\frac{dN_A}{dt} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B, \quad (2.20)$$

kde N_A, N_B - počet jadier A, B v čase t ,
 λ_A, λ_B - konštanty premeny.

Riešené úlohy:

1. Určte konštantu premeny rádioaktívneho izotopu ${}^{58}_{27}\text{Co}$, ak viete, že počet atómov tohto izotopu sa zmenší o 3,8% za jednu hodinu. Produkt rozpadu nie je rádioaktívny.

Riešenie:

Zo zadania vieme:

$100\% - 3,8\% = 96,2\%$, t.j. po jednej hodine zostane $N = 0,962 \cdot N_0$ nerozpadnutých atómov.

Zo zákona rádioaktívneho rozpadu vyplýva:

$$\begin{aligned} N &= N_0 e^{-\lambda t}, \\ \frac{N}{N_0} &= e^{-\lambda t}, \\ \ln \frac{N}{N_0} &= -\lambda t. \end{aligned}$$

Po úprave a dosadení číselných hodnôt dostávame:

$$\lambda = \frac{-\ln \frac{N}{N_0}}{t} = \frac{-\ln 0,962}{3600} = 1,08 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

2. Určte vek antických drevených predmetov, keď ich hmotnostná aktivita izotopu ^{14}C predstavuje $\frac{3}{5}$ hmotnostnej aktivity toho istého izotopu obsiahnutého v práve vyťaženom dreve toho istého druhu. Polčas premeny izotopu ^{14}C je 5570 rokov.

Riešenie:

Aktivita preparátu sa mení s časom podľa zákona:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}.$$

Zo zadania máme:

$$A = \frac{3}{5} \cdot A_0.$$

Platí vzťah:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Po úprave a dosadení dostávame:

$$A = A_0 e^{\frac{-\ln 2}{T_{1/2}} t} = \frac{3}{5} A_0$$

$$t = \frac{-T_{1/2} \ln \frac{A}{A_0}}{\ln 2} = \frac{-5570 \cdot 365 \cdot 86400 \text{ s} \cdot \ln \frac{3}{5}}{0,693} = 1,2945 \cdot 10^{11} \text{ s} = 4105,8 \text{ rokov.}$$

3. Pri rádioaktívnej premene jadier nuklidu A_1 vzniká nuklid A_2 . Ich konštanty premeny sú λ_1, λ_2 . Predpokladajme, že v čase $t = 0$ preparát obsahoval len nuklid A_1 v množstve N_0 .
- Určte množstvo jadier nuklidu A_2 za čas t .
 - Určte čas, za ktorý množstvo jadier nuklidu A_2 dosiahne maximum.
 - V akom prípade môže vzniknúť prechodový rovnovážny stav, pri ktorom pomer množstva oboch nuklidov bude konštantný? Čomu sa rovná tento pomer?

Riešenie:

- (a) Platia vzťahy:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \tag{2.21}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \tag{2.22}$$

Vzťah (2.21) upravíme a integrujeme:

$$\frac{dN_1}{N_1} = -\lambda_1 dt \quad / \int$$

$$\ln N_1 = -\lambda_1 t + c$$

$$N_1 = e^c e^{-\lambda_1 t}$$

V čase $t = 0$ máme

$$N_{10} = e^c, \quad N_1 = N_{10} e^{-\lambda_1 t}. \quad (2.23)$$

Riešenie (2.22) hľadáme v tvare:

$$N_2 = N_{20}(t) e^{-\lambda_2 t} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[N_{20}(t) \cdot e^{-\lambda_2 t}]}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 [N_{20}(t) e^{-\lambda_2 t}] \\ N'_{20} e^{-\lambda_2 t} - N_{20}(t) \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_{20}(t) e^{-\lambda_2 t} \\ N'_{20} e^{-\lambda_2 t} &= \lambda_1 N_1 \\ N'_{20} &= \frac{\lambda_1 N_1}{e^{-\lambda_2 t}} = \frac{\lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}}{e^{-\lambda_2 t}} \\ N'_{20} &= \lambda_1 N_{10} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \end{aligned}$$

Po preintegrovaní dostávame:

$$N_{20} = \lambda_1 N_{10} \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + c \quad (2.25)$$

V čase $t = 0$ máme $N_{20} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \lambda_1 N_{10} \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} + c &= 0 \\ c &= -\lambda_1 N_{10} \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Po dosadení (2.26) do (2.25) máme:

$$N_{20} = \lambda_1 N_{10} \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - \lambda_1 N_{10} \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1)$$

Dostávame:

$$N_2 = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1) e^{-\lambda_2 t}$$

Po úprave:

$$N_2 = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.27)$$

(b) Ak hľadáme čas, za ktorý N_2 dosiahne maximum, musí platiť:

$$\frac{dN_2}{dt} = 0$$

Odtiaľ:

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) = 0$$

To platí ak:

$$\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$$

Postupne úpravami:

$$\ln \lambda_2 - \lambda_2 t = \ln \lambda_1 - \lambda_1 t$$

dostávame

$$t = \frac{\ln \lambda_2 - \ln \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

(c) Pre uvažovaný rovnovážny stav platí:

$$\frac{N_2(t)}{N_1(t)} = \text{konšt.}$$

Po dosadení (2.27) a (2.23):

$$\frac{N_2(t)}{N_1(t)} = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})}{N_{10} e^{-\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})}{e^{-\lambda_1 t}} = \text{konšt.}$$

To je možné iba v prípade, keď:

$$e^{-\lambda_2 t} \ll e^{-\lambda_1 t}$$

a odtiaľ pre konštanty premeny musí platiť:

$$-\lambda_2 \ll -\lambda_1.$$

V takom prípade je pomer množstva oboch nuklidov rovný:

$$\frac{N_2(t)}{N_1(t)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

alebo

$$\lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1.$$

Neriešené príklady:

1. Určte polčas premeny rádioaktívnej látky, ak viete, že počas dvoch minút sa jej množstvo rozpadom zmenší o 20%.
2. Za aký čas sa rozpadne z 10^7 atómov aktínia jeden atóm? Polčas premeny aktínia je 13,5 rokov.
3. Aká časť z celkového množstva jadier ${}^{90}\text{Sr}$
 - (a) zostane po 10 a 100 rokoch?
 - (b) sa rozpadne za 1 deň, za 15 rokov?
4. Máme zväzok neutrónov s kinetickou energiou $0,025 \text{ eV}$. Aká časť neutrónov sa rozpadne na dráhe s dĺžkou 2 m ? Polčas premeny neutrónov je 11,7 minút.
5. Vypočítajte, koľko atómov sa rozpadne za sekundu v $1 \text{ kg } {}_{92}^{238}\text{U}$, ktorého polčas premeny je $4,5 \cdot 10^9$ rokov.
6. Určte strednú dobu života a polčas premeny izotopu ${}_{35}^{82}\text{Br}$ ak viete, že jeho aktivita sa za 5 hodín zmenší o 9,2 %. Produktom rozpadu je stabilný izotop ${}_{36}^{82}\text{Kr}$.
7. Vypočítajte konštantu premeny, strednú dobu života a polčas premeny rádioaktívneho nuklidu, ktorého aktivita sa zmenší 1,07-krát za 100 dní.
8. Práve pripravený preparát obsahuje $1,4 \mu\text{g}$ rádioaktívneho ${}_{11}^{24}\text{Na}$. Akú aktivitu bude mať o 1 deň?
9. Určte počet rádioaktívnych jadier v preparáte ${}_{35}^{82}\text{Br}$, ak po jednom dni bude jeho aktivita $7,4 \cdot 10^9 \text{ Bq}$.
10. Vypočítajte, za aký čas sa rozpadne polovica atómov rádia, keď jeho konštantu premeny je $1,36 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}$.
11. Vypočítajte, koľko percent určitého množstva rádioaktívnej látky s polčasom premeny 40 minút sa rozpadne za 5 minút.
12. Určte hmotnostnú aktivitu čistého ${}_{94}^{239}\text{Pu}$.
13. Koľko mg β -aktívneho ${}_{38}^{89}\text{Sr}$ treba dodať k 1 mg neaktívneho stroncia, aby počiatočná aktivita preparátu bola $5,06 \cdot 10^{13} \frac{\text{Bq}}{\text{g}}$?
14. Do krvi človeka bolo vstriednuté malé množstvo roztoku rádioizotopu ${}^{24}\text{Na}$ s celkovou aktivitou $2,1 \cdot 10^3 \text{ Bq}$. Aktivita 1 cm^3 krvi po 5 hodinách bola $0,28 \text{ Bq/cm}^3$. Určte objem krvi človeka.
15. Pri β rozpade ${}_{46}^{112}\text{Pd}$ vznikne β aktívny nuklid ${}^{112}\text{Ag}$. Ich polčas premeny sa rovná 21 a 3,2 hodiny. Vypočítajte pomer maximálnej aktivity nuklidu ${}^{112}\text{Ag}$ k počiatočnej aktivite preparátu, ak na počiatku preparát obsahoval iba nuklid ${}^{112}\text{Pd}$.

16. Konečným produktom rádioaktívneho rozpadu ${}_{90}^{232}\text{Th}$ je izotop ${}_{82}^{208}\text{Pb}$. Spočítajte, koľko častíc α a koľko β sa uvoľní pri tomto rozpade.
17. Nájdite pravdepodobnosť rozpadu rádioaktívneho jadra za čas t . Konštanta premeny je λ .
18. Ukážte, že stredná doba života rádioaktívnych jadier je $\tau = \frac{1}{\lambda}$, kde λ je konštanta premeny.
19. Nájdite konštantu premeny ${}^{137}\text{Cs}$, ktorého polčas premeny je 30,2 r. Vypočítajte aktivitu v jednotkách Bq a Ci pre vzorku, ktorá obsahuje $3 \cdot 10^{19}$ atómov. (*Curie* - staršia jednotka rádioaktivity, $1 Ci = 3,7 \cdot 10^{10} Bq$.)
20. Ľudské telo obsahuje približne 140 gramov draslíka. Pomocou tejto hodnoty, známeho relatívneho zastúpenia ${}^{40}\text{K}$ (0,012%) a Avogadrovej konštanty vypočítajte počet rádioaktívnych atómov ${}^{40}\text{K}$. Vypočítajte konštantu premeny v s^{-1} . Koľko rozpadov ${}^{40}\text{K}$ za sekundu nastane v ľudskom tele? Vyjadrite v Bq a μCi .
21. Rádioizotop ${}^{24}\text{Na}$ s polčasom premeny 15 hodín je použitý na meranie rýchlosti prúdenia slanej vody. Ožiarením stabilného izotopu ${}^{23}_{11}\text{Na}$ neutrónmi získame 5 mikrogramov rádioaktívneho izotopu ${}^{24}\text{Na}$. Aké množstvo tohto izotopu budeme mať po 24 hodinách?
22. Vypočítajte aktivitu A jedného gramu ${}^{226}\text{Ra}$, polčas premeny je 1599 rokov, a porovnajte s definíciou pre jednotku 1 *Curie*.
23. Vypočítajte počiatočnú aktivitu a aktivitu po 24 hodinách pre vzorku ${}^{24}\text{Na}$, ktorá má hmotnosť 1 mg, polčas premeny je 15 hodín.

2.3 Alfa, beta premena a gama žiarenie jadier

- **α premena** - proces samovoľného rozpadu jadra s emitovaním α častice, prebiehajúci podľa schémy:



kde X - materské jadro,

Y - dcérske jadro.

- **Celková energia uvoľnená pri α premene**

$$E_\alpha = [M_{at}(A, Z) - M_{at}(A - 4, Z - 2) - M({}^4_2 He)]c^2 \quad (2.29)$$

sa rozdeľuje vo forme kinetickej energie vzniknutých produktov T_α, T_j tak, aby bol splnený zákon zachovania hybnosti:

$$\vec{p}(A, Z) = \vec{p}_\alpha + \vec{p}_j, \quad (2.30)$$

kde \vec{p}_α - hybnosť α častice,

\vec{p}_j - hybnosť dcérskeho jadra,

$\vec{p}(A, Z)$ - hybnosť materského jadra.

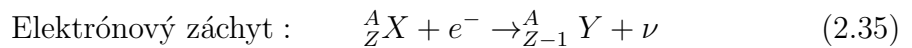
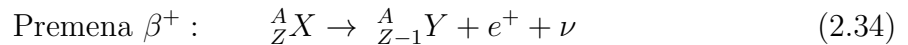
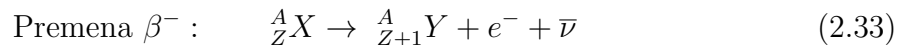
Za predpokladu, že $p(A, Z) = 0$, t.j. nestabilné jadro je v pokoji, dostávame:

$$|\vec{p}_\alpha| = |\vec{p}_j| \quad (2.31)$$

$$T_j = T_\alpha \frac{m_\alpha}{m_j}, \text{ alebo } E_\alpha = T_\alpha + T_j = T_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_j}\right), \quad (2.32)$$

kde m_α a m_j sú hmotnosti α častice a dcérskeho jadra.

- **β premena** - je komplexom troch procesov, ktoré môžeme zapísať nasledovne:



- **Energetické podmienky:** Každý z procesov (2.33), (2.34), (2.35) môže nastať len vtedy, keď $\Delta E = E_i - E_f > 0$, kde E_i je pokojová energia pred premeneou a E_f po premene.

Energetické podmienky pre jednotlivé β premeny sú:

$$E_{\beta^-} = [M_{at}(A, Z) - M_{at}(A, Z + 1)]c^2 > 0 \quad (2.36)$$

$$E_{\beta^+} = [M_{at}(A, Z) - M_{at}(A, Z - 1) - 2m_e]c^2 > 0 \quad (2.37)$$

$$E_K = [M_{at}(A, Z) - M_{at}(A, Z - 1)]c^2 > 0 \quad (2.38)$$

- γ žiarenie

- γ žiarenie je jav prebiehajúci vo vnútri jadra. γ žiarenie je často sprievodným javom α či β premeny jadier atómov. Keď jadro vyžiari časticu α alebo β , nové jadro môže byť v excitovanom stave. Do nižšieho energetického stavu môže prejsť vyžiarením fotónu gama žiarenia podobne ako elektrón v obale atómu vyžiarením kvanta ultrafialového žiarenia.
- Okrem emisie fotónov môže excitované jadro odovzdať prebytok energie $\Delta E = E_1 - E_2$ svojmu atómovému obalu. Nakoľko táto energia je zvyčajne väčšia ako väzbová energia elektrónu v atómovom obale, bude elektrón z atómového obalu emitovaný a prebytok energie sa uvoľní vo forme kinetickej energie elektrónu $T_e = \Delta E - W_e$, kde W_e je väzbová energia elektrónu. To je tzv. elektrónová konverzia, proces konkurujúci γ žiareniu.

Riešené úlohy:

1. V obale, neprepúšťajúcom žiarenie α , je umiestnený 1g rádia, ktorý vyšle za jednu sekundu $3,62 \cdot 10^{10}$ α častíc. Vypočítajte, aké je celkové množstvo energie, ktorá sa v obale nahromadí za jednu hodinu, keď kinetická energia α častice je 4,7 MeV.

Riešenie:

Rovnica popisujúca túto α premenu je:

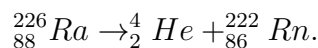
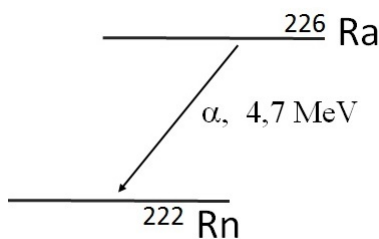


Schéma premeny je:



Obr. 2.1: Schéma α premeny.

Ak predpokladáme, že hybnosť materského jadra je nulová, potom podľa zákona zachovania hybnosti (2.30) celková hybnosť sústavy (dcérske jadro + α častica)

ostáva nulová aj po vyžiarení α častice. Preto, ak sa obmedzíme iba na absolútne hodnoty (2.31) možno písať:

$$m_j v_j = m_\alpha v_\alpha. \quad (2.39)$$

Zo zákona zachovania energie je celková energia uvoľnená po vyžiarení α častice rovná:

$$E_\alpha = T_j + T_\alpha = \frac{1}{2} m_j v_j^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2. \quad (2.40)$$

Dosadením z (2.39) a úpravou dostávame:

$$E_\alpha = T_\alpha + \frac{1}{2} \frac{m_\alpha^2 v_\alpha^2}{m_j} = T_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_j} \right). \quad (2.41)$$

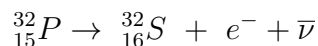
Za jednu hodinu vyžiari jadro n častíc α , preto celková energia uvoľnená za 1 hodinu jadrom:

$$E'_\alpha = n T_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_j} \right), \quad (2.42)$$

kde $n = 3,62 \cdot 10^{10} \cdot 3600$ je počet rozpadov, ktoré nastanú v 1g rádia za jednu hodinu. Po dosadení číselných hodnôt dostávame:

$$E'_\alpha = 3,62 \cdot 10^{10} \cdot 3600 \cdot 4,7 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \left(1 + \frac{4}{222} \right) = 99,89 \text{ J}.$$

2. Jadro ^{32}P sa rozpadá β^- rozpadom:



Vypočítajte maximálnu kinetickú energiu β častíc a kinetickú energiu dcérskeho jadra.

