UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH

Prírodovedecká fakulta

Stanislav LUKÁČ, Ľubomír ŠNAJDER, Ján GUNIŠ, Zuzana JEŠKOVÁ

Bádateľsky orientované vyučovanie matematiky a informatiky na stredných školách

vedecká monografia

Košice 2016

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH

Prírodovedecká fakulta

Stanislav LUKÁČ, Ľubomír ŠNAJDER, Ján GUNIŠ, Zuzana JEŠKOVÁ

Bádateľsky orientované vyučovanie matematiky a informatiky na stredných školách

Košice 2016

Bibliografický odkaz:

LUKÁČ, Stanislav, Ľubomír ŠNAJDER, Ján GUNIŠ a Zuzana JEŠKOVÁ. *Bádateľsky orientované vyučovanie matematiky a informatiky na stredných školách* [online]. Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, 2016, 222 s. [cit. 2016-12-20]. ISBN 978-80-8152-471-4. Dostupné z: https://unibook.upjs.sk/dokumenty/bov.pdf

Vedecká monografia bola podporovaná Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. APVV-0715-12.

Bádateľsky orientované vyučovanie matematiky a informatiky na stredných školách

Vedecká monografia

© 2016 Stanislav LUKÁČ, Ústav matematických vied PF UPJŠ v Košiciach
Ľubomír ŠNAJDER, Ústav informatiky PF UPJŠ v Košiciach
Ján GUNIŠ, Ústav informatiky PF UPJŠ v Košiciach
Zuzana JEŠKOVÁ, Ústav fyzikálnych vied PF UPJŠ v Košiciach

Vedecký redaktor:
prof. RNDr. Jozef Doboš, CSc., PF UPJŠ v Košiciach

Recenzenti:
doc. RNDr. Gabriela Lovászová, PhD., FPV UKF v Nitre
doc. RNDr. Blanka Baculíková, PhD., FEI TU v Košiciach

Umiestnenie príloh: https://unibook.upjs.sk/dokumenty/bov_prilohy.zip

Za odbornú a jazykovú stránku tejto vedeckej monografie zodpovedajú autori. Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-8152-471-4

OBSAH

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Predslov

Dynamický vývoj spoločnosti kladie stále nové a náročnejšie požiadavky na úspešne uplatnenie sa človeka na trhu práce. Stav a tendencie vývoja, najmä prírodovedného vzdelávania, jednoznačne ukazujú, že za týmto trendom zaostávame. Na túto situáciu poukázala aj Európska komisia (Rocard, 2007). Následne na to Európska komisia vyslovuje jednoznačný názor, že očakávané zmeny v prírodovednom vzdelávaní možno dosiahnuť novými pedagogickými prístupmi súvisiacimi predovšetkým implementáciou metód aktívneho prírodovedného bádania. Jedným z dôsledkov Rocardovej správy je podpora a realizácia viacerých medzinárodných projektov v rámci 7. rámcového programu EÚ (napr. ESTABLISH, PRIMAS, S-TEAM, FIBONACCI).

Výsledky medzinárodných meraní (PISA, TIMMS) ukazujú, že úroveň vzdelania žiakov na Slovensku je podpriemerná a neustále sa zhoršuje. Dôsledkom našej snahy o zlepšenie tejto situácie je realizácia APVV projektu Výskum efektívnosti metód inovácie výučby matematiky, fyziky a informatiky (VEMIV). Vo vedeckej monografii uvádzame časť originálnych výsledkov pedagogického výskumu realizovaného v rámci projektu VEMIV.

Publikácia je určená vedeckým pracovníkom v didaktike a učiteľom matematiky a informatiky. Našim zámerom je predstaviť čitateľom základnú orientáciu v problematike bádateľsky orientovaného vyučovania, vysvetliť a na ukážkach demonštrovať viaceré úrovne žiackeho bádania, poskytnúť klasifikáciu bádateľských zručností. Nosnou časťou publikácie sú metodiky pre bádateľsky orientované vyučovanie konkrétnych tém zo školskej matematiky a informatiky. Predkladáme námety na realizáciu bádateľských aktivít, aktívnu prácu s informáciami pri riešení rôznych typov problémov a aplikáciu moderných digitálnych technológií pri skúmaní a objavovaní zákonitostí. Do publikácie sme zaradili sedem metodík pre vyučovanie matematiky a osem metodík pre vyučovanie informatiky v 1. a 2 ročníku strednej školy.

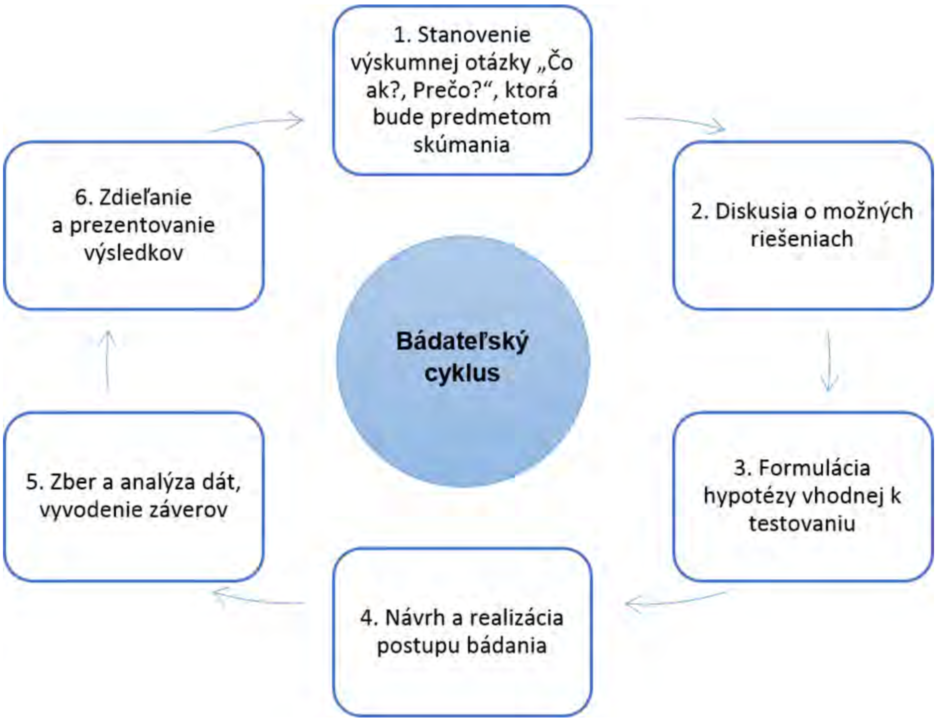
Dovoľujeme si poďakovať vedeckému redaktorovi prof. RNDr. Jozefovi Dobošovi, CSc. a recenzentom doc. RNDr. Gabriele Lovászovej, PhD. a doc. RNDr. Blanke Baculíkovej, PhD. za cenné pripomienky a odporúčania ktoré prispeli k skvalitneniu predloženej publikácie.

Koncepcia bádateľsky orientovaného vyučovania

Pri vytvorení podmienok na zabezpečenie kontinuálneho rozvoja modernej spoločnosti má dôležité postavenie kvalitné matematické, informatické a prírodovedné vzdelávanie. Medzi dôležité súčasné inovačné trendy vo vzdelávaní patrí bádateľsky orientované vyučovanie, ktoré je založené na konštruktivistickej koncepcii učenia. Skupina expertov pod vedením člena Európskeho parlamentu Michela Rocarda (Rocard et al., 2007) skúmala možnosti, ako skvalitniť prírodovedné a matematické vzdelávanie na základných a stredných školách. Jedným zo záverov Rocardovej správy publikovanej v roku 2007 bolo deklarovanie naliehavosti prechodu od školou preferovanej deduktívnej formy vyučovania k bádateľsky orientovanej koncepcii vzdelávania. Zručnosti zbierať a analyzovať údaje, vyhodnocovať a interpretovať výsledky, argumentovať a zdôvodňovať svoje závery by si mali mladí ľudia osvojovať hlavne pri štúdiu matematiky, informatiky a prírodných vied. Bádateľské orientované vyučovanie sa môže uplatniť aj v širšom, multidisciplinárnom kontexte. Pre integrovaný prístup k vyučovaniu prírodovedných a technických disciplín, matematiky a informatiky bol zavedený pojem STEM vzdelávanie (Science, Technology, Engineering and Mathematics). V mnohých dokumentoch sa zdôrazňuje význam vzdelávania STEM, ktoré je často považované za kľúčový faktor pre ekonomickú prosperitu spoločnosti.

Bádateľsky orientované vyučovanie a bádateľské zručnosti

Na prebudenie záujmu a formovanie vzťahu žiakov k učeniu sa matematiky, informatiky a prírodných vied je dôležité hľadať cesty ako priblížiť vyučovanie reálnemu životu, ako motivovať žiakov k rozvíjaniu bádateľských zručností, ako vo väčšej miere vzájomne prepojiť výučbu prírodovedných predmetov, matematiky a informatiky. Podľa nášho názoru by mohla pomôcť napĺňať uvedené ciele implementácia bádateľských postupov v učení sa žiakov. Bádanie v procese učenia sa je podobne ako vedecké bádanie nasmerované ku kladeniu otázok, hľadaniu odpovedí, k využívaniu vhodných argumentov na vysvetlenie a zdôvodnenie objavených zistení. Žiak nachádza odpovede tak, že aktívne skúma svet okolo seba. Postupuje pritom, podobne ako vedec, prostredníctvom experimentovania s objektom skúmania alebo tvorbou teórií, modelov správania sa objektu alebo systému. Kým experimentálne ako aj modelovacie aktivity sú široko využívané predovšetkým vo fyzike a prírodných vedách, v matematike dominuje práve modelovanie. Realizácia takýchto bádateľských aktivít zahŕňa rôzne činnosti od formulácie problému, cez návrh a realizáciu postupu riešenia, zbieranie údajov pri experimentovaní alebo modelovaní a ich analýzu a vyhodnocovanie, interpretáciu výsledkov, formulovanie záverov a zdôvodňovanie objavených zistení. Llewellyn (2002) opisuje šesťstupňový model bádania (Obrázok 1).



Obrázok 1. Schéma bádateľského cyklu (Llewellyn, 2002).

Komplexnejší pohľad na jednotlivé etapy bádateľského cyklu poskytuje nižšie uvedená klasifikácia bádateľských zručností (Tabuľka 1), ktorá vychádza z prác autorov (Tamir a Lunetta, 1981; Fradd, 2001; Van den Berg, 2013, Balogová a Ješková, 2016). Žiak prechádza jednotlivými etapami bádateľského cyklu, ktoré umožňujú osvojovanie si poznatkov a rozvíjanie ich porozumenia, ale aj žiackych zručností bádanie realizovať. Bádateľské zručnosti (nazývané tiež spôsobilosti vedeckej práce, Held, 2011) korešpondujú s jednotlivými etapami bádania. Vzhľadom na charakter jednotlivých vedných disciplín a vyučovacie ciele je vo vyučovaní matematiky, informatiky a prírodovedných predmetov kladený rôzny dôraz na rozvíjanie jednotlivých bádateľských zručností.

Tabuľka 1. Klasifikácia bádateľských zručností rozvíjaných pri experimentovaní alebo modelovaní.

	Experimentovanie	Modelovanie
1.	**Formulácia problému a plánovanie experimentu/modelu**	
1.1	Formulovať otázku/problém	Formulovať otázku/problém
1.2	Formulovať hypotézu, ktorá sa bude testovať	Formulovať hypotézu, ktorá sa bude testovať
1.3	Naplánovať postup (identifikovať a definovať nezávislé a závislé premenné veličiny, vzájomný vzťah)	Naplánovať model (identifikovať a definovať nezávislé a závislé premenné veličiny, vzájomný vzťah)
1.4	Navrhnúť pozorovanie/postup merania (aké pomôcky, aká zostava experimentu) pre každú premennú veličinu	Navrhnúť postup modelovania (ako sú premenné veličiny reprezentované, čo budú konštanty modelu, vzájomné vzťahy, rovnice a nastavenie počiatočných hodnôt a konštánt)
1.5	Predpovedať výsledok experimentu	Predpovedať výsledok modelu
2.	**Realizácia/ implementácia**	
2.1	Experimentovať s pomôckami/s podporou softvéru	Konštruovať model a manipulovať s ním pomocou softvéru
2.2	Pozorovať/merať	Zisťovať hodnoty premenných
2.3	Zaznamenávať výsledky pozorovania a merania	Zaznamenávať výsledky
2.4	Realizovať výpočty počas merania	Realizovať výpočty počas realizácie modelu
2.5	Vysvetľovať alebo upravovať postupy	Vysvetľovať alebo upravovať modelovacie postupy
3.	**Analýza a interpretácia**	
3.1	Transformovať výsledky do štandardných foriem (napr. tabuľky, grafy)	Transformovať výsledky do štandardných foriem (napr. tabuľky, grafy)
3.2	Určovať vzťahy medzi premennými veličinami na základe: • grafov a diagramov, • tabuliek, • dát v texte, • predpisu funkcie,	Určovať vzťahy medzi premennými veličinami na základe: • grafov a diagramov, • tabuliek, • dát v texte, • predpisu funkcie,
3.3	Určovať presnosť experimentálnych dát (identifikovať možné zdroje chýb)	Určovať presnosť dát získaných modelovaním (identifikovať možné zdroje chýb)
3.4	Porovnať dáta s hypotézou/predpoveďami	Porovnať dáta získané z modelu s reálnymi dátami
3.5	Diskutovať o obmedzeniach/predpokladoch realizovaného experimentálneho postupu	Diskutovať o obmedzeniach/predpokladoch realizovaného modelovacieho postupu
3.6	Zovšeobecniť výsledky	Zamyslieť sa nad platnosťou modelu
3.7	Formulovať nové otázky/problémy	Formulovať nové otázky/problémy
3.8	Formulovať závery	Formulovať závery
4.	**Zdieľanie a prezentácia**	
4.1	Zdieľať a prezentovať výsledky pred spolužiakmi.	Zdieľať a prezentovať výsledky pred spolužiakmi
4.2	Diskutovať/obhajovať výsledky/argumentovať	Diskutovať/obhajovať výsledky/argumentovať
4.3	Vypracovať formálnu správu/protokol o výsledkoch	Vypracovať formálnu správu/protokol o výsledkoch
5.	**Aplikácia a ďalšie využitie**	
5.1	Predpovedať na základe výsledkov skúmania.	Predpovedať na základe výsledkov skúmania
5.2	Formulovať hypotézy na ďalšie skúmanie.	Formulovať hypotézy na ďalšie skúmanie
5.3	Aplikovať experimentálne postupy na nové problémy	Aplikovať experimentálne postupy na nové problémy

Úrovne bádateľských aktivít

Ak sa pozrieme na jednotlivé etapy bádateľského cyklu (Obrázok 1) a s tým súvisiace zručnosti, ktoré by mal žiak ovládať, je zrejmé, že od žiakov nemožno očakávať, že budú hneď schopní klásť výskumné otázky a realizovať celú postupnosť krokov bádateľského cyklu samostatne. Bádateľské zručnosti žiakov je potrebné rozvíjať postupne a preto je na učiteľovi, aby navrhol aktivitu tak, aby zohľadňovala intelektuálnu úroveň žiakov a poskytla tak žiakom primeranú úroveň samostatnosti. Mnohí autori preto rozlišujú niekoľko úrovní bádania, podľa toho, koľko informácií žiakom poskytneme (napr. pomocné otázky, inštrukcie na postup skúmania, návody na spracovanie dát a pod.), resp. do akej miery aktivitu riadi učiteľ a žiakom pomáha, napr. otázkami, komentármi, usmerneniami a pod. Štvorúrovňová klasifikácia (potvrdzujúce, štruktúrované, riadené a otvorené bádanie, Banchi a Bell, 2008) bola ďalšími autormi (Kireš a kol., 2016) rozšírená a upravená do piatich základných úrovní bádateľských aktivít v závislosti od miery učiteľovho navádzania a vedenia žiakov, intelektuálnej náročnosti a podpory učebnými materiálmi (Tabuľka 2).

Tabuľka 2. Hierarchia bádateľských aktivít.

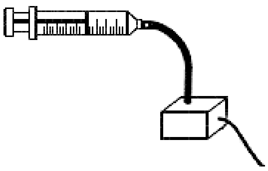
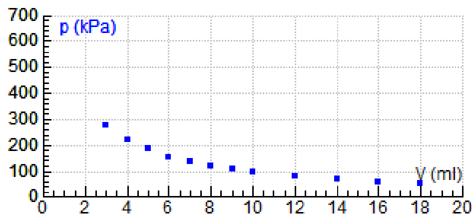
Úroveň bádania	Otázka/ problém	Postup	Výsledok
Interaktívna demonštrácia Učiteľ kladie otázky interaktívnym spôsobom a vedie okolo nich žiacku diskusiu, kladie otázky, vyžaduje žiacke predpovede a vysvetlenia, ktoré dokladuje výsledkami experimentu, ktorý sám realizuje.	x	x	x
Potvrdzujúce bádanie Žiaci potvrdzujú platnosť nejakého vzťahu, zákonitosti v aktivite, ktorej výsledok už poznajú.	x	x	x
Štruktúrované bádanie Žiaci riešia problém sformulovaný učiteľom na základe pripraveného postupu.	x	x	
Nasmerované bádanie Žiaci riešia problém sformulovaný učiteľom na základe postupu, ktorý sami pripravia (navrhnú).	x		
Otvorené bádanie Žiaci riešia problém, ktorý samostatne sformulujú na základe postupu, ktorý sami pripravia (navrhnú).			

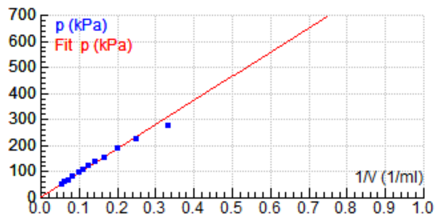
vysoká	učiteľ
← Podpora učebnými materiálmi →	← Činnosť riadi →
nízka	žiak

V každom prípade, či už ide o aktivitu na nižšej alebo vyššej úrovni bádania, by mal učiteľ na prebudenie záujmu žiakov nastoliť na začiatku stimulujúcu situáciu, v ktorej sú zahrnuté javy predstavujúce predmet skúmania. Je vhodné pripraviť stimulujúcu situáciu tak, aby niektoré pozorované situácie boli pre žiakov na základe ich doterajších skúseností a intuície neočakávané až prekvapivé.

Napríklad žiakom môžeme nastoliť stimulujúcu situáciu z reálneho života, ktorú zažil asi každý z nás. Otázka: Ako funguje odber krvi injekčnou striekačkou? môže viesť k riešeniu problému čo sa stane, ak meníme objem plynu, napr. pri stláčaní vzduchu v striekačke, pričom žiak s väčšou alebo menšou pomocou od učiteľa prechádza na základe inštrukcií v pracovnom liste jednotlivými fázami bádateľského cyklu. Žiaci pritom pracujú na úrovni potvrdzujúceho bádania (ak poznajú teóriu správania sa ideálneho plynu) alebo štruktúrovaného bádania (ak žiaci zákon objavujú) (Tabuľka 3), pričom v aktivite nemusia byť zastúpené všetky kroky prezentované v tabuľke (Tabuľka 1). Aktivita prepája fyziku, matematiku, ale aj informatiku, ktorá sa tu objavuje pri využívaní digitálnych technológií pre zber a spracovanie dát.

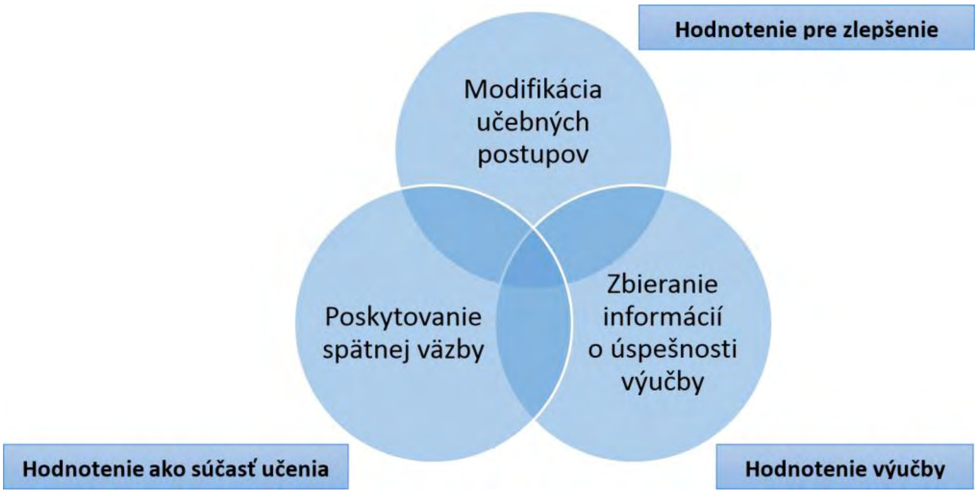
Tabuľka 3. Príklad experimentálnej bádateľskej aktivity Čo sa stane, keď stlačíme vzduch?

<table>
<tr><th>Činnosť, ktorá je v rámci etapy bádateľského cyklu realizovaná učiteľom (U) alebo žiakom (Ž).</th><th>Kto?</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Formulácia problému a plánovanie experimentu/modelu</td></tr>
<tr><td>Učiteľ v spolupráci so žiakmi sformuluje na základe stimulujúcej situácie o odbere krvi otázku: Čo sa stane, keď stlačíme vzduch?</td><td>U</td></tr>
<tr><td>Učiteľ vhodnými otázkami očakáva od žiakov formuláciu hypotézy, ktorá sa bude testovať. Žiaci navrhujú rozličné hypotézy a spoločne sa dohodnú na hypotéze: Pri stláčaní vzduchu v injekčnej striekačke rastie tlak plynu nepriamo úmerne s objemom plynu.</td><td>U/Ž</td></tr>
<tr><td>Žiaci identifikujú nezávislú premennú objem, závislú premennú tlak a kontrolnú premennú teplota, ktorá musí zostať počas experimentu konštantná.</td><td>Ž</td></tr>
<tr><td>Žiaci na základe dostupných pomôcok navrhnú zostavu experimentu a postup merania tlaku a objemu.</td><td>Ž</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Realizácia/ implementácia</td></tr>
<tr><td>Žiaci spoja injekčnú striekačku so senzorom tlaku a pripoja ho k počítaču. Otvoria súbor v počítači. Diskutujú o tom, ako zabezpečia, aby sa počas merania teplota plynu nemenila.

</td><td>Ž</td></tr>
<tr><td>Žiaci nastavujú rôzne objemy vzduchu v injekčnej striekačke, odčítajú hodnotu objemu a tlak odmerajú pomocou senzora tlaku.
<table>
<tr><td>V(ml)</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>p(kPa)</td><td>95,9</td><td>108,1</td><td>119,8</td><td>136,5</td><td>154,9</td><td>186,5</td><td>222,4</td></tr>
</table></td><td>Ž</td></tr>
<tr><td>Žiaci zapisujú vybrané dvojice hodnôt objemu a tlaku do tabuľky v pracovnom liste.</td><td>Ž</td></tr>
<tr><td>Pokiaľ uniká vzduch z injekčnej striekačky počas merania, žiaci upravia zostavu experimentu.</td><td>Ž</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Analýza a interpretácia</td></tr>
<tr><td>Z nameraných hodnôt žiaci zostroja graf, resp. zobrazia graf na počítači.</td><td>Ž</td></tr>
<tr><td>Na základe údajov v grafe žiaci určujú charakter závislosti. Nameranú závislosť tlaku od objemu plynu transformujú do závislosti tlaku od prevrátenej hodnoty objemu, ktorá by v prípade správnosti hypotézy mala byť lineárna.



</td><td>Ž</td></tr>
<tr><td>Žiaci z výsledkov merania identifikujú možné zdroje chýb v meraní, napr. nepresné nastavenie a odčítanie objemu, možný únik vzduchu zo striekačky hlavne pri malých objemoch vzduchu v striekačke.</td><td>Ž</td></tr>
<tr><td>Na základe získanej závislosti tlaku od prevrátenej hodnoty objemu usudzujú o správnosti hypotézy.</td><td>Ž</td></tr>
<tr><td>Na základe výsledkov merania usudzujú, že pri malých objemoch sa graf odchyľuje od linearity. Diskutujú s učiteľom o možných príčinách. Učiteľ vhodnými otázkami privedie žiakov k diskusii o tom, či vzduch možno pokladať za ideálny plyn, pre ktorý stanovená hypotéza platí. Žiaci usudzujú, že pri veľkých tlakoch (malých objemoch) už vzduch podmienky ideálneho plynu nespĺňa.</td><td>U/Ž</td></tr>
<tr><td>Žiaci formulujú záver na základe výsledkov experimentu.</td><td>Ž</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Zdieľanie a prezentácia</td></tr>
<tr><td>Žiaci spracujú protokol, ktorý odovzdajú na posúdenie učiteľovi.</td><td>Ž</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Aplikácia a ďalšie využitie</td></tr>
<tr><td>Žiaci navrhujú hypotézy na ďalšie skúmanie, napr. čo sa stane, ak vzduch uzavretý v banke ohrejeme?</td><td>Ž</td></tr>
</table>

Hodnotenie bádateľsky orientovaného vyučovania

Aplikácia bádateľských prístupov k vyučovaniu vyžaduje od žiakov vyššiu mieru samostatnosti pri objavovaní nových vzťahov a zákonitostí. Aj keď sa aktivita pri výučbe prenáša z učiteľa na žiaka, učiteľ by mal monitorovať prácu a priebežné učebné výsledky žiakov a v súlade s potrebami žiakov usmerňovať ich činnosti pri učení. Preto sú dôležitou súčasťou inovatívnych vyučovacích stratégií aj nové formy dialógu a interakcií medzi učiteľom a žiakom. Pri vedení diskusie učiteľ analyzuje žiacke odpovede a snaží sa zohľadňovať pri kladení otázok typické chyby žiakov. Na základe odhalených nedostatkov a miskoncepcií žiakov poskytuje žiakom vhodné príklady aj protipríklady podporujúce argumentáciu a rozvíjanie kritického myslenia. Poskytovanie rýchlej a účinnej spätnej väzby je kľúčovým faktorom formatívneho hodnotenia. Vytvorenie skreslených a chybných predstáv a nepochopenie základných súvislostí je zdrojom miskoncepcií a neúspechov žiakov pri riešení úloh. Využívanie formatívneho hodnotenia v priebehu výučby umožňuje učiteľovi modifikovať učebný postup v súlade s individuálnymi osobitosťami a poznatkami žiakov. Hlavné ciele hodnotenia zameraného na zvýšenie úspešnosti vyučovania možno prehľadne vyjadriť pomocou nasledovnej schémy (Obrázok 2).



Obrázok 2. Hlavné ciele hodnotenia zameraného na zvýšenie úspešnosti vyučovania (Gallavan, 2009).

Formatívne hodnotenie vyžaduje od učiteľa uplatňovať predovšetkým nasledujúce stratégie (Harlen, 2013):

- podporovať triedny dialóg (učiteľ položí otázku, žiak odpovedá, učiteľ reaguje a hodnotí odpoveď žiaka a učiteľ položí ďalšiu otázku. Učiteľ pritom očakáva od žiaka vysvetlenia, aby posúdil úroveň žiackeho porozumenia, pričom podporuje aj vzájomnú diskusiu medzi žiakmi),

- využívať kladenie otázok na zisťovanie úrovne porozumenia a zručností a následne pomôcť v ich rozvíjaní (otázky môžu byť otvorené – „Čo si pozoroval?“, alebo sa týkajú predmetu skúmania „Prečo ... to trvá dlhšie?“ alebo môžu byť orientované na žiaka „Čo si myslíš ... ?“),
- poskytovať žiakom spätnú väzbu (vo forme písomného alebo slovného komentára, ktorý má zdôrazňovať to, čo žiak urobil dobre a v čom a akým spôsobom by mohol svoj výkon zlepšiť),
- použiť spätnú väzbu od žiakov na korigovanie výučby (učiteľ sa môže rozhodnúť o ďalších postupoch),
- podporovať žiakov, aby sa zúčastňovali hodnotenia kvality svojej práce (sebahodnotenie a vzájomné hodnotenie spolužiakmi).

Dôležitým cieľom bádateľsky orientovaného vyučovania je zlepšenie porozumenia obsahu pojmov a podstatných príčinných súvislostí. Na porozumenie základných pojmov, štruktúr a modelov vo vzdelávacom obsahu možno využiť konceptuálne testy. Úlohy v konceptuálnych testoch umožňujú učiteľovi nielen zisťovať mieru porozumenia poznatkov a odhaľovať žiacke miskoncepcie, ale aj využiť žiacke hypotézy a riešenia na vyvolanie diskusií k príslušnej problematike a rozvíjanie znalostí žiakov. V predkladaných učebných materiáloch sme sa snažili využívať konceptuálne úlohy na prebudenie záujmu žiakov o skúmanie nových zákonitostí v úvode bádateľsky orientovanej výučby, v pracovných listoch aj v hárkoch na formatívne hodnotenie. Pre učiteľov sú pripravené aj súbory konceptuálnych úloh, pomocou ktorých môžu zhodnotiť mieru konceptuálneho porozumenia vzdelávacieho obsahu v závere bádateľsky orientovanej výučby.

Na záver možno konštatovať, že implementácia bádateľsky orientovaného vyučovania v podmienkach súčasného školského systému nie je jednoduchá. Ak však opomenieme všetky vonkajšie faktory, ktoré vplývajú na to, ako učíme a organizujeme výučbu v triede, môžeme zdôrazniť niekoľko kľúčových princípov, ktorých dôsledné uplatňovanie môže výrazne napomôcť úspešnej implementácii bádateľských prístupov k vyučovaniu (Marshall, 2013):

- využívanie učebných postupov, ktoré stimulujú žiacke bádanie (dôležitosť stimulujúcej situácie na začiatku realizácie aktivity), využívanie bádateľských aktivít rozličnej úrovne s postupne sa zvyšujúcou intelektuálnou náročnosťou tak, aby žiak v aktivite nebol stratený, ale cítil dostatočnú podporu (tzv. scaffolding alebo lešenie, po ktorom žiak ľahšie dospeje na vrchol). Ak je žiak príliš skoro vystavený otvoreným bádateľským aktivitám, môže pri napĺňaní vyučovacích cieľov zlyhať (Kirschner a kol., 2006),

- využívanie nástrojov formatívneho hodnotenia v podobe priebežného hodnotenia učebných výkonov žiakov a poskytovania spätnej väzby žiakom počas výučby môže napomôcť učeniu a zvýšiť efektívnosť vyučovania,
- reflexia učiteľa: zbieranie a analyzovanie informácií o úspešnosti výučby, o problémoch, ktoré sa v triede vyskytli, poskytuje učiteľovi aj podklady pre spätné hodnotenie učebného postupu a prípadne aj pre jeho korekcie, čím môže svoje učebné postupy vylepšovať.

Predložené metodiky bádateľsky orientovaného vyučovania matematiky a informatiky sú výsledkom iteratívneho vývoja počínajúc štúdiom teoretických poznatkov a niekoľkonásobného overenia v školskej praxi. Pri ich vývoji sme získavali cenné informácie analýzou žiackych prác (pracovné listy, hodnotiace hárky, projekty, dotazníky) a spätnou väzbou od učiteľov (Lukáč, 2015; Lukáč, Székelyová, 2016; Šnajder, 2015; Šnajder, Guniš 2016a; Šnajder, Guniš 2016b).