Riešenie:

Energia uvoľnená pri β rozpade je rovná:

$$E_{\beta^-} = (m_P - m_S)c^2 = (32 - 0,026092 - 32 + 0,027926) \cdot 931,5 \text{ MeV} = 1,7 \text{ MeV}.$$

Ak zanedbáme kinetickú energiu neutrín, tak sa táto energia rozdelí medzi elektrón a dcérske jadro:

$$E_{\beta^-} = T_S + T_{e^-}.$$

Ak majú beta častice maximálnu kinetickú energiu, tak platí

$$T_{e^-max} \approx E_{\beta^-} = 1,7 \text{ MeV}.$$

Zo zákona zachovania hybnosti platí: (zanedbali sme príspevok antineutrín - ich kinetickú energiu a hybnosť)

$$|\vec{p}_{e^-}| = |\vec{p}_S|$$

Hybnosť elektrónov, ak majú maximálnu kinetickú energiu, vyjadríme zo vzťahu pre kinetickú energiu:

$$\begin{aligned} E_{\beta^-} &= \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} - m_e c^2 \\ (E_{\beta^-} + m_e c^2)^2 &= m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2 \\ p_e &= \frac{1}{c} \sqrt{(E_{\beta^-} + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{m_e^2 c^4 + 2E_{\beta^-} m_e c^2 + E_{\beta^-}^2 - m_e^2 c^4} \\ p_e &= \frac{1}{c} \sqrt{E_{\beta^-} (2m_e c^2 + E_{\beta^-})} \end{aligned}$$

Keďže $p_e^2 = p_S^2$, potom je kinetická energia dcérskeho jadra rovná

$$T_S = \frac{p_S^2}{2m_S} = \frac{p_e^2}{2m_S} = \frac{E_{\beta^-} (2m_e c^2 + E_{\beta^-})}{2m_S c^2}$$

Po dosadení číselných hodnôt (použijeme $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$):

$$T_S = \frac{1,7 \text{ MeV} (2 \cdot 0,511 \text{ MeV} + 1,7 \text{ MeV})}{2(32 - 0,02726) \cdot 931,5 \text{ MeV}} = 77,7 \text{ eV}$$

3. Izoméne jadro $^{81}\text{Se}^m$ s excitačnou energiou 103 keV prechádza do základného stavu buď vyžiarením gama kvanta alebo elektrónu vnútornej konverzie z K -vrstvy (väzbová energia K - elektrónu je $12,7 \text{ keV}$). Určte rýchlosť odrazeného jadra v oboch prípadoch.

Riešenie:

- (a) V prípade vyžiarenia γ - kvanta pôvodne nehybným jadrom platí zákon zachovania hybnosti:

$$0 = \vec{p}_\gamma + \vec{p}_{Se},$$

teda

$$|\vec{p}_\gamma| = |\vec{p}_{Se}|. \quad (2.43)$$

Ak E^* je excitačná energia jadra, potom pre energiu vyžiareného γ - kvanta máme $E_\gamma = E^* = p_\gamma \cdot c$, odkiaľ $p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$.

Podľa (2.43) pre odrazené jadro platí:

$$p_{Se} = m_{Se} \cdot v_{Se} = \frac{E_\gamma}{c}, \quad (2.44)$$

a jeho rýchlosť je

$$v_{Se} = \frac{E_\gamma}{m_{Se} c} = \frac{103 \cdot 10^3 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{81 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 409 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (2.45)$$

(b) Pri vyžiarení elektrónu vnútornej konverzie platí:

$$|p_{Se}| = |\vec{p}_e|. \quad (2.46)$$

Ak W_e je väzbová energia K - elektrónu, potom jeho kinetická energia je:

$$T_e = E^* - W_e = \frac{p_e^2}{2m_e}, \quad (2.47)$$

odkiaľ máme pre hybnosť:

$$p_e = \sqrt{2m_e(E^* - W_e)} \quad (2.48)$$

a rýchlosť:

$$v_{Se} = \frac{\sqrt{2m_e(E^* - W_e)}}{m_{Se}} = \quad (2.49)$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (103 - 12,7) \cdot 10^3 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}{81 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 1207 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Neriešené príklady:

α premena

1. Vypočítajte energiu uvoľnenú pri α premene 1g čistého ^{239}Pu za jednu sekundu. Kinetická energia α častice je 5,1 MeV, polčas rozpadu je $2,4 \cdot 10^4$ rokov.
2. Jadro ^{213}Po v pokoji emitovalo α časticu s kinetickou energiou 8,34 MeV. Nájdite celkovú energiu uvoľňujúcu sa v tomto procese. Akú časť z tejto energie tvorí kinetická energia dcérskeho jadra? Aká je rýchlosť dcérskeho jadra?
3. Vypočítajte akou rýchlosťou sa bude pohybovať dcérske jadro, ktoré vzniklo po emisii α častice jadrom ^{226}Ra . Kinetická energia emitovanej α častice je $T_\alpha = 4,78$ MeV.
4. Jadrá ^{210}Po emitujú α častice s kinetickou energiou 5,3 MeV.
Určte:
 - (a) množstvo tepla, ktoré uvoľňuje 10 mg preparátu ^{210}Po za čas rovný strednej dobe života týchto jadier.
 - (b) počiatočnú aktivitu preparátu ^{210}Po , ak za čas rovný polčasu premeny sa uvoľnilo 2,2 kJ tepla.
5. Rádioaktívna premena jadier ^{210}Po prebieha zo základného stavu a je sprevádzaná dvomi skupinami α častíc: základnou s energiou 5,3 MeV a slabou intenzitou s energiou 4,5 MeV. Nájdite energiu α premeny týchto jadier a energiu γ kvánt emitovaných dcérskeho jadrami.
6. Rádioaktívna premena jadier ^{226}Th prebieha zo základného stavu a je sprevádzaná emisiou α častíc s energiami 6,33; 6,23; 6,10 a 6,03 MeV. Vypočítajte energie α premeny a zostrojte schému energetických úrovní dcérskeho jadra.
7. Odhadnite výšku coulombovskej bariéry pre α častice, ktoré sú emitované jadrami ^{222}Rn . Aká je u týchto jadier šírka bariéry (tunelová vzdialenosť) pre α častice vyletujúce s kinetickou energiou 5,5 MeV?
8. Dôsledkom premeny plutónia je emitovaná α častica. Vytvorí sa jadro uránu. Vypočítajte kinetickú energiu α častice vyletujúcej z jadra atómu plutónia ^{239}Pu .
9. Pri rádioaktívnej premene rádia je emitovaná α častica s energiou 5,78 MeV. Ak je polomer jadra rádia $2 \cdot 10^{-14}$ m, koľko de Broglieho vlnových dĺžok častice α sa vojde do vnútra jadra?
10. Rádiová emanácia (radón) vzniká rádioaktívnou premenou $^{226}_{88}\text{Ra}$, emisiou α častice s energiou 4,9 MeV. Vypočítajte rozdiel medzi úbytkom hmotnosti jadra rádia a radónu. Známy je len úbytok hmotnosti α častice, $\Delta m_\alpha = 0,002604$ u.

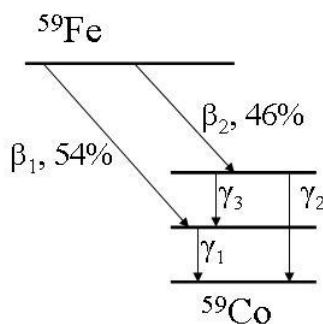
11. Rozhodnite, ktorý z procesov $^{80}\text{Kr} \rightarrow ^{76}\text{Se} + \alpha$ a $^{176}\text{Hf} \rightarrow ^{172}\text{Yb} + \alpha$ prebieha spontánne. Aká je kinetická energia emitovaných α častíc a aká je výška coulombovskej bariéry na povrchu dcérskeho jadra pre spontánny proces? Pokojové energie atómových jadier sú: $m_{\text{Kr}}c^2 = 74,4238 \text{ GeV}$, $m_{\text{Se}}c^2 = 70,7015 \text{ GeV}$, $m_{\text{Hf}}c^2 = 163,8529 \text{ GeV}$, $m_{\text{Yb}}c^2 = 160,1232 \text{ GeV}$ a $m_{\alpha}c^2 = 3727,4 \text{ MeV}$.

β premena

12. Vypočítajte maximálnu hodnotu hybnosti elektrónov emitovaných jadrom ^{10}Be , ak vieme, že dcérske jadro je v základnom stave.
13. V dôsledku β^+ premeny jadra ^{11}C vzniká dcérske jadro v základnom stave. Vypočítajte maximálnu kinetickú energiu pozitronov a zodpovedajúcu energiu dcérskeho jadra.
14. V dôsledku β^+ premeny jadra ^{11}C vzniká dcérske jadro v základnom stave. Vypočítajte energiu pozitronu a neutróna v prípade, keď dcérske jadro zostane v pokoji, t.j. bude mať nulovú kinetickú energiu.
15. Vypočítajte maximálnu kinetickú energiu pozitronov vznikajúcich pri β^+ premene jadier ^{40}K . Odraz dcérskeho jadra ^{40}Ar zanedbajte.
16. Vypočítajte celkovú kinetickú energiu častíc vznikajúcich pri β premene neutrónu (v pokoji).
17. Určte jadrá, ktoré vznikajú β^+ premenou z jadier $^{107}_{48}\text{Cd}$, $^{38}_{19}\text{K}$, $^{120}_{51}\text{Sb}$.
18. Jadrá ^{37}Ar sa rozpadajú K záchytnom. Vypočítajte kinetickú energiu a rýchlosť dcérskeho jadra (zanedbajúc väzbovú energiu K elektrónu).
19. Určte hraničnú energiu β -spektra trícia, maximálnu energiu odrazeného jadra a strednú energiu neutróna, pričom stredná energia β rozpadu je $5,69 \text{ keV}$.
20. Sú možné nasledujúce procesy?
- β^- premena jadra $^{51}_{23}\text{V}$,
 - β^+ premena jadra $^{39}_{20}\text{Ca}$,
 - K -záchyt pri jadre $^{63}_{30}\text{Zn}$.
21. Poznajúc hmotnosť dcérskeho atómu a energiu beta premeny E_{β} nájdite hmotnosť atómu, keď sa:
- rozpadá β^- rozpadom, $E_{\beta^-} = 3,55 \text{ MeV}$,
 - rozpadá β^+ rozpadom, $E_{\beta^+} = 1,83 \text{ MeV}$.

γ žiarenie

22. Izoméne jadro $^{109}\text{Ag}^m$ prechádza do základného stavu buď vyžiarením gama kvanta s $E_\gamma = 87 \text{ keV}$, alebo elektrónu vnútornej konverzie s energiou 61 keV . Vypočítajte väzbovú energiu K elektrónu.
23. Jadrá ^{141}Pr prechádzajú do základného stavu buď vyžiarením γ kvánt, alebo konverzných elektrónov. Vypočítajte excitačnú energiu jadra ^{141}Pr , ak konverzné K elektróny majú energiu 103 keV a väzbová energia je 42 keV .
24. Jadrá ^{117}Sn prechádzajú do základného stavu vyžiarením dvoch γ kvánt po sebe. Tento proces je sprevádzaný vyžiarením konverzných elektrónov s energiami 698 a 132 keV . Energia väzby je 29 keV . Vyčísľte energiu γ kvánt.
25. Atómy ^{203}Tl vznikajúce pri β rozpade jadier ^{203}Hg emitujú štyri skupiny konverzných elektrónov s kinetickými energiami $266,3; 264,2; 263,6; 193,3 \text{ keV}$. Akej hladine atómu Tl - K, L_1, L_2, L_3 zodpovedajú tieto skupiny elektrónov? Väzbová energia na týchto hladinách je $85,7; 15,4; 14,8; 12,7 \text{ keV}$. Vypočítajte tiež energiu γ kvánt sprevádzajúcich tento rozpad.
26. Určte počet konverzných elektrónov vyžiarených za sekundu preparátom ^{59}Fe s aktivitou $A = 3,7 \cdot 10^7 \text{ Bq}$. Schéma β premeny jadier ^{59}Fe je na obrázku 2.2. Koeficienty vnútornej konverzie sú $1,8 \cdot 10^{-4}(\gamma_1)$, $1,4 \cdot 10^{-4}(\gamma_2)$, $7 \cdot 10^{-3}(\gamma_3)$. Pravdepodobnosti vyžiarenia γ kvánt γ_2 a γ_3 sú vo vzájomnom pomere $1 : 15$. (Pozn.: koeficient vnútornej konverzie je pomer pravdepodobnosti vyžiarenia konverzného elektrónu k pravdepodobnosti vyžiarenia γ kvanta.)

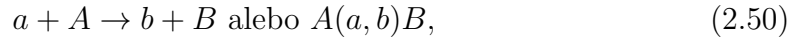


Obr. 2.2: Schéma β premeny jadier ^{59}Fe

27. Jadro ^{191}Ir s energiou vzбудenia 129 keV prešlo do základného stavu vyžiarením γ kvanta. Nájdite relatívnu zmenu energie γ kvanta, ku ktorej došlo v dôsledku spätného odrazu jadra.

2.4 Jadrové reakcie

- **Jadrová reakcia** - proces silnej interakcie atómového jadra s elementárnou časticou, alebo iným jadrom, v dôsledku ktorého dochádza k premene atómového jadra.
- **Schéma jadrovej reakcie:**



kde a - primárna častica (zvázok),
 A - jadro terčíka,
 b - sekundárna častica,
 B - jadro - produkt (alebo konečné jadro).

- **Zákon zachovania elektrického náboja:**
Celkový elektrický náboj častíc vstupujúcich do reakcie sa rovná celkovému elektrickému náboju produktov reakcie.
- **Zákon zachovania celkového počtu nukleónov:**
(platí v reakciách bez produkcie antičastíc)
Celkový počet nukleónov vstupujúcich do reakcie sa rovná celkovému počtu nukleónov z reakcie vystupujúcich.
- **Zákon zachovania energie:**
Celková energia častíc vstupujúcich do reakcie sa rovná celkovej energii častíc z reakcie vystupujúcich, t.j.

$$m_a c^2 + M_A c^2 + T_a + T_A = m_b c^2 + M_B c^2 + T_b + T_B, \quad (2.51)$$

kde $m_i c^2$ ($M_i c^2$) - pokojové energie častice alebo jadra,
 T_i - ich kinetické energie.

Označme:

$$T_1 = T_a + T_A, \text{ resp. } T_2 = T_b + T_B$$

(súčet kinetických energií častíc vstupujúcich, resp. vystupujúcich z reakcie)

$$E_1 = m_a c^2 + M_A c^2, \text{ resp. } E_2 = m_b c^2 + M_B c^2$$

(súčty pokojových energií častíc).

Potom:

$$E_1 + T_1 = E_2 + T_2. \quad (2.52)$$

Pre energiu jadrovej reakcie Q , t.j. energiu, ktorá sa uvoľňuje pri reakcii máme:

$$Q = E_1 - E_2 = T_2 - T_1, \quad (2.53)$$

Ak platí:

$Q > 0$, hovoríme o *exoenergetickej* reakcii, v priebehu ktorej dochádza k uvoľneniu kinetickej energie na úkor pokojovej energie.

$Q < 0$, v reakcii dochádza k rastu pokojovej energie na úkor kinetickej. Takáto reakcia sa nazýva *endoenergetická*.

$Q = 0$, tomuto prípadu odpovedá *pružný rozptyl*, pri ktorom $T_1 = T_2, E_1 = E_2$. Zachováva sa nielen celková, ale aj kinetická a teda aj pokojová energia (t.j. hmotnosť častíc).