Bádateľsky orientované vyučovanie matematiky

Pre predmet matematika sme vyvinuli inovatívne metodiky z troch tematických okruhov:

Čísla, premenná a počtové výkony s číslami

- Kritérium deliteľnosti číslom 11

Geometria a meranie

- Vlastnosti trojuholníkov
- Stredový a obvodový uhol a ich aplikácie pri skúmaní množín bodov
- Vlastnosti štvoruholníkov

Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy

- Lineárna závislosť
- Vlastnosti funkcií
- Kvadratická funkcia

Úvodnú časť každej metodiky tvorí prehľadná tabuľka obsahujúca základné charakteristiky metodiky. Nasleduje opis plánu výučby, v ktorom sú zvýraznené zadania úloh a metodické poznámky. Podstatnú časť inovatívnych metodík tvoria rozpracované námety na realizáciu bádateľských aktivít, v ktorých sú opísané priebeh a organizácia výučby pri interaktívnych demonštráciách a štruktúrovanom bádaní žiakov, otázky pre žiakov a stručné návody k riešeniu úloh. Realizácia bádateľských aktivít je často podporená využívaním dynamických konštrukcií vypracovaných v prostredí programu Geogebra a tabuliek vypracovaných pomocou tabuľkového kalkulátora MS Excel. Podporné súbory sú dostupné na portáli uvedenom v úvode vedeckej monografie.

Dôležitou súčasťou inovatívnych metodík sú pracovné listy. Do prvej časti pracovného listu sme sa snažili zaradiť úlohy na prehĺbenie poznatkov získaných pri realizácii úvodných bádateľských aktivít. V druhej časti zvyknú byť zaradené úlohy na bádanie, formulovanie a zovšeobecňovanie objavených zistení. Posledná úloha v pracovnom liste predstavuje často námet na nasmerované bádanie žiakov. Pracovné listy môžu učitelia podľa svojho uváženia rozdeliť, prípadne poslednú úlohu aj vynechať alebo zadať ako domácu aktivitu.

Ďalšou súčasťou inovatívnych metodík sú hodnotiace hárky na formatívne hodnotenie. Podľa našej predstavy by učiteľ mohol zadať tieto hárky po vyhodnotení žiackych riešení úloh v pracovnom liste. Preto sú hárky na formatívne hodnotenie viazané na konkrétne pracovné listy. Učiteľská časť hárka na formatívne hodnotenie obsahuje aj stručný návrh hodnotiacej rubriky a pomocné otázky, ktoré by učiteľ mohol zadať žiakom pri analýze vybraných žiackych riešení. Pri návrhu formy rubriky pre matematiku sme vychádzali z pomerne jednoduchej šablóny rozlišujúcej štyri úrovne výkonu žiaka pri riešení úlohy. Uvedený návrh rubriky a pomocné otázky pre žiakov predstavujú pre učiteľa len základný rámec na formatívne hodnotenie. Podľa situácie v triede môže učiteľ navrhnutú rubriku upraviť a doplniť. Pre vytvorenie odpoveďového hárku pre žiaka stačí v dokumente vymazať rubriku a pomocné otázky. Súbory obsahujúce hárky na formatívne hodnotenie sú tiež dostupné na uvedenom portáli.

Podľa nášho názoru je vhodné využiť pri formatívnom hodnotení aj dotazník na sebareflexiu žiakov. Zámerom dotazníka je podnecovať žiaka, aby sa zamyslel nad osvojenými poznatkami, ako porozumel nové pojmy, vzťahy a ako vníma ich súvis so skôr osvojenými poznatkami. Aj pre učiteľa môže dotazník priniesť zaujímavé informácie a umožniť učiteľovi porovnať výsledky z hárka na formatívne hodnotenie so žiackym sebahodnotením v dotazníku. Keďže položky dotazníka pre rôzne témy sú veľmi podobné, na ukážku sme zaradili dotazník len k dvom témam.

Aplikovanie aktívneho žiackeho bádania vo vyučovaní matematiky by malo prispievať k rozvoju bádateľských zručností žiakov a k lepšiemu porozumeniu vzdelávacieho obsahu. V závere výučby jednotlivých tematických okruhov by podľa nášho názoru bolo vhodné zadať žiakom konceptuálny test. Z analýzy žiackych riešení by mohol učiteľ získať podnety pre organizovanie výučby pri zhrnutí a systemizácii poznatkov a aj pre zhodnotenie úspešnosti výučby. Pre každý tematický okruh sme pripravili súbor niekoľkých konceptuálnych úloh, z ktorých môže učiteľ vybrať úlohy do konceptuálneho testu pre žiakov. Súbory konceptuálnych úloh sú súčasťou príloh za predmet matematika.

Radi by sme vyjadrili svoje poďakovanie spolupracovníkom RNDr. Ingride Semanišinovej, PhD. a doc. RNDr. Dušanovi Švedovi, CSc. za rady a pripomienky pri záverečných úpravách niektorých metodických a učebných materiálov.

M1 – Kritérium deliteľnosti číslom 11

Tematický celok	
Čísla, premenná a počtové výkony s číslami	
Cieľová skupina	Odhadovaný čas výučby
Prvý ročník SŠ	Dve vyučovacie hodiny
Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti	Kognitívne ciele
▪ Vedieť využívať rozvinutý zápis prirodzených čísel v desiatkovej sústave, ▪ ovládať delenie prirodzených čísel so zvyškom a rozumieť významu pojmu deliteľnosť, ▪ ovládať základné kritériá deliteľnosti prirodzených čísel, ▪ ovládať základy práce v prostredí tabuľkového kalkulátora.	▪ Analyzovať a zovšeobecňovať výsledky získané skúmaním prirodzených čísel pri objavovaní ich vlastností, ▪ porozumieť a vedieť zdôvodniť kritérium deliteľnosti číslom 11, ▪ aplikovať kritériá deliteľnosti číslom 11 pri riešení úloh, ▪ hľadať a využívať vhodné argumenty na zdôvodňovanie matematických tvrdení o deliteľnosti prirodzených čísel.
Bádateľské zručnosti	Didaktický problém
▪ Realizovať výpočty s prirodzenými číslami, analyzovať výsledky a vlastnosti prirodzených čísel, ▪ formulovať a testovať hypotézy, zovšeobecňovať experimentálne zistenia, ▪ navrhovať postup modelovania pri riešení úloh, využívať vhodné argumenty pri zdôvodňovaní objavených zistení.	▪ Dosiahnuť, aby si žiaci nielen pamätali kritérium deliteľnosti číslom 11, ale aby aj rozumeli jeho zdôvodneniu a vedeli ho využívať pri riešení úloh. Na základe skúmania vlastností prirodzených čísel priviesť žiakov k objaveniu kritéria deliteľnosti číslom 11 a porozumeniu argumentov na jeho zdôvodnenie.
Didaktické materiálne prostriedky	Didaktické metódy a organizačné formy
▪ Pracovný list (M 1.1), ▪ interaktívny zošit vytvorený v prostredí tabuľkového kalkulátora (M 1.3), ▪ tabuľky vytvorené pomocou programu MS Excel na skúmanie vlastností prirodzených čísel.	▪ Štruktúrované bádanie, ▪ riadený rozhovor, ▪ individuálna forma práce pri počítačoch.

Úvod

Navrhnutá metodika je zameraná na aplikovanie bádateľskej metódy pri osvojovaní kritéria deliteľnosti číslom 11. Postupnosť úloh a organizácia procesu učenia sú zostavené tak, aby stimulovali a usmerňovali žiakov pri objavovaní nových vlastností prirodzených čísel. Žiaci sú postupne vedení od experimentovania s prirodzenými číslami a analyzovania získaných výsledkov k formulovaniu hypotéz, rozvíjaniu objavených zistení a hľadaniu vhodných argumentov pre zdôvodňovanie matematických tvrdení. Do metodiky sú zaradené námety umožňujúce vytvárať prepojenia medzi matematikou a reálnym životom. Deliteľnosť číslom 11 sa v praxi využíva napríklad na kontrolu niektorých typov identifikačných čísel.

Pri experimentovaní s prirodzenými číslami môžu žiaci využívať okrem klasických pomôcok aj prostredie tabuľkového kalkulátora, v ktorom môžu zostavovať tabuľky a vyšetrovať vlastnosti prirodzených čísel. Pre aktívne osvojovanie a porozumenie nových poznatkov sme pripravili interaktívny pracovný zošit obsahujúci postupnosť úloh na objavovanie a zdôvodňovanie kritéria deliteľnosti číslom 11. Zošit je implementovaný v prostredí programu MS Excel a vyžaduje nastavenie povolenia využívania makier.

Skúmanie štvorciferných palindrómov

Na úvod sme pripravili pre žiakov bádateľskú aktivitu zameranú na skúmanie vlastností štvorciferných palindrómov. Postupnosť úloh je vypracovaná vo forme pracovného listu, ktorý je uložený v súbore **M 1.1_palindromy.docx**. Vypracovanie pracovného listu by malo pomôcť pri organizovaní štruktúrovaného bádania vlastností štvorciferných palindrómov a priviesť žiakov k poznaniu, že všetky štvorciferné palindrómy sú deliteľné číslom 11.

Po vysvetlení pojmu palindróm sú prvé úlohy v pracovnom liste zamerané na hľadanie a skúmanie konkrétnych štvorciferných palindrómov. Pri riešení úloh budú žiaci pracovať s postupnosťou palindrómov, a preto sa od nich vyžaduje, aby zostavili niekoľko prvých palindrómov usporiadaných podľa veľkosti. Potom majú zostaviť všeobecný zápis štvorciferného palindrómu využitím premenných a, b a zistiť, koľko je všetkých štvorciferných palindrómov. Po uplatnení kombinatorického pravidla súčinu pre palindróm v tvare *abba* môžu zistiť, že existuje 90 štvorciferných palindrómov. Ďalšia úloha v pracovnom liste je zameraná na skúmanie deliteľnosti štvorciferných palindrómov.

Úloha 1. V postupnosti štvorciferných palindrómov usporiadaných vzostupne podľa veľkosti určte prvé tri palindrómy a nájdite aspoň štyri rôzne delitele týchto palindrómov. Zostavte hypotézu o deliteľnosti štvorciferných palindrómov.

Prvé tri štvorciferné palindrómy sú: 1001, 1111, 1221. Číslo 1001 má netriviálnych deliteľov: 7, 11, 13, 77, 91, 143. Číslo 1111 má len dvoch netriviálnych deliteľov 11 a 101. Číslo 1221 má netriviálnych deliteľov: 3, 11, 33, 37, 111, 407. Žiaci by mali zistiť, že všetky tri vyšetrované palindrómy sú deliteľné číslom 11.

Pri testovaní vyslovenej hypotézy navedieme žiakov na skúmanie rozdielov medzi susednými palindrómami.

Úloha 2. Vytvorte tabuľku obsahujúcu niekoľko prvých štvorciferných palindrómov a vypočítajte rozdiely medzi susednými štvorcifernými palindrómami. Vyslovte záver.

Po vytvorení tabuľky obsahujúcej menej ako jedenásť prvých štvorciferných palindrómov žiaci zistia, že rozdiel medzi susednými štvorcifernými palindrómami je 110. Žiaci by sa mohli domnievať, že zistenú vlastnosť by mohli využiť pri zdôvodňovaní tvrdenia, že všetky štvorciferné palindrómy sú deliteľné číslom 11. Keďže prvý štvorciferný palindróm je deliteľný číslom 11, aj číslo 110 je deliteľné číslom 11, potom, ak postupne pripočítavame číslo 110 k číslu 1001, získavame čísla deliteľné číslom 11.

Situácia však nie je až taká jednoduchá. V nasledujúcej úlohe majú žiaci na základe zisteného rozdielu zostaviť tabuľku obsahujúcu prvých dvadsať štvorciferných palindrómov.

Úloha 3. Prejaví sa pravidelnosť, ktorú ste objavili pri riešení predchádzajúcej úlohy, aj pri prvých dvadsiatich podľa veľkosti usporiadaných štvorciferných palindrómoch?

Na vyžadované výpočty môžu žiaci využiť tabuľkový kalkulátor MS Excel. Ak budú k číslu 1001 postupne pripočítavať číslo 110, prvé štvorciferné číslo začínajúce číslicou 2 bude 2101. To však nie je palindróm. Aj nasledujúce čísla v tabuľke už nie sú palindrómy. Žiaci sa tak budú musieť vrátiť na skúmanie rozdielov medzi susednými štvorcifernými palindrómami. Pomocou ďalších výpočtov môžu zistiť, že za palindrómom 1991 nasleduje palindróm 2002. Rozdiel medzi týmito susednými palindrómami je len 11. Potom nasleduje palindróm 2112, a znova dostávame rozdiel 110. Objavenú skutočnosť môžu žiaci testovať aj pri ďalších prechodoch cez tisícku. Zistia, že aj pri iných prechodoch cez tisícku sa rozdiel medzi susednými palindrómami zmenší na 11 (napr. 5995, 6006). Objavené zistenie jasne vidieť aj z toho, že ak by sme k prvému štvorcifernému palindrómu pripočítavali len číslo 110, potom by museli byť všetky štvorciferné palindrómy ukončené číslicou 1. Čo však nie je pravda.

Keďže nájdené rozdiely medzi susednými štvorcifernými palindrómami sú 110 a 11, stále môže platiť hypotéza o deliteľnosti všetkých štvorciferných palindrómov číslom 11.

V poslednej úlohe pracovného listu sú žiaci vyzvaní, aby skúsili využiť rozvinutý zápis štvorciferného palindrómu v tvare *abba* pri zdôvodnení objavenej vlastnosti týkajúcej sa deliteľnosti štvorciferných palindrómov. Žiaci by mali využiť nasledovné úpravy:

$abba = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$

Objavovanie kritéria deliteľnosti číslom 11

Po vyriešení úvodného problému zameraného na skúmanie deliteľnosti štvorciferných palindrómov číslom 11 prejdeme na objavovanie a osvojovanie kritéria deliteľnosti číslom 11. Aj keď kritérium deliteľnosti číslom 11 nemusí byť zaradené do systému základného učiva na strednej škole, poznatky žiakov o kritériách deliteľnosti možno vhodne využiť pri objavovaní a porozumení tohto pravidla. Ďalším dôvodom môže byť aj skutočnosť, že deliteľnosť číslom 11 sa v reálnom živote využíva na kontrolu dôležitých identifikačných údajov, ako napr. rodných čísel obyvateľov SR narodených po 1. 1. 1954. Najčastejšou chybou pri zapisovaní čísel je zámena jednej číslice za inú. Po takejto zámene by už rodné číslo nebolo deliteľné číslom 11 a chyba by mohla byť rýchlo odhalená. Aj pri kontrole iných identifikačných čísel, ako napríklad staršej 10-cifernej verzie ISBN sa využíva aj deliteľnosť číslom 11.

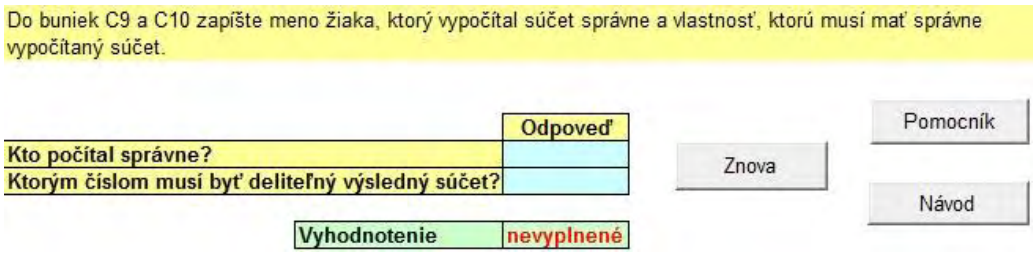
Na motiváciu by učiteľ mohol zadať žiakom otázku, či vedia, ako súvisí číslo 11 s rodnými číslami, ktoré sa využívajú na identifikáciu ľudí v Slovenskej aj v Českej republike. Žiaci by pri hľadaní odpovede mohli využiť aj internet. Šikovní žiaci by mohli skúsiť vyhľadať aj iné identifikačné čísla, pri kontrole ktorých sa využíva deliteľnosť číslom 11.

Po zodpovedaní položenej otázky je prirodzené priviesť žiakov k hľadaniu kritéria na rozhodovanie o deliteľnosti prirodzených čísel číslom 11. Na objavovanie a zdôvodňovanie kritéria deliteľnosti číslom 11 sme pripravili pre žiakov interaktívny pracovný zošit **M 1.3_delitelnost11.xlsm**. V pracovnom zošite je implementovaná aj spätná väzba na kontrolu žiackych riešení úloh a pri niektorých úlohách môžu žiaci využiť aj stručné pomocné informácie.

Na úvod pracovného zošita sme zaradili motivačnú úlohu vo forme jednoduchej matematickej hádanky.

Úloha 4. Na výlete dal Janko spolužiakom túto matematickú hádanku: „Myslite si nejaké štvorciferné číslo. Potom premiestnite prvú číslicu zľava na koniec čísla. Dostanete nové štvorciferné číslo. Pôvodné číslo sčítajte s týmto novým číslom a povedzte mi výsledok.“ Mirko povedal 8612, Katka 4322, Miško 9867 a Zuzka 13859. Potom Janko prehlásil: „Všetci okrem jedného počítali určite nesprávne“. Keď si spolužiaci ešte raz prepočítali súčty so svojimi číslami, zistili, že Janko mal skutočne pravdu. Rozhodnite, kto vypočítal úlohu správne.

Žiaci budú mať k dispozícii v dolnej časti hárku oblasť buniek otvorených pre zápis na uskutočňovanie pomocných výpočtov. Po experimentovaní so štvorcifernými číslami a uvedomení si, že pracovný zošit je zameraný na kritérium deliteľnosti číslom 11, možno očakávať, že žiaci budú vyšetrovať deliteľnosť súčtov číslom 11. Zistia, že len jedno z daných čísel je deliteľné číslom 11. Na obrázku (Obrázok 3) je zobrazená časť hárku s motivačnou úlohou.



Obrázok 3. Úvodná úloha v pracovnom zošite.

Po zatlačení tlačidla Pomocník dostanú žiaci inštrukciu, aby vyskúšali opisované operácie s niekoľkými konkrétnymi štvorcifernými číslami. Po výpočtoch zistia, že súčet vyskúšaných čísel je stále deliteľný číslom 11. Po tomto zistení už budú vedieť vyriešiť motivačnú úlohu. Len číslo 9867, ktoré povedal Mirko, je deliteľné číslom 11. Ostatní spolužiaci sa pri výpočtoch určite pomýlili.

Metodická poznámka: Využitie tlačidla Návod sprístupňuje pokyn, aby žiaci pri riešení úlohy využili rozvinutý zápis štvorciferného prirodzeného čísla. K motivačnej úlohe by sa učiteľ mal vrátiť pri vyhodnotení riešení úloh v pracovnom zošite a zhrnutí žiackych hypotéz o deliteľnosti číslom 11. Žiaci by mali vedieť sami zdôvodniť, že pre štvorciferné číslo $abcd$ je súčet $(1000a + 100b + 10c + d) + (1000b + 100c + 10d + a)$ vždy deliteľný číslom 11.

Po motivačnej úlohe nasleduje v pracovnom zošite postupnosť úloh, riešenie ktorých by malo žiakov priviesť k objaveniu kritéria deliteľnosti číslom 11. Keďže prechod na nasledujúcu úlohu je v pracovnom zošite podmienený správnym vyriešením úlohy, môže učiteľ v prípade, že žiak sa dlho nevie dostať na nasledujúcu úlohu, pomôcť žiakovi pri riešení úlohy. Po preskúmaní konkrétnych čísel z hľadiska ich deliteľnosti číslom 11 dostanú žiaci úlohu nájsť najmenšie nepárne prirodzené číslo s navzájom rôznymi ciframi deliteľné číslom 11. Žiaci by mohli k číslam deliteľným 11 postupne pripočítavať číslo 11 a pozorovať ako sa menia cifry v získaných číslach. V ďalších úlohách budú žiaci využívať aj všeobecné zápisy čísel, v ktorých sú niektoré cifry nahradené premennými. V prvej úlohe tohto typu majú žiaci doplniť zápis dvojciferného čísla s jedným zástupným znakom c tak, aby bolo deliteľné číslom 11. V ďalšej úlohe už prejdeme na skúmanie trojciferných čísel.

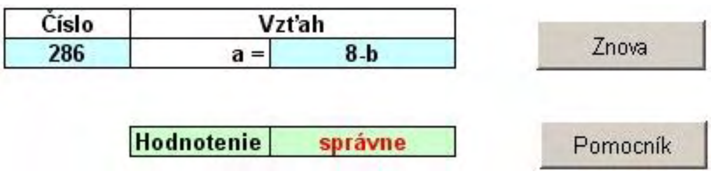
Úloha 5. Nájdite všetky možnosti, ako možno v zápise čísla $3c5$ doplniť za znak c číslicu tak, aby vzniklo trojciferné číslo deliteľné číslom 11. Jedno vytvorené číslo zapíšte aj do tabuľky.

Žiaci môžu zistiť, že možno vytvoriť len jedno vyhovujúce číslo, a to 385. Pri riešení úlohy môžu postupovať aj tak, že k číslu 308 budú postupne pripočítavať číslo 11. Pri riešení tejto úlohy si žiaci ešte možno nevšimnú súvislosť, že číslica 8 sa rovná súčtu číslic 3 a 5. Pri objavení tejto súvislosti by mohla žiakom pomôcť nadväzujúca úloha v pracovnom zošite, v ktorej sa už v zápise čísla nachádzajú dve premenné.

Úloha 6. Daný je zápis trojciferného čísla $a8b$ s dvoma zástupnými znakmi a, b na pozícii stoviek a jednotiek. Vytvorte niekoľko vyhovujúcich trojciferných čísel deliteľných číslom 11. Určte vzťah, ktorý platí medzi premennými a, b v nájdených číslach.

Jedno vyhovujúce číslo 385 už žiaci poznajú z riešenia predchádzajúcej úlohy. Ak sa im podarí nájsť viacero vyhovujúcich trojciferných čísel, tak by už mohli zbadať, že súčet číslic na pozícii jednotiek a stoviek sa rovná 8. Pre zdôvodnenie tohto vzťahu je vhodné využiť rozvinutý zápis zadaného trojciferného čísla $a8b$ a nájsť jeho vhodnú úpravu pre rozhodovanie o deliteľnosti číslom 11. Tlačidlo Pomocník umožňuje žiakom získať pomocnú informáciu, ktorá ich nabáda vytvoriť rozvinutý zápis čísla $a8b$ pomocou mocnín čísla 10 a upraviť mocniny s využitím čísel deliteľných číslom 11.

Na obrázku (Obrázok 4) je zobrazená časť hárku s úlohou 6. V tabuľke už sú doplnené správne údaje.



Obrázok 4. Správne riešenie úlohy z pracovného zošita.

Na základe rozvinutého zápisu trojciferného čísla $a8b$ by žiaci mali po úpravách dospieť k výrazu, ktorý umožňuje rozhodnúť o deliteľnosti tohto čísla číslom 11. Jednu možnosť predstavuje úprava: $99a + 8 \cdot 11 + a - 8 + b$. Výraz $a - 8 + b$ musí byť teda deliteľný číslom 11. Na základe toho, že premenné a, b predstavujú číslice, môže sa tento výraz rovnať len číslu 0. Žiaci by mohli využiť napr. aj zápis $99a + 7 \cdot 11 + a + 3 + b$. Výraz $a + 3 + b$ sa musí v tomto prípade rovnať 11.

Aby sme žiakov priviedli k zovšeobecňujúcim úvahám, majú žiaci v nasledujúcej úlohe preskúmať trojciferné čísla v tvare $a1b$, pričom má platiť, že $b > 0$. V tomto prípade už nemôže byť súčet cifier $a + b$ rovný prostrednej cifre 1, ale musí byť rovný 12. Na záver skúmania trojciferných čísel majú žiaci zhrnúť a zovšeobecniť svoje zistenia a zapísať kritérium deliteľnosti číslom 11 pre trojciferné číslo v tvare abc. Riešenie tejto úlohy nie je jednoznačné. Pre zjednodušenie kontroly zapísaného výrazu majú žiaci zvýraznené pokyny, aby nezačínali zápis znamienkom „–" a aby výraz zapísali v čo najjednoduchšom tvare bez využitia násobkov premenných. Tieto pokyny majú žiakov aj upozorniť, že riešenie úlohy nie je jednoznačné a možno nájsť viaceré správne riešenia úlohy, pričom výučbová aplikácia nemusí správne vyhodnotiť každé vyhovujúce riešenie.

V ďalších úlohách pracovného zošita sa objavený poznatok ďalej rozvíja aj pre štvorciferné čísla. Najprv majú žiaci nahradiť zástupný znak číslicou v štvorcifernom čísle, aby získali číslo deliteľné číslom 11.

Úloha 7. Dané sú zápisy štvorciferných čísel $327c$, $7c83$ s jedným zástupným znakom c. Doplňte za znak c číslicu tak, aby vznikli štvorciferné čísla deliteľné číslom 11.

Na obrázku (Obrázok 5) je zobrazená tabuľka s doplnenými číslami. Na mieste zástupného znaku je na začiatku prázdne políčko, do ktorého majú žiaci dopísať číslicu. Pri čísle 3278 je súčet číslic na nepárnych a párnych pozíciách rovnaký. Druhým číslom 7183 sme chceli žiakov upozorniť na prípady, keď rozdiel v súčtoch číslic na nepárnych a párnych pozíciách je nenulový, ale deliteľný číslom 11.

Tisícky	Stovky	Desiatky	Jednotky
3	2	7	8
7	1	8	3

Hodnotenie	správne

Obrázok 5. Správne riešenie úlohy z pracovného zošita.

Pri riešení poslednej úlohy pracovného zošita majú žiaci pracovať so všeobecným zápisom štvorciferného čísla obsahujúcom dva zástupné znaky. Po vyriešení tejto úlohy by už žiaci mali zapísať kritérium deliteľnosti prirodzených čísel číslom 11.

Úloha 8. Daný je všeobecný zápis štvorciferného čísla $4a8b$ s dvoma zástupnými znakmi a, b. Pri rozhodovaní o deliteľnosti čísla $4a8b$ číslom 11 stačí vyšetrovať deliteľnosť 11 menšieho čísla zostaveného z číslic čísla $4a8b$. Zapíšte do tabuľky výraz s premennými a, b, ktorý má byť deliteľný číslom 11.

Aj pri tejto úlohe majú žiaci uvedené pokyny pre zápis výrazu, lebo riešenie úlohy nie je jednoznačné. Súčasťou hárka so zadaním poslednej úlohy je pomocná tabuľka obsahujúca zvyšky pri delení prvých šiestich mocnín čísla 10 číslom 11. Žiaci môžu vidieť, že sa pravidelne striedajú zvyšky 10 a 1. Na základe riešenia poslednej aj predchádzajúcich úloh by už mali vedieť, ako sa toto zistenie dá využiť pri úprave rozvinutého zápisu prirodzeného čísla z hľadiska jeho deliteľnosti číslom 11. Do určenej oblasti buniek pod tabuľkou majú žiaci zapísať svoje nápady na zisťovanie deliteľnosti prirodzených čísel číslom 11.

Metodická poznámka: Po vyriešení úloh v pracovnom zošite by učiteľ spolu so žiakmi zhrnul výsledky riešení úloh a žiacke formulácie kritéria deliteľnosti číslom 11. Uviedol by aj najčastejšie využívanú formuláciu tohto pravidla: Prirodzené číslo je deliteľné číslom 11, ak ciferný súčet z číslic na nepárnych pozíciách zmenšený o ciferný súčet z číslic na párnych pozíciách je deliteľný číslom 11.

Aplikácia kritéria deliteľnosti číslom 11 pri riešení úloh

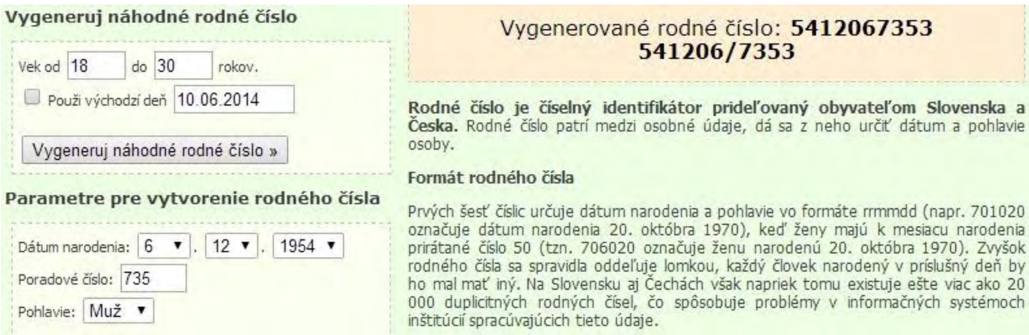
Po objavení a porozumení kritéria deliteľnosti prirodzených čísel číslom 11 vyriešime niekoľko úloh na upevnenie a prehĺbenie objaveného poznatku. Ako už bolo v úvode spomenuté, deliteľnosť číslom 11 sa využíva pre kontrolu rodných čísel. Rodné čísla sa určujú na základe výpočtov odvodených z dátumu narodenia, pohlavia (pre dievčatá sa pripočítava k mesiacu číslo 50) a odlíšenia detí narodených v jednom dni. Posledná štvorica čísel je v rodnom čísle zvolená tak, aby celé 10-ciferné číslo bolo deliteľné číslom 11. Preto na prvú kontrolu správnosti rodných čísel slúži overenie ich deliteľnosti číslom 11. Učiteľ by mohol zadať žiakom za domácu úlohu zistiť svoje rodné číslo a overiť, či je deliteľné číslom 11. Nasledujúca úloha je zameraná na využitie deliteľnosti číslom 11 pri určovaní rodného čísla.

Úloha 9. Pán Novák vypisoval žiadosť o vodičský preukaz, na ktorej bolo potrebné vyplniť aj rodné číslo. Zistil však, že si ho nepamätá, teda z posledného štvorčíslia zabudol poslednú číslicu. Mohli by sme mu pomôcť, keď vieme, že sa narodil 6. 12. 1954 a posledné štvorčíslie mal v tvare 735*? Ako by sa rodné číslo zmenilo, keby žiadosť vypisovala žena narodená v ten istý deň?

Z dátumu narodenia a zapamätaných číslic z posledného štvorčíslia možno zapísať rodné číslo v tvare 541206735*. Ak by sme dosadili za poslednú číslicu 0, tak po aplikovaní kritéria deliteľnosti číslom 11 dostávame pre súčty číslic: 15 – 18 = –3. Aby sme dostali 0, zväčšíme poslednú číslicu o 3 a získame rodné číslo 5412067353, ktoré už je deliteľné číslom 11.

Pre ženu by sme dostali rodné číslo v tvare 546206735*. Znova dosadíme za poslednú číslicu 0 a pre súčty číslic dostávame výraz: 15 – 23 = –8. Poslednú číslicu teda zväčšíme o 8 a získame správne rodné číslo 5462067358.

Na vytváranie rodných čísel možno využiť aj online generátor rodných čísel, ktorý je dostupný na adrese http://webdev.zaujimave.info/generator-rodneho-cisla. Do spodného formulára zadáme dátum narodenia, pohlavie a za poradové číslo zadáme trojmiestne číslo, za ktoré sa má doplniť štvrtá číslica. V našom prípade sme zadali 735. Na obrázku (Obrázok 6) je zobrazené vypočítané rodné číslo pána Nováka.



Obrázok 6. Online generátor rodného čísla.

Na aplikáciu vedomosti o súvislosti rodných čísel s deliteľnosťou číslom 11 sme vybrali nasledovnú úlohu.