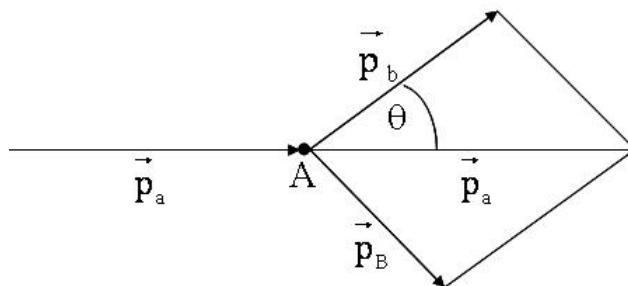
Aby endoenergetická reakcia mohla prebehnúť, musia mať častice vstupujúce do reakcie kinetickú energiu väčšiu ako je tzv. *prahová energia reakcie*. Platí pre ňu vzťah:

$$E_{prah} = |Q| \left(1 + \frac{m_a}{m_A}\right). \quad (2.54)$$

• **Zákon zachovania hybnosti:**

Výsledná hybnosť častíc vstupujúcich do reakcie sa rovná výslednej hybnosti častíc z reakcie vystupujúcich t.j.

$$\vec{p}_a + \vec{p}_A = \vec{p}_b + \vec{p}_B. \quad (2.55)$$



Obr. 2.3: Základná schéma jadrovej reakcie - častica *a* ostreľuje jadro *A*.

Vychádzajúc zo zákona zachovania energie a hybnosti môžeme určiť súvis medzi uhlovým a energetickým rozdelením produktov reakcie ($p_A = 0$).

Pomocou kosínusovej vety vyjadríme hybnosť jadra nasledovne:

$$p_B^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos \theta. \quad (2.56)$$

Ak použijeme nerelativistický vzťah medzi hybnosťou a kinetickou energiou, $T = \frac{p^2}{2m}$, môžeme uvedený vzťah prepísať v tvare:

$$m_B T_B = m_a T_a + m_b T_b - 2\sqrt{m_a m_b T_a T_b} \cos \theta. \quad (2.57)$$

Po dosadení T_B do vzťahu:

$$Q = T_B + T_b - T_a - T_A \quad (T_A = 0), \quad (2.58)$$

dostaneme pre energiu jadrovej reakcie Q vzťah:

$$Q = \left(1 + \frac{m_b}{m_B}\right) T_b - \left(1 - \frac{m_a}{m_B}\right) T_a - 2 \frac{\sqrt{m_a m_b T_a T_b}}{m_B} \cos\theta. \quad (2.59)$$

- **Zákon zachovania momentu hybnosti:**

Pri jadrových reakciách sa zachováva celkový moment hybnosti interagujúcich častíc a jeho projekcia do zvoleného smeru, t.j.

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_2, \quad (2.60)$$

kde $\vec{I}_1 = \vec{I}_A + \vec{i}_a + l_{aA}$,

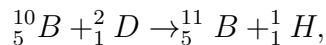
$\vec{I}_2 = \vec{I}_B + \vec{i}_b + l_{bB}$,

$\vec{i}_a, \vec{I}_A, \vec{i}_b, \vec{I}_B$ - spiny odpovedajúcich častíc a jadier,

$l_{a,A}, l_{b,B}$ - orbitálne momenty zodpovedajúcich si dvojíc častíc, ktoré charakterizujú ich relatívny pohyb.

Riešené úlohy:

1. Vypočítajte, aké množstvo energie sa uvoľní pri reakcii:



keď atómová hmotnosť izotopu ${}^{10}_5B$ je 10,012939 u a izotopu ${}^{11}_5B$ je 11,009305 u.

Riešenie:

Pri reakcii sa uvoľňuje energia Q , ktorá súvisí s úbytkom hmotnosti Δm vzťahom:

$$Q = E_1 - E_2 = \Delta m \cdot c^2. \quad (2.61)$$

Súčet pokojových energií častíc vstupujúcich do reakcie je:

$$E_1 = (m_1 + m_2)c^2 = (10,012939 \text{ u} + 2,014102 \text{ u})c^2 = (12,027041 \text{ u})c^2,$$

kým súčet pokojových energií častíc, ktoré reakciou vznikajú, je:

$$E_2 = (m_3 + m_4)c^2 = (11,009305 \text{ u} + 1,007825 \text{ u})c^2 = (12,01713 \text{ u})c^2.$$

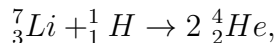
V priebehu reakcie dochádza teda k úbytku hmotnosti:

$$\Delta m = 0,009911 \text{ u}.$$

Ak $1u = 931,5 \text{ MeV}/c^2$, pre energiu uvoľnenú pri reakcii dostávame:

$$Q = \left(0,009911 \cdot 931,5 \frac{\text{MeV}}{c^2}\right) c^2 = 9,23 \text{ MeV}.$$

2. Výsledkom jadrovej reakcie:



pri ktorej protóny bombardujúce lítium majú energiu 600 keV, sú dve častice α letiace s kinetickou energiou 8,94 MeV. Zo známej hmotnosti protónu a α častice určte hmotnosť izotopu 7_3Li .

Riešenie:

V priebehu reakcie dochádza k úbytku hmotnosti Δm , ktorá sa rovná rozdielu pokojových hmotností častíc do reakcie vstupujúcich a reakciou vznikajúcich:

$$\Delta m = m_{Li} + m_H - 2m_{He},$$

odkiaľ pre hmotnosť izotopu lítia vyplýva:

$$m_{Li} = \Delta m - m_H + 2m_{He}.$$

Pri reakcii sa uvoľní celkom energia (2.53):

$$Q = T_2 - T_1 = 2 \cdot 8,94 \text{ MeV} - 0,6 \text{ MeV} = 17,28 \text{ MeV}$$

a s ňou súvisiaci úbytok hmotnosti Δm sa vypočíta z rovnice:

$$\Delta m = \frac{Q}{c^2}.$$

Jednej atómovej hmotnostnej jednotke u zodpovedá energia $931,5 \text{ MeV}$, preto úbytok hmotnosti odpovedajúci uvoľnenej energii $Q = 17,28 \text{ MeV}$ je:

$$\Delta m = \frac{17,28 \text{ MeV}}{931,5 \text{ MeV}/u} = 0,01855 \text{ u}.$$

Pre atómovú hmotnosť izotopu lítia potom vyplýva:

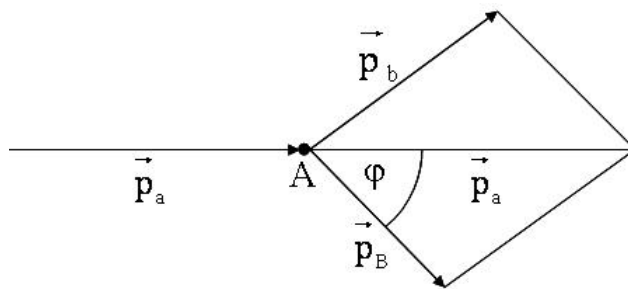
$$m_{Li} = 0,01855 \text{ u} - 1,007825 \text{ u} + 8,005208 \text{ u} = 7,016 \text{ u}.$$

3. α častica s kinetickou energiou $T_\alpha = 1 \text{ MeV}$ sa pružne rozptýlila na nehybnom jadre ${}^6\text{Li}$. Vypočítajte kinetickú energiu odrazeného jadra, odlietajúceho pod uhlom $\varphi = 30^\circ$ vzhľadom k počiatočnému smeru pohybu α častice.

Riešenie:

Podľa kosínusovej vety platí (obr. 2.4):

$$p_b^2 = p_a^2 + p_B^2 - 2p_a p_B \cos \varphi.$$



Obr. 2.4: Schéma rozptylu častice na nehybnom jadre.

Po dosadení vzťahu medzi hybnosťou a kinetickou energiou: $T = \frac{p^2}{2m}$, dostaneme vzťah:

$$m_b T_b = m_a T_a + m_B T_B - 2\sqrt{m_a T_a m_B T_B} \cos \varphi.$$

Pre pružný rozptyl platí:

$$m_a = m_b.$$

Po dosadení $T_b = T_a - T_B$ môžeme písať:

$$m_a T_a - m_a T_B = m_a T_a + m_B T_B - 2\sqrt{m_a T_a m_B T_B} \cos \varphi.$$

Po úprave dostaneme výsledný vzťah:

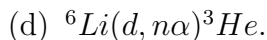
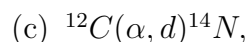
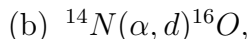
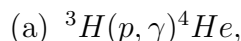
$$T_B = \frac{4m_a m_B}{(m_a + m_B)^2} \cdot T_a \cdot \cos^2 \varphi.$$

Po dosadení číselných hodnôt máme:

$$T_B = \frac{4 \cdot 4,002604 \text{ u} \cdot 6,015126 \text{ u}}{(4,002604 \text{ u} + 6,015126 \text{ u})^2} \cdot 1 \text{ MeV} \cdot \cos^2 30^\circ = 0,72 \text{ MeV}.$$

Neriešené príklady:

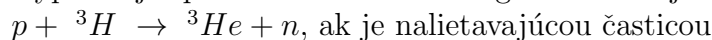
1. Vypočítajte energiu jadrovej reakcie Q týchto reakcií:



2. Pri jadrovej syntéze dvoch deuterónov vzniká jadro izotopu hélia ${}^3_2\text{He}$, jeden neutrón a uvoľní sa energia $3,26 \text{ MeV}$. Vypočítajte atómovú hmotnosť izotopu hélia ${}^3_2\text{He}$.

3. Vypočítajte pomocou tabuliek hmotnosť atómu ${}^{17}\text{N}$ keď je známe, že energia reakcie ${}^{17}\text{O}(n, p){}^{17}\text{N}$ je $Q = -7,89 \text{ MeV}$.

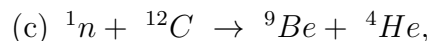
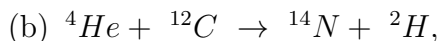
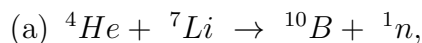
4. Vypočítajte prahovú kinetickú energiu nalietajúcej častice v reakcii:



(a) protón,

(b) jadro trícia.

5. Vypočítajte prahovú energiu α častíc a neutrónov v nasledujúcich reakciách:



6. Určte energetické zafarbenie prvej umelej jadrovej reakcie, ktorú uskutočnil Rutherford v roku 1919 tak, že atómy dusíka ${}^{14}_7\text{N}$ bombardoval α časticami. Pri reakcii jadra ${}^{14}_7\text{N}$ vzniklo nové jadro izotopu kyslíka a uvoľnil sa jeden protón.

7. Jadro uránu ${}^{235}\text{U}$ s atómovou hmotnosťou $235,04393 \text{ u}$ sa pri bombardovaní neutrónmi štiepi na dve nové jadra s atómovými hmotnosťami $94,945 \text{ u}$ a $138,955 \text{ u}$ za súčasného uvoľnenia dvoch nových neutrónov. Vypočítajte energiu, ktorá sa uvoľní pri tejto jadrovej reakcii.

8. Atómové jadro uránu ${}^{238}\text{U}$ je rádioaktívne. Po uvoľnení α častice sa toto jadro mení na jadro izotopu tória ${}^{234}\text{Th}$. Určte energiu uvoľnenú pri tejto premene.

9. Určte kinetickú energiu nalietajúcich protónov, vyvolávajúcich reakciu ${}^9\text{Be}(p, \alpha){}^6\text{Li} + 2,13 \text{ MeV}$, ak dolet α častíc, ktoré vyletujú pod pravým uhlom k smeru pohybu protónov je rovný $2,5 \text{ cm}$ vo vzduchu pri normálnych podmienkach. Pre dolet α častíc s kinetickou energiou T v MeV vo vzduchu platí: $R_\alpha(\text{cm}) = 0,318 \cdot T^{3/2}$.

10. Nájdite kinetickú energiu nalietajúcej α častice, ak výsledkom jej pružného rozptylu na deuteroné je uhol medzi smermi výletu obidvoch častíc $\theta = 120^\circ$ a energia, ktorú získal deuteron je $T_d = 0,4 \text{ MeV}$.
11. Akú časť kinetickej energie stráca nerelativistická α častica pri pružnom rozptyle pod uhlom $\theta = 60^\circ$ na nepohyblivom jadre ^{12}C ?
12. Protón s kinetickou energiou $0,9 \text{ MeV}$ sa čelne pružne zrazil s nepohyblivým deuteronom. Nájdite kinetickú energiu protónu po zrážke, ak uhol rozptylu je $\theta = 90^\circ$.
13. Nájdite energiu neutrónov vznikajúcich fotoštiepením berýlia v reakcii $^9\text{Be}(\gamma, n)^8\text{Be}$, $Q = -1,65 \text{ MeV}$, γ kvantami s energiou $1,78 \text{ MeV}$.
14. Vypočítajte energie nasledujúcich reakcií:
 - (a) $^2\text{H}(d, p)^3\text{H}$, $T_d = 1,2 \text{ MeV}$ je energia nalietajúcich deuteronov, protón vyletel pod pravým uhlom k smeru pohybu deuteronov a má energiu $T_p = 3,33 \text{ MeV}$.
 - (b) $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$, ak energia nalietajúcej častice alfa je $T_\alpha = 4 \text{ MeV}$ a protón vyletel pod uhlom $\theta = 60^\circ$ k smeru pohybu alfa častice, jeho energia je $T_p = 2,08 \text{ MeV}$.
15. Nájdite rýchlosti produktov reakcie $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$, prebiehajúcej ako výsledok pôsobenia neutrónov s nehybnými jadrami bóru, ak kinetická energia neutrónov je nekonečne malá.
16. Nerelativistický deuteron sa pružne rozptýlil na nepohyblivom jadre atómu pod uhlom 30° . Pod takým istým uhlom ku smeru pohybu nalietajúceho deuteronu vyletelo i vyrazené jadro. Akému atómu prislúcha toto jadro?
17. Deuteróny s kinetickou energiou $T_d = 10 \text{ MeV}$, reagujúc s jadrami uhlíka, vyvolajú reakciu $^{13}\text{C}(d, \alpha)^{11}\text{B}$, $Q = 5,16 \text{ MeV}$. Určte uhol medzi smermi rozletu produktov reakcie, ak:
 - (a) vznikajúce jadrá sa rozletia symetricky,
 - (b) α častica vyletela pod pravým uhlom vzhľadom k smeru nalietajúcich deuteronov.

Kapitola 3

EXPERIMENTÁLNE METÓDY JADROVEJ FYZIKY

3.1 Prechod žiarenia prostredím

- **Ťažké nabité častice** strácajú energiu predovšetkým ionizáciou a excitáciou atómov prostredia. Ionizačné straty na jednotke dĺžky dráhy častice s nábojom ze , kinetickou energiou T a rýchlosťou v sú rovné:

$$-\left(\frac{dT}{dx}\right)_{ion} = \frac{4\pi}{m_e c^2} \frac{n_e z^2}{\beta^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left[\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2}{\bar{I}(1-\beta^2)} - \beta^2 \right], \quad (3.1)$$

kde $\beta = \frac{v}{c}$, n_e je hustota elektrónov v prostredí, m_e hmotnosť elektrónu, $\bar{I} \approx 13,5 \cdot Z$ je stredný ionizačný potenciál atómov prostredia s protónovým číslom Z v jednotkách eV .

Stredný dolet α -častíc a protónov s kinetickou energiou T v MeV , emitovaných rádioaktívnymi prvkami pri normálnych podmienkach vo vzduchu, približne určujú empirické vzťahy:

$$R_\alpha(cm) = 0,318 \cdot T^{3/2}; \quad 4 \text{ MeV} < T < 7 \text{ MeV}, \quad (3.2)$$

$$R_p(cm) = R_\alpha(4T) - 0,2; \quad T > 0,5 \text{ MeV}, \quad (3.3)$$

kde $R_\alpha(4T)$ je stredný dolet α -častíc s kinetickou energiou $4T$ vo vzduchu.

Stredný dolet α -častíc (mg/cm^2) v prostredí s nukleónovým číslom A :

$$R'_\alpha = 0,56A^{1/3}R_\alpha, \quad (3.4)$$

kde R_α v cm je dolet α -častice s tou istou energiou vo vzduchu.

- **Radiačné energetické straty elektrónov** (pri $T \gg mc^2$) v MeV/cm :

$$-\left(\frac{dT}{dx}\right)_{rad} = \frac{4r_e^2}{137} \cdot n_e \cdot T \cdot Z^2 \ln \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}}, \quad (3.5)$$

kde r_e je klasický polomer elektrónu, T v MeV kinetická energia elektrónu, n_e - hustota elektrónov v prostredí a Z protónové číslo prostredia.