Úloha 10. Pre najviac koľko detí narodených 23. 11. 1998 by sa dali vytvoriť rôzne rodné čísla?

Pomocou generátora rodných čísel sme pre dátum 23. 11. 1998 získali pre chlapca s trojmiestnym číslom 001 rodné číslo 9811230011. Za prvé rodné číslo chlapca narodeného v tento deň budeme považovať rodné číslo 9811230000. Posledné rodné číslo začínajúce na 981123 a deliteľné číslom 11 je 9811239999. Môžeme pripočítať 9999/11 násobkov čísla 11, a to je 909 násobkov čísla 11. Preto pre chlapcov možno vytvoriť 910 rodných čísel.

Pre dievčatá vygeneruje generátor prvé rodné číslo 9861230016. Za prvé rodné číslo dievčaťa narodeného v tento deň budeme uvažovať rodné číslo 9861230005. Najväčšie rodné číslo začínajúce na 986123 je 9861239993. Ak vydelíme ich rozdiel číslom 11, dostaneme číslo 908. Preto možno pre dievčatá vytvoriť 909 rodných čísel. Spolu sme dostali 1819 rôznych rodných čísel.

Metodická poznámka: Pri skúmaní deliteľnosti prirodzených čísel konkrétnymi číslami možno odvodiť aj viaceré pravidlá. V literatúre alebo na internete možno nájsť aj iné kritérium deliteľnosti číslom 11. Učiteľ by mohol žiakom zadať úlohu vyhľadať na internete kritérium deliteľnosti číslom 11, ktoré je založené na rozdeľovaní zadaného čísla sprava na dvojčísla.

Úloha 11. Zistite, či pre šesťciferné čísla možno využívať nasledovné kritérium deliteľnosti číslom 11: Rozdelíme šesťciferné číslo na dvojčísla. Dané číslo je deliteľné číslom 11 práve vtedy, ak súčet dvojčíslí je deliteľný číslom 11.

Najprv by žiaci mohli vyskúšať uvedené kritérium pre niekoľko konkrétnych šesťciferných čísel. Ak všeobecný zápis šesťciferného čísla rozdelíme na dvojčísla, dostaneme $c_5c_4|c_3c_2|c_1c_0$. Hodnoty troch vyznačených dvojčíslí označíme cba. Pri zdôvodňovaní uvedeného kritéria je dôležité uvedomiť si, že šesťciferné číslo n možno vyjadriť v tvare:

$$n = a + 100b + 10000c = a + 100\cdot(b + 100c)$$

Z riešenia úloh z pracovného zošita by si mali žiaci pamätať, že párne mocniny čísla 10 dávajú pri delení číslom 11 zvyšok 1. Od čísla n odčítame číslo deliteľné 11:

$$n - 99\cdot(b + 100c) = a + b + 100c$$

Dostali sme číslo, ktoré pri delení 11 dáva rovnaký zvyšok ako číslo n. Od tohto čísla znova odčítame číslo deliteľné 11, a to $99c$. Získame číslo $a + b + c$, ktoré po delení číslom 11 dáva taký istý zvyšok ako číslo n.

Odvodené kritérium deliteľnosti číslom 11 platí nielen pre šesťciferné čísla. Pri aplikácii kritéria sa dvojčísla vyznačujú v čísle sprava. Učiteľ by žiakov upozornil, že uvedené kritérium možno aplikovať aj viackrát za sebou, napr. číslo 109461 rozdelíme na 61 + 94 + 10 = 165. Potom číslo 165 rozdelíme na 65 + 1 = 66, ktoré je deliteľné číslom 11, preto aj číslo 109461 je deliteľné číslom 11.

Na prehĺbenie a systematizáciu osvojených poznatkov o kritériách deliteľnosti možno žiakom zadať úlohy na využitie viacerých kritérií deliteľnosti. Vybrali sme nasledujúcu úlohu.

Úloha 12. Nájdite číslice, ktoré možno dosadiť za premenné x, y (x rôzne od y), aby trojciferné číslo xyx bolo deliteľné číslom 4, aby trojciferné číslo yxy bolo deliteľné číslom 3 a aby štvorciferné číslo $xyx3$ bolo deliteľné číslom 11.

Zo zadania úlohy je zrejmé, že premenné x aj y označujú nenulové číslice. Aby xyx bolo deliteľné číslom 4, musí byť číslo $10y + x$ deliteľné číslom 4. Je zrejmé, že číslica x musí byť párna. Aby yxy bolo deliteľné 3, musí byť aj číslo $2y + x$ deliteľné číslom 3. Posledná podmienka vyžaduje, aby číslo $xyx3$ bolo deliteľné číslom 11. Aplikovaním kritéria deliteľnosti číslom 11, získame výraz $y + 3 - 2x$, ktorý môže nadobúdať najviac hodnotu 8, preto musí byť výraz $y + 3 - 2x$ rovný -11 alebo 0.

Uvažujme najprv, že $y + 3 - 2x = -11$, potom $y = 2x - 14$. Keďže číslo $2y + x$ musí byť deliteľné číslom 3, po dosadení odvodeného výrazu za y dostávame, že výraz $5x - 28$ musí byť deliteľný číslom 3. Za premennú x možno dosadiť číslicu 2 alebo 8. Ale pre číslicu y platí, že $y = 2x - 14$, a preto je správne len riešenie $x = 8$, $y = 2$. V tomto prípade je splnená aj prvá podmienka vyplývajúca z deliteľnosti číslom 4, a preto jedno riešenie úlohy je, keď číslo xyx je 828.

Ďalšie riešenie úlohy možno získať, keď $y + 3 - 2x = 0$, potom $y = 2x - 3$. Dosadíme za premennú y tento výraz do výrazu $2y + x$, ktorý musí byť deliteľný číslom 3. Potom výraz $5x - 6$ musí byť deliteľný číslom 3. Číslica x môže nadobúdať len párne hodnoty, a preto x môže byť rovné len 6. Keďže $y = 2x - 3$, potom $y = 9$. Keďže číslo 696 je deliteľné aj číslom 4, predstavuje druhé riešenie úlohy.

M2 – Vlastnosti trojuholníkov

Tematický celok	
Geometria a meranie	
Cieľová skupina	Odhadovaný čas výučby
Prvý ročník SŠ	Tri vyučovacie hodiny
Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti	Kognitívne ciele
▪ Poznať rôzne typy trojuholníkov, ▪ ovládať základné vlastnosti trojuholníkov preberané na ZŠ, ▪ ovládať vety o zhodnosti a podobnosti trojuholníkov, ▪ ovládať základné príkazy a postupy zostrojovania rôznych typov geometrických útvarov v systéme Geogebra.	▪ Preskúmať základné vlastnosti trojuholníkov a zovšeobecniť ich pre rôzne typy trojuholníkov, ▪ zostrojovať dôležité prvky a význačné priesečníky v trojuholníku a vedieť zdôvodniť ich základné vlastnosti, ▪ nájsť ťažisko štvoruholníkov rozdelením štvoruholníka na trojuholníky, ▪ využívať dynamické geometrické systémy pri skúmaní a zovšeobecňovaní vzťahov v trojuholníkoch.
Bádateľské zručnosti	Didaktický problém
▪ Manipulovať s geometrickými útvarmi pomocou softvéru a analyzovať pozorované výsledky, ▪ určovať vzťahy medzi premennými veličinami, formulovať hypotézy a testovať ich na konkrétnych prípadoch, ▪ formulovať závery a využívať vhodné argumenty pri zdôvodňovaní matematických tvrdení.	▪ Žiaci už majú určité poznatky o trojuholníkoch zo ZŠ, ale často sú to len zapamätané informácie bez hlbšieho porozumenia a schopnosti aplikovať ich pri riešení úloh. Preto je potrebné rozvíjať zručnosti žiakov, využívať modelovanie pre hlbšie pochopenie pojmov a geometrických vzťahov a pre rozvíjanie schopnosti aplikovať osvojené matematické poznatky aj v iných prírodovedných predmetoch.
Didaktické materiálne prostriedky	Didaktické metódy a organizačné formy
▪ Pracovné listy prepojené s prostredím dynamickej geometrie (M 2.1, M 2.3), ▪ dynamické konštrukcie pripravené v systéme Geogebra.	▪ Interaktívna demonštrácia, štruktúrované bádanie, ▪ riadený rozhovor,

	▪ individuálna forma práce pri počítačoch, ▪ skupinová forma vyučovania.

Úvod

Zámerom navrhnutej metodiky je rozvíjanie a prehĺbenie poznatkov žiakov o vlastnostiach trojuholníkov, dôležitých prvkoch a význačných priesečníkoch v trojuholníku. V rámci tematického okruhu Geometria a meranie si žiaci osvojili základné poznatky o trojuholníkoch už na základnej škole. Základom metodiky je vypracovanie systému úloh a pomocných učebných materiálov umožňujúcich využitie bádateľských aktivít, pri realizácii ktorých budú žiaci experimentovať s útvarmi, analyzovať získané výsledky a zovšeobecňovať experimentálne zistenia. Pre usmernenie bádateľských aktivít žiakov a aktívne osvojovanie nových poznatkov sú vypracované dva pracovné listy. Pri riešení niektorých úloh z pracovných listov budú môcť žiaci využívať aj program Geogebra. Podľa nášho názoru je vhodné pri využití navrhnutej metodiky kombinovať klasické rysovacie pomôcky s dynamickým geometrickým systémom. Hlavne v prvých etapách riešenia úloh by mali žiaci najprv urobiť náčrt a zamyslieť sa nad vzťahmi, ktoré platia medzi útvarmi.

Druhú časť metodiky tvorí skúmanie ťažiska trojuholníkov. Snažili sme sa zapracovať do metodiky interdisciplinárny prístup založený na využívaní a rozvíjaní poznatkov žiakov získaných aj na hodinách fyziky. Žiaci by už mali mať určité poznatky o význame ťažiska telesa. Ťažisko predstavuje hmotný stred telesa. Pri riešení fyzikálnych úloh z dynamiky sa umiestňuje pôsobisko tiažovej sily na teleso práve do ťažiska. Určovanie ťažiska má v praxi veľký význam. Napríklad v architektúre, v stavebníctve je umiestnenie ťažiska dôležité pre stabilitu budov a rôznych konštrukcií. Pri určovaní ťažiska geometrických útvarov je v návrhu metodiky spomenutý aj experimentálny prístup (určovanie ťažiska pomocou experimentov s útvarmi s využitím olovnice), ale hlavná pozornosť je venovaná geometrickému prístupu (určovanie ťažiska pomocou konštrukcie ťažníc alebo delenia úsečiek v danom pomere).

Základné vlastnosti trojuholníka – rozvíjanie poznatkov zo ZŠ

V prvej časti zopakuje učiteľ so žiakmi základné poznatky o trojuholníkoch. Mohol by sa zamerať na nasledovné témy:

- určenie trojuholníka, strany a uhly trojuholníka,
- priesečník výšok trojuholníka, stred kružnice opísanej a vpísanej trojuholníku,

- pravouhlý trojuholník, Talesova kružnica,
- obsah trojuholníka,
- zhodnosť a podobnosť trojuholníkov.

V metodike naznačíme niektoré námety, ktorým by sa učiteľ mohol pri opakovaní a rozvíjaní poznatkov venovať podrobnejšie. Medzi dôležité prvky trojuholníka patrí výška trojuholníka. Za výšku trojuholníka budeme považovať úsečku spustenú z vrcholu kolmo na priamku určenú protiľahlou stranou trojuholníka, pričom druhým krajným bodom výšky je päta kolmice. Pod výškou trojuholníka budeme však rozumieť aj vzdialenosť vrcholu od priamky určenej protiľahlou stranou trojuholníka. Priamky obsahujúce výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode, ktorý sa nazýva ortocentrum. Ďalšie dôležité priesečníky sú priesečníky osí strán a osí vnútorných uhlov trojuholníka. Tieto priesečníky určujú stred opísanej kružnice trojuholníku a stred kružnice vpísanej do trojuholníka.

Úloha 1. V trojuholníku ABC zostrojte ortocentrum O a stred S_o kružnice opísanej trojuholníku. Vyšetrite polohu týchto bodov v rôznych trojuholníkoch.

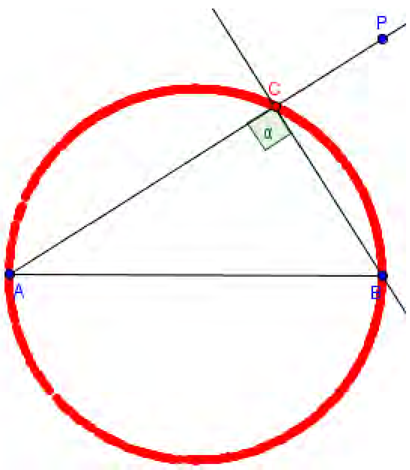
Na skúmanie polohy stredu S_o kružnice opísanej trojuholníku a ortocentra O v trojuholníku je vhodné využiť dynamický geometrický systém. Po zostrojení týchto bodov a manipulovaní s vrcholmi trojuholníka môžu žiaci zistiť, že v ostrouhlom trojuholníku ležia obidva body vnútri trojuholníka a v tupouhlom trojuholníku ležia obidva body zvonku trojuholníka. Zaujímavý je hraničný prípad, kedy bod O splynie s vrcholom trojuholníka a stred S_o leží na strane trojuholníka. Oba tieto prípady nastanú v pravouhlých trojuholníkoch. Stred S_o je v tomto prípade stredom prepony pravouhlého trojuholníka a kružnica opísaná trojuholníku sa nazýva Talesova kružnica. Výsledky riešenia úlohy 1 by učiteľ využil aj na zopakovanie vlastností pravouhlého trojuholníka a Talesovej kružnice.

Aj keď sa žiaci asi hlbšie nezamýšľajú, prečo sa všetky osi strán alebo výšky v trojuholníku pretnú v jednom bode, učiteľ by mohol so žiakmi zhrnúť výsledky skúmania pri riešení úlohy 1 aj v tomto smere. Pre osi strán je zdôvodnenie pozorovanej skutočnosti jednoduché. Bod S_o určený ako priesečník osí strán AB a BC má rovnakú vzdialenosť od bodov A, B, ale aj od bodov B, C. Potom musí mať rovnakú vzdialenosť aj od bodov A, C, a teda leží aj na osi strany AC. Zdôvodnenie skutočnosti, že výšky v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode je už zložitejšie. Vrátime sa k nemu po zopakovaní strednej priečky trojuholníka.

Metodická poznámka: V ďalšej úlohe sa budú žiaci venovať konštrukcii pravouhlého trojuholníka. Ich úlohou bude nájsť čo najviac rôznych postupov konštrukcie. Učiteľ by mohol využiť pri riešení tejto úlohy skupinové vyučovanie. Jednotlivé skupiny by na konci bádania odovzdali učiteľovi nájdené postupy konštrukcie a vybraný postup by jeden člen skupiny vysvetlil ostatným žiakom.

Úloha 2. Daná je úsečka *AB*. Nájdite rôzne postupy na zostrojenie pravouhlého trojuholníka *ABC* s preponou *AB*.

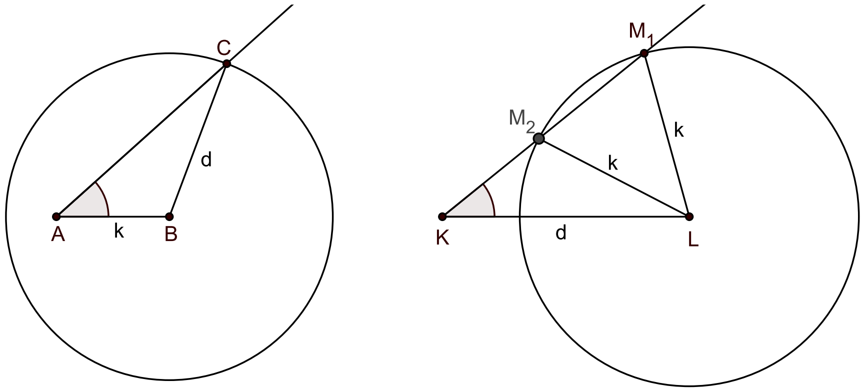
Pravouhlých trojuholníkov s danou preponou *AB* je nekonečne veľa. Stačí ak žiaci zostroja jeden pravouhlý trojuholník *ABC*. Žiaci môžu pri konštrukcii využiť Talesovu kružnicu. Iný spôsob môže byť založený na konštrukcii priamky prechádzajúcej cez bod *A*, na ktorú sa zostrojí kolmica prechádzajúca bodom *B*. Ďalším spôsobom je zostrojenie ramien uhlov pri vrcholoch *A*, *B*, súčet veľkostí ktorých je 90°. Rovnoramenný pravouhlý trojuholník možno zostrojiť aj pomocou konštrukcie štvorca so stranou *AB*, pričom vrchol *C* leží v priesečníku uhlopriečok. Možno by žiaci zvolili aj výpočet dĺžok strán pravouhlého trojuholníka pomocou Pytagorovej vety. Druhý z uvedených spôsobov možno vhodne využiť na načrtnutie Talesovej kružnice (Obrázok 7). Pre bod *C* je nastavená stopa. Pohybovaním bodu *P* po výkrese sa bod *C* pohybuje po Talesovej kružnici, ktorú svojím pohybom vykresľuje.



Obrázok 7. Načrtnutie Talesovej kružnice.

Po zopakovaní vybraných základných vlastností trojuholníkov by učiteľ zopakoval so žiakmi vety o zhodnosti trojuholníkov. Na ZŠ sa zvyknú uvádzať vety: sss, sus, usu. Učiteľ by žiakom zadal za úlohu zistiť, či by platila aj veta ssu, kde uhol s veľkosťou *u* by ležal oproti jednej z uvažovaných strán trojuholníka.

Úloha 3. Preskúmajte, či by sa pre charakterizovanie dvojice zhodných trojuholníkov dala využiť aj veta ssu, podľa ktorej by dva trojuholníky boli zhodné, ak by sa zhodovali v dvoch stranách a uhle oproti jednej z nich.



Obrázok 8. Skúmanie platnosti vety ssu.

Žiaci by mali pre rôzne prípady preskúmať, či pre zadané dĺžky dvoch strán a veľkosť uhla oproti jednej z nich možno jednoznačne zostrojiť trojuholník. Ak by to bolo nutné, učiteľ by mohol upozorniť žiakov na súvislosť medzi dĺžkou strán a pozíciou daného uhla. Žiaci by mohli zistiť, že ak daný uhol leží oproti dlhšej strane (označená na obrázku (Obrázok 8) ako *d*), tak kružnica pretne rameno uhla v jedinom bode. Ak daný uhol leží oproti kratšej strane, tak kružnica môže pretínať rameno uhla aj v dvoch rôznych bodoch. Dostaneme dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a uhle oproti jednej z nich, ale nie sú zhodné. Preto je potrebné túto vetu o zhodnosti trojuholníkov upraviť na Ssu: Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v dvoch stranách a uhle oproti dlhšej z nich.

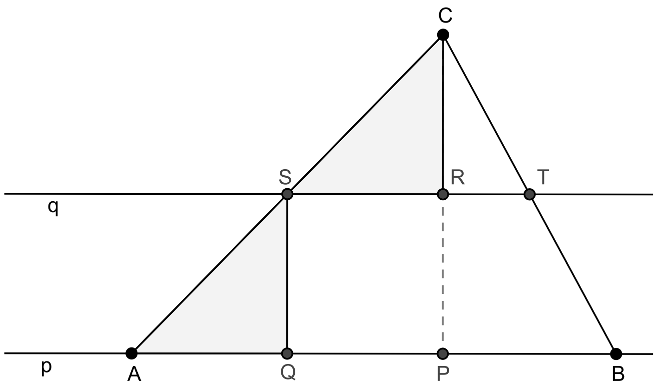
Po vetách o zhodnosti trojuholníkov by učiteľ zopakoval so žiakmi aj vety o podobnosti trojuholníkov. Na aplikáciu podobnosti trojuholníkov by učiteľ mohol so žiakmi riešiť úlohy na rozdelenie úsečky v danom pomere. Táto konštrukcia sa využíva aj pri riešení konštrukčných úloh napr. pri konštrukcii ťažiska trojuholníka.

Stredná priečka trojuholníka

Zhodnosť a najmä podobnosť trojuholníkov využijeme aj pri skúmaní vlastností strednej priečky trojuholníka. Na úvod by sme zadali žiakom úlohu na vyšetrovanie množiny všetkých bodov s danou vlastnosťou.

Úloha 4. Daná je priamka *p* a bod *C*, ktorý na nej neleží. Vyšetrite množinu stredov všetkých úsečiek *AC*, kde *A* je bodom priamky *p*.

Najprv by žiaci vypracovali náčrt na papieri a skúsili by vysloviť hypotézu. Po vyslovení žiackych hypotéz by učiteľ využil dynamickú konštrukciu **mnozina_stredov.ggb** na interaktívnu demonštráciu.



Obrázok 9. Vyšetrovanie množiny stredov úsečiek.

Pri demonštrácii je vhodné využiť najprv stopu bodu *S* a posúvať bod *A* po priamke *p*. Na obrázku (Obrázok 9) je už aplikovaný príkaz Množina bodov, ktorý umožní načrtnúť množinu všetkých bodov s danou vlastnosťou ako nový útvar, s ktorým možno ďalej manipulovať. Riešenie úlohy 4 budeme ďalej rozvíjať. Na obrázku (Obrázok 9) je bod *P* kolmým priemetom bodu *C* na priamku *p*. Bod *B* je zvolený bod na priamke *p*. Body *S*, *R*, *T* sú stredy úsečiek *AC*, *PC*, *BC*. Bod *Q* je kolmým priemetom bodu *S* na priamku *p*.

Aj pri zmenách polohy priamky *p* a bodu *C* by sa priamka *q* javila ako rovnobežná priamka s priamkou *p*. Navyše vzdialenosť bodu *C* od priamky *q* je rovnaká ako vzdialenosť priamok *p*, *q*. Preto platí $|RC| = |RP|$. Pri zdôvodnení pozorovanej skutočnosti je potrebné vykonať dva kroky. Dokázať, že každý bod priamky *q* má požadovanú vlastnosť. V druhom kroku je potrebné dokázať, že ak bod roviny má danú vlastnosť, potom leží na priamke *q*. Učiteľ by nemusel urobiť so žiakmi korektný dôkaz. Stačilo by aj naznačiť postup dôkazu. Pri oboch krokoch bude dôležitý bod *P* a stred úsečky *PC*, bod *R*. Uvažujme, že v prvom kroku zvolíme na priamke *q* ľubovoľný bod *S* a pomocou polpriamky *CS* zostrojíme bod *A*. Podľa vety uu sú trojuholníky *CSR* a *CAP* podobné. Keďže $|RC| = |RP|$, je pomer podobnosti 2, a preto bod *S* je stredom úsečky *AC*. V druhom kroku zvolíme v rovine ľubovoľný bod *T*, ktorý je stredom úsečky *BC*. Dokážeme, že bod *T* leží na priamke *q*. Podľa vety sus sú trojuholníky *CRT* a *CPB* podobné. Potom bod *T* leží na priamke prechádzajúcej bodom *R* rovnobežnej s priamkou *p*. Priamka *q* je jediná priamka, ktorá má tieto vlastnosti, preto bod *T* leží na priamke *q*.

Po interaktívnej demonštrácii by učiteľ spolu so žiakmi analyzoval ďalšie vzťahy medzi zostrojenými útvarmi. Učiteľ by položil žiakom otázky:

- *V akom vzťahu sú trojuholníky CSR a SAQ?*
- *Aký útvar predstavuje štvoruholník QPRS?*
- *Čo platí pre dĺžky úsečiek SR a AP?*

Na záver by mali žiaci charakterizovať vzťah medzi úsečkami *ST* a *AB*. Tieto úsečky sú rovnobežné a platí: $|AB| = 2 \cdot |ST|$. Úsečka *ST* sa nazýva stredná priečka trojuholníka *ABC*. Jej vlastnosti by sa dali ľahko zdôvodniť aj využitím podobnosti trojuholníkov *CST* a *CAB*. Žiaci by mohli pri potvrdzujúcom bádaní zostaviť dynamickú konštrukciu, pomocou ktorej by mohli testovať vlastnosti strednej priečky v rôznych konkrétnych trojuholníkoch. Potom predloží učiteľ žiakom pracovný list **M 2.1_stredna_priecka.docx**.

V prvej úlohe majú žiaci zostrojiť stredné priečky v trojuholníku *ABC* a preskúmať vnútorné uhly v priečkovom trojuholníku. Využitím dvojíc uhlov určených priečkou dvoch rovnobežných priamok by mali zistiť, že priečkový trojuholník má rovnako veľké vnútorné uhly ako trojuholník *ABC*, a teda sú tieto trojuholníky podobné. V závere prvej úlohy majú žiaci hľadať vzťah medzi obsahmi priečkového trojuholníka a trojuholníka *ABC*. Žiaci by pri určovaní veľkosti vnútorných uhlov priečkového trojuholníka mali zbadať, že priečky rozdelili trojuholník *ABC* na štyri zhodné trojuholníky. Pri určovaní vzťahu medzi obsahmi môžu žiaci využiť aj podobnosť priečkového trojuholníka s trojuholníkom *ABC*.

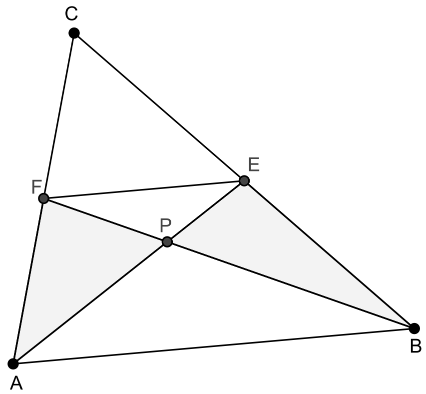
Aj v druhej úlohe pracovného listu majú žiaci preskúmať vzťah medzi dvoma trojuholníkmi.

Úloha 5. Daný je trojuholník *ABC*. Zostrojte stredy strán *BC* a *AC* a označte ich *E*, *F*. Zostrojte aj úsečky *EF*, *AE*, *BF* a priesečník *P* úsečiek *AE* a *BF*.

a) Vyjadrite vzťah medzi obsahom lichobežníka *ABEF* a obsahom trojuholníka *ABC*.

b) Preskúmajte vzťah medzi trojuholníkmi *APF* a *BPE*. Zdôvodnite svoje zistenie.

Aj keď to v úlohe nie je priamo spomenuté, žiaci pri jej riešení pracujú aj s ťažnicami trojuholníka. Výsledok riešenia tejto úlohy budú môcť žiaci využiť pri zdôvodňovaní niektorých tvrdení v ďalšej časti metodiky. Z riešenia predchádzajúcej úlohy by mali žiaci zbadať, že obsah lichobežníka *ABEF* je rovný 3/4 z obsahu trojuholníka *ABC*. V prípade potreby by mohli žiaci využiť pri riešení úlohy b) aj program Geogebra. Na obrázku (Obrázok 10) je zobrazený trojuholník *ABC* a ďalšie prvky konštrukcie.



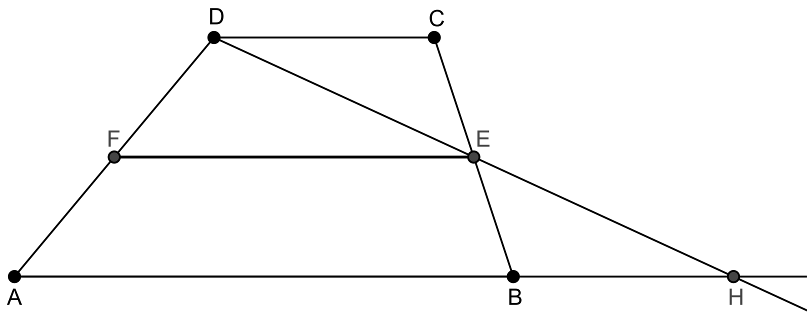
Obrázok 10. Náčrt k riešeniu úlohy 5.

Žiaci môžu z náčrtu alebo z dynamickej konštrukcie vidieť, že trojuholníky *APF* a *BPE* nemusia byť zhodné. Trojuholníky *ABE* a *ABF* majú rovnaký obsah a oba v sebe obsahujú trojuholník *ABP*. Preto majú aj trojuholníky *APF* a *BPE* rovnaký obsah.

V poslednej úlohe pracovného listu majú žiaci preskúmať vlastnosti strednej priečky lichobežníka.

Úloha 6. V lichobežníku *ABCD* zostrojíme strednú priečku spojením stredov strán *BC* a *AD*. Nájdite vzťah medzi dĺžkou strednej priečky a dĺžkami strán lichobežníka. Zdôvodnite svoje zistenie.

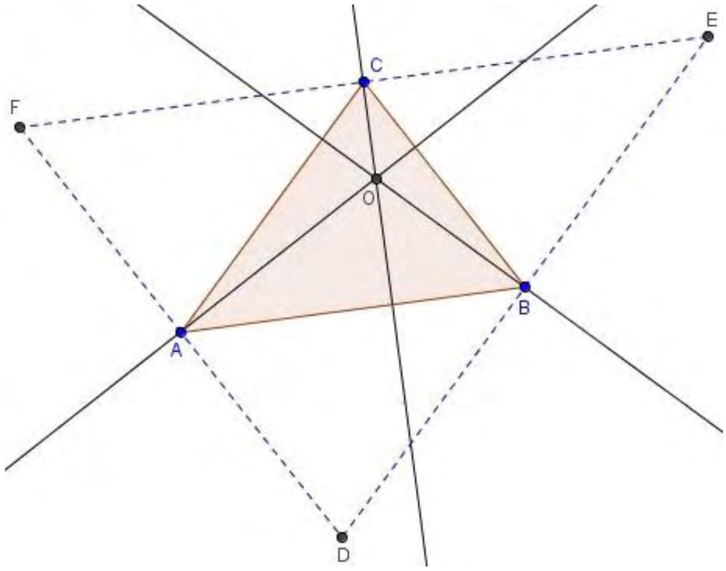
Žiaci sú v pracovnom liste upozornení, že po vytvorení náčrtu majú pri riešení úlohy hľadať možnosť využitia poznatkov o strednej priečke trojuholníka. Žiaci môžu využiť rozdelenie lichobežníka *ABCD* uhlopriečkou na dva trojuholníky. Iná možnosť zostrojenia pomocných útvarov je zobrazená na obrázku (Obrázok 11).



Obrázok 11. Stredná priečka lichobežníka.

Bod *H* je priesečníkom polpriamok *AB* a *DE*. Na základe dvojíc zhodných uhlov a skutočnosti, že |*BE*| = |*EC*| platí, že trojuholníky *BHE* a *CDE* sú zhodné (podľa vety usu). Úsečka *FE* je stredná priečka v trojuholníku *AHD*. Potom platí, že stredná priečka lichobežníka je rovnobežná so základňami a jej dĺžka je rovná polovici zo súčtu dĺžok základní lichobežníka.

Po zhrnutí riešenia úloh v pracovnom liste sa môže učiteľ vrátiť k zdôvodneniu pozorovaného javu, že všetky tri výšky v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode – ortocentre. Na interaktívnu demonštráciu využije učiteľ konštrukciu **ortocentrum_trojuholnika.ggb**. Na obrázku (Obrázok 12) sú v trojuholníku *ABC* zostrojené výšky na tri strany trojuholníka.



Obrázok 12. Priesečník výšok v trojuholníku.

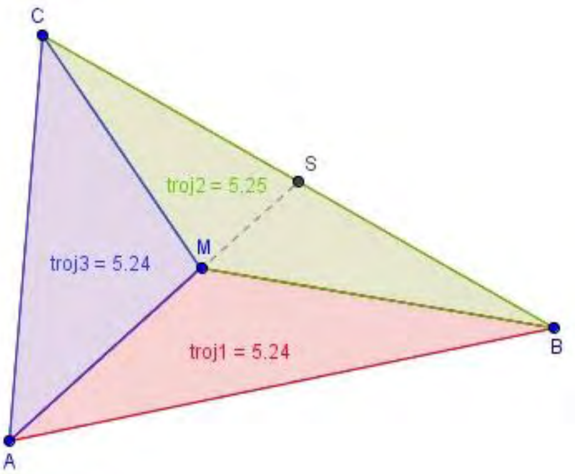
V ďalšom kroku by učiteľ zostrojil priamky prechádzajúce vrcholmi trojuholníka rovnobežne s protiľahlými stranami trojuholníka *ABC*. Tieto tri navzájom rôznobežné priamky vytvárajú nový trojuholník *DEF*. Je zrejmé, že priamky, na ktorých ležia výšky trojuholníka *ABC*, sú kolmé na príslušné strany trojuholníka *DEF*. Na základe postupu zostrojenia trojuholníka *DEF* platí, že štvoruholníky *ABCF* a *ABEC* sú rovnobežníkmi. Potom platí: $|AB| = |CF|$ a $|AB| = |CE|$. Vrchol *C* je teda stred úsečky *FE*. Podobne možno ukázať, že aj vrcholy *A*, *B* sú stredy úsečiek *FD* a *DE*. Trojuholník *ABC* je priečkový trojuholník v trojuholníku *DEF*. Priamky, na ktorých ležia výšky trojuholníka *ABC*, sú osi strán v trojuholníku *DEF*. Pre osi strán trojuholníka sme už zdôvodnili, že sa pretínajú v jednom bode.

Ťažisko trojuholníka

Na prebudenie záujmu žiakov zadáme na úvod nasledovný problém.

Úloha 7. Možno nájsť v trojuholníku *ABC* bod *M*, ktorý má tú vlastnosť, že ak ho pospájame úsečkami s vrcholmi trojuholníka *ABC*, tak trojuholník *ABC* bude rozdelený na tri trojuholníky s rovnakým obsahom?

V prvej etape sa môžu žiaci zamerať na skúmanie ostrouhlých trojuholníkov. Na hľadanie bodu *M* s požadovanou vlastnosťou môžu žiaci využiť dynamickú konštrukciu. Po prvotnom bádaní môžu zistiť, že bod s požadovanou vlastnosťou by v trojuholníku mohol existovať. Pri posúvaní bodu *M* vnútri trojuholníka nie je jednoduché nájsť jeho polohu, v ktorej rozdeľuje trojuholník *ABC* na tri trojuholníky s rovnakým obsahom. Po určitom čase by mohol učiteľ žiakom poradiť, aby upevnili bod *M* na niektorú význačnú úsečku trojuholníka. Ak by žiaci využili výšku alebo strednú priečku trojuholníka, asi by sa im nepodarilo nájsť požadovanú polohu bodu *M*. Ak by využili ťažnicu trojuholníka, mali by už byť úspešní. Potom by mohli vyskúšať aj inú ťažnicu. Tiež by mali na nej nájsť bod *M* s požadovanou vlastnosťou. Na základe skúmania by mohli vysloviť hypotézu, že úsečky spájajúce ťažisko s vrcholmi trojuholníka rozdeľujú pôvodný trojuholník na tri trojuholníky s rovnakým obsahom. Túto hypotézu by žiaci v ďalšom kroku mohli pomocou dynamickej konštrukcie testovať aj na iných typoch trojuholníkov.

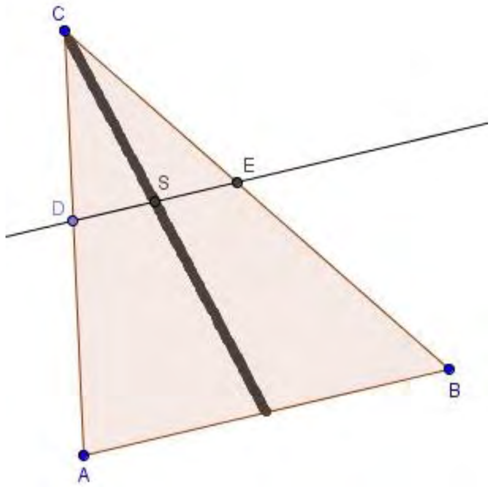


Obrázok 13. Rozdelenie trojuholníka bodom *M*.

Tým sme zamerali pozornosť žiakov na ťažnice a ťažisko trojuholníka. Učiteľ by mohol spomenúť aj možnosť experimentálneho určovania ťažníc útvarov pomocou olovnice. Ak by sme zavesili plochý predmet v tvare *n*-uholníka v niektorom vrchole, v ktorom by visela aj olovnica, tak olovnica by určovala ťažnicu *n*-uholníka. Učiteľ by mohol dať žiakom niekoľko otázok na význam pojmu ťažisko.

- *V akom bode by sme mali podoprieť pravítko v tvare trojuholníka hrotom ceruzky, aby ostalo v stabilnej polohe?*
- *Ako možno experimentálne určovať ťažisko rovinného útvaru pomocou olovnice?*
- *Ako možno zostrojiť ťažnicu trojuholníka?*

Odpoveď na tretiu otázku by si väčšina žiakov pamätala so základnej školy. Ale prečo je ťažnica určená vrcholom a stredom protiľahlej strany? Na vysvetlenie postupu konštrukcie ťažnice trojuholníka možno využiť aj nasledovnú úvahu. Pri rozdelení trojuholníka na tenké pruhy čiarami rovnobežnými s jednou stranou trojuholníka by každý pruh mal ťažisko vo svojom strede. Ak by sme pruhy ďalej stenčovali, v limitnom prípade získame úsečky. Na skúmanie polohy stredov priečok trojuholníka využijeme interaktívnu demonštráciu uloženú v súbore **taznica_model.ggb**. Pomocou dynamickej konštrukcie možno zostrojiť množinu bodov, ktoré získame, ak pospájame stredy úsečiek rovnobežných s jednou stranou trojuholníka. Na obrázku (Obrázok 14) je pomocou stopy bodu *S* načrtnutá množina stredov úsečiek *DE*, ktoré boli posúvané rovnobežne so stranou *AB* pohybom bodu *D* po strane *AC*.



Obrázok 14. Využitie stopy bodu *S* pri načrtnutí ťažnice.

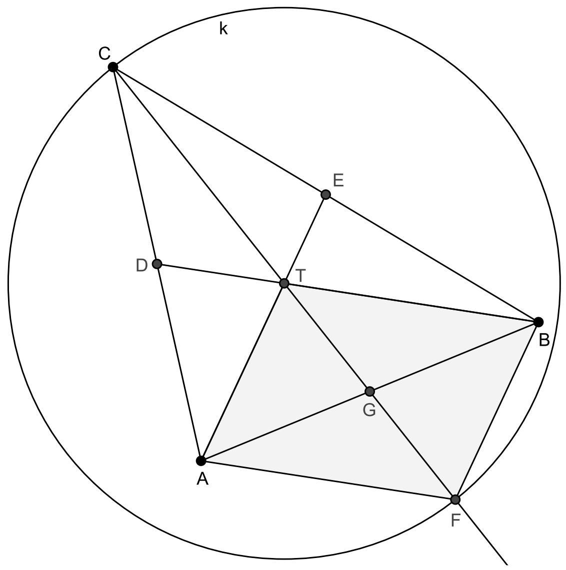
Potom by učiteľ zostrojil ťažnice v trojuholníku *ABC* a posúvaním vrcholov trojuholníka by žiakom demonštroval umiestnenie ťažníc a polohu ťažiska pre rôzne typy trojuholníkov. Poukázal by aj na skutočnosť, že všetky tri ťažnice sa pretínajú v jednom bode. Po interaktívnej demonštrácii by dal učiteľ žiakom otázku:

- *Ako súvisí ťažnica s obsahom trojuholníka?*

Žiaci by mali prísť na to, že ťažnica rozdeľuje trojuholník na dva trojuholníky s rovnakým obsahom. Pri opakovaní vlastností ťažníc by žiaci možno spomenuli aj poznatok, že ťažisko rozdeľuje ťažnicu od vrcholu k stredu protiľahlej strany na dva úseky, ktorých dĺžky sú v pomere 2:1. Ak nie, učiteľ by zadal žiakom otázku:

- *Ako možno charakterizovať polohu ťažiska na ťažnici trojuholníka?*

Na porozumenie súvislostí medzi skúmanými objektmi využije učiteľ ďalšiu interaktívnu demonštráciu uloženú v súbore **taznice_trojuholnika.ggb**. Aby jej žiaci lepšie porozumeli, učiteľ by mal prehrať žiakom aj postup zostavenia konštrukcie. V trojuholníku *ABC* boli zostrojené ťažnice *AE* a *BD*, a v ich priesečníku ťažisko *T*. Potom bola zostrojená polpriamka *CT* a na nej bod *F* tak, aby platilo $|CT| = |TF|$. V priesečníku polpriamky *CF* a úsečky *AB* je zostrojený bod *G* (Obrázok 15).



Obrázok 15. Konštrukcia na skúmanie vzťahov v trojuholníku *ABC*.

Po predstavení konštrukcie by mohol učiteľ pohybovať vrcholmi trojuholníka *ABC* a vyzval by žiakov, aby zamerali svoju pozornosť na štvoruholník *AFBT*. Učiteľ by zadal žiakom otázku:

- *Aké vlastnosti má štvoruholník AFBT?*

Žiaci by mohli vysloviť hypotézu, že štvoruholník *AFBT* je rovnobežníkom.

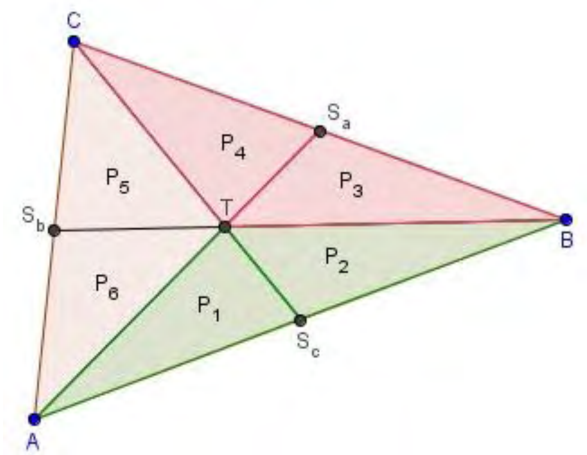
Pri zdôvodnení hypotézy využijeme aj vlastnosti strednej priečky trojuholníka. V trojuholníku *CFB* je úsečka *TE* stredná priečka, preto je priamka *TE* rovnobežná s priamkou *FB*. V trojuholníku *CAF* je úsečka *DT* stredná priečka, a preto je priamka *DT* rovnobežná s priamkou *AF*. Ukázali sme, že útvar *AFBT* je rovnobežník.

Uhlopriečky rovnobežníka sa pretínajú v bode, ktorý ich rozpoľuje. Bod *G* je preto stredom strany *AB*. To ale znamená, že úsečka *CG* je ťažnicou trojuholníka. Tým sme zdôvodnili, že všetky tri ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode – v ťažisku trojuholníka. Navyše dĺžka úsečky *TG* je polovica z dĺžky úsečky *TF* a teda aj z dĺžky úsečky *CT*. Preto platí, že ťažisko rozdeľuje ťažnicu t_c na úseky, ktorých dĺžky sú v pomere 2:1.

Na prehlbovanie a rozvíjanie poznatkov žiakov sme pripravili pracovný list **M 2.3_tazisko.docx**. Pracovný list obsahuje postupnosť úloh, pri riešení ktorých budú žiaci vedení k skúmaniu geometrických vzťahov a k hľadaniu vhodných argumentov na zdôvodňovanie experimentálne objavených zistení. Sformulované zistenia budú mať žiaci aj zdôvodňovať pomocou vlastností strednej priečky trojuholníka, obsahu trojuholníkov, zhodnosti a podobnosti trojuholníkov a vlastností rovnobežníkov.

Metodická poznámka: Pri riešení posledných troch úloh z pracovného listu budú môcť žiaci využívať aj program Geogebra. Predpokladáme, že trojuholníky a ďalšie pomocné útvary budú žiaci vedieť vytvárať samostatne podľa inštrukcií v pracovnom liste. Ak žiaci nemajú skúsenosti so zostrojovaním geometrických útvarov a využívania základných konštrukčných postupov, môže učiteľ niektoré dynamické konštrukcie pripraviť vopred.

V prvej úlohe majú žiaci preskúmať obsah trojuholníkov, na ktoré rozdelili trojuholník *ABC* tri ťažnice. Na obrázku (Obrázok 16) sú dvojice trojuholníkov pri každej strane trojuholníka *ABC* vyfarbené rovnakými farbami. Obsahy trojuholníkov sú označené P_1, ..., P_6.

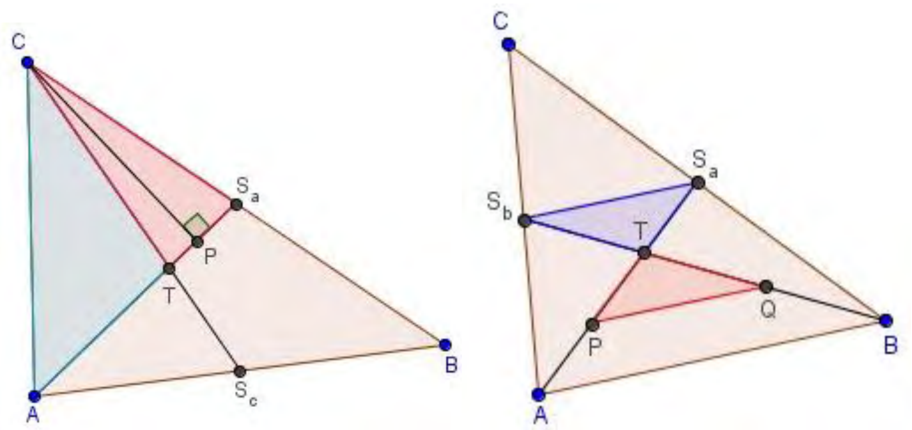


Obrázok 16. Rozdelenie trojuholníka *ABC* jeho ťažnicami.

V prvej parciálnej úlohe majú žiaci nájsť vzťah medzi obsahmi trojuholníkov AS_cT a S_cBT. Po zistení, že tieto obsahy sú rovnaké, by sa mali zamerať aj na obsahy ďalších dvojíc trojuholníkov pri zvyšných stranách trojuholníka *ABC*. Vzhľadom na vyslovenú hypotézu o rozdelení trojuholníka ťažiskom na tri trojuholníky s rovnakým obsahom by už žiakom malo pomôcť, že vedia, k akému záveru by chceli dôjsť. Pri zdôvodňovaní experimentálneho zistenia majú v ďalších parciálnych úlohách nájsť a zdôvodniť vzťah medzi obsahmi trojuholníkov TBS_a a ATS_b; S_cBT a S_bTC. Pri riešení týchto úloh môžu využiť analogické úvahy, ako pri riešení úlohy 2b z prvého pracovného listu. Keďže trojuholníky ABS_a a ABS_b majú rovnaký obsah a trojuholník *ABT* je súčasťou oboch trojuholníkov, tak aj trojuholníky TBS_a a ATS_b majú rovnaký obsah. Pri analýze žiackych riešení pri vyhodnocovaní pracovného listu by mal učiteľ zhrnúť riešenie prvej úlohy a zdôrazniť, že ho možno využiť na zdôvodnenie hypotézy o ťažisku trojuholníka.

V druhej úlohe pracovného listu majú žiaci nájsť vhodné argumenty na zdôvodnenie vlastnosti, že ťažisko rozdeľuje ťažnicu od vrcholu trojuholníka k stredu protiľahlej strany na úseky, ktorých dĺžky sú v pomere 2:1.

Úloha 8. Na obrázkoch je zostrojený trojuholník *ABC* a dve jeho ťažnice. Na obrázku (Obrázok 17) vľavo je bod *P* kolmým priemetom vrcholu *C* na ťažnicu AS_a. Na obrázku (Obrázok 17) vpravo sú body *P*, *Q* stredmi úsečiek *AT* a *BT*. Vyberte si jeden obrázok a skúste využiť zistenia o obsahoch trojuholníkov alebo vlastnosti strednej priečky trojuholníka na zdôvodnenie vlastnosti, že ťažisko rozdeľuje ťažnicu od vrcholu trojuholníka k stredu protiľahlej strany na úseky, ktorých dĺžky sú v pomere 2:1.



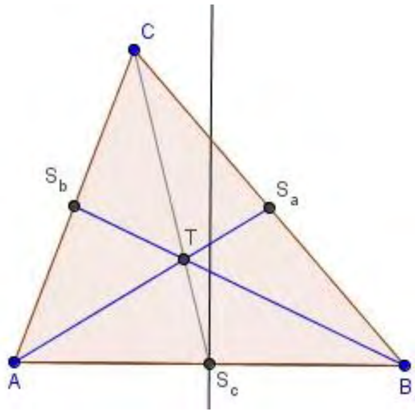
Obrázok 17. Náčrty na zdôvodnenie vlastností ťažiska.

Podľa predchádzajúcich zistení je na obrázku vľavo pomer obsahov trojuholníkov *ATC* a TS_aC rovný 2:1. Keďže oba trojuholníky majú rovnakú výšku, tak aj pomer dĺžok úsečiek *AT* a TS_a je rovný 2:1. Kľúčovým prvkom pri riešení úlohy 8 pomocou obrázka vpravo je objavenie a zdôvodnenie vzťahu medzi trojuholníkmi *PQT* a S_aS_bT. Na základe vlastnosti stredných priečok S_bS_a v trojuholníku *ABC* a *PQ* v trojuholníku *ABT* sú trojuholníky *PQT* a S_aS_bT zhodné (podľa vety usu). Potom platí, že pomer dĺžok úsečiek *AT* a TS_a aj *BT* a TS_b je rovný 2:1.

Tretia úloha pracovného listu je zameraná na skúmanie vzťahu medzi dĺžkami ťažníc t_a, t_b, v závislosti od vzťahu medzi dĺžkami strán *a*, *b*.

Úloha 9. Preskúmajte, ako závisí v trojuholníku vzťah medzi dĺžkami ťažníc t_a, t_b, od vzťahu medzi dĺžkami strán *a*, *b*. Sformulujte tvrdenie.

V rovnoramennom trojuholníku *ABC* so základňou *AB* sú dĺžky strán *a*, *b* rovnaké, lebo vrchol *C* leží na osi strany *AB*. Žiaci by si mali uvedomiť, že v rovnoramennom trojuholníku so základňou AB leží ťažisko na osi strany AB a obe ťažnice t_a aj t_b majú rovnakú dĺžku. Ak vrchol C leží v tej istej polrovine určenej osou o strany AB ako vrchol A, tak pre dĺžky strán a, b platí, že $a > b$ (Obrázok 18). V takomto prípade leží celá ťažnica t_c v tej istej polrovine ako vrcholy A, C a teda aj ťažisko T leží v tej istej polrovine. Potom však 2/3 z dĺžky ťažnice t_a je menej ako 2/3 z dĺžky ťažnice t_b. Aj pre dĺžky celých ťažníc tak platí, že $t_a < t_b$.



Obrázok 18. Skúmanie vzťahu medzi dĺžkami strán a príslušných ťažníc v trojuholníku ABC.

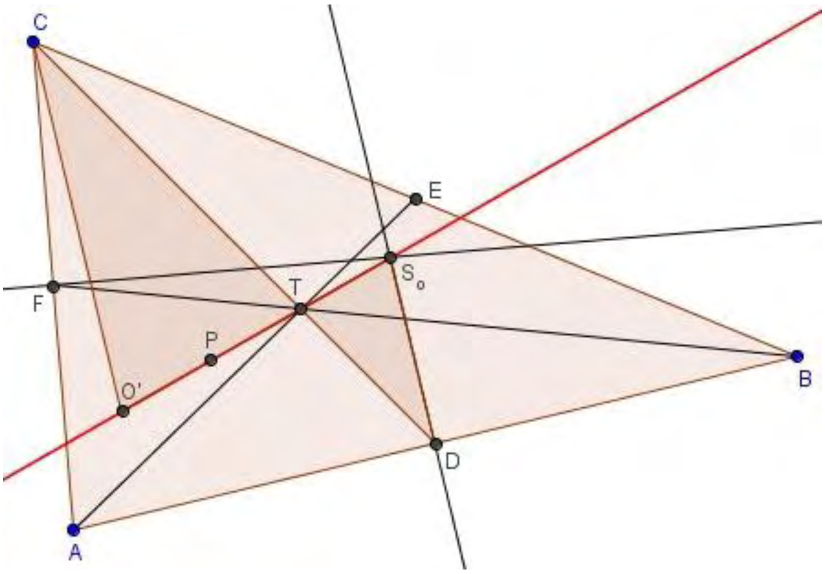
V ďalšej úlohe pracovného listu majú žiaci zamerať svoju pozornosť na ťažisko priečkového trojuholníka v trojuholníku ABC. Po vytvorení dynamickej konštrukcie a preskúmaní rôznych trojuholníkov ABC by žiaci mali zistiť, že ťažiská oboch trojuholníkov splývajú. Ak sa zameriame napr. na štvoruholník $AS_cS_aS_b$, tak pomocou vlastnosti stredných priečok môžeme ľahko ukázať, že štvoruholník $AS_cS_aS_b$ je rovnobežník. Potom ťažnica AS_a pretína strednú priečku S_cS_b v jej strede. Ale potom ťažnica priečkového trojuholníka obsahujúca vrchol S_a a teda aj jeho ťažisko leží na ťažnici trojuholníka ABC. Táto vlastnosť platí analogicky aj pre ďalšie ťažnice, a preto ťažiská oboch trojuholníkov sú totožné.

V poslednej úlohe pracovného listu majú žiaci preskúmať polohu troch dôležitých bodov v trojuholníku, a to ťažiska T, ortocentra O a stredu opísanej kružnice S_o. Vzájomnú polohu týchto bodov v trojuholníku skúmal aj známy matematik Leonhard Euler, ktorý dokázal, že ťažisko, ortocentrum a stred opísanej kružnice ležia v každom nerovnostrannom trojuholníku na jednej priamke – Eulerovej priamke.

Úloha 10. V trojuholníku ABC zostrojte ťažisko T, ortocentrum O a stred opísanej kružnice S_o. Vzájomnú polohu týchto bodov v trojuholníku skúmal aj známy matematik Euler a o ich vzájomnej polohe sformuloval tvrdenie. Vyšetrite vzájomnú polohu týchto bodov pre rôzne typy trojuholníkov.

V prostredí programu Geogebra zostroja žiaci rôzne typy trojuholníkov a preskúmajú vzájomnú polohu ťažiska, ortocentra a stredu kružnice opísanej trojuholníku. Žiaci by mali zistiť, že v rovnostrannom trojuholníku body T, O, S_o splývajú. V rovnoramennom trojuholníku ležia všetky tri skúmané body na osi základne AB. Zaujímavá situácia nastáva v pravouhlom trojuholníku. Ortocentrum je totožné s vrcholom trojuholníka, pri ktorom je pravý uhol. Stred opísanej kružnice je v strede prepony. Spojnica týchto dvoch bodov tvorí ťažnicu na preponu, ktorá obsahuje aj ťažisko trojuholníka. V prípade rovnoramenného a pravouhlého trojuholníka môžu žiaci ľahko zdôvodniť, že body T, O, S_o ležia na jednej priamke. Vo všeobecnom ostrouhlom aj tupouhlom trojuholníku ležia body T, O, S_o tiež na jednej priamke. Objavené zistenia majú žiaci zapísať do tabuľky v pracovnom liste.

V prípade všeobecného trojuholníka je zdôvodnenie tvrdenia, že ortocentrum, ťažisko a stred opísanej kružnice ležia na jednej priamke, zložitejšie. V triede s nadanými žiakmi by učiteľ mohol žiakom vysvetliť podstatnú časť dôkazu. V konštrukcii **eulerova_priamka.ggb** obsahujúcej trojuholník ABC a vyšetrované body skryjeme ortocentrum a necháme zobrazené len ťažisko a stred opísanej kružnice. Na polpriamke S_oT zostrojíme bod O' tak, aby platilo: $|TO'| = 2 \cdot |TS_o|$. Potom ukážeme, že bod O' leží na dvoch výškach trojuholníka ABC, a preto je to ortocentrum trojuholníka. Opisovaná konštrukcia je zobrazená na obrázku (Obrázok 19).



Obrázok 19. Náčrt pre zdôvodnenie kolineárnosti ťažiska, stredu opísanej kružnice a ortocentra.

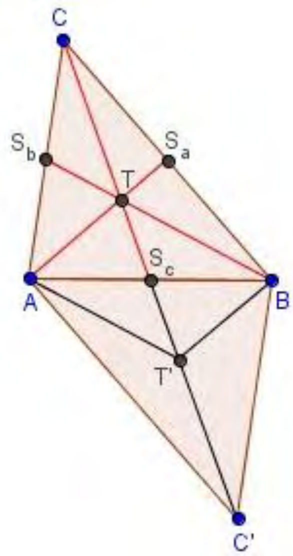
Pomocou konštrukcie na obrázku (Obrázok 19) možno ukázať, že bod O' leží na výške na stranu c. Trojuholníky TDS_o a TCO' sú podľa vety sus podobné, lebo CD je ťažnica trojuholníka a tiež je rozdelená ťažiskom v pomere 2:1. Potom je úsečka CO' rovnobežná s osou DS_o strany AB a teda je časťou priamky prechádzajúcej bodom C, ktorá je kolmá na stranu AB. Bod O' preto leží na výške na stranu c. Podobným spôsobom možno ukázať, že bod O' leží aj na výške na stranu a alebo b v trojuholníku ABC.

Aplikácia poznatkov o ťažisku trojuholníka pri riešení úloh

Pri riešení motivačnej úlohy v predchádzajúcej časti sme ukázali, že ťažisko trojuholníka po jeho spojení úsečkami s vrcholmi trojuholníka rozdeľuje trojuholník na tri trojuholníky s rovnakým obsahom. Niektorých žiakov môže napadnúť otázka, či uvedenú vlastnosť nemôžu mať aj iné body v trojuholníku. Pre matematicky nadaných žiakov môže učiteľ naznačiť zdôvodnenie skutočnosti, že ťažisko je jediný bod trojuholníka s uvedenou vlastnosťou. Budeme predpokladať, že uvedenú vlastnosť má okrem ťažiska T aj bod X. Zostrojíme priamku p prechádzajúcu bodom X rovnobežnú so stranou AB. Obsah trojuholníka ABX sa rovná jednej tretine z obsahu trojuholníka ABC. To isté platí aj pre obsah trojuholníka ABT. Potom body X a T majú rovnakú vzdialenosť od strany AB, a preto aj ťažisko T leží na priamke p. V ďalšom kroku zostrojíme priamku q prechádzajúcu cez bod X rovnobežnú so stranou BC. Pomocou analogickej úvahy možno zdôvodniť, že aj ťažisko T musí ležať na priamke q. Potom ťažisko T leží v prieniku priamok p, q a je totožné s bodom X.

Osvojené poznatky získané pri riešení úloh v pracovnom liste a pri skúmaní geometrických vzťahov v prostredí dynamickej geometrie by si mohli žiaci precvičiť a prehĺbiť pri riešení ďalších úloh. Na ukážku sme vybrali jednu konštrukčnú úlohu.

Úloha 11. Zostrojte trojuholník ABC, ak $t_a = 5$ cm, $t_b = 6$ cm, $t_c = 7$ cm.



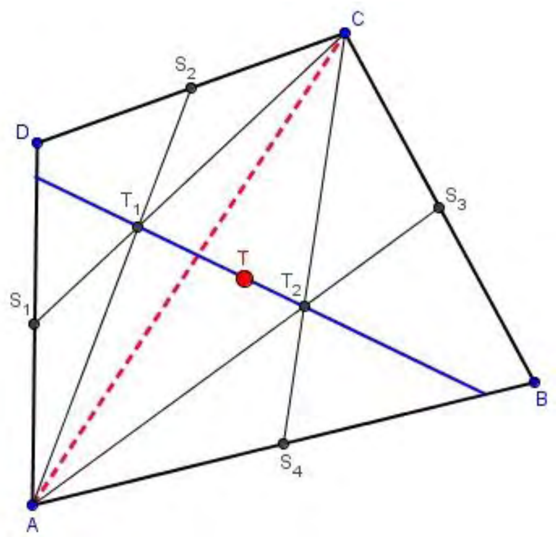
Obrázok 20. Náčrt zobrazujúci hlavný krok riešenia úlohy 11.

Náčrt trojuholníka ABC s hlavným krokom riešenia úlohy je zobrazený na obrázku (Obrázok 20). Pri riešení úlohy najprv zostrojíme úsečku CC' s dĺžkou $2t_c$, stredom ktorej je bod S_c. Potom zostrojíme ťažisko T a jeho obraz T' v stredovej súmernosti určenej stredom S_c. Ako už bolo dokázané v konštrukcii na obrázku (Obrázok 17), útvar $AT'BT$ je rovnobežníkom, uhlopriečky ktorého sa pretínajú v bode S_c. Využitím 2/3 z ťažníc t_a a t_b možno pomocou dvoch kružníc so stredmi v bodoch T, T' ľahko zostrojiť vrchol A alebo vrchol B.

Doteraz sme pracovali len s ťažnicami a ťažiskom trojuholníka. Osvojené poznatky možno ďalej rozvíjať a aplikovať aj na štvoruholníky. Učiteľ by žiakom zadal otázky týkajúce sa ťažiska štvorca, obdĺžnika. Potom by zadal žiakom úlohu určiť ťažisko štvoruholníka. Učiteľ by žiakov usmernil, že ak by sme rozdelili štvoruholník na dva útvary a určili ťažiská oboch útvarov, tak na priamke určenej nájdenými ťažiskami leží ťažnica štvoruholníka. Žiaci by tak mohli využiť poznatky o ťažisku trojuholníka pri hľadaní ťažníc štvoruholníka. Pri bádaní by mohli žiaci používať aj dynamickú konštrukciu uloženú v súbore **tazisko_stvoruholnika.ggb**, v ktorej je už určené ťažisko štvoruholníka využitím príkazu Ťažisko. Tým by žiaci získali pri svojej konštrukcii ťažiska spätnú väzbu o vhodnosti navrhnutého postupu.

Úloha 12. Nájdite postup na zostrojenie ťažiska štvoruholníka.

Postup je založený na myšlienke, že ak rozdelíme uhlopriečkou štvoruholník na dva trojuholníky, tak ťažisko štvoruholníka musí ležať na spojnici ťažísk trojuholníkov. Takýmto spôsobom možno zostrojiť dve ťažnice štvoruholníka *ABCD* (Obrázok 21).



Obrázok 21. Zostrojenie ťažnice štvoruholníka.

Po rozdelení štvoruholníka *ABCD* uhlopriečkou *BD* na dva trojuholníky možno analogickým spôsobom zostrojiť druhú ťažnicu. V priesečníku zostrojených ťažníc leží ťažisko štvoruholníka *ABCD*. Žiaci by si mohli všimnúť aj skutočnosť, že zostrojené ťažnice štvoruholníka *ABCD* sú rovnobežné s jeho uhlopriečkami. Na obrázku (Obrázok 21) je ťažnica T_1T_2 rovnobežná s uhlopriečkou BD. Podľa vety sus sú trojuholníky AT_1T_2 a AS_2S_3 podobné.