Vzťah medzi radiačnými a ionizačnými energetickými stratami elektrónov:

$$\frac{(dT/dx)_{rad}}{(dT/dx)_{ion}} = \frac{TZ}{800}. \quad (3.6)$$

Ak sú energetické straty elektrónov v prostredí prevažne radiačné, tak kinetická energia elektrónov v prostredí klesá ako:

$$T = T_0 e^{-x/l_{rad}}, \quad (3.7)$$

kde x je dráha, ktorú elektrón preletí v hmotnom prostredí a l_{rad} je radiačná dĺžka.

- Stredný dolet (v g/cm^2) elektrónu s kinetickou energiou T (v MeV) v hliníku je

$$R = 0,407 \cdot T^{1,38} \quad (0,15 < T < 0,8 \text{ MeV}); \quad (3.8)$$

$$R = 0,542 \cdot T - 0,133 \quad (0,8 < T < 3 \text{ MeV}). \quad (3.9)$$

Tieto vzťahy pomerne presne opisujú dolet v ľubovoľnom prostredí, ak sú energetické straty prevažne ionizačné.

Absorpčný zákon pre β žiarenie:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu \cdot x}, \quad (3.10)$$

kde I_0 je pôvodná intenzita β žiarenia a μ je lineárny absorpčný koeficient a $I(x)$ je intenzita žiarenia po prechode absorbátorom hrúbky x . Hmotnostný absorpčný koeficient v jednotkách cm^2/g :

$$\mu/\rho = 22/T_{\beta max}^{4/3} \quad (0,5MeV < T_{\beta max} < 7MeV), \quad (3.11)$$

- **Pre γ žiarenie prechádzajúce absorbátorom** je lineárny absorpčný koeficient μ daný: $\mu = \tau + \sigma + \kappa$, kde τ je absorpčný koeficient fotoefektu, σ je absorpčný koeficient Comptonovho javu a κ je absorpčný koeficient tvorenia párov.

Pokles intenzity γ žiarenia po prechode absorbátorom hrúbky x je daný vzťahom:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu \cdot x}, \quad (3.12)$$

kde $I(x)$ je intenzita žiarenia po prechode vrstvou absorbátora hrúbky x a I_0 je intenzita dopadajúceho žiarenia.

Polohrúbka $x_{1/2}$ je hrúbka absorbátora, pri prechode ktorou žiarenie γ zníži svoju intenzitu na polovicu. Platí:

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \quad (3.13)$$

Stredný dolet \bar{R} je stredná vzdialenosť, do ktorej sa dostane fotón, kým nie je pohltý:

$$\bar{R} = \frac{\int_0^{\infty} x \cdot e^{-\mu x} \cdot \mu \cdot dx}{\int_0^{\infty} e^{-\mu x} \cdot \mu \cdot dx} = \frac{1}{\mu}. \quad (3.14)$$

- **Čerenkovovo žiarenie** je elektromagnetické žiarenie vznikajúce pri prechode nabitej častice (ako napríklad elektrón) prostredím rýchlosťou v väčšou ako je rýchlosť svetla v tomto prostredí $v \geq v_f = \frac{c}{n}$, kde v_f je fázová rýchlosť svetla v danom prostredí c je rýchlosť svetla vo vákuu a n je index lomu daného prostredia.

Riešené úlohy:

1. Vypočítajte ionizačné straty energie deuterónu s kinetickou energiou 4 MeV na jednotke dráhy v dusíku za normálnych podmienok.

Riešenie:

Energetické straty deuterónov v dôsledku ionizácie sú dané vzťahom:

$$-\left(\frac{dT}{dx}\right)_{ion} = \frac{4\pi}{m_e c^2} \frac{n_e z^2}{\beta^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left[\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2}{\bar{I}(1-\beta^2)} - \beta^2 \right]. \quad (3.15)$$

Hustotu elektrónov v dusíku n_e vypočítame ako:

$$n_e = NZ = \frac{N_A \cdot \rho}{M} \cdot Z, \quad (3.16)$$

kde N je počet atómov na jednotku objemu, $Z = 7$ je protónové číslo prostredia (dusík), M molárna hmotnosť (pre dusík $M = 14,0067 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$), N_A je Avogadrova konštanta ($N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$) a hustota $\rho = 1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Po dosadení:

$$n_e = \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 1250 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}}{14,0067 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} \cdot 7 = 3,76 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}.$$

Rýchlosť $\beta^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ deuterónu určíme z jeho kinetickej energie:

$$T = mc^2 \gamma - mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) mc^2, \text{ kde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (3.17)$$

odkiaľ:

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\left(\frac{T}{mc^2} + 1\right)^2} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{4 \text{ MeV}}{1876 \frac{\text{MeV}}{c^2} c^2} + 1\right)^2} = 0,00425. \quad (3.18)$$

Pre stredný ionizačný potenciál \bar{I} máme:

$$\bar{I} = 13,5 \cdot Z = 13,5 \cdot 7 \text{ eV} = 94,5 \text{ eV}. \quad (3.19)$$

Ak dosadíme za náboj deuterónu $z = 1$ a pre výpočet v jednotkách eV použijeme konverznú konštantu a konštantu jemnej štruktúry, pre ionizačné straty dostaneme:

$$-\left(\frac{dT}{dx}\right)_{ion} = \frac{4\pi}{0,511 \frac{\text{MeV}}{c^2} c^2} \cdot \frac{3,76 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3} \cdot 1^2}{0,00425} \left(\frac{\hbar c}{137}\right)^2 \cdot \left[\ln \frac{2 \cdot 0,511 \frac{\text{MeV}}{c^2} c^2 \cdot 0,00425}{94,5 \text{ eV}(1-0,00425)} - 0,00425 \right] = 17,2 \frac{\text{MeV}}{m} = 0,17 \frac{\text{MeV}}{cm}. \quad (3.20)$$

2. Nájdite vzťah medzi strednými doletmi v prostredí pre protón a deuterón, ktorých rýchlosti sú rovnaké. Určte stredný dolet deuterónu s energiou 2 MeV vo vzduchu.

Riešenie:

Vzťah (3.1) môžeme prepísať, ak zavedieme $v = \beta c$, ako:

$$-\left(\frac{dT}{dx}\right)_{ion} \approx z^2 n_e f(v) = F(T). \quad (3.21)$$

Dolet R je dráha, ktorú prejde častica do svojho zastavenia:

$$R = \int_0^R dx = \int_T^0 \frac{dT}{F(T)}. \quad (3.22)$$

Ak použijeme nerelativistické priblíženie $\frac{dT}{dx} \approx mv \frac{dv}{dx}$, môžeme R písať v závislosti od rýchlosti:

$$R = \frac{m}{z^2} \int \frac{v dv}{f(v)n_e} = \frac{m}{z^2} F(v), \quad (3.23)$$

pričom $F(v)$ je funkcia, ktorá závisí len od rýchlosti častice a vlastností prostredia.

Pre hmotnosti deuterónu a protónu platí $m_d/m_p = 2$, náboje $z_d = z_p = 1$ a ak rýchlosť $v_d = v_p = v$ ich kinetické energie sú $T_d = 2 \cdot T_p$.

Potom pomer stredných doletov deuterónu a protónu je:

$$\frac{R_d(v)}{R_p(v)} = \frac{R_d(T)}{R_p(\frac{m_p}{m_d}T)} = \frac{m_d}{m_p} = 2. \quad (3.24)$$

Ak využijeme pomer (3.24) a vzťahy (3.2) a (3.3) pre dolet α častíc a protónov, pre dolet deuterónov máme:

$$\begin{aligned} R_d(2 \text{ MeV}) &= 2 \cdot R_p(1 \text{ MeV}) = 2 \cdot (R_\alpha(4 \text{ MeV}) - 0,2 \text{ cm}) = \\ &= 2 \cdot (0,318 \cdot \sqrt{4^3} - 0,2 \text{ cm}) = 4,7 \text{ cm}. \end{aligned}$$

3. Vypočítajte polohrúbku (hrúbku polovičného zoslabenia) vody pre γ žiarenie, ak lineárny absorpčný koeficient $\mu = 0,047 \text{ cm}^{-1}$.

Riešenie:

Podľa (3.12) intenzita γ žiarenia klesá po prechode absorbátorom hrúbky x podľa:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu \cdot x} \quad (3.25)$$

Polohrúbka materiálu $x_{1/2}$ je hrúbka, pri prechode ktorou žiarenie γ zníži svoju intenzitu na polovicu, teda

$$I(x_{1/2}) = \frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu x_{1/2}}, \quad (3.26)$$

odkiaľ po úprave máme:

$$e^{\mu x_{1/2}} = 2, \quad (3.27)$$

a nakoniec:

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \quad (3.28)$$

Po dosadení je výsledná polohrúbka rovná:

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{0,047 \text{ cm}^{-1}} = 14,7 \text{ cm}. \quad (3.29)$$

Neriešené príklady:

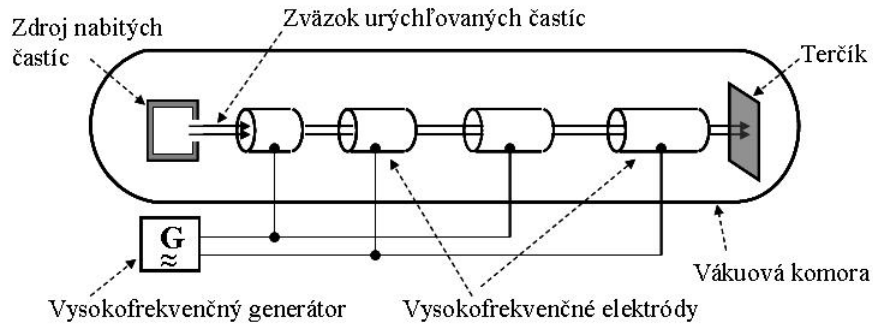
- Nájdite pomer pomerných ionizačných strát:
 - alfa častice a protónu s $E = 5 \text{ MeV}$ v neóne,
 - alfa častice s energiou 10 MeV v Cu a Al .
- Nájdite kinetickú energiu α častíc, ktorých stredný dolet v železe je $11 \mu\text{m}$.
- Určte dolet α častice v olove, ak je známe, že jej energia zodpovedá doletu $17 \mu\text{m}$ v hliníku.
- Vypočítajte pomerné radiačné straty energie elektrónu s kinetickou energiou 20 MeV v hliníku. Koľko-krát sú pomerné radiačné straty elektrónu v olove väčšie ako v hliníku?
- Určte počiatočnú energiu elektrónov, ak po prechode olovenou doštičkou hrúbky 5 mm je stredná energia elektrónov rovná 42 MeV .
- Aká hrúbka hliníkového absorbátora je potrebná na úplne pohltenie β -častíc z rozpadu jadier ${}_{15}^{32}\text{P}$ a ${}_{3}^8\text{Li}$? Hraničné energie β spektier fosforu a lítia sú $1,704 \text{ MeV}$ a $12,7 \text{ MeV}$.
- Maximálny dolet elektrónov pozorovaného β spektra v hliníku bol $5,73 \text{ mm}$. Určte maximálnu energiu β spektra.
- Aká časť β častíc vyžiarených ${}^{32}\text{P}$ sa pohltí v Al -fólii s hrúbkou 20 mg/cm^2 ?
- Nájdite polohrúbku pre β častice emitované rádioaktívnym preparátom ${}^{32}\text{P}$ vo vzduchu, hliníku a olove.
- Vypočítajte kinetickú energiu elektrónov, pri ktorej radiačné energetické straty v hliníku tvoria $\frac{1}{4}$ všetkých energetických strát.
- Vypočítajte kinetickú energiu elektrónov, pri ktorej sú radiačné a ionizačné energetické straty rovnaké: v dusíku, hliníku a olove (pri normálnych podmienkach).
- Pri prechode vrstvou nejakej látky hrúbky $0,4 \text{ cm}$ sa energia rýchlych elektrónov zmenšila o 25% . Nájdite radiačnú dĺžku elektrónu, ak straty energie elektrónu ionizáciou sú zanedbateľné.
- Pri zväčšení hrúbky olovej doštičky o 2 mm sa intenzita zväzku monochromatického röntgenového žiarenia zmenšila $8,4$ - krát. Nájdite pomocou tabuliek energiu fotónov.

14. Olovená doštička s hrúbkou 1 mm zníži intenzitu zväzku röntgenového žiarenia s energiou 200 keV tak isto, ako hliníková doštička s hrúbkou x . Určte hrúbku hliníkovej doštičky.
15. Stupne zoslabenia intenzity zväzkov röntgenového žiarenia po prechode olovenou doštičkou s energiami 200 keV a 400 keV sa navzájom líšia $4x$. Nájdite hrúbku doštičky a stupeň zoslabenia intenzity zväzku s energiou 200 keV .
16. Zväzok röntgenového žiarenia s vlnovou dĺžkou $6,2 \cdot 10^{-12}\text{ m}$ prechádza cez olovo, vodu a vzduch. Určte polohrúbky.
17. Koľko polohrúbok zoslabí intenzitu zväzku röntgenového žiarenia 1000 - krát?
18. Monochromatické γ žiarenie ${}_{79}^{108}\text{Au}$ ($h\nu = 0,411\text{ MeV}$) pozorujeme pomocou medeného absorbátora hrúbky 2 cm . Určte sumárny lineárny absorpčný koeficient, ak vieme, že absorbátor znížil pôvodnú intenzitu žiarenia 5 - krát.
19. Vrstva olova hrubá $1,4\text{ cm}$ zoslabí intenzitu γ žiarenia s energiou 2 MeV na polovicu pôvodnej hodnoty.
 - (a) Vypočítajte, aká vrstva olova zoslabí intenzitu uvažovaného γ žiarenia na desatinu pôvodnej hodnoty.
 - (b) Vypočítajte lineárny absorpčný koeficient olova μ pre γ žiarenie s energiou 2 MeV .
20. Zväzok elektrónov s kinetickou energiou $0,8\text{ MeV}$ prechádza cez priehľadný materiál s indexom lomu $n=1,4$. Zistite, či sú splnené podmienky pre vznik Čerenkovovho žiarenia. Ak áno, určte aký uhol zvierá vlnoplocha tohto žiarenia so smerom dopadajúceho elektrónového zväzku.
21. Elektrón, resp. protón letia prostredím s indexom lomu $n = 1,6$. Aká musí byť ich kinetická energia, aby sa stali zdrojom Čerenkovovho žiarenia? Pre akú časticu je prahová energia v tomto prostredí $29,6\text{ MeV}$?
22. Určte prahovú energiu vzniku Čerenkovovho žiarenia pre protóny, π mezóny a elektróny v skle ($n = 1,8$), plexiskle ($n = 1,5$), vode ($n = 1,33$) a vzduchu ($n = 1,0003$) pri normálnych podmienkach (n je index lomu).

3.2 Urýchľovače častíc

Urychľovače častíc sú zariadenia, ktoré využívajú elektromagnetické polia na urýchlenie nabitých častíc na vysoké rýchlosti a na ich udržanie na vhodných dráhach.

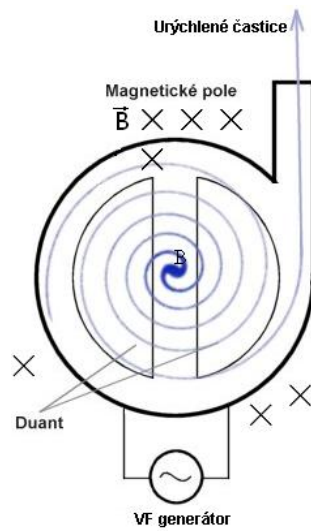
- **Elektrostatický lineárny urýchľovač** je tvorený urýchľovacou trubicou obsahujúcou rad valcových elektród, medzi ktorými je postupne rastúce vysoké napätie U_1, U_2, \dots, U_n . Častica s nábojom q je urýchľovaná elektrostatickým poľom na energiu $E = q \cdot (U_1 + U_2 + \dots + U_n)$.
- **Rezonančný lineárny urýchľovač** na urýchľovanie častíc nepotrebuje vysoké napätie. Valcové elektródy sú pripojené na vysokofrekvenčné striedavé napätie s amplitúdou U_0 a frekvenciou f . Urýchľovanie častíc prebieha v medzerách medzi valcovými elektródami. Frekvenciu striedavého napätia volíme tak, aby počas doby, ktorú potrebujú ióny na preletenie dutinou valca, zmenilo napätie na elektródach svoju polaritu tak, že ióny budú v medzerách odpudzované elektródou, ktorou práve preleteli a priťahované ďalšou. Dĺžka valcových elektród sa musí zväčšovať, aby sa kompenzovala narastajúca rýchlosť častíc. Preletom medzi jednotlivými elektródami získa častica energiu $E_1 = qU_0$. Po prelete celým urýchľovačom s n elektródami má teda energiu $E = nE_1 = nqU_0$.



Obr. 3.1: Rezonančný lineárny urýchľovač

- **Cyklotrón** (cyklický vysokofrekvenčný urýchľovač) je zariadenie tvorené vákuovou komorou v ktorej sú umiestnené kovové duanty - polkruhové duté elektródy, do ktorých sa vstrekujú ióny. V priestore medzi duantmi sa častice urýchľujú pomocou vysokofrekvenčného striedavého napätia.

Komora s duantmi je umiestnená v homogénnom magnetickom poli elektromagnetu orientovanom kolmo na dráhu častíc (kolmo na rovinu obrázku). Vplyvom Lorentzovej sily $F_L = q\vec{v} \times \vec{B}$ (kde q je náboj častice, \vec{v} je vektor rýchlosti častice a \vec{B} je vektor indukcie magnetického poľa) sa dráha nabitej častice zakrivuje. Táto trajektória je kruhová, jej polomer sa s rastúcou rýchlosťou častice zväčšuje. Pri



Obr. 3.2: Cyklotrón

zanedbaní relativistických efektov doba letu jedným duantom nezávisí na rýchlosti častice, vďaka čomu je urýchľovanie častice v priestore medzi duantami možné pomocou striedavého zdroja napätia s konštantnou frekvenciou. Táto frekvencia sa nazýva aj cyklotrónovou frekvenciou a je daná vzťahom $f = \frac{qB}{2\pi m}$, kde q je náboj častice, B je veľkosť magnetickej indukcie a m je hmotnosť nabitkej častice.

Riešené úlohy:

1. Spočítajte rýchlosť elektrónu, keď jeho kinetická energia je $2 \cdot 10^5 \text{ eV}$. Ako sa zmení rýchlosť v prípade výpočtov podľa vzťahov klasickej fyziky a relativistických vzťahov? Aký je rozdiel (v %) medzi získanými hodnotami rýchlostí?

Riešenie:

V špeciálnej teórii relativity je kinetická energia daná rozdielom celkovej a pokojovej energie:

$$E_k = E - E_0 = mc^2\gamma - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right), \quad (3.30)$$

kde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Zo vzťahu (3.30) pre rýchlosť platí:

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{E_k}{mc^2} \right)^{-2}}. \quad (3.31)$$

Po dosadení:

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{2 \cdot 10^5 \text{ eV}}{0,511 \cdot 10^6 \frac{\text{eV}}{c^2}} \right)^{-2}} = 0,695 \cdot c = 2,086 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

V klasickej fyzike je kinetická energia daná:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad (3.32)$$

odkiaľ pre rýchlosť elektrónu máme:

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}, \quad (3.33)$$

a po dosadení:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ eV}}{0,511 \cdot 10^6 \frac{\text{eV}}{c^2}}} = 0,885 \cdot c = 2,654 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Rozdiel medzi získanými hodnotami rýchlosti je:

$$\frac{(2,654 - 2,086) \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2,654 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 0,214 = 21,4\%.$$

2. Dĺžka urýchľovacích elektród v lineárnom urýchľovači je daná podmienkou, že za dobu preletu iónov od jednej urýchľovacej medzery k druhej dôjde k zmene polarít napätia na elektródach. Určte, ako sa musí meniť dĺžka l jednotlivých valcov, aby boli urýchlené protóny z energie 2 MeV na 30 MeV pri frekvencii napätia $f = 10^8 \text{ Hz}$.

Riešenie:

Doba preletu t valcom dĺžky l pre časticu s rýchlosťou v sa musí rovnať práve polperióde použitého vysokofrekvenčného napätia:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = \frac{l}{v}. \quad (3.34)$$

Pre dĺžku elektródy potom platí:

$$l = \frac{v}{2f}. \quad (3.35)$$

Z relativistického vzťahu pre kinetickú energiu:

$$E_k = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (3.36)$$

platí pre rýchlosť:

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{E_k}{mc^2} \right)^{-2}}. \quad (3.37)$$

Po úprave dostaneme výsledný vzťah pre dĺžku elektród v závislosti od kinetickej energie častice:

$$l = \frac{c}{2f} \sqrt{1 - \left(1 + \frac{E_k}{mc^2} \right)^{-2}}. \quad (3.38)$$

Po dosadení číselných hodnôt pre $E_k = 2 \text{ MeV}$:

$$l = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{2 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}} \sqrt{1 - \left(1 + \frac{2 \text{ MeV}}{938,3 \frac{\text{MeV}}{c^2}} \right)^{-2}} = 0,098 \text{ m} = 9,8 \text{ cm}.$$

Pre $E_k = 30 \text{ MeV}$ dostávame hodnotu $l = 37 \text{ cm}$.

Dĺžka urýchľovacích elektród v rezonančnom lineárnom urýchľovači sa mení od $9,8 \text{ cm}$ až po 37 cm na konci urýchlenia.

3. Deuteróny sú urýchľované v cyklotróne.

- (a) Určte potrebnú frekvenciu zdroja napätia cyklotrónu, ak veľkosť indukcie magnetického poľa v urýchľovači je $1,5 \text{ T}$ a deuteróny majú hmotnosť $3,3 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$?

- (b) Aký musí byť polomer cyklotrónu, ak častice opúšťajú urýchľovač s kinetickou energiou 16 MeV ? Koľko krát preletí deuterón medzi duantami cyklotrónu, ak je medzi nimi potenciálový rozdiel 50 kV ?

Riešenie:

- (a) Na deuteróny s nábojom e a rýchlosťou \vec{v} kolmou na indukciu \vec{B} homogénneho magnetického poľa pôsobí magnetická sila F_m s veľkosťou

$$F_m = evB. \quad (3.39)$$

Pre rovnomerný pohyb po kružnici platí (dostredivou silou F_{do} je v tomto prípade sila F_m):

$$F_{do} = F_m = \frac{mv^2}{r} = evB. \quad (3.40)$$

Pre polomer kružnice, po ktorej sa častica pohybuje dostávame:

$$r = \frac{mv}{eB}. \quad (3.41)$$

Polovica periódy $\frac{T}{2}$ (doba obehu polkružnice) je rovná:

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi mv}{v eB} = \frac{\pi m}{eB}. \quad (3.42)$$

Aby boli deuteróny cyklotrónom urýchlené, musí sa frekvencia f_z zdroja napätia rovnať frekvencii obehu deuterónov v magnetickom poli:

$$f_z = f = \frac{1}{T} = \frac{eB}{2\pi m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5}{2\pi \cdot 3,3 \cdot 10^{-27}} = 11 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$$

Zdroj elektrického poľa má frekvenciu približne $11 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$.

- (b) Uvažujme, že na začiatku mal deuterón zanedbateľnú kinetickú energiu. Pre kinetickú energiu, ktorú častica s nábojom e získa urýchlením napätím U , platí:

$$E_k = eU.$$

Aby dosiahla požadovanú energiu E_{max} ($E_{max} = 16 \text{ MeV} = 2,56 \cdot 10^{-12} \text{ J}$) musí duantami preletieť n krát:

$$n = \frac{E_{max}}{E_k} = \frac{E_{max}}{eU} = \frac{2,56 \cdot 10^{-12}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50 \cdot 10^3} = 320.$$

Polomer cyklotrónu vyjadríme zo vzťahu pre polomer kružnice, po ktorej sa častica pohybuje pri maximálnej kinetickej energii, s rýchlosťou

$$E_{max} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_{max}}{m}}.$$

Pre polomer duantov R_{max} teda platí:

$$R_{max} = \frac{\sqrt{2mE_{max}}}{eB} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3,3 \cdot 10^{-27} \cdot 2,56 \cdot 10^{-12}}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5} \text{ m} = 0,54 \text{ m}.$$

Deuterón preletí medzi duantami 320 krát, až dosiahne požadovanú hodnotu energie. Polomer cyklotrónu sa rovná polomeru trajektórie častice urýchlenej na požadovanú hodnotu energie. Tento polomer je 54 *cm*.

Neriešené príklady:

1. Aké napätie elektrického poľa by bolo podľa klasickej teórie potrebné na to, aby urýchlením v tomto poli získal elektrón rýchlosť svetla? Akú rýchlosť získa elektrón v tomto poli podľa relativistickej mechaniky?
2. Aký je polomer zakrivenia dráhy elektrónu s kinetickou energiou $E_k = 5 \cdot 10^3 \text{ eV}$, ak sa pohybuje v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 50 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ kolmom na smer pohybu.
3. Magnetické pole cyklotrónu pre urýchľovanie deuterónov má indukciu $1,4 \text{ T}$, maximálny polomer dráhy urýchľovaných iónov je $0,4 \text{ m}$.
 - (a) Určte frekvenciu urýchľujúceho napätia
 - (b) Určte maximálnu energiu deuterónov
4. Nech valcové elektródy v lineárnom urýchľovači majú rovnakú dĺžku $l = 6 \text{ cm}$. V akých medziach je nutné meniť frekvenciu generátora takéhoto urýchľovača, aby sme urýchlili protóny a elektróny od 5 do 50 MeV .
5. Napätie na duantoch cyklotrónu je $1,5 \cdot 10^4 \text{ V}$. Konečná energia urýchlených jadier hélia je 60 MeV . Ich urýchlenie trvá $2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. Vypočítajte frekvenciu urýchľovacieho napätia v cyklotróne.
6. Vypočítajte rýchlosť v a kinetickú energiu E_k alfa častíc urýchlených v cyklotróne, keď pred dopadom na terčik sa ióny pohybovali po kružnici s $r = 50 \text{ cm}$. Indukcia magnetického poľa cyklotrónu je $B = 1,7 \text{ T}$.
7. Určte pre elektrón a protón, pohybujúci sa po kruhovej dráhe v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 1 \text{ T}$ periódu obehu a polomer ich dráh, ak kinetická energia týchto častíc je 10 MeV .
8. Elektrón urýchlený potenciálovým rozdielom $U = 400 \text{ V}$ vletel do homogénneho magnetického poľa s indukciou $B = 1,5 \text{ mT}$. Vektor rýchlosti elektrónu je kolmý na siločiaru magnetického poľa. Vypočítajte:
 - (a) polomer dráhy pohybu elektrónu,
 - (b) frekvenciu kruhového pohybu elektrónu v magnetickom poli.
9. Napätie medzi duantmi cyklotrónu je $U = U_0 \cdot \sin \omega t$, kde $U_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ V}$ a frekvencia napätia $f = 2,25 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$. Urýchľujú sa ním jednomocné ióny, ktorých hmotnosť je $1800x$ väčšia než pokojová hmotnosť elektrónu. Ión začína svoj pohyb v bode A a keď obehne rad polkružníc, dosahuje rýchlosť $v_0 = 4,4 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-1}$. Nájdite počet polkružníc, ktoré obehol ión a polomer prvej a poslednej kružnice, keď vzdialenosť medzi duantmi urazí ión pri maximálnom napätí.

10. Elektróny sú urýchľované elektrickým poľom na dráhe s napätím $10^4 V$. Aká vlnová dĺžka prislúcha elektrónom na konci dráhy, keď na jej začiatku bola rýchlosť elektrónov nulová?
11. Elektrón je urýchľovaný v homogénnom elektrickom poli s rozdielom potenciálov $U = 10^5 V$. Aká vlnová dĺžka mu prislúcha? (použ. relativistické vzťahy)
12. Nájdite kinetickú energiu elektrónu, ktorý má rýchlosť $v = 0,6 c$.
13. Aká je rýchlosť protónu, keď je jeho kinetická energia $10^8 eV$?

VÝSLEDKY:

1 ATÓMOVÁ FYZIKA

1.1 Fotoefekt a fotóny

1. $\nu = 4,3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, $p = 9,5 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $E = 2,8 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
2. (a) $\nu = 5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$, $E = 20,7 \text{ eV}$, $p = 1,1 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
(b) $\nu = 6 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1}$, $E = 24,8 \text{ keV}$, $p = 1,3 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
(c) $\nu = 3 \cdot 10^{22} \text{ s}^{-1}$, $E = 124,1 \text{ MeV}$, $p = 6,6 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
3. $p_1 = 2,48 \frac{\text{eV}}{c}$, $p_2 = 4,96 \frac{\text{keV}}{c}$, $p_3 = 0,62 \frac{\text{MeV}}{c}$
4. $\lambda = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ m}$, $p = 2,73 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
5. $\lambda = 2,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
6. $T_{max} = 1,65 \text{ eV}$
7. $\lambda_{max} = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, $T_{max} = 3,9 \text{ eV}$
8. (a) $\nu_0 = 4,6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, $\lambda_0 = 6,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
(b) $\lambda = 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
9. $n = \frac{E}{E_f} = 3$
10. $n = 3 \cdot 10^{19} \text{ s}^{-1}$
11. $A = 4,5 \text{ eV}$
12. (a) $\nu = \frac{h\nu_0 + eU}{h} = 2,14 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$
(b) $A = 4,36 \text{ eV}$
13. $\Delta A = hc \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'} \right) = 2,67 \text{ eV}$
14. $U = \frac{hc}{e} \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'} \right) = 1,25 \text{ V}$

$$15. v = \sqrt{\frac{2hc}{m_e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)} = 0,98 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$16. h = \frac{e(U_2 - U_1)}{c \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)} = 6,4415 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$17. e = \frac{hc\Delta\lambda}{\Delta U \lambda(\lambda - \Delta\lambda)} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$18. E = \frac{hc}{\lambda} - A - \frac{1}{2} \frac{(e\mu_0 H r)^2}{m} = 5,37 \text{ eV}$$

$$19. A = 6,3 \text{ eV}$$

$$20. v = 1,11 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

1.2 Comptonov efekt

1. $\lambda = 1,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
2. (a) $E'_f = \frac{E_f}{1 + \frac{2E_f}{m_e c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 0,196 \text{ MeV}$
 (b) $E_e = E_f - E'_f = 0,264 \text{ MeV}$
3. $E_e = \frac{\xi}{1+\xi} E_f = 0,2 \text{ MeV}$
4. (a) $\lambda' = \frac{h}{p} + \lambda_c(1 - \cos \theta) = 1,55 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
 (b) $\lambda' = \frac{h}{p'} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
5. $\lambda = \frac{h}{m_e c} \left(\sqrt{1 + \frac{2m_e c^2}{E_e}} - 1 \right) = 1,997 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
6. (a) $\Delta\lambda = \frac{\xi\lambda}{1-\xi} = 1,2 \text{ pm}$
 (b) $\theta \approx 60^\circ$
7. $\theta = 59^\circ 38'$, $\cotg \psi = \frac{\text{tg} \frac{\theta}{2} \cdot (\lambda_c + \lambda)}{\lambda}$ $\psi = 49^\circ 35'$
8. $\theta = 50^\circ 18'$
9. (a) $\cos \theta = \left(1 - \frac{\xi_1 \lambda}{\lambda_c} \right)$ $\theta = 60^\circ 44'$
 (b) $\cos \theta = \left(1 - \frac{\xi_2 \lambda}{\lambda_c} \right)$ $\theta = 12^\circ 59'$
10. $\Delta\lambda = 2 \text{ fm}$
11. $\Delta\lambda_e = 4,85 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
 $\Delta\lambda_p = 2,64 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
12. $m_p = \frac{2h}{\Delta\lambda_{\text{max}c}} = 1,69897 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
13. $\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos \theta)$
 $30^\circ \dots \Delta\lambda = 3,25 \cdot 10^{-13} \text{ m}$
 $60^\circ \dots \Delta\lambda = 1,21 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
 $90^\circ \dots \Delta\lambda = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
 $135^\circ \dots \Delta\lambda = 4,14 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
 $180^\circ \dots \Delta\lambda = 4,85 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
14. $\text{tg} \psi = \frac{\lambda}{\lambda_c + \lambda} \cotg \frac{\theta}{2}$
 $30^\circ \dots \psi = 74^\circ 18'$
 $60^\circ \dots \psi = 58^\circ 49'$
 $90^\circ \dots \psi = 43^\circ 38'$

$$135^\circ \dots \psi = 21^\circ 34'$$

$$180^\circ \dots \psi = 0^\circ$$

$$15. p_e = 1,6 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$16. E_f = \frac{hc}{\frac{hc}{E_f} - 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 1,84 \text{ MeV}$$

$$17. E'_f = \frac{hc}{\frac{hc}{E_f} + \lambda_c(1 - \cos \theta)} = 0,16 \text{ MeV}$$