Potom úsečky T_1T_2 a S_2S_3 sú rovnobežné. Úsečka S_2S_3 je stredná priečka v trojuholníku *DBC*, preto je rovnobežná s uhlopriečkou *BD* a aj ťažnica T_1T_2 je rovnobežná s uhlopriečkou *BD*.

M3 – Stredový a obvodový uhol a ich aplikácie pri skúmaní množín bodov

Tematický celok	
Geometria a meranie	
Cieľová skupina	Odhadovaný čas výučby
Prvý ročník SŠ	Tri vyučovacie hodiny
Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti	Kognitívne ciele
▪ Ovládať základné vzťahy medzi vnútornými a vonkajšími uhlami v trojuholníkoch, ▪ ovládať základné množiny všetkých bodov s danou vlastnosťou využívané pri riešení konštrukčných úloh, ▪ vyšetrovať vzťahy medzi útvarmi manipulovaním s voľnými prvkami dynamických konštrukcií, ▪ zostrojovať základné typy geometrických útvarov v dynamickom geometrickom systéme a využívať nástroje na načrtnutie množín všetkých bodov s danou vlastnosťou.	▪ Aplikovať Talesovu kružnicu pri riešení úloh, ▪ odvodiť vzťah medzi stredovým a obvodovým uhlom v kružnici, ▪ zovšeobecniť vlastnosť Talesovej kružnice a porozumieť konštrukciu množiny všetkých bodov v rovine, z ktorých vidno danú úsečku pod daným uhlom (množina *G*), ▪ charakterizovať a zostrojiť množinu všetkých bodov, z ktorých vidieť úsečku *AB* pod daným uhlom, ▪ aplikovať osvojené poznatky pri riešení konštrukčných úloh.
Bádateľské zručnosti	Didaktický problém
▪ Manipulovať s geometrickými útvarmi pomocou softvéru a analyzovať pozorované výsledky, ▪ určovať vzťahy medzi premennými veličinami, formulovať hypotézy, ▪ navrhnúť postup modelovania pri testovaní hypotéz, ▪ využívať vhodné argumenty pri zdôvodňovaní objavených zistení.	▪ Žiaci často nevedia identifikovať množinu všetkých bodov v rovine, z ktorých vidno danú úsečku pod daným uhlom (množina *G*) a nevidia súvis medzi Talesovou kružnicou a množinou *G*. Preto je vhodné využiť manipulovanie s dynamickými konštrukciami na skúmanie rôznych konkrétnych prípadov, objavovanie vzťahov a rozvíjanie geometrickej predstavivosti žiakov. ▪ Upevňovať u žiakov presvedčenie, že experimentálne objavené vzťahy je nutné zdôvodňovať a snažiť sa zovšeobecniť vo forme matematických tvrdení.

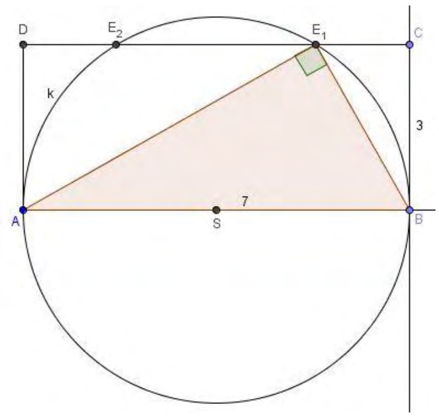
Didaktické materiálne prostriedky	Didaktické metódy a organizačné formy
▪ pracovný list (M 3.1), ▪ dynamické konštrukcie vytvorené v dynamickom geometrickom systéme.	▪ Štruktúrované bádanie, ▪ riadený rozhovor, ▪ individuálna forma práce pri počítačoch.

Úvod

Návrh predloženej metodiky je založený na aplikovaní bádateľských prístupov k vyučovaniu, ktoré stimulujú žiakov k aktívnemu skúmaniu vlastností geometrických útvarov a vzťahov medzi nimi a k osvojovaniu nových poznatkov. V podnetnom vzdelávacom prostredí založenom na manipulovaní s voľnými prvkami dynamických konštrukcií môžu žiaci nadobúdať nové skúsenosti a zručnosti pre skúmanie a zdôvodňovanie geometrických zákonitostí. Objavené vzťahy budú žiaci využívať pri načrtnutí a vyšetrovaní množín všetkých bodov v rovine s danou vlastnosťou. Pre množinu všetkých bodov v rovine, z ktorých vidieť danú úsečku *AB* pod daným uhlom budeme využívať označenie množina *G*.

Talesova kružnica – prehlbovanie poznatkov

Zámerom úvodnej úlohy je zistiť, či si žiaci pamätajú zo ZŠ vetu o Talesovej kružnici a zopakovať so žiakmi základné množiny všetkých bodov v rovine s danou vlastnosťou.



Obrázok 22. Dynamická konštrukcia pre interaktívnu demonštráciu.

Úloha 1. V obdĺžniku *ABCD* s danými dĺžkami strán *a*, *b* zostrojte pravouhlý trojuholník *ABE* s pravým uhlom pri vrchole *E* ležiacom na strane *CD*.

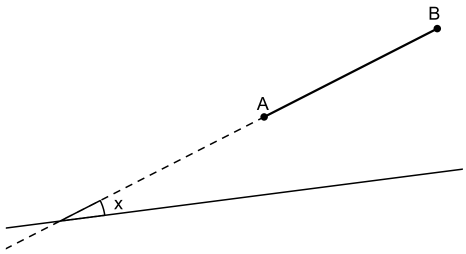
Pri rozbore riešenia konštrukčnej úlohy učiteľ zopakuje so žiakmi vetu o Talesovej kružnici, množinu všetkých bodov v rovine, ktoré majú od priamky rovnakú vzdialenosť (ekvidištanta priamky) a prípadne aj ďalšie množiny všetkých bodov, ktoré by už mali žiaci poznať zo základnej školy. Konštrukciu pre dĺžky strán a = 7 cm a b = 3 cm vypracujú žiaci pomocou klasických rysovacích pomôcok.

Pre zadané dĺžky strán obdĺžnika *ABCD* má úloha v jednej polrovine určenej priamkou *AB* dve riešenia. Po vyriešení konštrukčnej úlohy je zaujímavá otázka existencie pravouhlého trojuholníka *ABE* s danými vlastnosťami pre iné dĺžky strán obdĺžnika *ABCD*. Pri diskusii o počte riešení konštrukčnej úlohy učiteľ využije pre interaktívnu demonštráciu dynamickú konštrukciu zobrazenú na obrázku (Obrázok 22) (**prav_troj_v_obdlzniku.ggb**). Pri posúvaní bodu *C* po priamke kolmej na priamku *AB*, ktorá prechádza bodom *B*, môžu žiaci pozorovať polohu a počet priesečníkov kružnice k a priamky *DC*. Na záver pozorovania by mali žiaci stanoviť vzťah medzi dĺžkami a, b, ktorý musí byť splnený, aby existoval bod *E* na úsečke *CD*: $b \leq \frac{a}{2}$.

Aby žiaci porozumeli významu pojmu množina všetkých bodov roviny s danou vlastnosťou, zaradili sme do výučby aj úlohu na vyšetrovanie veľkosti uhlov s vrcholmi v bodoch ležiacich mimo Talesovej kružnice. Žiaci majú pri riešení úlohy využiť aj trojuholníky *ABC* s tupým uhlom pri vrchole *C*. Základom zadania nasledujúcej úlohy je opis reálnej situácie.

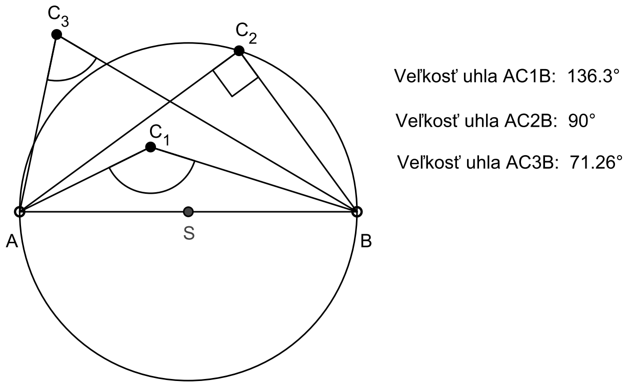
Úloha 2. Vedľa priamej cesty je umiestnený reklamný nápis, ktorý zviera s cestou ostrý uhol s veľkosťou x. Rovnobežne s cestou má byť vytvorený chodník tak, aby sa na ňom nachádzali miesta, z ktorých vidieť reklamný nápis pod tupým uhlom. Určte hraničné priamky rovinného pásu, v ktorom môžu ležať priamky predstavujúce chodník, ktoré spĺňajú zadanú podmienku.

Náčrt k úlohe 2 vytvorený pri pohľade zhora je zobrazený na obrázku (Obrázok 23). Reklamný nápis predstavuje úsečka *AB*.



Obrázok 23. Náčrt k riešeniu úlohy 2.

Ešte pred tým, ako by žiaci pristúpili k vyriešeniu úlohy 2, by mohol učiteľ využiť dynamickú konštrukciu **talesova_kruznica_uhly.ggb**, v ktorej je zostrojená Talesova kružnica *k* nad priemerom *AB* a vrcholy C_1, C_2 a C_3 trojuholníkov so stranou *AB* ležiace vnútri kružnice *k*, na kružnici *k* a vo vonkajšej oblasti kružnice *k* (Obrázok 24). Učiteľ by vyzval žiakov, aby vyslovili svoje domnienky pre veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch C_1, C_2 a C_3. Po vyslovení žiackych domnienok využije učiteľ interaktívnu demonštráciu vytvorenú vo forme dynamickej konštrukcie. Po odmeraní veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch C_1, C_2 a C_3 bude učiteľ postupne posúvať bod C_1 vnútri kružnice *k*, bod C_2 po kružnici *k* a bod C_3 vo vonkajšej oblasti kružnice *k* a žiaci budú pozorovať veľkosti vnútorných uhlov.



Obrázok 24. Konštrukcia na pozorovanie veľkostí uhlov.

Pri manipulovaní s dynamickou konštrukciou vidno, že veľkosť uhla AC_1B je väčšia ako 90°, veľkosť uhla AC_2B je 90°, ak bod C_2 nesplýva s bodom *A* alebo *B* a veľkosť uhla AC_3B je menšia ako 90°. Cieľom tejto konštrukcie je pomôcť žiakom uvedomiť si, že bod roviny, ktorý neleží na kružnici s priemerom *AB*, nemôže byť vrcholom pravouhlého trojuholníka s preponou *AB*.

Metodická poznámka: Po zopakovaní vety o Talesovej kružnici pristúpime k jej zdôvodneniu. Odporúčame využiť riadený rozhovor, v ktorom učiteľ zadáva žiakom otázky vedúce k hľadaniu vhodných argumentov na zdôvodňovanie skúmaných vzťahov. Postupnosť otázok, ktoré by učiteľ mohol zadávať žiakom, je predmetom riešenia úlohy 3.

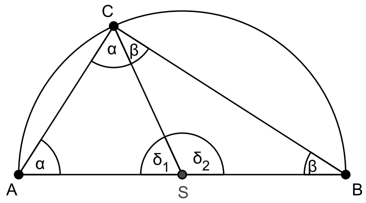
Úloha 3. Načrtnite kružnicu *k* s priemerom *AB* a trojuholník *ABC*, pričom bod *C* leží na kružnici *k*. V trojuholníku *ABC* vyznačte ťažnicu *CS* na stranu *AB*.

1) Akú vlastnosť majú trojuholníky *ASC* a *BSC*?

2) Aké vzťahy platia pre veľkosti uhlov *ASC* a *BSC*?

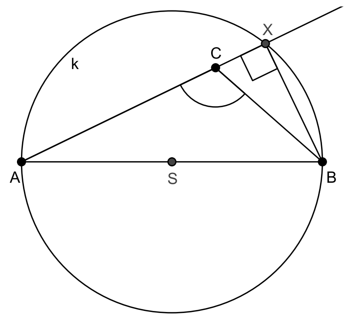
3) Určte veľkosť uhla pri vrchole *C* v trojuholníku *ABC*.

Ak bod *C* leží na kružnici so stredom v bode *S*, tak trojuholníky *ACS* a *BCS* sú rovnoramenné a preto majú rovnako veľké uhly pri základni. Využitím vzťahov pre vonkajšie uhly v trojuholníkoch platí: $\delta_1 = 2\beta$, $\delta_2 = 2\alpha$. Potom platí $\delta_1 + \delta_2 = 180°$, teda $\alpha + \beta = 90°$.



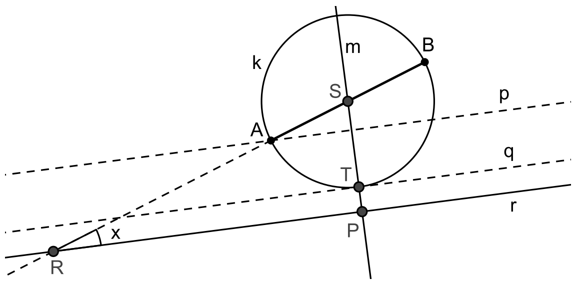
Obrázok 25. Náčrt pre zdôvodnenie Talesovej vety.

Pri zdôvodňovaní tvrdenia, že kružnica zostrojená nad priemerom *AB* (okrem bodov *A*, *B*) obsahuje všetky body roviny, z ktorých vidno úsečku *AB* pod uhlom 90°, musíme ešte ukázať, že ak z nejakého bodu *C* vidno úsečku *AB* pod pravým uhlom, tak bod *C* musí ležať na kružnici *k* so stredom *S* v strede strany *AB*. Z uvedeného tvrdenia zostavíme obmenenú vetu. Máme ukázať, že ak bod *C* neleží na kružnici *k*, tak veľkosť uhla *ACB* sa nerovná 90°. Na obrázku (Obrázok 26) je zobrazený prípad, kedy bod *C* leží vo vnútri kružnice *k* s priemerom *AB*. Zostrojíme polpriamku *AC* a v jej priesečníku s kružnicou *k* zostrojíme bod *X*. Už bolo dokázané, že uhol *AXB* je pravý. Keďže uhol *ACB* je vonkajší uhol v trojuholníku *BXC*, tak jeho veľkosť je väčšia ako 90°. Využitím polpriamky *AC* môžu žiaci podobným spôsobom zdôvodniť, že ak bod *C* leží zvonku kružnice *k*, tak veľkosť uhla *ACB* je menšia ako 90°.



Obrázok 26. Bod *C* ležiaci vo vnútri kružnice *k*.

V závere tejto časti sa vrátime k riešeniu úlohy 2. Žiaci by si mali uvedomiť, že ak majú byť na chodníku miesta, z ktorých vidno reklamný nápis pod tupým uhlom, tak chodník musí obsahovať body zvnútra Talesovej kružnice *k* zostrojenej nad priemerom *AB*.



Obrázok 27. Konštrukcia k riešeniu úlohy 2.

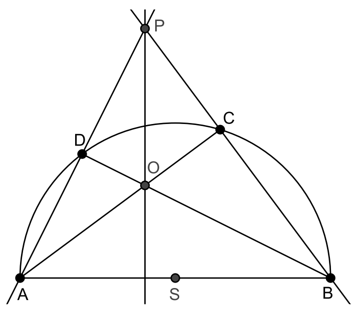
Pri hľadaní krajnej polohy pre umiestnenie chodníka je potrebné zostrojiť dotyčnicu kružnice *k* rovnobežnú s priamkou *r* predstavujúcou priamu cestu, ktorá zviera s priamkou *AB* uhol *x*. Z dvoch dotyčníc spĺňajúcich uvedenú podmienku vyberieme tú, ktorá ma menšiu vzdialenosť od priamky *r*. Hľadaný dotykový bod *T* leží v priesečníku kružnice *k* a kolmice *m* na priamku *r* vedenej cez bod *S*.

Pri hľadaní riešenia úlohy 2 môžu žiaci posúvať v dynamickej konštrukcii bod *R* po priamke *AB* a znázorňovať rôzne vzájomné polohy cesty a kružnice *k*. Krajné polohy chodníka, ktoré ešte nevyhovujú zadaniu úlohy, predstavujú priamky *p*, *q*, ktoré sú rovnobežné s priamkou *r* (Obrázok 27). Priamka *p* prechádza bodom *A*. Ľubovoľná rovnobežná priamka s priamkou *r* ležiaca medzi týmito priamkami predstavuje riešenie úlohy.

Nasledujúca úloha predstavuje jednoduchú aktivitu na rozvíjanie bádateľských zručností, v ktorej by mali žiaci využiť poznatky o Talesovej kružnici pri návrhu a vypracovaní dynamickej konštrukcie na vyšetrovanie vzájomnej polohy dvoch priamok.

Úloha 4. Daná je úsečka *AB* a dva rôzne pravouhlé trojuholníky *ABC* a *ABD* s preponou *AB* ležiace v jednej polrovine určenej priamkou *AB*. V priesečníku priamok *AC* a *BD* leží bod *Q* a v priesečníku priamok *AD* a *BC* leží bod *P*. Určte vzájomnú polohu priamok *AB* a *PQ*.

Využitím Talesovej kružnice môžu žiaci zostrojiť dva rôzne pravouhlé trojuholníky *ABC* a *ABD*, pričom posun bodov *C*, *D* po kružnici umožňuje žiakom preskúmať rôzne dvojice pravouhlých trojuholníkov (Obrázok 28). Experimentovaním s dynamickou konštrukciou môžu žiaci zistiť, že priamky *AB* a *PQ* sú rôznobežné a ich priesečník leží vždy na úsečke *AB*. Po preskúmaní niekoľkých konkrétnych prípadov a prípadne aj odmeraní uhla týchto priamok môžu žiaci vysloviť hypotézu, že priamky *AB* a *PQ* sú navzájom kolmé.



Obrázok 28. Náčrt k riešeniu úlohy 4.

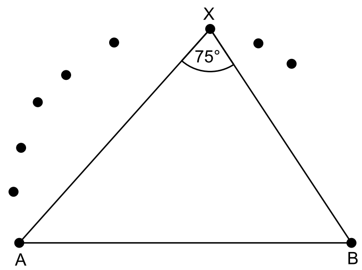
Pri zdôvodňovaní objaveného vzťahu využijeme vlastnosti výšok v trojuholníku *ABP*. Keďže bod *D* leží na Talesovej kružnici s priemerom *AB*, priamka *BD* je kolmá na priamku *AP* a úsečka *BD* je preto výškou na stranu *AP* v trojuholníku *ABP*. Podobne je úsečka *AC* výškou na stranu *BP*. Bod *Q* ležiaci v priesečníku výšok je ortocentrum trojuholníka *ABP*. Vzhľadom na skutočnosť, že všetky výšky v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode, musí na priamke *PQ* ležať aj tretia výška trojuholníka *ABP* a preto je priamka *PQ* kolmá na priamku *AB*.

Stredový a obvodový uhol

V hlavnej časti návrhu metodiky využijeme bádateľskú metódu na skúmanie obvodových uhlov a objavenie vzťahu medzi stredovým a obvodovým uhlom. Na začiatku znova nastolíme problémovú situáciu, ktorá je modifikáciou úlohy 1.

Úloha 5. Zostrojte v danom obdĺžniku *ABCD* s dĺžkami strán $a = 7$ cm, $b = 3$ cm trojuholník *ABF* s vrcholom *F* ležiacom na strane *CD* tak, aby mal vnútorný uhol pri vrchole *F* veľkosť 75°.

Z predchádzajúcej časti by už žiaci mali vedieť, že ak by sme zostrojili Talesovu kružnicu nad priemerom *AB*, tak bod *F* sa musí nachádzať zvonku Talesovej kružnice. Ako by sme mohli identifikovať množinu bodov v rovine, z ktorých vidno úsečku *AB* pod uhlom 75°. Na získanie prvotnej predstavy o hľadanej množine využijeme dynamickú konštrukciu, v ktorej budú žiaci experimentálne hľadať body v rovine, z ktorých vidno danú úsečku *AB* pod uhlom 75°.



Obrázok 29. Experimentálne určovanie bodov z hľadanej množiny.

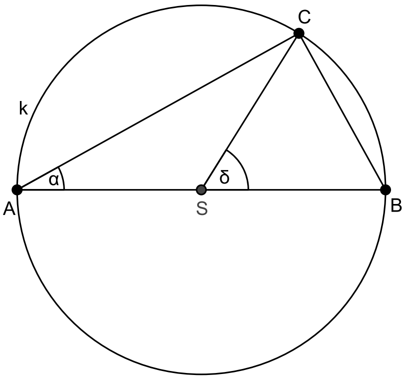
V konštrukcii zobrazenej na obrázku (Obrázok 29) budú žiaci pohybovať bodom *X*, kým sa im nepodarí nastaviť uhol 75°. Vtedy vytvoria voľný bod pri bode *X* a presunú ho nad bod *X*. Potom uchopia bod *X* a znova budú hľadať takú polohu bodu *X*, z ktorej vidno úsečku *AB* pod uhlom 75°. Po zostrojení niekoľkých bodov, z ktorých vidno danú úsečku *AB* pod uhlom 75°, by žiaci mohli na základe skúmania aj poznatkov o Talesovej kružnici vysloviť hypotézu, že nájdené body ležia na kružnicovom oblúku.

Metodická poznámka: Pri hľadaní odpovede, ako zostrojiť tento kružnicový oblúk, budú žiaci skúmať a objavovať geometrické zákonitosti. Pri organizovaní bádateľských činností predložíme žiakom postupnosť inštrukcií a parciálnych úloh. Vzhľadom na vyšší stupeň učiteľovho navádzania žiakov v jednotlivých fázach bádania považujeme navrhnutý učebný postup za štruktúrované bádanie.

Aby sa žiaci zamysleli a analyzovali skúmané vzťahy, budú po experimentovaní s dynamickou konštrukciou v ďalšej etape pracovať s klasickými rysovacími pomôckami. Po vyslovení hypotézy je logické, že budeme pracovať s kružnicami a trojuholníkmi s vrcholmi na skúmaných kružniciach. V nasledujúcej úlohe sa znova vrátime k Talesovej kružnici.

Úloha 6. Daná je úsečka *AB* a kružnica *k* zostrojená nad priemerom *AB*. Na kružnici *k* je zvolený bod *C* rôzny od bodov *A*, *B*. Nájdite vzťah medzi veľkosťami uhlov *BAC* a *BSC*.

Pri riešení úlohy 6 žiaci vytvoria na papieri náčrt obsahujúci zadané útvary, podobný, aký je zobrazený na obrázku (Obrázok 30).



Obrázok 30. Náčrt k riešeniu úlohy 6.

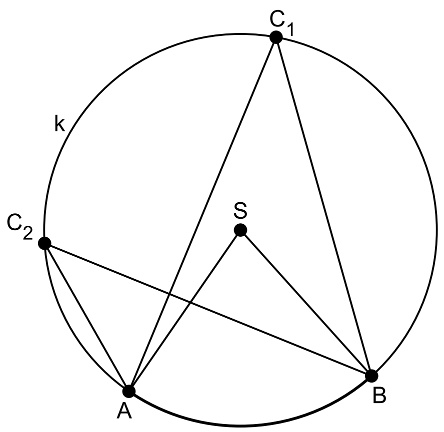
Po porozumení dôkazu Talesovej vety by pre žiakov nemalo byť problémom nájdenie vzťahu medzi veľkosťami uhlov α a δ. Na vyznačené uhly sa však môžeme pozerať aj iným spôsobom. Body *B*, *C* rozdeľujú kružnicu *k* na dva oblúky. Zameriame sa na menší oblúk kružnice *k* s hraničnými bodmi *B*, *C*. Bod *A* leží na väčšom kružnicovom oblúku. Po vyriešení úlohy 6 by učiteľ zaviedol pojmy obvodový a stredový uhol. Žiaci by si mali uvedomiť pri riešení úlohy 6 dôležitú skutočnosť, že vzťah medzi veľkosťami uhlov α a δ sa nezmení ani po posúvaní bodu *C* po kružnici *k*.

Pri riešení ďalšej úlohy budeme pokračovať v skúmaní vlastností stredových a obvodových uhlov.

Úloha 7. Na danej kružnici *k* je vyznačený menší kružnicový oblúk určený bodmi *A*, *B* a body C_1, C_2 ležiace na kružnici *k* (Obrázok 31). Vyznačte v obrázku obvodové uhly a stredový uhol k danému kružnicovému oblúku určenému bodmi *A*, *B* a nájdite takú polohu bodu C_1

na kružnici *k*, pre ktorú možno jednoducho nájsť vzťah medzi veľkosťou obvodového a príslušného stredového uhla.

Pri geometrickej predstave spojenej s posúvaním bodu C_1 po kružnici *k* by žiaci mali nájsť súvis s riešením úlohy 6 a nájsť konkrétne prípady, kedy bod C_1 leží na priamke *AS* alebo na priamke *BS*. Po určení vzťahu medzi veľkosťou stredového a obvodového uhla v týchto konkrétnych prípadoch by si mali žiaci uvedomiť, že pri posúvaní bodu C_1 po kružnici *k* sa stredový uhol nemení. Po uvedomení si podstatných skutočností učiteľ vyzve žiakov, aby vyslovili hypotézy o stredovom a obvodovom uhle.

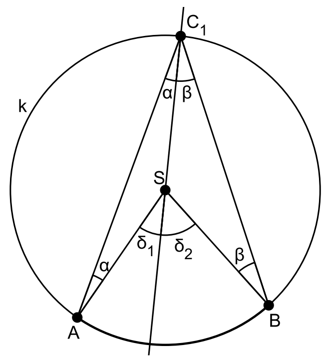


Obrázok 31. Obvodové uhly a k nim prislúchajúci stredový uhol.

Vyslovené hypotézy budú žiaci testovať pomocou experimentu. Sami si vytvoria dynamickú konštrukciu, v ktorej môžu odmerať uhly a otestovať zostavené hypotézy pre rôzne konkrétne prípady. Učiteľ môže žiakov vyzvať aj na vyšetrovanie bodov ležiacich vo vnútri a zvonku kružnice *k*.

Metodická poznámka: Na záver bádateľských činností žiakov pri riešení úloh 5, 6 a 7 učiteľ spolu so žiakmi zhrnie objavené zistenia a sformuluje vetu o stredovom a obvodovom uhle, ktorá vyjadruje vzťah medzi obvodovými uhlami prislúchajúcimi tomu istému oblúku kružnice a príslušným stredovým uhlom. Učiteľ by mohol naviesť žiakov aj na preskúmanie prípadov, kedy by bod C_1 ležal na menšom oblúku kružnice *k* ohraničenom bodmi *A*, *B*. Žiaci by mohli zistiť, že obvodový uhol by mal v týchto prípadoch väčšiu veľkosť a prislúchal by väčšiemu kružnicovému oblúku kružnice *k* ohraničenom bodmi *A*, *B*. Žiaci by mohli prípadne aj nájsť a zdôvodniť vzťah medzi veľkosťami obvodových uhlov pre tieto dva kružnicové oblúky kružnice *k* určené bodmi *A*, *B*, z ktorého vyplýva dôležitá vlastnosť tetivových štvoruholníkov.

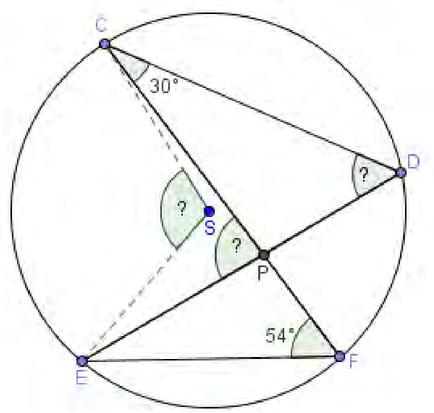
Pri zdôvodňovaní objavených vzťahov využijeme podobné úvahy, aké boli využívané pri skúmaných špeciálnych prípadov. Po zostrojení priamky C_1S možno využiť vzťahy pre veľkosti uhlov v trojuholníkoch. Na obrázku (Obrázok 32) je zobrazený prípad zodpovedajúci bodu C_1 z obrázka (Obrázok 31). Veľkosť stredového uhla vyjadríme ako súčet veľkostí uhlov δ_1 a δ_2, ktoré sú vonkajšími uhlami v rovnoramenných trojuholníkoch AC_1S a BC_1S. Ďalší prípad zodpovedajúci umiestneniu bodu C_2 na obrázku (Obrázok 31) alebo prípad, kedy bod C leží na menšom oblúku kružnice k, môže učiteľ zadať šikovným žiakom.



Obrázok 32. Náčrt k zdôvodneniu vety o obvodových a stredových uhloch.

Na upevnenie a prehĺbenie poznatkov o stredových a obvodových uhloch sme pripravili pracovný list **M 3.1_uhly_kruznica.docx**. V prvej úlohe pracovného listu majú žiaci určiť veľkosť stredového uhla. Na základe zistenia, že dva body D, E ležiace na kružnici tvoria spolu so stredom S danej kružnice vrcholy rovnostranného trojuholníka, je riešením úlohy výsledok, že dĺžka tetivy DE je rovná polomeru danej kružnice. Druhá úloha je zadaná pomocou obrázku.

Úloha 8. Na obrázku je kružnica k so stredom S. Určte veľkosť uhlov: CDE, CPE a CSE.



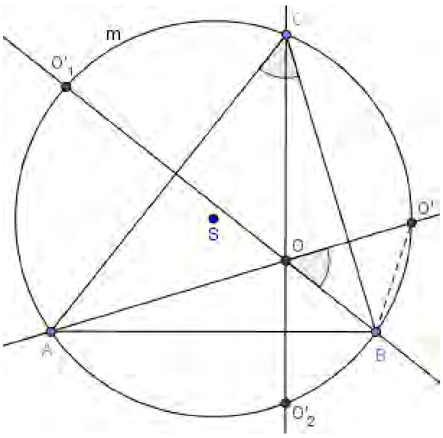
Obrázok 33. Súčasť zadania úlohy 8.

Pri riešení úlohy si majú žiaci uvedomiť, že stredový uhol musí mať vrchol v strede kružnice. Veľkosť uhla CPE možno určiť využitím vzťahu pre veľkosť vonkajšieho uhla pri vrchole *P* trojuholníka *CDP*. Uhly *CDE* a *CFE* predstavujú obvodové uhly a uhol *CSE* stredový uhol k menšiemu oblúku kružnice *k* určenom bodmi *C*, *E*.

V tretej úlohe sú na kružnici *k* zostrojené tri body *A*, *B*, *X* a úsekový uhol veľkosti 48° s vrcholom v bode *A*. Žiaci majú vypočítať veľkosť obvodového uhla k oblúku kružnice *k* určeného bodmi *A*, *B* s vrcholom v bode *X*. Pri správnom postupe riešenia žiaci zistia, že veľkosť obvodového uhla je tiež 48°. Nad zovšeobecnením nájdeného vzťahu majú žiaci porozmýšľať pri riešení úlohy, ktorá je využitá pre formatívne hodnotenie. Učiteľ by mal zadať žiakom hárok na formatívne hodnotenie po vyhodnotení riešenia úloh v pracovnom liste. Štvrtá úloha v pracovnom liste poskytuje žiakom námet na skúmanie kružnice určenej obrazmi ortocentra v osovej súmernosti podľa strán ostrouhlého trojuholníka.

Úloha 9. V ostrouhlom trojuholníku *ABC* je bod *O* priesečníkom výšok trojuholníka. Zistite, na akej kružnici ležia obrazy bodu *O* zostrojené v osovej súmernosti podľa strán trojuholníka *ABC*. Zdôvodnite objavené zistenie.