$$E_e = E_f - E'_f = 0,14 \text{ MeV}$$

$$18. (a) E'_e = \frac{2hc\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\lambda(\lambda + 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2})} = 0,29 \text{ keV}$$

$$(b) \operatorname{tg} \psi = \frac{\lambda}{\lambda_c + \lambda} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \quad \psi = 44^\circ 19'$$

$$19. E_e = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} = 2,4 \cdot 10^4 \text{ eV}$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c}, \quad \theta = 89^\circ 23'$$

$$20. \lambda = \frac{1-\xi}{\xi} \lambda_c = 7,28 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$21. \frac{\lambda_c}{\lambda + \lambda_c} \cdot 100\% = 10,2\%$$

$$22. \lambda = 1,2 \text{ pm}$$

$$23. E'_{f,min} = \frac{m_e c^2}{3} = 0,170 \text{ MeV}$$

$$p_{e,max} = \frac{4m_e c^2}{3c} = 0,681 \text{ MeV}/c$$

$$24. \lambda_p = 1,32 \text{ fm}$$

$$E_{f,min} = 54,6 \text{ MeV}$$

$$25. E'_f = 2,99 \text{ keV},$$

$$E_e = 5,15 \text{ eV}$$

$$p_e = 2,29 \text{ keV}/c$$

$$\psi = 67,4^\circ$$

1.3 De Broglieho vlnová délka, princip neurčitosti

1. (a) $\lambda = 1,1 \cdot 10^{-33} \text{ m}$
 (b) $\lambda = 7,4 \cdot 10^{-33} \text{ m}$
 (c) $\lambda = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
2. $E_{k,p} = 7,78 \cdot 10^{-13} \text{ J}$
3. $m = 1,3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$
4. $v = 7,3 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $E_k = 150 \text{ eV}$
5. (a) $\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{2m_p E_k}} = 0,91 \cdot 10^{-12} \text{ m}$, $\lambda_e = 0,39 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
 (b) $E_{k,p} = \frac{h^2}{2m_p \lambda^2} = 0,082 \text{ eV}$, $E_{k,e} = 150 \text{ eV}$
6. $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e m_p c^2}} = 4 \cdot 10^{-14} \text{ m}$
7. $v = 5,9 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
8. $\lambda = 1,31 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
9. $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
10. $\Delta\lambda = \lambda_p - \lambda_H = \frac{h}{\sqrt{2E_k m_p}} - \frac{h}{\sqrt{2E_k(m_p+m_e)}} = 7,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
11. $E_k = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$, $E_k(O_2) = 2,58 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$, $E_k(\text{částice}) = 1,7 \cdot 10^{-11} \text{ eV}$
12. $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mkT}}$, $\lambda_\alpha = 0,896 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\lambda_n = 1,785 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\lambda_{N_2} = 0,339 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
13. $E_k = m_e c^2 (\sqrt{2} - 1) = 0,21 \text{ MeV}$
14. $\frac{E_k + 200 \text{ eV}}{E_k} = 4$, $E_k = 66,7 \text{ eV}$,
 $\lambda_0 = h \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1}{m \Delta E}} = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
15. $\Delta E = \frac{h^2}{2m\lambda^2} - \frac{p^2}{2m} = 382 \text{ eV}$
16. $\lambda = \frac{h}{re\mu_0 H} = 1,65 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
17. $U = \frac{h^2}{2em\lambda^2} = 601,73 \text{ V}$
18. (a) $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 72,64 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 (b) $\lambda = \frac{h}{mv} = 0,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

$$19. \Delta v \approx \frac{h}{2\pi} \frac{1}{\Delta x m} \approx 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_1 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$20. \Delta E \approx \frac{h}{2\pi} \frac{1}{\Delta t} \approx 6,58 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$$

$$21. \Delta x = \frac{r}{2}, \quad E_{min} \approx \frac{h^2}{2\pi^2} \frac{1}{mr^2} \approx 15,24 \text{ eV}$$

$$22. \Delta x = \frac{r}{2}, \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{h}{r\pi\sqrt{2mE_k}} = 1,2 \cdot 10^{-4}$$

$$23. \Delta v = \frac{\hbar}{m_e \Delta x} = 115,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$24. \frac{\Delta E}{E} = \frac{\hbar \lambda}{\Delta t h c} = 3,18 \cdot 10^{-7}$$

$$25. \Delta v \geq \frac{h}{2\pi \Delta x m}$$

$$(a) \Delta v = 231,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(b) \Delta v = 0,126 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(c) \Delta v = 5,34 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$26. (a) \Delta p_y = 7 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(b) \Delta v_y = 7,7 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(c) \Delta v_y = 3,2 \cdot 10^{-21} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

1.4 Rutherfordov rozptyl

1. (a) $r_{min} = 2,65 \cdot 10^{-14} \text{ m}$
(b) $b = 1,32 \cdot 10^{-14} \text{ m}$
2. $\theta = 18^\circ 10'$
3. $\theta = 10^\circ$
4. $b = 1,29 \cdot 10^{-13} \text{ m}$
5. (a) $b = 22,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
(b) $\frac{\Delta N}{N} = 0,0094\%$
6. $b = 6,1 \cdot 10^{-13} \text{ m}$
7. (a) $\theta = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ$
(b) $b = 1,7 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
8. $r = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 T} = 1,14 \cdot 10^{-13} \text{ m}$
9. $r_{min} \doteq 51 \text{ fm}$ pre Au
 $r_{min} \doteq 2 \text{ fm}$ pre Li
10. $r_{min} \doteq 30 \text{ fm}$
11. $r = 3 \cdot 10^{-14} \text{ m}$
12. $r = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\epsilon_0 m v^2} = 1,85 \cdot 10^{-14} \text{ m}$
13. $b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 T} \cotg \frac{\theta}{2} = 3,65 \cdot 10^{-14} \text{ m}$, $r = 4,21 \cdot 10^{-14} \text{ m}$
14. $r_{Al} = b - r_\alpha = 3,79 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
15. $r_{min} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 T} \left(1 + \sqrt{1 + \cotg^2 \frac{\theta}{2}} \right) = 5,38 \cdot 10^{-13} \text{ m}$
16. $\frac{P_1(60^\circ, 90^\circ)}{P_2(90^\circ, 180^\circ)} = 2$, $P(\theta_1, \theta_2) = n \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right) 8\pi \left(\frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}} \right)$
17. $P = 1 - \frac{\Delta N(\theta_{medz}, 180^\circ)}{N} = 0,841$,
 $\frac{\Delta N(\theta_{medz}, 180^\circ)}{N} = \frac{\rho}{A} N_A x \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 8\pi \left(\frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_{medz}}{2}} - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{180^\circ}{2}} \right)$
18. $\Delta N = N_0 \frac{\rho}{A} N_A x \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 8\pi \left(\frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}} \right)$, $\Delta N = 13 - 14$ častíc

19. $\Delta\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = 5,5 \cdot 10^{-26} \text{ m}^2$
20. $\frac{d\sigma}{d\theta} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \frac{2\pi \sin\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = 3,03 \cdot 10^{-26} \frac{\text{m}^2}{\text{rad}}, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\theta} \frac{1}{2\pi \sin\theta} = 0,48 \cdot 10^{-27} \frac{\text{m}^2}{\text{rad}}$
21. $Z(Ag) = Z(Au) \sqrt{\frac{1}{p} \frac{\rho(Au)}{\rho(Ag)} \frac{A(Ag)}{A(Au)}} = 47$
22. $q(Cd) = Z(Cd)e = 48e, \quad Z(Cd) = Z(Zn) \sqrt{p \frac{A(Cd)}{A(Zn)}}$
23. $\Delta\sigma = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = 2,12 \cdot 10^{-26} \text{ m}^2$
24. $\frac{\Delta N}{N} = n \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \Delta\Omega = \frac{\rho x}{A} N_A \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\Delta S}{r^2} = 8,9 \cdot 10^{-6}$
25. $N' = \frac{I}{e} \cdot n \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{s}{l} \cdot 60 \cdot 10 = 4,66 \cdot 10^4$
26. $x = N' \cdot \frac{e}{Q} \cdot \frac{A}{\rho N_A} \cdot \frac{(16\pi\epsilon_0 T)^2}{Z_1 Z_2 e^2} \cdot \frac{\sin^4 \frac{\theta}{2}}{\Delta\Omega} = 0,125 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$

1.5 Bohrov model atómu vodíka

1. (a) $n = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda R}}} = 4$
 (b) $n_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_1 R} - \frac{1}{\lambda_2 R}}} = 3$
2. Balmerova séria $n_1 = 2$, $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$
 ak $\lambda = 410,2 \text{ nm} \Rightarrow n_2 = 6$
 $\lambda = 486,1 \text{ nm} \Rightarrow n_2 = 4$
 Prechod $6 \rightarrow 4$, $\lambda = 2,625 \mu\text{m}$, Brackettova séria
3. $Z = \sqrt{\frac{88}{\Delta\lambda \cdot R \cdot 15}} = 3$, ión Li^{2+}
4. $R = \frac{1}{\Delta\lambda \cdot Z^2} \left(\frac{36}{5} - \frac{4}{3} \right) = 1,09715 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
5. (a) $\lambda = (0,091 - 0,122) \cdot 10^{-6} \text{ m}$
 (b) $\lambda = (0,365 - 0,656) \cdot 10^{-6} \text{ m}$
 (c) $\lambda = (0,821 - 1,876) \cdot 10^{-6} \text{ m}$
 Viditeľná je iba časť Balmerovej série.
6. $r_n = \sqrt{\frac{nh}{2\pi\omega m}}$, $E_n = \frac{nh\omega}{2\pi}$
7. $\lambda_1 = 121,6 \text{ nm}$
 $\lambda_2 = 102,6 \text{ nm}$
 $\lambda_3 = 97,3 \text{ nm}$
8. $E_1 = 54,4 \text{ eV}$
9. $\frac{m_p}{m_e} = 1837,7$
10. (a) $\tilde{\nu}_1 = 1,52 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$, $\lambda_1 = 6578,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\nu_1 = 4,56 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$
 $\tilde{\nu}_2 = 2,06 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$, $\lambda_2 = 4854,4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\nu_2 = 6,18 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$
 $\tilde{\nu}_3 = 2,3 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$, $\lambda_3 = 4347,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\nu_3 = 6,9 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$
 (b) $\tilde{\nu}_1 = 5,33 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$, $\lambda_1 = 18761,7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\nu_1 = 1,6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$
 $\tilde{\nu}_2 = 7,8 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$, $\lambda_2 = 12820,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\nu_2 = 2,34 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$
 $\tilde{\nu}_3 = 9,14 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$, $\lambda_3 = 10940,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\nu_3 = 2,74 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$
 (c) $\tilde{\nu}_1 = 2,47 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$, $\lambda_1 = 40485,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\nu_1 = 7,41 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$
 $\tilde{\nu}_2 = 3,81 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$, $\lambda_2 = 26246,7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\nu_2 = 1,14 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$
 $\tilde{\nu}_3 = 4,62 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$, $\lambda_3 = 21645 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\nu_3 = 1,39 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$
11. (a) $\lambda = 1282 \text{ nm}$

(b) $\lambda = 410 \text{ nm}$

12. (a) $\tilde{\nu} = 8,26 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$, $\lambda = 1210,7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\nu = 2,48 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$

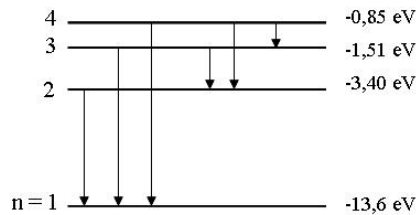
(b) $\tilde{\nu} = 9,75 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$, $\lambda = 1025,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\nu = 2,93 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$

(c) $\tilde{\nu} = 1,1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$, $\lambda = 909,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\nu = 3,3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$

13. (a) $n = 1/\sqrt{1 - \frac{E_\gamma}{hcR_\infty}} = 4$

(b) $\lambda_{min} = \frac{hc}{\Delta E_{max}} = \frac{hc}{\Delta E_{41}} = 972,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

a možné prechody z $n = 4$ sú:



14. (a) $\lambda = \frac{hc}{E} = 6558 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

(b) červená časť

15. $\Delta\tilde{\nu} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 \lambda_1} = 17 \text{ cm}^{-1}$ alebo $\Delta E = hc\Delta\tilde{\nu} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$

16. $R = \frac{1,87}{\Delta\lambda} = 1,0935673 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

17. najväčšia vlnová dĺžka v každej sérii: $n = m + 1$

$\lambda_L = \frac{20}{108} \lambda_B = 1215,4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

18. $h = \sqrt[3]{\frac{\Delta\lambda m e^4}{8c\epsilon_0^2} \frac{15}{88}} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

19. $\nu = \frac{4\epsilon_0 E}{e^2} \sqrt{\frac{2E}{m}} = 6,58 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ odpovedá ultrafialovému svetlu

20. $mvr = n\hbar$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$mvr = n \frac{h}{2\pi}$

$\frac{mv}{h} r = \frac{n}{2\pi}$, $\lambda = \frac{h}{mv}$

$\frac{r}{\lambda} = \frac{n}{2\pi}$, $n\lambda = 2\pi r$ ČBTD

$\lambda_n = \frac{2\epsilon_0 h^2}{me^2} n = \lambda_1 n$, $\lambda_1 = 3,33 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\lambda_3 = 3\lambda_1 = 9,99 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

21. $v = \sqrt{\frac{2(E - E_{v\ddot{a}z.b.})}{m}} = 7,02 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

22. $\frac{F_{e1}}{F_g} = 2,27 \cdot 10^{39}$

$$23. B = \frac{\mu_0 e h n}{8\pi^2 m r_1^2} = 12,46 T$$

$$24. v = \sqrt{\frac{2(E_1 - E_2 - E_{v\ddot{a}zsb.})}{m}} = 3,1 \cdot 10^6 m \cdot s^{-1}$$

$$25. \frac{\lambda_H}{\lambda} = \frac{Z^2 \mu}{\mu_H} = 4 \Rightarrow Z^2 \mu = 4\mu_H, \mu_H \cong \mu$$

$$Z = 2 \dots \dots \dots He^+$$

1.6 Röntgenové spektrá, Moseleyho zákon

1. $K_\alpha : \lambda = 0,72 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
 $L_\alpha : \lambda = 5,52 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
2. $Fe... K_\alpha : \lambda = 1,945 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
 $Cr... K_\alpha : \lambda = 2,29 \cdot 10^{-10} \text{ m} \dots$ žiarenie Cr sa budí
 $Co... K_\alpha : \lambda = 1,8 \cdot 10^{-10} \text{ m} \dots$ žiarenie Co sa nebudí
3. $Al... K_\alpha : \lambda = 8,44 \cdot 10^{-10} \text{ m}, E = 1,47 \text{ eV}$
 $Co... K_\alpha : \lambda = 1,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}, E = 6,89 \text{ eV}$
4. $Cr...$
 - (a) $K_\alpha : \tilde{\nu} = 4,35 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}, \lambda = 2,299 \cdot 10^{-10} \text{ m}, E = 5,4 \text{ keV}$
 - (b) $L_\beta : \tilde{\nu} = 1,09 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}, \lambda = 9,174 \cdot 10^{-10} \text{ m}, E = 1,35 \text{ keV}$

$W...$

 - (a) $K_\alpha : \tilde{\nu} = 4,38 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}, \lambda = 0,288 \cdot 10^{-10} \text{ m}, E = 54,2 \text{ keV}$
 - (b) $L_\beta : \tilde{\nu} = 1,1 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}, \lambda = 0,909 \cdot 10^{-10} \text{ m}, E = 13,65 \text{ keV}$

$U...$

 - (a) $K_\alpha : \tilde{\nu} = 6,81 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}, \lambda = 0,147 \cdot 10^{-10} \text{ m}, E = 84,38 \text{ keV}$
 - (b) $L_\beta : \tilde{\nu} = 1,7 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}, \lambda = 0,588 \cdot 10^{-10} \text{ m}, E = 21,09 \text{ keV}$
5. $\lambda_L = \frac{\lambda_\alpha \lambda_K}{\lambda_\alpha - \lambda_K} = 171,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
6. $U = \frac{hc}{e\Delta\lambda} = 14,8 \text{ kV}$
7. $K_\alpha : \lambda = 0,732 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
 $E_1 = 17,16 \cdot 10^3 \text{ eV}, E_1 > E_2 \dots$ pri napätí $4 \cdot 10^3 \text{ V}$ je nemožné pozorovať charakteristické žiarenie s K_α čiarou, pri tomto napätí budeme sledovať spojité spektrum.
8. $h = \frac{eU\lambda_{min}}{c} = 6,622 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
9. $U = \frac{3hcR(Z-1)^2}{4e}$
 $Pt \dots U = 60,5 \text{ kV}$
 $Au \dots U = 62,1 \text{ kV}$
 $U \dots U = 84,5 \text{ kV}$
10. $U = \frac{hc}{e\lambda_K} = 25,61 \text{ kV}$
 $K_\alpha : \lambda = 0,575 \cdot 10^{-10} \text{ m} > \lambda_K$

11. *Au* ... $\lambda_K = 0,154 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
Pb ... $\lambda_K = 0,141 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
U ... $\lambda_K = 0,108 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
12. $\lambda = 2\Delta\lambda = 0,1 \text{ nm}$
13. $\frac{A_2}{A_1} = 1,55 \cdot 10^4$
14. $v = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda_{min}}} = 2,09 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
15. $v = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda_{min}}} = 2,95 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
16. (a) $\lambda_{min} = \frac{h}{m_e c \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)} = 0,157 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
(b) $U = \frac{hc}{e\lambda_{min}} = 7,92 \cdot 10^4 \text{ V}$
17. $Z = \sqrt{\frac{4}{3R\left(\Delta\lambda + \frac{hc}{eU}\right)}} + 1 = 30 \dots Zn$
18. $Z = \sqrt{\frac{4}{3R\lambda}} + 1$ $Z_1 = 40 \dots Zr$
 $Z_2 = 42 \dots Mo \dots$ medzi nimi leží prvok *Nb*
19. Pre $n = 4$ je maximálny počet elektrónov 32.