Vytvorením konštrukcie v pracovnom liste alebo pomocou dynamickej konštrukcie by mohli žiaci zistiť, že kružnica určená obrazmi ortocentra obsahuje aj vrcholy trojuholníka *ABC* (Obrázok 34).



Obrázok 34. Obrazy ortocentra v osovej súmernosti podľa priamok *BC*, *AC*, *AB*.

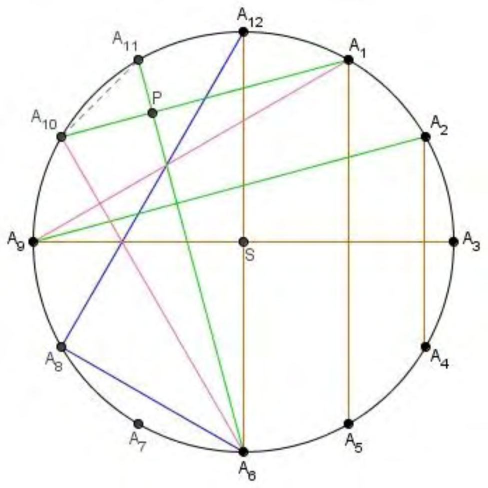
Ak strany *a*, *b* zvierajú uhol veľkosti *u*, tak výšky na tieto strany taktiež zvierajú uhol veľkosti *u*. Ak zobrazíme ortocentrum *O* v osovej súmernosti podľa strany *a*, tak trojuholník *OO´B* je rovnoramenný a pri vrchole *O´* je preto tiež vnútorný uhol veľkosti *u*. Potom však na základe vlastnosti obvodových uhlov k tomu istému kružnicovému oblúku *AB*, aj bod *O´* musí ležať na kružnici *m* opísanej trojuholníku *ABC*. Analogicky možno zdôvodniť, že aj obrazy ortocentra *O* v osových súmernostiach podľa priamok *AC* a *AB* ležia na kružnici *m*.

Na rozvíjanie schopnosti žiakov systematicky hľadať a opísať množinu riešení sme do pracovného listu zaradili úlohu na hľadanie dvojíc navzájom kolmých úsečiek s krajnými bodmi na značkách na ciferníku hodín.

Úloha 10. Nájdite dvojice navzájom kolmých úsečiek, ktorých koncové body ležia na značkách na ciferníku hodín označujúcich celé hodiny a ktoré sa pretínajú na obvode alebo vnútri ciferníka. Snažte sa identifikovať typy kolmých dvojíc úsečiek a do obrázka načrtnite reprezentantov jednotlivých typov. Zapíšte aj argumenty na zdôvodnenie nájdených riešení.

Metodická poznámka: Uvedená úloha má viac riešení. Preto by bolo vhodné rozlišovať typy navzájom kolmých úsečiek a z každého typu vybrať reprezentatívnu dvojicu úsečiek. Ak by sme zostrojovali dvojice navzájom kolmých úsečiek, čoskoro by bola konštrukcia neprehľadná. Preto navrhujeme, aby žiaci pracovali s dynamickou konštrukciou **cifernik.ggb**. Na kružnici reprezentujúcej ciferník hodín by žiaci experimentovali s dvojicou úsečiek a hľadali ich polohy, keď sú navzájom kolmé. Do obrázku v pracovnom liste by zakresľovali rôznymi farbami reprezentatívne dvojice navzájom kolmých úsečiek. Pre každý typ dvojice nájdených úsečiek by mali žiaci aj zdôvodniť ich kolmosť.

Jeden typ predstavujú dvojice úsečiek, ktoré sa pretínajú v značke pre celú hodinu a zvyšné koncové body majú v krajných bodoch priemeru kružnice. Na obrázku (Obrázok 35) je tento typ kolmých úsečiek reprezentovaný dvojicou úsečiek modrej farby, ktoré spájajú body A_6, A_8 a A_8, A_{12}. Zdôvodnenie ich kolmosti vyplýva z Talesovej vety. Ďalšími typmi by mohli byť dvojice úsečiek hnedej farby, z ktorých jedna je priemerom kružnice a druhá spája značky predstavujúce vzor a obraz v osovej súmernosti podľa prvej úsečky. Ďalšie dva typy kolmých úsečiek sú znázornené zelenými a fialovými úsečkami. Pri zdôvodňovaní ich kolmosti možno využiť trojuholníky určené ich priesečníkom a krajnými bodmi (napr. trojuholník s vrcholmi A_{10}, A_{11} a P), ktoré sú vrcholmi obvodových uhlov na kružnici predstavujúcej ciferník hodín.



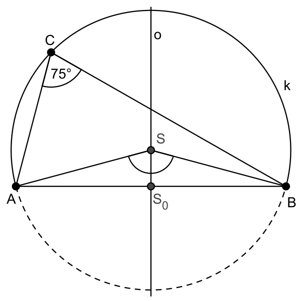
Obrázok 35. Dvojice navzájom kolmých úsečiek.

Konštrukcia množiny *G*

Vráťme sa k riešeniu úvodného problému z druhej časti metodiky. Žiaci, prípadne aj s pomocou učiteľa, by si mali uvedomiť, že objavené vzťahy pre veľkosti stredových a obvodových uhlov sú zovšeobecnením Talesovej vety. V Talesovej vete prislúcha obvodový uhol s veľkosťou 90° stredovému uhlu s veľkosťou 180° a množina všetkých bodov v rovine, z ktorých vidieť danú úsečku *AB* pod uhlom s veľkosťou 90° je kružnica zostrojená nad priemerom *AB* okrem bodov *A, B*. Pri riešení nasledujúcej úlohy budú žiaci hľadať, ako by sme mohli s využitím nových poznatkov zostrojiť množinu všetkých bodov v rovine, z ktorých vidieť danú úsečku *AB* pod iným ako pravým uhlom.

Úloha 11. Daná je úsečka *AB* s dĺžkou 7 cm. Nájdite postup, ako možno zostrojiť množinu všetkých bodov v rovine, z ktorých vidieť danú úsečku *AB* pod uhlom s veľkosťou 75°.

Úloha 11 je zameraná na hľadanie algoritmu. V prvej etape by mali žiaci zostaviť náčrt s vyriešenou úlohou zobrazený na obrázku (Obrázok 36) a aplikovať objavený vzťah medzi veľkosťou stredového a obvodového uhla.

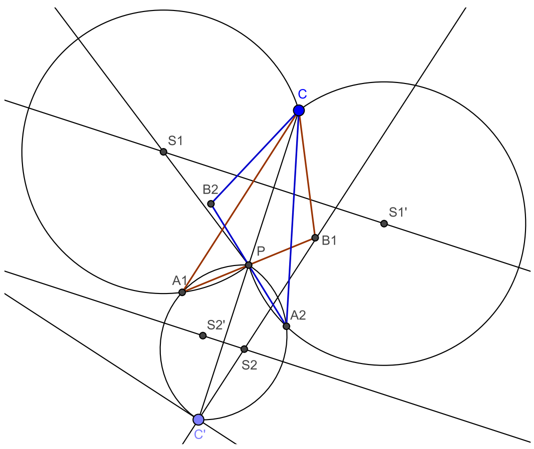


Obrázok 36. Náčrt ku konštrukcii množiny *G*.

Žiaci už zistili, že v jednej polrovine určenej priamkou *AB* tvorí hľadaná množina bodov kružnicový oblúk patriaci kružnici prechádzajúcej bodmi *A, B*. Preto stačí nájsť stred hľadaného kružnicového oblúka. Stred kružnicového oblúka musí ležať na osi *o* úsečky *AB*. V rovnoramennom trojuholníku *ABS* je os *o* aj osou stredového uhla *ASB*. Preto veľkosť uhla *BAS* je 90° – 75°. Po zostrojení ramena uhla s veľkosťou 15° s vrcholom v bode *A* leží v priesečníku tohto ramena s osou *o* stred *S* kružnicového oblúka. Aby sa nemuseli pri konštrukcii realizovať výpočty, možno uhol s touto veľkosťou zostrojiť konštrukčne. Na rameno uhla s veľkosťou 75° zostrojeného v opačnej polrovine určenej priamkou *AB* s vrcholom v bode *A* sa zostrojí kolmica prechádzajúca bodom *A*. V priesečníku tejto kolmice a osi *o* úsečky *AB* leží stred *S*. Kružnicový oblúk v opačnej polrovine určenej priamkou *AB* získame zostrojením obrazu kružnicového oblúka so stredom *S* a polomerom |*SA*| v osovej súmernosti určenej priamkou *AB*.

Objavený postup by mohli žiaci využiť v prostredí dynamického geometrického systému. V ňom by mohli aj odmerať niektoré obvodové uhly a otestovať správnosť postupu konštrukcie pre tento konkrétny prípad. Po zostrojení hľadaného kružnicového oblúka by už bolo jednoduché dorysovať obdĺžnik *ABCD* a vyriešiť úlohu 5. Po zovšeobecnení opísaného postupu aj pre iné veľkosti uhlov je vhodné na precvičenie zostaveného algoritmu vyriešiť niekoľko konštrukčných úloh zahrňujúcich konštrukciu množiny *G*. Učiteľ by mal zaradiť aj úlohu, v ktorej má obvodový uhol veľkosť väčšiu ako 90°. Využiť by mohol aj nasledujúcu konštrukčnú úlohu.

Úloha 12. Zostrojte trojuholník *ABC* s ťažnicou t_c = 3 cm, v ktorom $\alpha = 35°$, $\beta = 105°$.

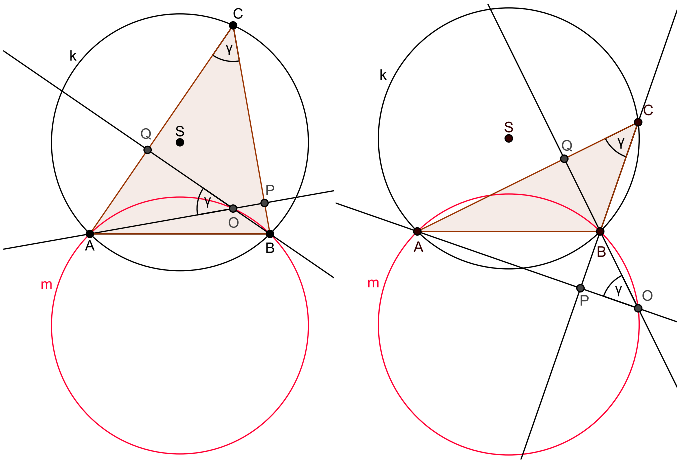


Obrázok 37. Konštrukcia trojuholníkov.

Pri riešení úlohy možno využiť doplnenie trojuholníka *ABC* na rovnobežník *AC´BC* (|*C´C*| = 2·|t_c|). Vrchol *A* možno zostrojiť ako priesečník množiny všetkých bodov, z ktorých vidieť úsečku *PC* pod uhlom 35° a množiny všetkých bodov, z ktorých vidieť úsečku *C´P* pod uhlom 105° (bod *P* je stred strany *AB*). Konštrukcia je zobrazená na obrázku (Obrázok 37).

Doplňujúci návrh: Vzhľadom na zameranie navrhovanej metodiky sme na záver metodiky zaradili úlohu na vyšetrovanie množiny priesečníkov výšok trojuholníkov. Na základe vlastnej skúsenosti môžeme potvrdiť, že úlohy tohto typu sú pre žiakov náročné a preto odporúčame zadať túto úlohu v matematických triedach alebo len matematicky nadaným žiakom. Avšak práve pri riešení úloh tohto typu sa môžu naplno prejaviť výhody dynamických geometrických systémov pri identifikácií a vyšetrovaní množín všetkých bodov s danou vlastnosťou.

Úloha 13. Na kružnici *k* sú dané pevné body *A*, *B* a premenný bod *C*. Vyšetrite množinu priesečníkov výšok všetkých trojuholníkov *ABC*.



Obrázok 38. Ortocentrá trojuholníkov.

Na obrázku (Obrázok 38) sú znázornené dva typické prípady. Na obrázku (Obrázok 38) je zostrojený ostrouhlý trojuholník *ABC*. Označme γ vnútorný uhol pri vrchole *C*. Výšky *AP* a *BQ* sú kolmé na strany trojuholníka *AC* a *BC*, a preto zvierajú tiež uhol γ. Uhol *AOB* má veľkosť $180° - \gamma$. Kým sú pri pohybovaní bodom *C* po kružnici *k* vnútorné uhly v trojuholníku *ABC* menšie ako 90°, veľkosť uhla *AOB* je väčšia ako 90°. Ortocentrum *O* tak prechádza bodmi v hornej polrovine určenej priamkou *AB*, z ktorých vidno úsečku *AB* pod uhlom $180° - \gamma$. Získavame časť hľadanej množiny – menší kružnicový oblúk *AOB*, ktorý je súmerný s časťou kružnice *k* v dolnej polrovine určenej priamkou *AB*. Krajné prípady nastanú, ak trojuholník *ABC* bude pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole *A* (*B*). Vtedy bude ortocentrum ležať v bode *A* (*B*). Pri ďalšom posúvaní bodu *C* po kružnici *k*, sa trojuholník *ABC* stáva tupouhlým (Obrázok 38 vpravo). Získavame prípady náročnejšie na predstavu, lebo ortocentrum *O* leží mimo trojuholníka *ABC*. Z ortocentra *O* vidíme úsečku *AB* pod uhlom γ. Ak bod *C* prejde do menšieho oblúka kružnice *k* ohraničeného bodmi *A*, *B*, vzniká pri vrchole *C* tupý uhol s veľkosťou $180° - \gamma$, ale veľkosť vnútorného uhla pri ortocentre je stále γ.

Dostávame množinu bodov O v dolnej polrovine určenej priamkou AB, z ktorých vidieť úsečku AB pod uhlom γ. Keďže z každého bodu z tohto oblúka vidieť úsečku AB pod uhlom γ, vytvorený oblúk v dolnej polrovine určenej priamkou AB je časťou kružnice zhodnej s kružnicou k. Zjednotením oboch oblúkov, na ktorých ležali ortocentrá trojuholníkov ABC získaných pri pohybe vrcholu C po kružnici k, vzniká kružnica, ktorá je obrazom danej kružnice k v osovej súmernosti určenej priamkou AB.

M4 – Vlastnosti štvoruholníkov

<table>
<tr><td colspan="2">Tematický celok</td></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria a meranie</td></tr>
<tr><td>Cieľová skupina</td><td>Odhadovaný čas výučby</td></tr>
<tr><td>Prvý ročník SŠ</td><td>Tri vyučovacie hodiny</td></tr>
<tr><td>Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti</td><td>Kognitívne ciele</td></tr>
<tr><td>▪ Ovládať základné poznatky o vlastnostiach trojuholníkov a význačných bodoch v trojuholníku,
▪ ovládať základné poznatky zo ZŠ o vlastnostiach špeciálnych typov štvoruholníkov a vedieť ich využívať pri konštrukcii týchto útvarov,
▪ skúmať a analyzovať vlastnosti geometrických útvarov a vzťahy medzi nimi využitím manipulovania s voľnými prvkami dynamických konštrukcií vytvorených v programe Geogebra.</td><td>▪ Klasifikovať štvoruholníky podľa ich základných vlastností,
▪ analyzovať a zovšeobecňovať experimentálne získané výsledky pri skúmaní rôznych typov štvoruholníkov,
▪ hľadať a využívať vhodné argumenty pri zdôvodňovaní objavených vzťahov medzi geometrickými útvarmi,
▪ využiť poznatky o trojuholníkoch a štvoruholníkoch pri riešení úloh,
▪ využívať základné nástroje dynamických geometrických systémov pri tvorbe a využívaní modelov na skúmanie vlastností geometrických útvarov a vzťahov medzi nimi.</td></tr>
<tr><td>Bádateľské zručnosti</td><td>Didaktický problém</td></tr>
<tr><td>▪ Manipulovať s geometrickými útvarmi pomocou softvéru a analyzovať pozorované výsledky,
▪ určovať vzťahy medzi premennými veličinami, formulovať hypotézy,
▪ navrhnúť postup modelovania pri testovaní hypotéz,
▪ formulovať závery a využívať vhodné argumenty pri zdôvodňovaní matematických tvrdení.</td><td>▪ Na rozvíjanie porozumenia pojmov a vytváranie geometrických predstáv využiť okrem klasických konštrukcií aj dynamické konštrukcie na preskúmanie rôznych konkrétnych prípadov a na objavovanie invariantných vlastností geometrických útvarov a vzťahov medzi nimi. Samostatnými bádateľskými aktivitami žiakov dosiahnuť lepšie porozumenie geometrických vzťahov a rozvoj schopností aplikovať osvojené poznatky pri riešení úloh.</td></tr>
<tr><td>Didaktické materiálne prostriedky</td><td>Didaktické metódy a organizačné formy</td></tr>
</table>

▪ Pracovné listy prepojené s prostredím dynamickej geometrie (M 4.1, M 4.3), ▪ dynamické konštrukcie pripravené v systéme Geogebra.	▪ Štruktúrované bádanie, ▪ riadený rozhovor, ▪ individuálna forma práce pri počítačoch.

Úvod

Navrhnutá metodika je zameraná na zhrnutie poznatkov žiakov o špeciálnych typoch štvoruholníkov a ich využívanie pri objavovaní ďalších vlastností štvoruholníkov. Medzi dôležité ciele metodiky patrí skúmanie možnosti opisovania a vpisovania kružníc štvoruholníkom. Metodika je postavená na bádateľskom prístupe k nadobúdaniu nových poznatkov a k rozvíjaniu zručností využívať matematické modelovanie v prostredí dynamickej geometrie, skúmať analyzovať a zovšeobecňovať výsledky.

Základom navrhovanej metodiky je postupnosť úloh, pri riešení ktorých budú žiaci skúmať a objavovať vlastnosti a geometrické vzťahy v štvoruholníkoch. Pre aktívne osvojovanie nových poznatkov a usmerňovanie bádateľských činností žiakov sú vypracované dva pracovné listy. Pri riešení niektorých úloh by mali žiaci experimentovať s dynamickými konštrukciami a testovať platnosť vyslovených hypotéz. Konštrukcie využívané v prostredí dynamickej geometrie sú pomerne jednoduché a predpokladáme, že väčšinu dynamických konštrukcií by si žiaci mali vedieť vytvoriť samostatne.

Systemizácia základných vlastností štvoruholníkov

Žiaci by mali poznať základné typy štvoruholníkov a ich vlastnosti už zo základnej školy. Zámerom prvej časti návrhu metodiky je zhrnúť už známe vlastnosti základných typov štvoruholníkov, ako sú štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec, lichobežník. Sústredíme sa na konvexné štvoruholníky.

Ako základné kritérium pre klasifikáciu štvoruholníkov možno využiť počet dvojíc rovnobežných strán. Podľa tohto kritéria rozdeľujeme štvoruholníky:

- rovnobežníky: práve dve dvojice rovnobežných protiľahlých strán,
- lichobežníky: práve jedna dvojica rovnobežných protiľahlých strán,
- iné štvoruholníky.

Ak má rovnobežník všetky vnútorné uhly pravé, zvykne sa označovať ako pravouholník (štvorec, obdĺžnik). Rovnobežníky možno rozdeľovať aj na základe zhodnosti strán. Štvorce a kosoštvorce majú zhodné všetky strany.

Ďalším kritériom na rozlišovanie štvoruholníkov môže byť počet osí súmernosti. Najviac osí súmernosti má zo štvoruholníkov štvorec. Pomocou osi súmernosti možno definovať špeciálny typ štvoruholníka – deltoid, ako konvexný štvoruholník, ktorý má práve jednu os súmernosti a to priamku obsahujúcu jednu jeho uhlopriečku (Kuřina, 1996).

Metodická poznámka: Zopakovanie vlastností štvoruholníkov by mal učiteľ realizovať formou riadeného rozhovoru. Pri uvedenej definícii deltoidu by sa napríklad mohol opýtať žiakov, či kosodĺžnik alebo rovnoramenný lichobežník môže byť zaradený k deltoidom. Podľa našich skúseností sa niektorí žiaci mylne domnievajú, že kosodĺžnik je osovo súmerný útvar.

Príklady na otázky týkajúce sa vlastností štvoruholníkov:

- *Je podľa uvedenej definície kosoštvorec deltoidom?*
- *Uhlopriečky ktorých štvoruholníkov majú rovnakú dĺžku?*
- *Ktoré štvoruholníky majú dvojicu vnútorných uhlov s rovnakou veľkosťou?*
- *Aký je súčet vnútorných uhlov v štvoruholníku?*
- *Je pravda, že každý štvoruholník, ktorý má aspoň dva vnútorné uhly pravé, je pravouholníkom?*
- *Je pravda, že každý štvoruholník s navzájom kolmými uhlopriečkami je štvorec alebo kosoštvorec?*

Pri zodpovedaní uvedených otázok by mal učiteľ vyžadovať od žiakov aj zdôvodnenie vysloveného tvrdenia. Pri nepravdivých tvrdeniach by mali žiaci uviesť aj protipríklad. Napríklad pri zodpovedaní posledných dvoch otázok možno uviesť ako protipríklad deltoid, ktorý má tiež uhlopriečky navzájom kolmé a môže mať protiľahlé vnútorné uhly pravé.

Na preskúmanie vlastností uhlopriečok štvoruholníkov zadáme žiakom nasledovnú úlohu.

Úloha 1. Charakterizujte všetky štvoruholníky, pre ktoré platí, že ich uhlopriečky sa pretínajú v bode, ktorý ich rozpoľuje.

Pri riešení úlohy možno vhodne využiť zhodnosť trojuholníkov a z toho vyplývajúcu skutočnosť, že protiľahlé strany takéhoto štvoruholníka musia byť rovnobežné a zhodné. Pomocou uvedenej vlastnosti uhlopriečok možno charakterizovať rovnobežníky.

Námet na skúmanie vlastností štvoruholníkov

Na využitie poznatkov o trojuholníkoch sme vybrali námet vedúci k skúmaniu rovnobežníkov, ktorý je odvodený z Varignonovej vety. Na usmerňovanie činností žiakov pri skúmaní vlastností útvarov sme pripravili pracovný list, ktorý je uložený v súbore **M 4.1_stvoruholnik.docx**. Pri riešení úloh z pracovného listu by mali žiaci zostrojovať útvary, manipulovať s voľnými objektmi v dynamických konštrukciách a pozorovať zmeny závislých geometrických objektov.

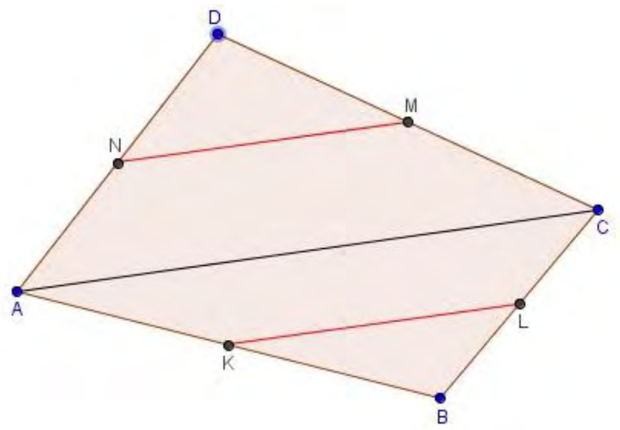
Metodická poznámka: Zámerom úvodnej úlohy je zopakovanie vlastností priečkového trojuholníka, lebo vlastnosti strednej priečky trojuholníka budú mať žiaci využívať pri riešení hlavného problému pracovného listu. V prvých dvoch úlohách by mali žiaci zostrojovať geometrické útvary na papieri. Ak už žiaci majú základné zručnosti z ovládania programu Geogebra, odporúčame, aby si vytvárali v posledných dvoch úlohách dynamické konštrukcie samostatne. Aby žiaci lepšie porozumeli experimentálne zistené súvislosti a uvedomili si, že sformulované tvrdenia by mali aj zdôvodniť, sú úlohy v pracovnom liste zamerané aj na rozvíjanie schopnosti hľadať vhodné argumenty na zdôvodňovanie experimentálne objavených zistení.

Po aktualizácii skôr osvojených poznatkov nasleduje hlavný problém pracovného listu.

Úloha 2. Zostrojte ľubovoľný konvexný štvoruholník *ABCD*. Stredy strán štvoruholníka *ABCD* označte po rade *K, L, M, N*. Preskúmajte rôzne štvoruholníky *ABCD* a *KLMN* a zapíšte, aké vlastnosti má štvoruholník *KLMN*?

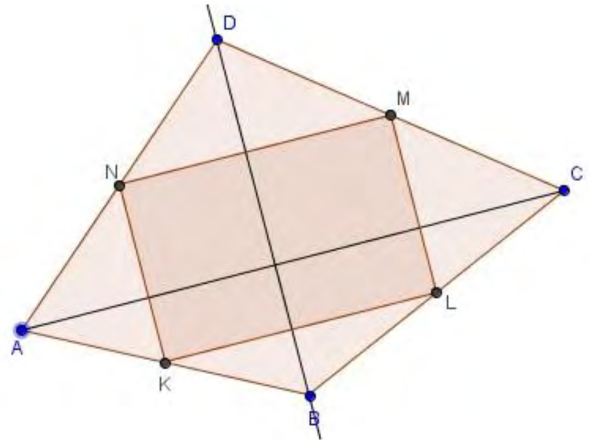
Po zostrojení a preskúmaní niekoľkých štvoruholníkov *ABCD* a *KLMN* by mohli žiaci vysloviť hypotézu, že štvoruholník *KLMN* je rovnobežníkom. Tento výsledok platí aj pre nekonvexné štvoruholníky, ale pri zdôvodňovaní vzťahov a aj pri ďalšom skúmaní sa zameriame na konvexné štvoruholníky. Zdôvodnenie pozorovanej skutočnosti je založené na využití vlastností strednej priečky trojuholníka.

Po úvodnom skúmaní preto nasleduje úloha navádzajúca žiakov na porozumenie a zdôvodňovanie objavených vzťahov. Žiaci majú upriamiť svoju pozornosť na dvojicu protiľahlých strán štvoruholníka *KLMN* (Obrázok 39).



Obrázok 39. Protiľahlé strany štvoruholníka *KLMN*.

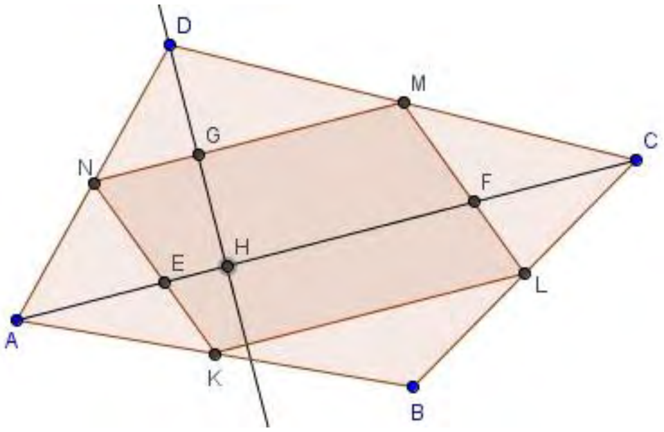
Keďže úsečky *KL* a *NM* sú stredné priečky dvoch trojuholníkov oproti ich spoločnej strane, ležia na rovnobežných priamkach. Po porozumení objavených súvislostí majú žiaci v prostredí dynamickej geometrie vytvoriť také štvoruholníky *ABCD*, aby bol štvoruholník *KLMN* kosoštvorcom, pravouholníkom. Druhý prípad je zobrazený na obrázku (Obrázok 40).



Obrázok 40. Špeciálny prípad štvoruholníka *KLMN*.

Aby vnútorné uhly štvoruholníka *KLMN* boli pravé, musia byť uhlopriečky štvoruholníka *ABCD* na seba kolmé. Žiaci môžu otestovať svoju hypotézu zostrojením a preskúmaním viacerých štvoruholníkov *ABCD* s kolmými uhlopriečkami.

V poslednej úlohe pracovného listu sa majú žiaci sústrediť na hľadanie vzťahu medzi obsahmi štvoruholníkov *ABCD* a *KLMN*. Experimentovaním s dynamickou konštrukciou môžu zistiť, že obsah štvoruholníka *KLMN* je rovný polovici z obsahu štvoruholníka *ABCD*.



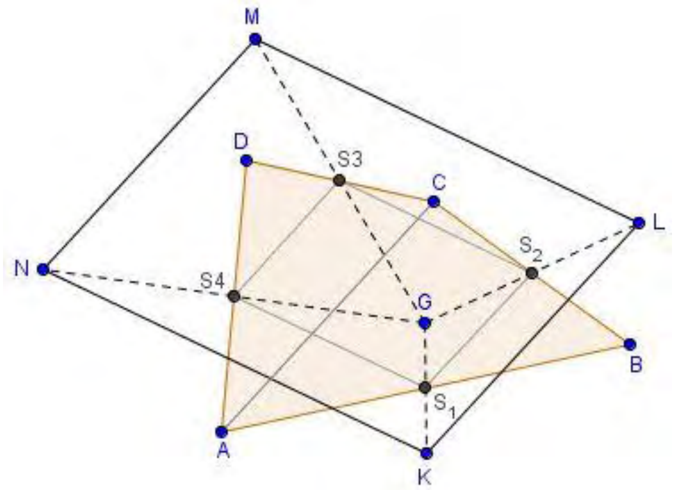
Obrázok 41. Konštrukcia na vyšetrovanie vzťahu medzi obsahmi štvoruholníkov *ABCD* a *KLMN*.

Uhlopriečkou *AC* je rovnobežník *KLMN* rozdelený na dva rovnobežníky *EFMN* a *KLFE* (Obrázok 41). Obsah rovnobežníka *KLMN* sa rovná súčtu obsahov rovnobežníkov *EFMN* a *KLFE*. Vzťah medzi obsahmi štvoruholníkov *ABCD* a *KLMN* budeme skúmať zvlášť v polrovinách určených priamkou *AC*. Pri zdôvodňovaní skúmaného vzťahu možno využiť v polrovine určenej priamkou *AC* a vrcholom *D* podobnosť trojuholníkov *NMD* a *ACD*, z ktorej vyplýva, že výška *HG* rovnobežníka *EFMN* je rovná polovici výšky *HD* trojuholníka *ACD*. Dĺžka úsečky *EF* je rovná polovici z dĺžky úsečky *AC*. Využitím uvedených vzťahov a vzorcov na výpočet obsahu trojuholníka a rovnobežníka možno odvodiť, že obsah rovnobežníka *EFMN* je rovný polovici z obsahu trojuholníka *ACD*. Analogicky by sme postupovali aj v polrovine určenej priamkou *AC* a vrcholom *B*.

Metodická poznámka: Uvedený dôkaz by mohli šikovní žiaci vykonať aj samostatne, ale odporúčame, aby ho učiteľ na záver prešiel spolu so žiakmi a usmerňoval žiakov pri hľadaní vhodných argumentov a implikácií.

Doplňujúci návrh: Hlavný problém z pracovného listu možno ďalej rozvíjať a ponúknuť žiakom vhodný námet na ďalšie bádanie. Učiteľ by mohol tento námet sformulovaný v nasledujúcej úlohe zadať žiakom, ktorí majú hlbší záujem o matematiku. Riešenie problému by mohlo byť aj súčasťou domáceho cvičenia.

Úloha 3. Daný je konvexný štvoruholník *ABCD*. Zvoľte si bod *G* a zostrojte jeho obrazy *K, L, M, N* v stredových súmernostiach podľa stredov strán štvoruholníka *ABCD*. Preskúmajte vlastnosti štvoruholníka *KLMN*.



Obrázok 42. Konštrukcia k skúmaniu vlastností štvoruholníka *KLMN*.