VÝSLEDKY:

2 JADROVÁ FYZIKA

2.1 Základné charakteristiky jadier, väzbová energia

1. $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$, $A = 8 \dots {}_4^8\text{Be}$, $W = 56,6 \text{ MeV}$
2. $W_n = 6,76 \text{ MeV}$, $W_\alpha = 7,35 \text{ MeV}$
3. (a) $W = 2,22 \text{ MeV}$
(b) $W = 28,3 \text{ MeV}$
4. $\rho = 1,455 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_N = 8,7 \cdot 10^{43} \text{ nukl} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_Q = 7 \cdot 10^{24} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$
5. ${}_{8}^{16}\text{O} + E \rightarrow 4 {}_2^4\text{He}$, $E = 14,4 \text{ MeV}$
6. $E = 7,34 \text{ MeV}$
7. $W = [Z \cdot m_H + (A - Z) \cdot m_n - M_{at}(A, Z)] \cdot c^2 = 831,42 \text{ MeV}$, $\varepsilon = \frac{W}{A} = 8,66 \text{ MeV}$
8. $W = 1636 \text{ MeV}$
9. $\varepsilon = \frac{W}{A} = 7,98 \text{ MeV}$
10. $\Delta m = 10,3 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$
11. $\Delta m = 5,04 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$, $W = 4,53 \cdot 10^{-12} \text{ J}$
12. ${}_{7}^{14}\text{N} \rightarrow {}_{7}^{13}\text{N} + {}_0^1n$, $W = W_{14\text{N}} - W_{13\text{N}} = 10,56 \text{ MeV}$
13. ${}_{8}^{16}\text{O} + E \rightarrow {}_6^{12}\text{C} + {}_2^4\text{He}$, $E = 7,16 \text{ MeV}$
14. ${}_{1}^2\text{H} + {}_3^6\text{Li} \rightarrow 2 \cdot {}_2^4\text{He} + E$, $E = 22,44 \text{ MeV}$
15. ${}^{206}\text{Pb} + n \rightarrow {}^{207}\text{Pb}^* \rightarrow {}^{207}\text{Pb} + E$, $E = 6,73 \text{ MeV}$

16. (a) $W(Ca) = 341,75 \text{ MeV}$, $W(Ag) = 902,78 \text{ MeV}$
 (b) $\varepsilon(V) = 8,65 \text{ MeV}$
 (c) $m = 44,955 \text{ u}$
17. ${}^1H : m = 1,007825 \text{ u}$
 ${}^2H : m = 2,014102 \text{ u}$
 ${}^{16}O : m = 15,994914 \text{ u}$
18. $E = mc^2 = 1 \text{ u} \cdot c^2 = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 1,494 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 931,5 \text{ MeV}$
19. Ak jadro je sféra s polomerom R a rovnomernou hustotou náboja $\rho = Ze/V$:
 $\Rightarrow E_{coul} = \int_0^R \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{r} \cdot \rho 4\pi r^2 dr = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R}$
20. $\Delta W = 6,36 \text{ MeV}$; $\Delta E_{coul} = 6,34 \text{ MeV}$
21. $R = 4,1 \cdot 10^{-15} \text{ m}$; $\Delta W = 4,84 \text{ MeV}$

2.2 Základné zákony rádioaktívnej premeny

1. $T_{1/2} = 372,8 \text{ s}$
2. $t = -T_{1/2} \frac{\ln\left(1 - \frac{N}{N_0}\right)}{\ln 2} = 61,4 \text{ s}$
3. (a) $\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = 0,78 \text{ a } 0,084$
 (b) $\frac{N_0 - N}{N_0} = (1 - e^{-\lambda t}) = 6,78 \cdot 10^{-5} \text{ a } 0,31$
4. $\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda s \sqrt{\frac{m}{2E_k}}} = 9 \cdot 10^{-7}$
5. $1,24 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$
6. $A = A_0 e^{-\lambda t}$, $T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\ln \frac{A}{A_0}} t = 35,9 \text{ hod}$, $\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = 51,8 \text{ hod}$
7. $\lambda = 7,83 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$, $T_{1/2} = 2,81 \text{ roku}$, $\tau = 4,05 \text{ roku}$
8. $A = N\lambda = N_0 e^{-\lambda t} \lambda = \frac{m}{M} N_A e^{-\lambda t} \lambda = 1,487 \cdot 10^{11} \text{ Bq}$
9. $N_0 = \frac{A}{\lambda e^{-\lambda t}} = 2,19 \cdot 10^{15} \text{ častíc}$
10. $T_{1/2} = 1617 \text{ rokov}$
11. $p = 1 - e^{-\lambda t} = 8,3\%$
12. $A_0 = \lambda N_0 = \lambda \frac{m}{M} N_A$, $\frac{A_0}{m} = \frac{\lambda N_A}{M} = 2,3 \cdot 10^9 \text{ Bq} \cdot \text{g}^{-1}$
13. $m = \frac{A_0 M}{\lambda N_A} = 0,05 \text{ mg}$
14. $V = \frac{A}{a_V} = \frac{A_0 e^{-\lambda t}}{a_V} = 5,95 \text{ l}$
15. $t = \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)}$, $\frac{A_2(t)}{A_1(0)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) = 0,717$
16. [6,4]
17. $P(t) = \frac{N(0) - N(0)e^{-\lambda t}}{N(0)} = 1 - e^{-\lambda t}$
18. $\tau = \langle t \rangle = \int_0^{\infty} t P(t) dt = \dots = \frac{1}{\lambda}$
19. $\lambda = 7,28 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, $A = 2,18 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$, $A = 0,59 \text{ Ci}$
20. $2,5 \cdot 10^{20} \text{ atómov}$, $1,7 \cdot 10^{-17} \text{ s}^{-1}$, $4,3 \cdot 10^3 \text{ rozpadov/s}$ a Bq, $0,116 \mu\text{Ci}$
21. $1,65 \mu\text{g}$

22. $3,66 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$ a $3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$

23. $3,22 \cdot 10^{14} \text{ Bq}$, $0,87 \cdot 10^4 \text{ Ci}$, $1,06 \cdot 10^{14} \text{ Bq}$, $0,28 \cdot 10^4 \text{ Ci}$

2.3 Alfa, beta premena a gama žiarenie jadier

α premena

1. $Q = E_\alpha A = T_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_j}\right) \lambda N = 1,91 \cdot 10^{-3} \text{ J}$
2. ${}_{84}^{213}\text{Po} \rightarrow {}_2^4\alpha + {}_{82}^{209}\text{Pb}$, $E_\alpha = 8,5 \text{ MeV}$,
 $p = \frac{E_\alpha - T_\alpha}{E_\alpha} 100\% = 1,9\%$, $v_j = \sqrt{\frac{2T_j}{M_j}} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
3. $v_j = \sqrt{\frac{2T_\alpha M_\alpha}{M_j^2}} = 2,73 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
4. (a) $Q = NE_\alpha = \frac{mNAQ_\alpha(e-1)}{eM} = 15,7 \text{ MJ}$
 (b) $A = \lambda N_0 = \lambda \frac{2Q}{Q_\alpha} = 3 \cdot 10^8 \text{ Bq}$
5. ${}_{84}^{210}\text{Po} \rightarrow {}_2^4\alpha + {}_{82}^{206}\text{Pb} \rightarrow {}_{82}^{206}\text{Pb} + \gamma$, $E_{\alpha_1} = T_{\alpha_1} \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_j}\right) = 5,403 \text{ MeV}$,
 $E_{\alpha_2} = T_{\alpha_2} \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_j}\right) = 4,587 \text{ MeV}$, $E_\gamma = E_{\alpha_1} - E_{\alpha_2} = 0,816 \text{ MeV}$
6. $E_{\alpha_1} = 6,44 \text{ MeV}$, $E_{\alpha_1} - E_{\alpha_1} = 0 \text{ MeV}$
 $E_{\alpha_2} = 6,34 \text{ MeV}$, $E_{\alpha_1} - E_{\alpha_2} = 0,1 \text{ MeV}$
 $E_{\alpha_3} = 6,21 \text{ MeV}$, $E_{\alpha_1} - E_{\alpha_3} = 0,23 \text{ MeV}$
 $E_{\alpha_4} = 6,14 \text{ MeV}$, $E_{\alpha_1} - E_{\alpha_4} = 0,3 \text{ MeV}$
7. $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$, $r = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 T_\alpha}$, $\Delta r = r - R = 3,5 \cdot 10^{-14} \text{ m}$
8. ${}_{89}^{239}\text{Pu} \rightarrow {}_{92}^{235}\text{U} + {}_2^4\alpha$, $T_\alpha = \frac{(m_{\text{Pu}} - m_{\text{U}} - m_\alpha)931,5}{\left(1 + \frac{4}{235}\right)} = 5,15 \text{ MeV}$
9. $\lambda = \frac{h}{p}$, $p = \sqrt{2mT}$, $n = \frac{2R_{\text{Ra}}}{\lambda} = 6,695$
10. $\Delta m = 0,007959 \text{ u}$
11. $E_{80\text{Kr} \rightarrow 76\text{Se} + \alpha} = -5,2 \text{ MeV} < 0 \dots$ nie
 $E_{176\text{Hf} \rightarrow 172\text{Yb} + \alpha} = 2,2 \text{ MeV} > 0 \dots$ áno
 $T_\alpha = \frac{m_{\text{Yb}}}{m_{\text{Yb}} + m_\alpha} E_\alpha \approx 2,15 \text{ MeV}$
 $V_C(R_{\text{Yb}}) = \alpha \hbar c \frac{Z_\alpha Z_{\text{Yb}}}{r_0 A_{\text{Yb}}^{1/3}} \approx 30,12 \text{ MeV}$

β premena

12. $p_{\text{max}} = \frac{1}{c} \sqrt{Q(Q + 2mc^2)} = \frac{0,935 \text{ MeV}}{c}$
13. $T_{\text{max}} = 0,958 \text{ MeV}$, $T_j = 92,5 \text{ eV}$

14. $T_{e^+} = 0,312 \text{ MeV}$, $T_\nu = 0,646 \text{ MeV}$
15. $T_{e^+, \text{max}} = 0,483 \text{ MeV}/c^2$
16. $Q = 0,782 \text{ MeV}$
17. ${}^{107}_{47}\text{Ag}$, ${}^{38}_{18}\text{Ar}$, ${}^{120}_{50}\text{Sn}$
18. $T_j = \frac{Q^2}{2Mc^2} = 9,7 \text{ eV}$, $v = \sqrt{\frac{2T}{M}} = 7,1 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
19. $Q = 17,7 \text{ keV}$, $T_{j, \text{max}} = \frac{Q(Q+2m_e c^2)}{2Mc^2} = 3,29 \text{ eV}$, $\overline{E}_\nu = Q - \overline{E}_\beta = 12,01 \text{ keV}$
20. (a) nie
(b) áno
(c) áno
21. (a) ${}^6_2\text{He} \rightarrow {}^6_3\text{Li} + e^- + \overline{\nu}_e$, $m_{{}^6_2\text{He}} = 6,018937 \text{ u}$
(b) ${}^{22}_{11}\text{Na} \rightarrow {}^{22}_{10}\text{Ne} + e^+ + \nu_e$, $m_{{}^{22}_{11}\text{Na}} = 21,994445 \text{ u}$

γ žiarenie

22. $W_e = E_\gamma - T_e = 26 \text{ keV}$
23. $E^* = T_e + W_e = 145 \text{ keV}$
24. $E_{\gamma_1} = W_e + T_{e_1} = 161 \text{ keV}$
 $E_{\gamma_2} = W_e + T_{e_2} - E_{\gamma_1} = 566 \text{ keV}$
25. $T_e + W_e = \text{konšt.} = E^* = E_\gamma = 279 \text{ keV}$

	W_e	T_e
pre K	85,7	193,3
pre L_1	15,4	263,6
pre L_2	14,8	264,2
pre L_3	12,7	266,3

26. $1,18 \cdot 10^5 \text{ e}^-$
27. $E_\gamma = E^*$, $E'_\gamma = E_\gamma - T_j = E^* \left(1 - \frac{E^*}{2m_j c^2}\right)$
 $\frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma} = \frac{E_\gamma - E'_\gamma}{E_\gamma} = \frac{E^*}{2m_j c^2} = 3,6 \cdot 10^{-7}$

2.4 Jadrové reakcie

1. (a) $Q = 19,81 \text{ MeV}$
 (b) $Q = -3,11 \text{ MeV}$
 (c) $Q = -13,5 \text{ MeV}$
 (d) $Q = 1,78 \text{ MeV}$
2. $m_{He} = 3,016039 \text{ u}$
3. $m_N = 17,008992 \text{ u}$
4. (a) $E_{prah} = \frac{m+M}{M} |Q| = 1,02 \text{ MeV}$
 (b) $E_{prah} = 3,06 \text{ MeV}$
5. (a) $E_{prah} = 4,38 \text{ MeV}$
 (b) $E_{prah} = 18,09 \text{ MeV}$
 (c) $E_{prah} = 6,18 \text{ MeV}$
 (d) $E_{prah} = 1,92 \text{ MeV}$
6. ${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$, $Q = -1,19 \text{ MeV}$, reakcia je endoenergetická
7. $Q = 2,02 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 126 \text{ MeV}$
8. $Q = 1,088 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 67,9 \text{ MeV}$
9. $T_p = \frac{T_\alpha (m_\alpha + m_{Li}) - Q m_{Li}}{m_{Li} - m_p} = 5,4 \text{ MeV}$
10. $T_\alpha = T_d \left(1 + \frac{(m_\alpha - m_d)^2}{4m_\alpha m_d \cos^2 \theta} \right) = 0,6 \text{ MeV}$
11. $\frac{\Delta T}{T_\alpha} = 0,19$
12. $T'_p = T_p \frac{m_d - m_p}{m_d + m_p} = 0,3 \text{ MeV}$
13. $Q = \left(1 + \frac{m_n}{m_{Be}} \right) T_n - \left(1 - \frac{m_\gamma}{m_{Be}} \right) h\nu$, $T_n = \frac{m_{Be}}{m_{Be} + m_n} (Q + h\nu) = 0,1155 \text{ MeV}$
14. (a) $Q = T_a \left(\frac{m_a}{m_B} - 1 \right) + T_b \left(\frac{m_b}{m_B} + 1 \right) - \frac{2\sqrt{m_a m_b T_a T_b}}{m_B} \cos \theta = 4 \text{ MeV}$
 (b) $Q = -1,195 \text{ MeV}$
15. $\nu_\alpha = 9,2 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\nu_{Li} = 5,26 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
16. $m_j = \frac{m_d}{4 \cos^2 \theta - 1} \Rightarrow$ ide o jadro atómu ${}^1_1\text{H}$
17. (a) $\theta = 71^\circ 18'$
 (b) $\theta_\alpha + \theta_B = 144^\circ 23'$

VÝSLEDKY:

3 EXPERIMENTÁLNE METÓDY JADROVEJ FYZIKY

3.1 Prechod žiarenia prostredím

1. (a) $P = 10,9$
(b) $P = 2,4$
2. $T_\alpha = 5,5 \text{ MeV}$
3. $R_\alpha = 7,99 \text{ } \mu\text{m}$
4. 2 MeV/cm , $18x$
5. $T_0 = 110 \text{ MeV}$
6. $R_{max}^\beta(^{32}\text{P}) = 0,29 \text{ cm}$, $R_{max}^\beta(^8\text{Li}) = 2,48 \text{ cm}$
7. $T_{max} = 3,14 \text{ MeV}$
8. 20%
9. vzduch: $49,8 \text{ cm}$; Al: $0,024 \text{ cm}$; Pb: $5,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$
10. $T_e = 20,5 \text{ MeV}$
11. dusík: 114 MeV ; hliník: $61,5 \text{ MeV}$; olovo: $9,8 \text{ MeV}$
12. $l_{rad} = 1,4 \text{ cm}$
13. $E = 0,2 \text{ MeV}$
14. $h = 3,2 \text{ cm}$
15. $h = 0,17 \text{ cm}$; $6x$

16. Pb: 0,065 cm; voda: 5,1 cm; vzduch: 4400 cm

17. 10

18. 0,8 cm⁻¹

19. (a) 4,65 cm

(b) 0,495 cm⁻¹

20. podmienka pre Čerenkovovo žiarenie: $v \geq \frac{c}{n}$

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right), \quad v = 2,763 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}, \quad \text{podmienka je splnená}$$
$$\sin \vartheta = \frac{c}{vn}, \quad \vartheta \approx 50,8^\circ$$

21. $T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$, podmienka pre Čerenkovovo žiarenie: $v \geq \frac{c}{n}$,
 $T_e \geq 144 \text{ keV}$, $T_p \geq 264 \text{ keV}$, $mc^2 = 105,33 \text{ MeV} = m_\mu c^2$ (mión)

22.	p^+	π^\pm	e^-
sklo	190 MeV	28 MeV	0,10 MeV
plexisklo	320 MeV	48 MeV	0,17 MeV
voda	485 MeV	72 MeV	0,26 MeV
vzduch	37 GeV	5,6 GeV	20,4 MeV

3.2 Urýchľovače častíc

1. klasická teória: $eU = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow U = 255,9 \cdot 10^3 \text{ V}$,
relativisticky: $eU = mc^2(\gamma - 1) \Rightarrow v = 0,75c$
2. $\frac{mv^2}{r} = evB \Rightarrow r = 0,0476 \text{ m}$
3. (a) $f_0 = \frac{ZeB}{2\pi m} = 0,107 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$
(b) $\frac{mv_m^2}{r} = Zev_mB$, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 7,49 \text{ MeV}$
4. $f = (257 - 785) \text{ MHz}$ pre protóny
 $f = (2,49 - 2,50) \text{ GHz}$ pre elektróny
5. $f = 5 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$
6. $v = \frac{ZcBr}{m} = 0,407 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$, $E_k = 34 \text{ MeV}$
7. $T = \frac{2\pi(E_k + mc^2)}{eBc^2} = 7,33 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ pre elektróny a $6,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ pre protóny
 $r = \frac{\sqrt{2E_k(E_k + mc^2)}}{ceB} = 4,8 \text{ cm}$ pre elektróny a 46 cm pre protóny
8. (a) $r = 44,96 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
(b) $f = 4,2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$
9. $n = \frac{mv_0^2}{2qU_0} = 495$, $r_0 = \frac{v_0 \cdot \tau}{\pi} = 0,31 \text{ m}$, $r_1 = \frac{v_1 \cdot \tau}{\pi} = 0,0139 \text{ m}$
10. $\lambda = 1,226 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
11. $\lambda = \frac{h}{mv}$, $E_k = eU = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$, $\lambda = 4,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
12. $E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = 1,3 \cdot 10^5 \text{ eV}$
13. $v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{E_k}{mc^2}\right)^{-2}} = 0,43c = 1,3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

TABUĽKY

Tab. 1.: Tabuľka základných fyzikálnych konštánt

Fyzikálna konštanta	Symbol	Hodnota
Atómová hmotnostná jednotka	u	$1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg} =$ $= 931,5 \text{ MeV}/c^2$
Avogadrova konštanta	N_A	$6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmannova konštanta	k	$1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} =$ $= 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
Comptonova vlnová dĺžka	λ_c	$2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Coulombova konštanta	$\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$8,988 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$
Hmotnosť elektrónu	m_e	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} =$ $= 0,511 \text{ MeV}/c^2$
Hmotnosť protónu	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} =$ $= 938,3 \text{ MeV}/c^2$
Hmotnosť neutrónu	m_n	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} =$ $= 939,6 \text{ MeV}/c^2$
Hmotnosť piónu (\pm)	$m_{\pi\pm}$	$139,6 \text{ MeV}/c^2$
Náboj elektrónu	e	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Permitivita vákua	ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} (\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1})$
Rýchlosť svetla vo vákuu	c	$3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Rydbergova konštanta	R_∞	$1,097\,373 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
Rydbergova konštanta pre vodík	R_H	$1,096\,776 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
Stefanova - Boltzmannova konštanta	σ	$5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
Wienova posuvná konštanta	b	$2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$
Planckova konštanta	h	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Planckova konštanta, redukovaná	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Konverzná konštanta	$\hbar c$	$197,327 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$
Konštanta jemnej štruktúry	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$	$1/137$

Tab. 2.: Tabuľka hustôt niektorých látok

Látka	Hustota [kg/m ³]
Dusík	1,25
Hliník	2 700
Kadmium	8 650
Meď	8 900
Olovo	11 340
Striebro	10 500
Voda	998
Vzduch	1,29
Zlato	19 320
Zinok	7 130
Železo	7 870

Tab. 3.: Hmotnostné absorpčné koeficienty pre γ žiarenie

Energia [MeV]	Hliník	μ/ρ Olovo	[cm ² /g] Voda	Vzduch
0,1	0,169	5,46	0,171	0,155
0,2	0,122	0,942	0,137	0,123
0,4	0,0927	0,220	0,106	0,0953
0,6	0,0779	0,119	0,0896	0,0804
0,8	0,0683	0,0866	0,0786	0,0706
1,0	0,0614	0,0703	0,0706	0,0635
1,5	0,0500	0,0550	0,0590	0,0515
2,0	0,0431	0,0463	0,0493	0,0445
3,0	0,0360	0,0410	0,0390	0,0360
4,0	0,0310	0,0421	0,0339	0,0307
6,0	0,0264	0,0436	0,0275	0,0250
8,0	0,0241	0,0458	0,0240	0,0220
10,0	0,229	0,0489	0,0219	0,0202

Tab. 4.: Tabuľka vlastností izotopov

Pozn.: Hmotnosť atómu $X(A,Z)$ v atómových hmotnostných jednotkách (u)

určíme ako: $M_{at} = \Delta + A [u]$,

kde Δ je hodnota uvedená v 2. stĺpci tabuľky.

$$1u = 1 \text{ a.h.j.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1u \cdot c^2 = 931,5 \text{ MeV}$$

NUKLID	ÚBYTOK HMOTNOSTI NUKLIDOV $\Delta = M - A, u$	TYP PREMENY	POLČAS PREMENY	ENERGIA α A β ČASTÍC $T_{\beta \text{ max}}, \text{ MeV}$
n	0,008665	β^-	11,7 min	0,78
1H	0,007825			
2H	0,014102			
3H	0,016049	β^-	12,3 r	0,018
3He	0,016030			
4He	0,002604			
6Li	0,015126			
7Li	0,016005			
7Be	0,016931	K	53 d	
8Be	0,005308	2α	10^{-16} s	0,039
9Be	0,012186			
^{10}Be	0,013535	β^-	$2,5 \cdot 10^6$ r	0,555
^{10}B	0,012939			
^{11}B	0,009305			
^{11}C	0,011431	β^+	20,4 min	0,97
^{12}C	0			
^{13}C	0,003354			
^{14}C	0,003242	β^-	5570 r	0,155
^{13}N	0,005739	β^+	10 min	1,2
^{14}N	0,003074			
^{15}N	0,000108			
^{15}O	0,003072	β^+	2,1 min	1,68
^{16}O	-0,005085			
^{17}O	-0,000867			
^{18}O	-0,000840			
^{18}F	0,000950	β^+	1,87 hod	0,649
^{19}F	-0,001595			
^{20}F	-0,000015	β^-	12 s	5,42
^{20}Ne	-0,007560			
^{21}Ne	-0,006151			

Tab. 4.: Tabuľka vlastností izotopov

NUKLID	ÚBYTOK HMOTNOSTI NUKLIDOV $\Delta = M - A, u$	TYP PREMENY	POLČAS PREMENY	ENERGIA α A β ČASTÍC $T_{\beta max}, MeV$
^{22}Ne	-0,008616			
^{22}Na	-0,005565	β^+	2,6 r	0,540
^{23}Na	-0,010227			
^{24}Na	-0,009033	β^-	15 hod	1,39
^{23}Mg	-0,005865	β^+	11 s	2,95
^{24}Mg	-0,014956			
^{25}Mg	-0,014160			
^{26}Mg	-0,017409			
^{27}Mg	-0,015655	β^-	9,5 min	1,75 a 1,59
^{26}Al	-0,013100	β^+	6,7 s	3,20
^{27}Al	-0,018465			
^{28}Al	-0,018092	β^-	2,3 min	2,86
^{28}Si	-0,023073			
^{29}Si	-0,023509			
^{30}Si	-0,026239			
^{31}Si	-0,024651	β^-	2,65 hod	1,47
^{30}P	-0,021680	β^+	2,5 min	3,24
^{31}P	-0,026237			
^{32}P	-0,026092	β^-	14,3 d	1,71
^{32}S	-0,027926			
^{33}S	-0,028540			
^{34}S	-0,032136			
^{35}S	-0,030966	β^-	87 d	0,167
^{35}Cl	-0,031146			
^{36}Cl	-0,031688	β^-, K	$3,1 \cdot 10^5$ r	0,714
^{37}Cl	-0,034104			
^{36}Ar	-0,032452			
^{37}Ar	-0,033228	K	32 d	
^{39}Ar	-0,035679	β^-	265 r	0,565
^{40}Ar	-0,037616			
^{39}K	-0,036286			
^{40}K	-0,036000	β^-, K, β^+	1,25 r	1,31; 1,51 a 1,51
^{42}K	-0,037583	β^-	2,5 hod	3,55 a 1,99
^{39}Ca	-0,029280	β^+	0,86 s	
^{51}V	-0,056041			
^{51}Cr	-0,055214	K	28 d	

Tab. 4.: Tabuľka vlastností izotopov

NUKLID	ÚBYTOK HMOTNOSTI NUKLIDOV $\Delta = M - A, u$	TYP PREMENY	POLČAS PREMENY	ENERGIA α A β ČASTÍC $T_{\beta \max}, MeV$
^{55}Mn	-0,061946			
^{58}Co	-0,064246	K, β^+	72 d	0,47
^{59}Co	-0,066811			
^{60}Co	-0,066194	β^-	5,2 r	0,31
^{63}Cu	-0,070406			
^{65}Cu	-0,072214			
^{63}Zn	-0,066788	β^+	38,47 min	
^{65}Zn	-0,070766	K, β^+	245 d	0,325
^{82}Br	-0,083198	β^-	36 hod	0,456
^{88}Sr	-0,09436			
^{89}Sr	-0,09257	β^-	51 d	1,46
^{90}Sr	-0,09223	β^-	28 r	0,535
^{90}Y	-0,09282	β^-	64 hod	2,24
^{107}Ag	-0,09303			
^{127}I	-0,09565			
^{128}I	-0,09418	β^-, K	25 min	2,12 a 1,67
^{197}Au	-0,03345			
^{198}Au	-0,03176	β^-	2,7 d	0,96
^{204}Tl	-0,02611	β^-	4,1 r	0,77
^{206}Pb	-0,02554			
^{207}Pb	-0,02410			
^{208}Pb	-0,02336			
^{209}Bi	-0,01958			
^{210}Bi	-0,01589	α	$2,6 \cdot 10^6$ r	4,97
^{210}Po	-0,01713	α	138 d	5,3
^{222}Rn	0,01753	α	3,8 d	5,49
^{226}Ra	0,02536	α	1620 r	4,777 a 4,589
^{232}Th	0,03821	α	$1,4 \cdot 10^6$ r	4,00 a 3,98
^{233}Th	0,04143	β^-	22 min	1,23
^{234}U	0,04090	α	$2,5 \cdot 10^5$ r	4,76 a 4,72
^{235}U	0,04393	α	$7,1 \cdot 10^8$ r	4,20
^{236}U	0,04573	α	$2,4 \cdot 10^7$ r	4,45 a 4,50
^{238}U	0,05076	α	$4,5 \cdot 10^9$ r	4,13 a 4,18
^{239}U	0,05432	β^-	23,5 min	1,21
^{238}Pu	0,04952	α	89,6 r	5,50 a 5,45
^{239}Pu	0,05216	α	$2,4 \cdot 10^4$ r	5,15

Zoznam obrázkov

1.1	Schéma zariadenia na pozorovanie vonkajšieho fotoelektrického javu.	3
1.2	Schematické znázornenie Comptonovho efektu.	9
1.3	Rozptyl nabitej častice v coulombovskom poli ťažkého nabitého jadra.	24
1.4	Hyperbolická trajektória častice α	25
1.5	Dráha častice v poli jadra, ktoré je v bode 0.	26
1.6	Bohrov model.	34
1.7	Spektrálne série vodíkového atómu.	35
1.8	Röntgenova trubica.	43
1.9	Vznik charakteristického röntgenového žiarenia prechodom elektrónov na nižšie energetické hladiny.	44
2.1	Schéma α premeny.	64
2.2	Schéma β premeny jadier ^{59}Fe	70
2.3	Základná schéma jadrovej reakcie - častica a ostreľuje jadro A	72
2.4	Schéma rozptylu častice na nehybnom jadre.	75
3.1	Rezonančný lineárny urýchľovač	87
3.2	Cyklotrón	88

Zoznam použitej literatúry

- [1] I. E. Irodov, Sbornik zadač po atomnoj i jadernoj fizike, Energoatomizdat, Moskva (1984)
- [2] V. Hajko a kol., Fyzika v príkladoch, ALFA, Bratislava (1988)
- [3] J. D. Cutnell, K. W. Johnson, Introduction to Physics, J.Wiley & Sons (2010)
- [4] D. Nosek, Jádra a částice, Řešené příklady, Matfyzpress, Praha (2005), ISBN 80-86732-65-7
- [5] S. V. Skačkov i dr., Sbornik zadač po jadernoj fizike, Fizmatgiz, Moskva (1963)
- [6] A. Beiser, Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha (1978)
- [7] E. V. Špolskij, Atomová fyzika I, Úvod do atomové fyziky, SNTL, Praha (1957)
- [8] F. Yang, J. H. Hamilton, Modern Atomic and Nuclear Physics, Problems and Solutions Manual (Revised Edition), World Scientific Publishing Company (2010), ISBN 978-981-4307-68-0
- [9] P. Holan, J. Kvasil, Příklady z atomové a jaderné fyziky, SPN, Praha (1983)
- [10] D. Matejková, Rádioaktivita v otázkach a príkladoch, Diplomová práca, PF UPJŠ Košice (1996)
- [11] M. Matušková, Jadrové reakcie v otázkach a príkladoch, Diplomová práca, PF UPJŠ Košice (1996)
- [12] I. Hudáková, Atómová fyzika v príkladoch, Diplomová práca, PF UPJŠ Košice (1998)
- [13] S. Papcunová, Zbierka príkladov z atómovej a jadrovej fyziky, Diplomová práca, PF UPJŠ Košice (2003)
- [14] R. L. Murray, Nuclear Energy: An Introduction to the Concepts, Systems, and Applications of Nuclear Processes, 6 th edition, Elsevier Inc. (2009)

ZBIERKA PRÍKLADOV Z ATÓMOVEJ A JADROVEJ FYZIKY

Vysokoškolská učebnica

Autori: RNDr. Adela Kravčáková, PhD.

RNDr. Janka Vrláková, PhD.

prof. RNDr. Stanislav Vokál, DrSc.

Vydavateľ: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Umiestnenie: <http://unibook.upjs.sk/predaj-vydanych-titulov/prirodovedecka-fakulta>

Rok vydania: 2016

Rozsah strán: 124

Rozsah: 6,2 AH

Vydanie: prvé

ISBN 978-80-8152-421-9