Ako sme už zistili, štvoruholník $S_1S_2S_3S_4$ je rovnobežníkom. Ak sa zameriame, napr. na trojuholník *KLG*, tak na základe jeho konštrukcie platí, že úsečka S_1S_2 je jeho stredná priečka, a preto úsečky S_1S_2 a *KL* sú rovnobežné. S úsečkou S_1S_2 je rovnobežná úsečka S_4S_3 a teda aj *NM*. Analogické vzťahy sú aj v trojuholníkoch *LMG* a *NKG*. Preto aj štvoruholník *KLMN* je rovnobežníkom. Aj pri tejto úlohe, by sa žiaci mohli zamýšľať nad otázkami:

- *Aké vlastnosti bude mať štvoruholník KLMN, ak štvoruholník ABCD bude štvorec?*
- *Aké vlastnosti by mal mať štvoruholník ABCD, aby štvoruholník KLMN bol štvorec?*

Pri odpovedi na druhú otázku nemusí byť riešením len štvorec. Stačí, aby mal štvoruholník *ABCD* rovnako dlhé a na seba kolmé uhlopriečky a štvoruholník *KLMN* bude štvorcom.

Využitie Ptolemaiovej vety pri skúmaní vlastností štvoruholníkov

V ďalšej časti sa zameriame na preskúmanie vzťahu medzi dĺžkami strán a uhlopriečok v štvoruholníkoch. Ako námet na skúmanie vlastností štvoruholníkov sme vybrali vzťahy vystupujúce v Ptolemaiovej vete.

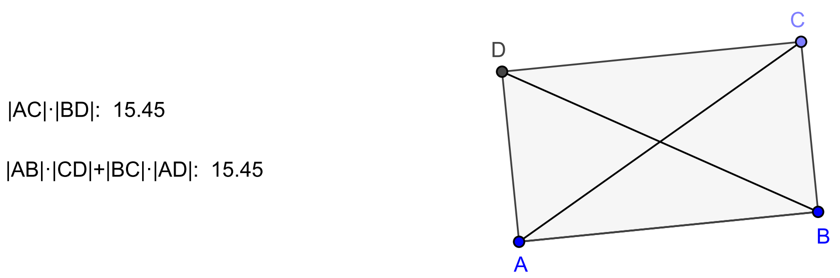
Klaudius Ptolemaios nebol známy len teóriou, že planéta Zem sa nachádza v strede vesmíru a ďalšie nebeské telesá obiehajú okolo nej po kružnicových dráhach. Učenec Ptolemaios napísal aj slávnu knihu Almagest (v roku 150 n. l.), v ktorej zhrnul dovtedy známe astronomické poznatky. V knihe sa nachádza aj matematické tvrdenie známe dnes ako Ptolemaiova veta. Na základe tejto vety sformulujeme tvrdenie: Ak je štvoruholník *ABCD* tetivový, potom platí, že súčin veľkostí uhlopriečok sa rovná súčtu súčinov veľkostí protiľahlých strán.

Pre štvoruholníky, ktoré nie sú tetivové, je súčin veľkostí uhlopriečok menší ako súčet súčinov veľkostí protiľahlých strán. Ak označíme dĺžky strán štvoruholníka *ABCD* a, b, c, d a dĺžky uhlopriečok označíme *e*, *f*, potom pre ľubovoľný štvoruholník platí vzťah:

$$e \cdot f \leq a \cdot c + b \cdot d$$

Úloha 4. Učenec Ptolemaios skúmal vzťah medzi dĺžkami strán *a*, *b*, *c*, *d* a uhlopriečkami *e*, *f* v štvoruholníkoch. Doplňte v zápise relačný symbol tak, aby vyjadroval pravdivé tvrdenie pre ľubovoľný štvoruholník *ABCD*: $e \cdot f \quad a \cdot c + b \cdot d$.

Pomocou dynamickej konštrukcie by žiaci skúmali uvedený neúplný vzťah medzi dĺžkami strán a uhlopriečok najprv v špeciálnych typoch štvoruholníkov. Získané výsledky by mohli zapisovať do tabuľky. Na obrázku (Obrázok 43) je zobrazený obdĺžnik s hodnotami skúmaných výrazov, ktorý je zostrojený v dynamickej konštrukcii **ptolemaiova_veta_obdlznik.ggb**. V tomto prípade by mal byť do vzťahu z úlohy 4 doplnený symbol rovnosti. Po preskúmaní špeciálnych typov štvoruholníkov by žiaci mohli preskúmať na záver manipulovaním s vrcholmi štvoruholníka *ABCD* aj konkrétne prípady všeobecných štvoruholníkov.



Obrázok 43. Výpočet hodnôt skúmaných výrazov pre obdĺžnik *ABCD*.

Metodická poznámka: Riešenie úlohy 4 by sa mohlo realizovať na vyučovacej hodine formou samostatnej práce s dynamickými konštrukciami. Pre urýchlenie skúmania by učiteľ mohol vytvoriť dynamickú konštrukciu s rôznymi typmi štvoruholníkov. Ak väčšina žiakov má doma možnosť pracovať s programom Geogebra, tak by mohla byť úloha 4 zadaná ako projekt riešený v rámci domácej prípravy, v ktorom by žiaci samostatne zostrojovali a skúmali štvoruholníky. V tomto prípade by učiteľ nemal prezradiť, že úloha je odvodená z Ptolemaiovej vety, aby si ju žiaci nevyhľadali na internete. Názov vety by spomenul až pri záverečnom zhrnutí výsledkov.

Po preskúmaní rôznych štvoruholníkov *ABCD* by mali žiaci dôjsť k záveru, že súčin veľkostí uhlopriečok je menší alebo sa rovná súčtu súčinov veľkostí protiľahlých strán. Bolo by zaujímavé, či prípad rovnosti by sa podarilo žiakom nájsť aj pre iné typy štvoruholníkov, ako sú štvorce a obdĺžniky. Ďalším zaujímavým aspektom pri štvorcoch a obdĺžnikoch je pozorovanie, či žiaci zbadajú, že vzťah doplnený znamienkom rovnosti vyjadruje Pytagorovu vetu pre pravouhlý trojuholník, ktorý vznikne rozdelením pravouholníka uhlopriečkou.

Na záver by žiaci doplnili vzťah v úlohe 4 a zhrnuli pozorované výsledky. Učiteľ by zdôraznil, že preskúmanie rôznych konkrétnych štvoruholníkov neznamená, že žiaci už aj dokázali zostavenú matematickú vetu. Na základe experimentovania nemožno napríklad tvrdiť, že neexistuje štvoruholník, pre ktorý by neplatil odvodený vzťah. Dôkaz zostavenej matematickej vety nie je triviálny a v ďalšej časti sa zameriame len na prípad rovnosti.

V ďalšej časti metodiky sa budeme zaoberať najmä opisovaním a vpisovaním kružníc štvoruholníkom. Učiteľ by sa žiakov opýtal, či by vedeli okrem doteraz spomenutých vlastností nájsť aj iné vlastnosti štvoruholníkov, na základe ktorých by sme ich vedeli rozdeľovať (napr. súmernosť podľa priesečníka uhlopriečok). Ak by žiaci nespomenuli možnosť opísania kružníc štvoruholníkom, učiteľ by ich naviedol aj na túto skutočnosť.

Potom by učiteľ zadal žiakom otázku:

- *Možno opísať kružnicu rovnobežníkom?*

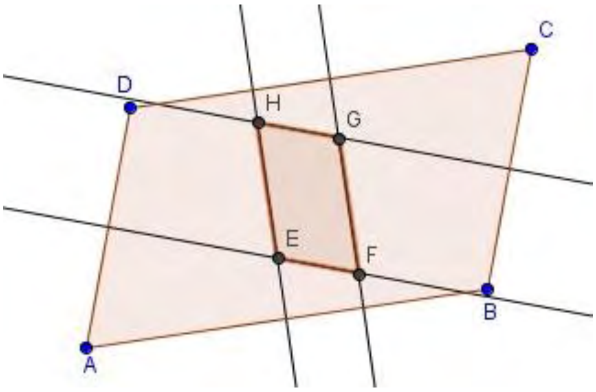
Pri hľadaní odpovede by žiaci mohli využiť náčrt alebo experimentovanie s dynamickou konštrukciou. Mohli by zistiť, že kosodĺžniku a kosoštvorcu sa kružnica opísať nedá, ale štvorcu a obdĺžniku áno. Potom by sa vrátili k tabuľke vytvorenej pri riešení úlohy 4. Znova by analyzovali získané výsledky z pohľadu existencie kružnice opísanej štvoruholníku. Žiaci by mali zistiť, že pre štvoruholníky, ktorým možno opísať kružnicu, nastáva vo vzťahu z úlohy 4 rovnosť. Testovanie hypotézy by mohlo prebiehať formou interaktívnej demonštrácie s využitím dynamickej konštrukcie s kružnicou, na ktorej by sa nachádzali všetky vrcholy konvexného štvoruholníka. Pre rôzne štvoruholníky s vrcholmi na kružnici by žiaci pozorovali hodnoty výrazov zo vzťahu z úlohy 4. Zistili by, že pre štvoruholníky, ktorým možno opísať kružnicu, platí, že súčin veľkostí uhlopriečok je rovný súčtu súčinov veľkostí protiľahlých strán.

Tetivové štvoruholníky

V konvexných štvoruholníkoch so všetkými vrcholmi na jednej kružnici, tvoria strany tetivy kružnice. Preto sa nazývajú tetivové štvoruholníky. Učiteľ by zaviedol tento pojem a zadal žiakom pracovný list **M 4.3_tetivovy_stvoruholnik.docx**. V prvej úlohe pracovného listu sa ešte vrátime k preskúmaniu vzájomnej polohy osí všetkých strán rovnobežníka.

Úloha 5. Preskúmajte vzájomnú polohu osí všetkých strán v ľubovoľnom rovnobežníku *ABCD*. Pre aké rovnobežníky sa osi všetkých strán pretínajú v jednom bode?

Pri riešení úlohy by mohli žiaci využiť aj experimentovanie s dynamickou konštrukciou. Na obrázku (Obrázok 44) sú zostrojené osi strán rovnobežníka *ABCD* a ich priesečníky, ktoré vytvárajú štvoruholník *EFGH*. Ak pri manipulovaní s vrcholmi rovnobežníka vytvoríme pravouholník, tak všetky osi strán sa pretnú v jednom bode predstavujúcom stred kružnice, ktorú možno opísať pravouholníku. V prípade rovnobežníka, ktorý nie je pravouholník, sú osi protiľahlých strán rovnobežné rôzne, a preto štvoruholník *EFGH* je rovnobežníkom.

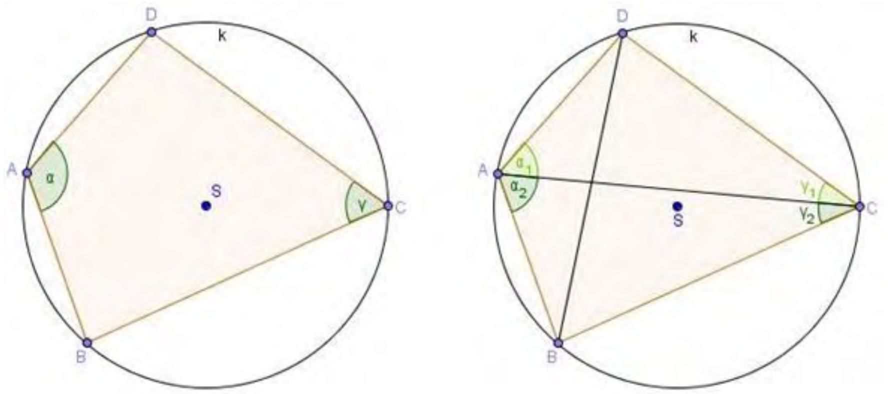


Obrázok 44. Útvar vytvorený osami strán rovnobežníka *ABCD*.

Po prvotnom preskúmaní tetivových štvoruholníkov sa možno zamýšľať nad otázkou, ako by sa dal jednoducho rozlíšiť tetivový štvoruholník od ostatných štvoruholníkov. Na úvodnom obrázku v pracovnom liste sú zobrazené aj iné typy tetivových štvoruholníkov, ako sú pravouholníky. V druhej úlohe navedieme žiakov na skúmanie vzťahov medzi veľkosťami vnútorných uhlov v konkrétnych typoch štvoruholníkov, ktorým možno opísať kružnicu. Ak by žiaci nevedeli sformulovať hypotézu, mohli by vyšetrovať veľkosti vnútorných uhlov tetivových štvoruholníkov aj v prostredí dynamickej geometrie.

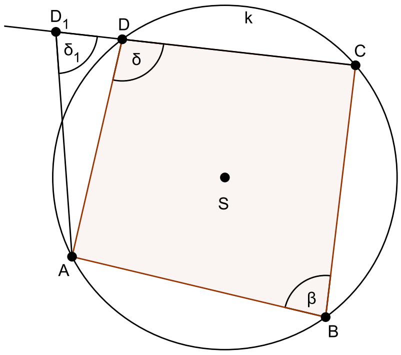
Cieľom nasledujúcej úlohy pracovného listu je priviesť žiakov k zdôvodneniu vzťahu pre súčet veľkostí protiľahlých vnútorných uhlov v tetivovom štvoruholníku. Žiaci si môžu zvoliť východisko a argumenty, ktoré využijú pri zdôvodňovaní.

Úloha 6. Zamerajte sa na preskúmanie vzťahu medzi veľkosťami vnútorných uhlov pri protiľahlých vrcholoch tetivového štvoruholníka. Pokúste sa zdôvodniť svoje zistenie využitím jedného z nižšie uvedených obrázkov. Na obrázku vľavo skúste využiť vzťah pre veľkosť stredového a obvodového uhla v kružnici. Na obrázku vpravo skúste využiť poznatky o obvodových uhloch a vzťah pre súčet veľkostí vnútorných uhlov v štvoruholníku.



Obrázok 45. Náčrty k zdôvodneniu vlastnosti tetivového štvoruholníka.

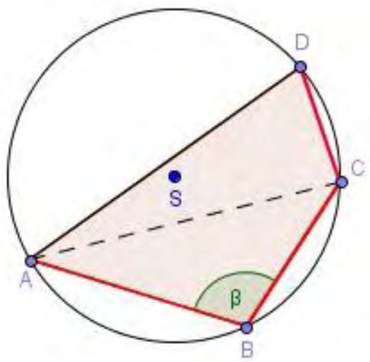
Po vyznačení stredových uhlov prislúchajúcich k vyznačeným obvodovým uhlom na obrázku (Obrázok 45) vľavo vidno, že súčet stredových uhlov je 360°. Potom súčet zodpovedajúcich obvodových uhlov je 180°. Na obrázku (Obrázok 45) vpravo by mali žiaci vyznačiť dvojice zhodných obvodových uhlov. Napríklad k obvodovému uhlu *DAC* prislúcha rovnako veľký obvodový uhol *DBC*. Takýmto spôsobom postupne žiaci vyznačia všetky vnútorné uhly tetivového štvoruholníka. Každý uhol bude zarátaný dvakrát a pri protiľahlých vrcholoch bude vyznačený každý zo štvorice uhlov. Keďže súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov v štvoruholníku je 360°, tak súčet veľkostí štyroch vyznačených uhlov pri protiľahlých vrcholoch je potom 180°. Pomocou analogických úvah, aké boli využité pri Talesovej kružnici, možno zdôvodniť aj platnosť obrátenej vety. Ak v je štvoruholníku súčet veľkostí vnútorných uhlov pri protiľahlých vrcholoch 180°, tak je štvoruholník tetivový. Ak využijeme obmenenú vetu, tak máme dokázať, že ak štvoruholník nie je tetivový, tak súčet veľkostí vnútorných uhlov pri protiľahlých vrcholoch nie je 180°. Na obrázku (Obrázok 46) je vrchol *D* posunutý po polpriamke *CD* do vonkajšej oblasti kružnice *k*. Štvoruholník $ABCD_1$ nie je tetivový. Keďže uhol δ je vonkajším uhlom v trojuholníku ADD_1, tak platí $\delta_1 < \delta$. Potom v štvoruholníku $ABCD_1$ je $\beta + \delta_1 < 180°$. Podobne možno ukázať, že ak vrchol D_1 posunieme po polpriamke *CD* dovnútra kružnice *k*, tak bude platiť $\beta + \delta_1 > 180°$.



Obrázok 46. Náčrt k vete o tetivovom štvoruholníku.

V ďalšej úlohe možno využiť odvodený vzťah pri konštrukcii tetivového štvoruholníka.

Úloha 7. Narysujte konvexný tetivový štvoruholník, v ktorom je dané: $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|\angle ABC| = 120°$, $|CD| = 3$ cm.



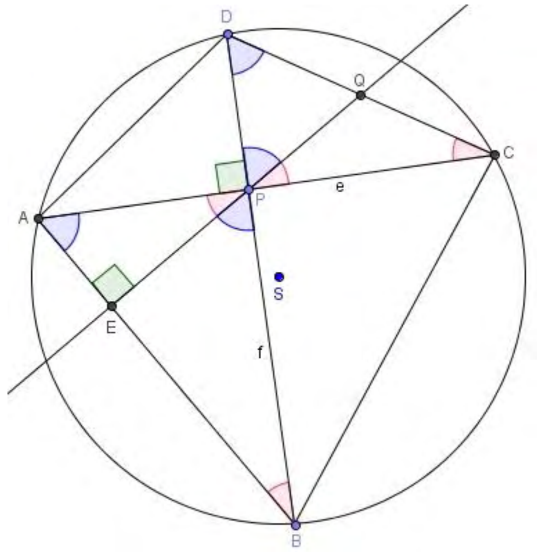
Obrázok 47. Náčrt tetivového štvoruholníka.

Po načrtnutí tetivového štvoruholníka *ABCD* (Obrázok 47) by si žiaci mali uvedomiť, že v prvom kroku by mali zostrojiť trojuholník *ABC*, lebo v ňom poznajú dĺžku dvoch strán a veľkosť nimi zovretého uhla. Potom by mohli využiť skutočnosť, že tetivovému štvoruholníku sa dá opísať kružnica *k*, ktorá je určená vrcholmi trojuholníka *ABC*. Vrchol *D* leží v priesečníku kružnice *k* a ďalšej kružnice $l(C, |CD|)$.

V poslednej úlohe pracovného listu by mali žiaci využiť osvojené poznatky pri zdôvodňovaní geometrických vzťahov.

Úloha 8. Daný je tetivový štvoruholník *ABCD*, ktorého uhlopriečky sú na seba kolmé a pretínajú sa v bode *P*. Priamka *p* prechádza cez priesečník *P* kolmo na jednu zo strán štvoruholníka *ABCD*. Bod *Q* je priesečníkom priamky *p* s protiľahlou stranou štvoruholníka *ABCD*. Preskúmajte polohu bodu *Q* na strane *CD*. Po vyznačení zhodných uhlov v obrázku skúste zdôvodniť svoje zistenie.

Pomocou uvedeného náčrtu alebo experimentovania s dynamickou konštrukciou by mali žiaci vysloviť hypotézu, že priamka *p* prechádza stredom *Q* protiľahlej strany *CD* tetivového štvoruholníka *ABCD*. Využitím vlastnosti obvodových uhlov a uhlov v pravouhlom trojuholníku sú na obrázku (Obrázok 48) vyznačené uhly s rovnakou veľkosťou. Ako vidno z obrázka, trojuholníky *DPQ* a *PCQ* sú rovnoramenné. Keďže majú spoločné rameno *PQ*, ramená týchto rovnoramenných trojuholníkov majú rovnakú dĺžku. Potom platí, že bod *Q* je stredom strany *CD* tetivového štvoruholníka *ABCD*.

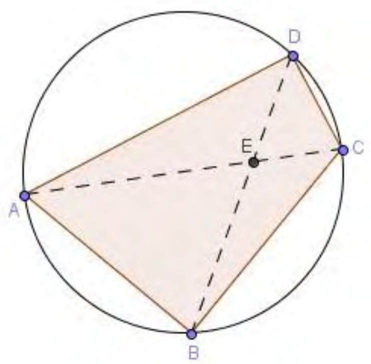


Obrázok 48. Náčrt k riešeniu úlohy 8.

Zdôvodnenie tvrdenia odvodeného z Ptolemaiovej vety

Pred zdôvodnením tvrdenia o tetivových štvoruholníkoch odvodeného z Ptolemaiovej vety zaradíme úlohu na odvodenie vzťahu pre uhlopriečky tetivového štvoruholníka.

Úloha 9. V tetivovom štvoruholníku *ABCD* sú zostrojené uhlopriečky a ich priesečník *E*. Nájdite vzťah medzi dĺžkami častí uhlopriečok vytvorených priesečníkom *E*.



Obrázok 49. Uhlopriečky v tetivovom štvoruholníku *ABCD*.

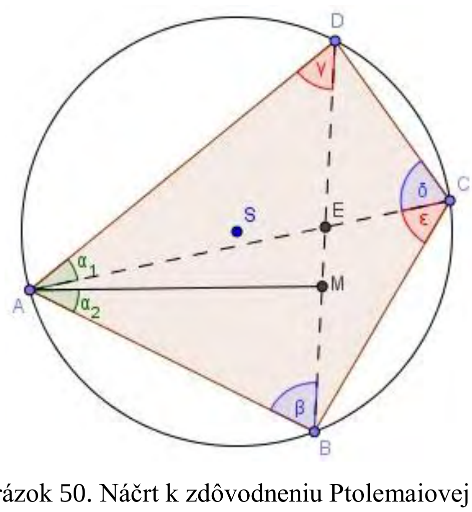
Preskúmajme trojuholníky *ABE* a *DCE* v tetivovom štvoruholníku *ABCD* s uhlopriečkami *AC* a *BD* zobrazenom na obrázku (Obrázok 49). Uhol *BAC* je obvodový uhol k menšiemu oblúku *BC*. Aj uhol *BDC* je obvodový uhol k tomu istému kružnicovému oblúku. Veľkosti týchto uhlov sú teda rovnaké. Z vlastnosti obvodových uhlov v kružnici vyplýva, že v trojuholníkoch *ABE* a *DCE* (podobne aj pre ďalšiu dvojicu trojuholníkov *AED* a *BEC*) sú rovnaké veľkosti zodpovedajúcich vnútorných uhlov, a preto sú tieto trojuholníky podobné (podľa vety uu). Platí:

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|DE|}{|CE|}, \text{ a teda } |AE| \cdot |CE| = |BE| \cdot |DE|$$

Ukázali sme, že súčiny veľkostí úsekov uhlopriečok tetivového štvoruholníka sú rovnaké.

Vráťme sa k Ptolemaiovej vete. Ako sme už spomenuli, aj keď vzťah v tejto vete vyzerá na prvý pohľad zložito, pre pravouholníky vyjadruje tvrdenie Pytagorovej vety. Pri zdôvodnení tvrdenia odvodeného z Ptolemaiovej vety využijeme vlastnosti obvodových uhlov v kružnici a podobnosť trojuholníkov. Zdôvodnenie môže byť pre žiakov 1. ročníka strednej školy pomerne náročné. Učiteľ by ho so žiakmi mohol vykonať v matematických triedach alebo v triedach, v ktorých sa žiaci zaujímajú o matematiku. V iných triedach by stačilo preskúmať význam Ptolemaiovej vety pre pravouholníky.

Začneme podobne, ako pri riešení úlohy 9, zostrojením uhlopriečok tetivového štvoruholníka *ABCD*. Pre zdôvodnenie tvrdenia pre tetivové štvoruholníky potrebujeme aj ďalšie dvojice podobných trojuholníkov. Preto využijeme uhol *CAD* a zostrojíme uhol *BAM* s rovnakou veľkosťou (Obrázok 50). Platí: $\alpha_1 = \alpha_2$, $M \in BD$.



Obrázok 50. Náčrt k zdôvodneniu Ptolemaiovej vety.

Veľkosť obvodového uhla *ADB* je rovná veľkosti obvodového uhla *ACB*, a veľkosť obvodového uhla *ACD* je rovná veľkosti obvodového uhla *ABD*. Podľa vety uu sú podobné dvojice trojuholníkov *ACD* a *ABM*; *ACB* a *ADM*. Potom platí:

$$\frac{e}{c} = \frac{a}{|BM|}, \frac{e}{b} = \frac{d}{|DM|}$$

kde e je uhlopriečka *AC*. Po úprave máme:

$$e \cdot |BM| = a \cdot c, e \cdot |DM| = b \cdot d$$

Sčítame zodpovedajúce strany obidvoch rovností:

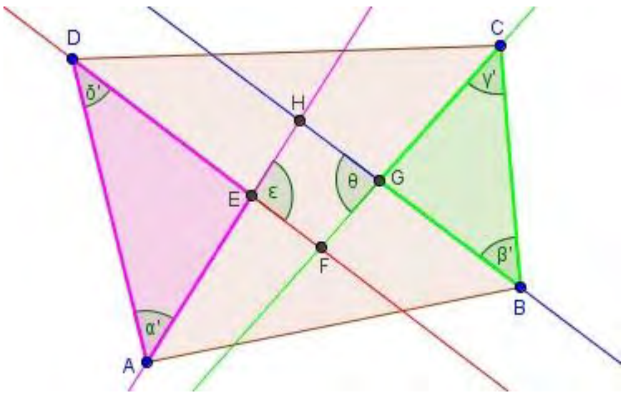
$$e \cdot (|BM| + |DM|) = a \cdot c + b \cdot d$$

Keďže súčet veľkostí úsečiek *BM* a *DM* je dĺžka uhlopriečky f, dostávame tvrdenie pre tetivové štvoruholníky odvodené z Ptolemaiovej vety.

Dotyčnicový štvoruholník

V predchádzajúcej časti sme sa zamerali na skúmanie možností opísania kružnice štvoruholníkom. Zaujímavým námetom na skúmanie je aj hľadanie kružnice vpísanej do štvoruholníka. Žiaci sa už na základnej škole naučili vpisovať kružnice do trojuholníkov. Stred kružnice vpísanej do trojuholníka je určený priesečníkom osí vnútorných uhlov v trojuholníku.

V štvoruholníkoch predstavuje vpisovanie kružnice zložitejší problém. Pri otázke, či možno vpísať do štvoruholníka kružnicu, by si žiaci mohli spomenúť, že napríklad do štvorca možno vpísať kružnicu. Aj pomocou dynamickej konštrukcie by však mohli zistiť, že osi všetkých štyroch vnútorných uhlov štvoruholníka sa nemusia pretínať v jednom bode.



Obrázok 51. Osi vnútorných uhlov štvoruholníka *ABCD*.

Na úvod by mali žiaci pomocou dynamickej konštrukcie **osi_vnutornych_uhlov.ggb** preskúmať priesečníky osí všetkých štyroch vnútorných uhlov v štvoruholníku. Učiteľ by im potom položil otázky:

- *Koľko rôznych priesečníkov môžu mať všetky dvojice osí vnútorných uhlov štvoruholníka?*
- *Môžu sa osi všetkých vnútorných uhlov štvoruholníka pretínať v jednom bode?*

Dvojice osí vnútorných uhlov štvoruholníka sa môžu pretínať až v šiestich rôznych bodoch. Experimentovaním s dynamickou konštrukciou by žiaci mohli nájsť aj príklady štvoruholníkov, v ktorých sa osi vnútorných uhlov pretnú v jednom bode. Do týchto štvoruholníkov by potom mohli vpísať kružnicu. Učiteľ by žiakov upozornil, že takéto štvoruholníky nemusia byť len štvorce alebo kosoštvorce. Zaviedol by aj pojem dotyčnicový štvoruholník.

Ešte pred skúmaním dotyčnicových štvoruholníkov, by sme zamerali pozornosť žiakov na štvoruholník, ktorého vrcholy vytvárajú priesečníky štyroch dvojíc osí vnútorných uhlov štvoruholníka (Obrázok 51).

Úloha 10. Nech v štvoruholníku *ABCD* vytvárajú osi vnútorných uhlov konvexný štvoruholník *EFGH*. Nájdite vzťah medzi veľkosťami vnútorných uhlov štvoruholníka *EFGH* pri protiľahlých vrcholoch *E, G*.

Ak by žiaci nevedeli samostatne nájsť vzťah medzi veľkosťami vnútorných uhlov *FEH* a *FGH*, učiteľ by im poradil, aby využili vzťahy medzi veľkosťami uhlov *FEH* a *FGH* a veľkosťami vnútorných uhlov v trojuholníkoch *AED* a *BGC*.

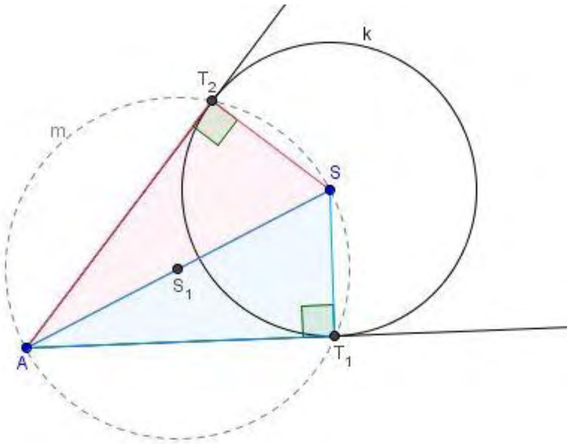
Pre veľkosti uhlov *FEH* a *FGH* platí:

$$\varepsilon = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad \theta = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

Keďže súčet veľkostí vnútorných uhlov štvoruholníka *ABCD* je 360°, po sčítaní vyššie uvedených rovností dostávame, že súčet veľkostí uhlov *FEH* a *FGH* je 180°. Potom aj súčet veľkostí vnútorných uhlov *EFG* a *GHE* je 180°. Zistili sme, že štvoruholník *EFGH* je tetivový štvoruholník, ktorému možno opísať kružnicu.

Potom by učiteľ nastolil otázku, či aj dotyčnicové štvoruholníky nemajú nejakú špeciálnu vlastnosť, podobne ako mali tetivové štvoruholníky, ktorá by umožňovala odlíšiť dotyčnicové štvoruholníky od iných štvoruholníkov aj bez zostrojovania osí jeho vnútorných uhlov. Už z názvu dotyčnicový štvoruholník vyplýva, že strany tohto štvoruholníka tvoria dotyčnice jemu vpísanej kružnice. V ďalšej úlohe sa budeme venovať dotyčniciam kružnice vedeným z bodu mimo kružnice. Tento bod by predstavoval jeden vrchol dotyčnicového štvoruholníka, ktorého strany obsahujúce tento vrchol ležia na dotyčniciach kružnice.

Úloha 11. Polpriamky AT_1 a AT_2 sú dotyčnice kružnice k. Nájdite vzťah medzi dĺžkami úsečiek AT_1 a AT_2.

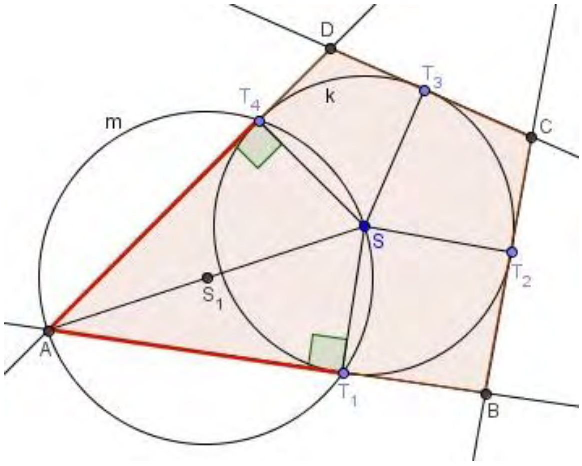


Obrázok 52. Náčrt k riešeniu úlohy 11.

Na základe vety Ssu sú trojuholníky AST_1 a AST_2 zhodné. Potom úsečky AT_1 a AT_2 majú rovnakú dĺžku. Úlohou 11 sme žiakov naviedli na skúmanie dĺžok úsečiek pri hľadaní vlastnosti dotyčnicových štvoruholníkov.

Úloha 12. Zistite, akú vlastnosť musia mať dĺžky strán štvoruholníka *ABCD*, aby sa mu dala vpísať kružnica.

Využitím náčrtu na obrázku (Obrázok 53) alebo dynamickej konštrukcie budú žiaci hľadať vlastnosť dotyčnicového štvoruholníka. Aj keď to v obrázku (Obrázok 53) nie je vyznačené, rovnaká situácia ako pri vrchole *A* nastáva aj pri zvyšných vrcholoch dotyčnicového štvoruholníka *ABCD*. Učiteľ by mohol vyzvať žiakov, aby vyznačili v obrázku úsečky s rovnakou dĺžkou na stranách dotyčnicového štvoruholníka *ABCD*. Rovnako dlhé úsečky by mohli vyznačiť rovnakou farbou. Potom je už len malý krok k zisteniu, že na oboch dvojiciach protiľahlých strán sa vyskytujú úsečky vyfarbené štyrmi rôznymi farbami a teda súčty dĺžok oboch dvojíc protiľahlých strán dotyčnicového štvoruholníka musia byť rovnaké.

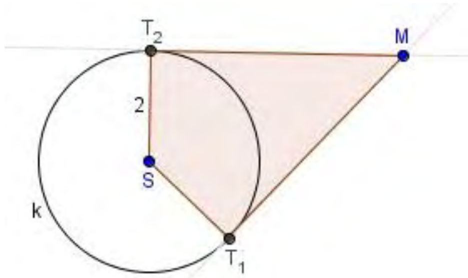


Obrázok 53. Náčrt k odvodeniu vlastnosti dotyčnicového štvoruholníka.

Na upevnenie objaveného poznatku sme vybrali dve úlohy.

Úloha 13. Z bodu M sú zostrojené dotyčnice ku kružnici k s polomerom 2 cm. Obvod štvoruholníka ST_1MT_2 je 10 cm. Rozhodnite, či štvoruholníku ST_1MT_2 možno vpísať kružnicu.

Na obrázku (Obrázok 54) je náčrt k riešeniu úlohy. Žiaci by si mali uvedomiť, že dĺžky strán MT_1 a MT_2 sú rovnaké, a preto je dĺžka úsečiek MT_1 aj MT_2 rovná 3 cm. Štvoruholník ST_1MT_2 je dotyčnicový. Učiteľ by mohol so žiakmi riešenie úlohy aj zovšeobecniť a zadať žiakom otázku, či možno vpísať kružnicu každému deltoidu.



Obrázok 54. Náčrt k riešeniu úlohy 13.

Úloha 14. Zistite, aké vlastnosti musí mať dotyčnicový rovnobežník.

V každom rovnobežníku platí pre dĺžky strán: $a = c$ aj $b = d$. Aby bol rovnobežník dotyčnicový musí byť zároveň splnená podmienka: $a + c = b + d$. Z uvedených podmienok vyplýva, že všetky štyri strany dotyčnicového rovnobežníka musia byť zhodné. Tieto podmienky spĺňa štvorec a kosoštvorec.

M5 – Lineárna závislosť

Tematický celok	
Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy	
Cieľová skupina	Odhadovaný čas výučby
Druhý ročník SŠ	Dve vyučovacie hodiny
Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti	Kognitívne ciele
▪ Vedieť zostaviť tabuľky s hodnotami dvoch veličín a reprezentovať ich pomocou grafov, ▪ ovládať úpravy výrazov s premennými, ▪ ovládať základné nástroje tabuľkového kalkulátora umožňujúce vytváranie tabuliek a grafov, ▪ ovládať základy práce v dynamickom geometrickom systéme Geogebra.	▪ Charakterizovať lineárnu funkčnú závislosť medzi veličinami využitím tabuliek a grafov, ▪ vyjadriť lineárnu funkčnú závislosť prostredníctvom predpisu na výpočet hodnôt funkcie, ▪ určiť základné vlastnosti lineárnej funkcie, ▪ aplikovať osvojené poznatky pri riešení úloh z reálneho života.
Bádateľské zručnosti	Didaktický problém
▪ Získavať a zaznamenávať hodnoty premenných získaných pomocou modelovania, ▪ transformovať výsledky do tabuliek a grafov, ▪ určovať vzťahy medzi premennými a vyjadrovať ich zápisom funkcií, ▪ formulovať závery a hľadať vhodné argumenty na ich zdôvodňovanie.	▪ Pred zavedením pojmu funkcia by mali žiaci preskúmať a porozumieť viaceré typy závislostí medzi veličinami. Pre hlbšie porozumenie najjednoduchšieho prípadu závislosti – lineárnej závislosti by mali žiaci využívať rôzne reprezentácie údajov pri skúmaní závislostí, ktorými možno charakterizovať javy z reálneho života.
Didaktické materiálne prostriedky	Didaktické metódy a organizačné formy
▪ Pracovné listy na skúmanie a aplikovanie lineárnej funkcie (M 5.1, M 5.3), ▪ zošit vytvorený pomocou tabuľkového kalkulátora, ▪ dynamické konštrukcie vytvorené v programe Geogebra, ▪ applet dostupný na internete.	▪ Interaktívna demonštrácia, štruktúrované bádanie, ▪ riadený rozhovor, ▪ individuálna forma práce pri počítačoch.

Úvod

Základom návrhu predloženej metodiky je aplikácia bádateľského prístupu k preskúmaniu a porozumeniu lineárnej závislosti medzi veličinami. Zámerom metodiky je nadviazať na vedomosti a zručnosti žiakov o lineárnych funkciách zo základnej školy a prehĺbiť intuitívne chápanie závislostí medzi veličinami. Pri riešení úloh sú žiaci vedení k využívaniu rôznych reprezentácií údajov na charakterizovanie lineárnej závislosti. Pre podporu bádateľských činností sú pripravené pomôcky vypracované v prostredí tabuľkového kalkulátora a dynamického geometrického systému. Úlohy súvisia s každodenným životom žiakov a umožňujú vytvárať prepojenia matematiky s ďalšími prírodovednými predmetmi.

Modelovanie lineárnej závislosti

V úvodnej úlohe zopakujeme špeciálny prípad lineárnej závislosti – priamu úmernosť. Od žiakov sa bude vyžadovať, aby vytvorili tabuľku, graf aj predpis na výpočet hodnôt funkcie.

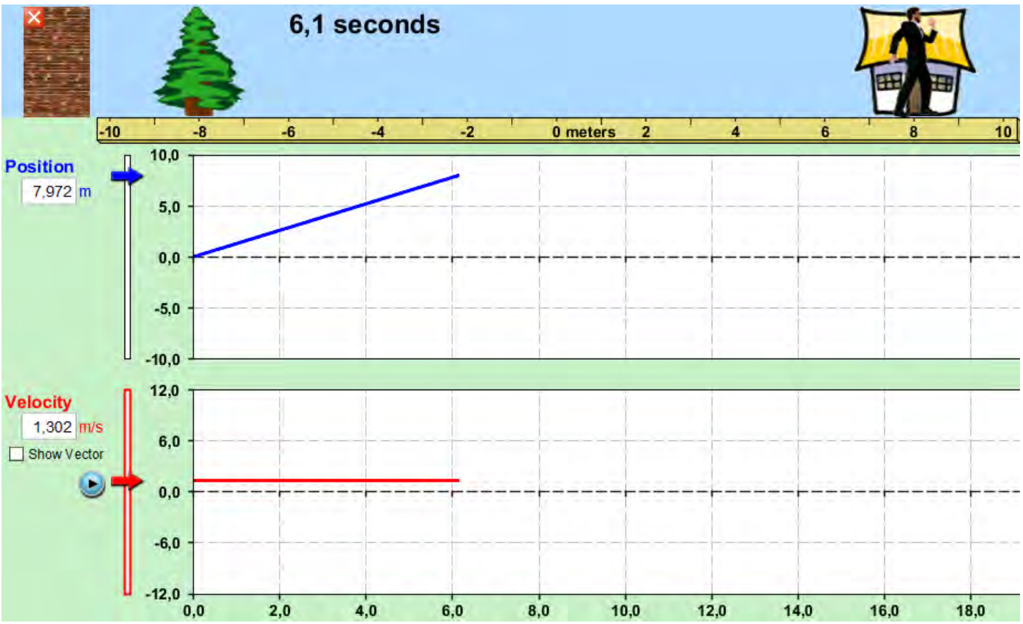
Úloha 1. Robotník zarobí za jednu hodinu 4,5 €. Vytvorte tabuľku a graf na vyjadrenie zárobku robotníka pre zvolené časové údaje.

Žiaci vypracujú tabuľku pre zvolené doby trvania práce. Ak v prvom riadku tabuľky budú žiaci zadávať len celé čísla, tak učiteľ upozorní žiakov, že doba trvania práce nemusí byť vyjadrená len celými číslami. Na základe tabuľky vypracujú žiaci graf. Potom žiaci určia predpis na výpočet mzdy za čas t. Možno ho charakterizovať ako priradenie, ktoré hodnotám času t priradí hodnoty $4{,}5t$. Učiteľ by mal od žiakov vyžadovať aj zovšeobecnenie a vysvetlenie, čo to znamená, že medzi dvoma veličinami je priama úmernosť. Na záver vyzve učiteľ žiakov, aby skúsili sami povedať príklady na využitie priamej úmernosti.

V ďalšej aktivite budú žiaci skúmať rovnomerný priamočiary pohyb. Na simuláciu pohybu telesa využijeme applet dostupný na internete https://phet.colorado.edu/en/simulation/moving-man. Applet využije učiteľ na interaktívnu demonštráciu. Na záložke Charts odporúčame zatvoriť časť okna Acceleration, lebo applet bude využitý hlavne na demonštráciu rovnomerného priamočiareho pohybu. Najprv bude učiteľ posúvať muža z počiatočnej pozície do domu voľnou rukou. Po dosiahnutí pozície domu učiteľ zastaví záznam. Počas záznamu sa vykreslia grafy závislosti prejdenej dráhy a rýchlosti na čase. Aj pri snahe o rovnomerný pohyb bude graf zobrazujúci závislosť rýchlosti na čase obsahovať viaceré zalomenia. Na analyzovanie zostrojených grafov zadá učiteľ žiakom otázky:

- *Ako dlho sa pohyboval muž, kým došiel do domu?*
- *Akú najväčšiu rýchlosť dosiahol pri svojom pohybe?*
- *Ak by bol v grafe vyjadrujúcom závislosť prejdenej dráhy na čase úsek rovnobežný s osou x, akou rýchlosťou by sa vtedy muž pohyboval?*

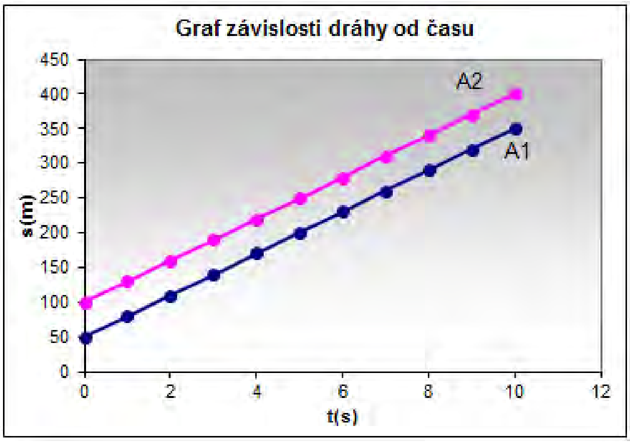
Po zodpovedaní otázok sa učiteľ spýta žiakov, ako by sa zmenil graf závislosti prejdenej dráhy na čase, ak by bola rýchlosť pohybu muža konštantná. Po zmazaní vytvorených grafov učiteľ nastaví rýchlosť muža pomocou červeného posúvača a znova spustí simuláciu pohybu muža. V okne sa vykreslia príslušné grafy (Obrázok 55). Graf závislosti prejdenej dráhy na čase predstavuje úsečka začínajúca v počiatku súradnicovej sústavy. Potom sa môže učiteľ spýtať žiakov, ako by sa zmenila táto úsečka, ak by sa muž pohyboval väčšou rýchlosťou. Keďže by sa dostal do domu skôr, úsečka by zvierala väčší uhol s osou *x*. Domnienky žiakov možno znova otestovať pomocou appletu. Porozumenie a rozvíjanie týchto zistení je cieľom riešenia ďalších úloh. Na záver možno postaviť muža na pozíciu 2 m a zopakovať simuláciu. Začiatok polpriamky v hornom grafe bude v tomto prípade v bode [0, 2].



Obrázok 55. Applet na simuláciu pohybu muža.

Po preskúmaní grafov vyjadrujúcich závislosť dráhy a rýchlosti od času pri rovnomernom priamočiarom pohybe sa budeme venovať vyšetrovaniu grafov a tabuliek súvisiacich s pohybom dvoch áut.

Úloha 2. Na obrázku je zobrazený graf závislosti prejdenej dráhy od času dvoch pohybujúcich sa áut. Porovnajte rýchlosti áut.



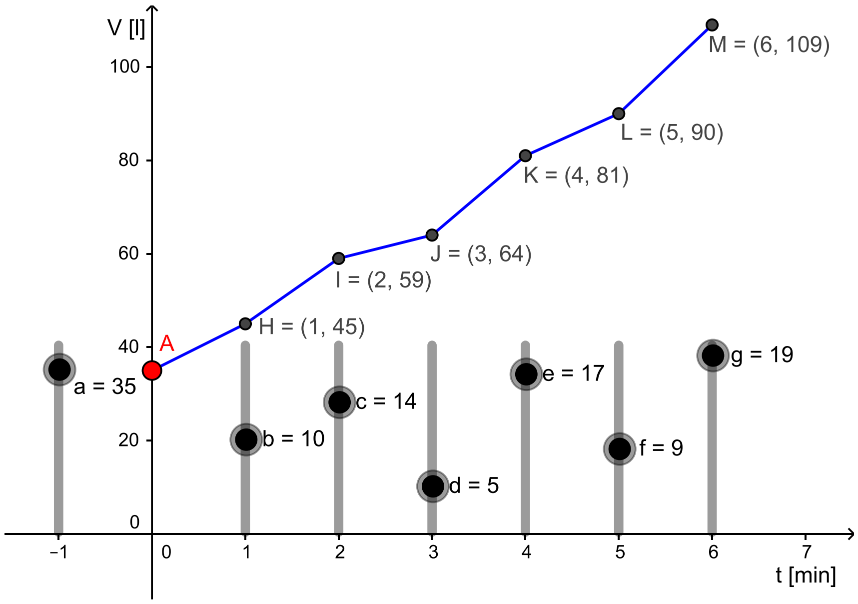
Obrázok 56. Grafické vyjadrenie lineárnej závislosti.

Na základe predchádzajúcej interaktívnej demonštrácie by si mali žiaci uvedomiť, že ak sa muž pohyboval rýchlejšie, tak polpriamka zvierala väčší uhol s osou *x*. Keďže polpriamky v grafe sú rovnobežné, obe autá sa pohybovali rovnakou rýchlosťou. Na vyšetrovanie závislosti prejdenej dráhy od času dvoch áut pohybujúcich sa rovnakou rýchlosťou môžu žiaci využiť zošit **rychlost_aut.xlsx**. Na druhom hárku zošita možno pomocou posúvača meniť rýchlosť áut a pozorovať zmeny v tabuľkách a grafoch. Žiaci by si mali všimnúť v tabuľkách aj základnú vlastnosť lineárnej funkcie. Na preskúmanie a uvedomenie si základnej vlastnosti lineárnej funkcie využijeme modelovanie, pri ktorom budú môcť žiaci manipulovať s objektmi v dynamickej konštrukcii **pritok_vody.ggb** (Obrázok 57) a skúmať graf funkčnej závislosti.

Úloha 3. Keď otvorili prítok vody do suda, bolo v ňom už 35 litrov vody. Po otvorení prítoku každú minútu rovnomerne pritieklo do suda určité množstvo vody. Množstvo vody v litroch, ktorá pritiekla do suda počas jednotlivých minút, určujú hodnoty premenných *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*. Po šiestich minútach prítok vody uzatvorili. Pomocou posúvačov nastavte také množstvá vody pritečené do suda počas jednotlivých minút, aby celkové množstvo vody v sude na konci každej minúty rástlo v závislosti od času lineárne.

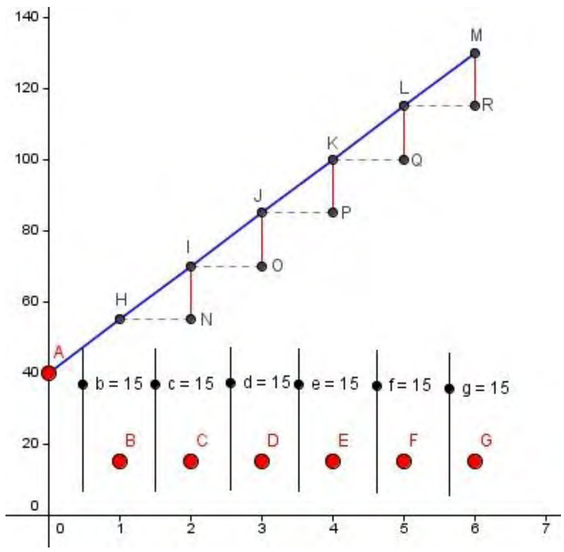
Žiaci by mali porozumieť grafu, preto ešte pred manipuláciou s posúvačmi majú do textových polí zadať čísla vyjadrujúce objem vody v sude na konci prvej minúty a po uzatvorení prítoku. Zmeny množstva pritečenej vody vyvolané manipuláciou s posúvačmi sa prejavia posunutím bodov, ktorých *y*-ové súradnice vyjadrujú množstvo pritečenej vody a premietnu sa aj do grafu vyjadrujúceho závislosť objemu vody v sude od času.

Metodická poznámka: Po manipulovaní s dynamickou konštrukciou by žiaci mali zistiť, že ak každú minútu natečie do suda rovnaké množstvo vody, tak objem vody v sude narastá s časom lineárne. Okrem tohto zistenia, by učiteľ vyžadoval od žiakov aj závery týkajúce sa vplyvu množstva vody v sude pred otvorením prítoku a množstva vody pritečenej počas jednotlivých minút na tvar grafu lineárnej závislosti.



Obrázok 57. Graf závislosti objemu vody v sude od času.

Po nastavení rovnakých množstiev pritečenej vody počas jednotlivých minút (označíme ich *p*) budú žiaci analyzovať graf lineárnej funkcie. Na obrázku (Obrázok 58) sú v grafe zostrojené aj pomocné pravouhlé trojuholníky znázorňujúce prírastky funkcie po každej minúte, t. z. zodpovedajúce zmene času o 1. Ak sú prírastky funkcie za jednotku času rovnaké, podľa vety usu sú znázornené pravouhlé trojuholníky zhodné a uhly medzi preponami a osou *x* sú v každom trojuholníku zhodné. Grafom tejto funkcie je časť priamky.



Obrázok 58. Graf lineárnej funkcie.

Na záver tejto časti učiteľ spolu so žiakmi zovšeobecní objavené zistenia pri zavedení predpisu lineárnej funkcie. Ak označíme množstvo vody v sude pred otvorením prítoku *z*, potom času *t* priradíme objem vody v sude $z + p \cdot t$. Podobne pri rovnomernom priamočiarom pohybe možno priradiť času *t* prejdenú dráhu $s(0) + v \cdot t$. Predpis na výpočet hodnôt lineárnej funkcie možno vyjadriť v tvare: $y = ax + b$, kde a, b sú reálne čísla. Učiteľ by zhrnul aj doterajšie zistenia o vplyve koeficientov a, b na graf lineárnej funkcie. Na potvrdenie poznatku, že pri zväčšovaní hodnoty premennej *x* o 1 sa zmenia hodnoty lineárnej funkcie o hodnotu lineárneho koeficientu *a* by žiaci určili rozdiel $f(x + 1) - f(x)$.

Vlastnosti lineárnej funkcie

Na prehĺbenie poznatkov o lineárnych funkciách zadáme žiakom pracovný list **M 5.1_vlastnosti_lin_funkcie.docx**. Do prvej časti pracovného listu sme zaradili úlohy na určovanie prírastkov alebo úbytkov lineárnej funkcie. V prvej úlohe je zadaná klesajúca lineárna funkcia. V ďalšej úlohe majú žiaci určovať prírastky lineárnej funkcie.

Úloha 4. Daná je lineárna funkcia $y = \frac{x}{2} + 1$. Vypočítajte hodnoty funkcie pre hodnoty premennej *x* zadané v tabuľke. Na základe vypočítaných hodnôt sformulujte závery o prírastkoch funkcie.

Tabuľka 4. Zápis hodnôt funkcie.

x	-1,5	-0,5	0,5	1	4	7
y						

Druhá časť pracovného listu je zameraná na vyšetrovanie grafov lineárnych funkcií. Najprv majú žiaci načrtnúť grafy vyjadrujúce cenu nákupu látky pri zadaných cenách za 1 m. Potom budú môcť využiť na skúmanie grafov lineárnych funkcií dynamickú konštrukciu.

Úloha 5. V dynamickej konštrukcii **graf_lin_funkcie.ggb** je zostrojený graf lineárnej funkcie $y = ax + b$, pričom $a = 1$, $b = 0$. Pomocou posúvačov meňte hodnoty jedného koeficientu a pozorujte zmeny grafu funkcie. Sformulujte odpovede na otázky:

a) Ako sa mení graf funkcie, ak zväčšujeme hodnotu koeficientu a na: 1; 1,5; 2,5; ...

b) Ako sa mení graf funkcie, ak zmenšujeme hodnotu koeficientu a na: 1; 0,5; –0,5; –1; ...

c) Ako sa mení graf funkcie, ak meníme hodnotu koeficientu b?

d) Určte súradnice priesečníka všetkých grafov lineárnych funkcií $y = ax - 2$.

e) Aká je vzájomná poloha grafov lineárnych funkcií $y = 2x - 1$ a $y = 2x + 3$?

f) Aká je vzájomná poloha grafov lineárnych funkcií $y = 2x - 5$ a $y = 5x + 3$?

g) Graf ktorej lineárnej funkcie prechádza bodom [0, 2] a je rovnobežný s grafom lineárnej funkcie $y = x - 1$?

h) Napíšte predpis pre lineárnu funkciu, ktorej graf prechádza bodmi [0, 3] a [2, 7].

Na záver pracovného listu sme zaradili úlohu, ktorú možno považovať za propedeutickú úlohu k vyšetrovaniu monotónnosti funkcií.

Úloha 6. Daný je parametrický systém lineárnych funkcií $f_p : y = 2x - 3px - p^2, p \in R$ v predpise ktorých je p v úlohe parametra. Určte všetky hodnoty parametra p, aby pri zväčšovaní hodnôt premennej x boli hodnoty funkcie f_p stále menšie.

Z predchádzajúcich zistení by žiaci mali porozumieť, že hľadané lineárne funkcie musia mať zápornú hodnotu koeficientu a. Preto majú riešiť nerovnicu $2 - 3p < 0$.

Využitie lineárnej funkcie pri riešení úloh z reálneho života

Do druhého pracovného listu uloženého v súbore **M 5.3_aplikacie_lin_funkcie.docx**, sme zaradili úlohy z reálneho života, pri riešení ktorých možno využiť poznatky o lineárnych funkciách. Začiatok pracovného listu obsahuje úlohy na prevody. Žiaci majú zostaviť tabuľku a graf na prevod dĺžky zadanej v cm na palce (1 inch = 2,54 cm). V ďalšej úlohe majú žiaci hľadať predpisy na prevod teploty vyjadrenej v Celziovej stupnici do Kelvinovej a Fahrenheitovej teplotnej stupnice.

Úloha 7. Teplotu možno vyjadrovať nielen v Celziovej teplotnej stupnici. Zostrojte graf a nájdite predpis na prevod z Celziovej teplotnej stupnice do:

a) Kelvinovej teplotnej stupnice, ak platí, že 0 °C = 273,15 K a rozdielu teploty o 1 °C odpovedá rozdiel o 1K.

b) Fahrenheitovej teplotnej stupnice, ak je daná tabuľka so zodpovedajúcimi teplotami v oboch teplotných stupniciach. Určte, akej teplotnej zmene v Celziovej stupnici odpovedá 1 °F.

Tabuľka 5. Prevod teplôt vyjadrených v °C na °F.

°C	5	10	15	20
°F	41	50	59	68

Z tabuľky by mali žiaci zbadať, že rovnakým zmenám teploty v Celziovej teplotnej stupnici zodpovedajú rovnaké zmeny vo Fahrenheitovej teplotnej stupnici, a preto je medzi týmito veličinami lineárna závislosť.

Ďalšia úloha je zameraná na využitie grafov pri skúmaní rovnomerného priamočiareho pohybu dvoch áut pohybujúcich sa oproti sebe. Na základe daného grafu zobrazujúceho závislosť vzdialenosti dvoch áut od jedného mesta od času majú žiaci opísať priebeh pohybu. Posledné dve úlohy sú z oblasti finančnej matematiky. Pri ich riešení by mali žiaci rozložiť definičný obor funkcie na dve disjunktné podmnožiny a zostaviť rozvetvený predpis lineárnej funkcie. Pre zavedenie a vysvetlenie funkcie definovanej po častiach by učiteľ mohol pred riešením týchto úloh spolu so žiakmi zopakovať definíciu absolútnej hodnoty reálneho čísla.

Úloha 8. V zmenárni na výmenu valút sa riadia nasledovným pravidlom: pri výmene menších súm je poplatok pri výmene peňazí 199 CZK, ak 2 % z vymenenej sumy prevyšujú 199 CZK, tak je poplatok rovný 2 % z menenej sumy. Vytvorte tabuľku a graf na prevod súm z € na CZK. Vo výpočte využite aktuálny výmenný kurz na nákup valút vo vybranej banke.

Pre zjednodušenie výpočtov môžu žiaci využiť zaokrúhlenú hodnotu výmenného kurzu. Zostrojený graf má byť zalomený v bode, v ktorom 2 % z menenej sumy činia práve 199 CZK. V druhej časti úlohy v pracovnom liste sa od žiakov vyžaduje aj zostavenie predpisu funkcie na výpočet zmenenej sumy y v CZK za sumu x €. V nasledujúcej úlohe majú žiaci na základe zadaných pravidiel vytvoriť lineárny model na reprezentáciu opísanej situácie. Základom modelu by mal byť predpis lineárnej funkcie vyjadrujúcej závislosť ceny za zapožičanie lode od času t.

Úloha 9. Cena za zapožičanie lode pri jazere sa počíta nasledovne: za 2 hodiny 11 €, za 5 hodín 24 €. Iné hodiny sú účtované na základe pomernej sadzby z príslušnej ceny. Vypočítajte cenu za 1,5 hod; 3 hod; 4 hod; 13 hod. Vytvorte lineárny model na výpočet ceny za zapožičanie lode na čas t.

Žiaci by mali zostaviť rozvetvený predpis funkcie na výpočet poplatku za zapožičanie lode pre navrhnutý lineárny model.

M6 – Vlastnosti funkcií

<table>
<tr><td colspan="2">Tematický celok</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy</td></tr>
<tr><td>Cieľová skupina</td><td>Odhadovaný čas výučby</td></tr>
<tr><td>Druhý ročník SŠ</td><td>Štyri vyučovacie hodiny</td></tr>
<tr><td>Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti</td><td>Kognitívne ciele</td></tr>
<tr><td>▪ Vedieť využívať rôzne reprezentácie funkcií pri skúmaní ich vlastností,
▪ vedieť načrtnúť grafy základných typov funkcií,
▪ vedieť zobraziť grafy v osovej súmernosti podľa osí x, y a priamky s rovnicou $y = x$ a v stredovej súmernosti podľa počiatku súradnicovej sústavy,
▪ ovládať základné nástroje tabuľkového kalkulátora na tvorbu tabuliek a grafov,
▪ ovládať základy práce v dynamickom geometrickom systéme Geogebra.</td><td>▪ Určovať vlastnosti funkcií na základe grafu a aj analýzou predpisu na výpočet hodnôt funkcie,
▪ porozumieť obsah definícií pojmov a využívať ich pri charakterizovaní vlastností funkcií,
▪ preskúmať a zdôvodňovať tvrdenia o vlastnostiach funkcií,
▪ porozumieť význam inverzných funkcií a určovať inverzné funkcie využitím grafu a predpisu na výpočet hodnôt funkcie.</td></tr>
<tr><td>Bádateľské zručnosti</td><td>Didaktický problém</td></tr>
<tr><td>▪ Interpretovať vzťahy medzi premennými vyjadrené pomocou grafov,
▪ analyzovať vlastnosti funkcií a vyjadriť ich pomocou matematických zápisov, formulovať hypotézy,
▪ aplikovať výsledky a osvojené postupy na ďalšie typy funkcií,
▪ formulovať závery a hľadať vhodné argumenty na ich zdôvodňovanie.</td><td>▪ Žiaci sa často učia naspamäť definície charakterizujúce vlastnosti funkcií a nevedia ich aplikovať pri opisovaní vlastností funkcií. Preto je vhodné priviesť žiakov skúmaním konkrétnych funkcií k vysloveniu záverov a porozumeniu obsahu definícií.
▪ Pri porozumení pojmu inverzná funkcia je potrebné vytvoriť u žiakov správnu geometrickú aj algebraickú predstavu, ktorú je vhodné začať budovať pri lineárnych funkciách.</td></tr>
<tr><td>Didaktické materiálne prostriedky</td><td>Didaktické metódy a organizačné formy</td></tr>
<tr><td>▪ Pracovné listy na skúmanie vlastností funkcií (M 6.1, M 6.3, M 6.4, M 6.5, M 6.7),</td><td>▪ Interaktívna demonštrácia, štruktúrované bádanie,</td></tr>
</table>

▪ zošit vytvorený pomocou tabuľkového kalkulátora, ▪ dynamické konštrukcie vytvorené v programe Geogebra.	▪ riadený rozhovor, ▪ individuálna forma práce pri počítačoch.

Úvod

Návrh metodiky je zameraný na využitie bádateľsky orientovaného vyučovania pri vyšetrovaní vlastností funkcií. Pri návrhu metodiky sme sa inšpirovali aj metodickými postupmi opísanými v článku (Šveda a kol., 2013). V prvej časti metodiky je hlavná pozornosť sústredená na analýzu grafov funkcií pri charakterizovaní vlastností funkcií. Potom sú žiaci postupne vedení k zovšeobecňovaniu pozorovaných vzťahov, k matematickému vyjadreniu a definovaniu vlastností funkcií. Návrh metodiky nepredstavuje systematický postup na osvojovanie vlastností funkcií. Sústredili sme sa na vybrané pojmy a vlastnosti funkcií. V metodike je podrobnejšie rozpracovaná monotónnosť, párnosť a nepárnosť funkcií. Po zvládnutí uvedených vlastností budú žiaci skúmať platnosť viacerých tvrdení o vlastnostiach funkcií. Druhá časť metodiky je venovaná osvojovaniu inverzných funkcií. Po naznačení významu inverzných funkcií majú žiaci objaviť grafický model inverzných funkcií a podmienku existencie inverznej funkcie k danej funkcii. Po zostavení postupu na odvodenie predpisu na výpočet hodnôt inverznej funkcie budú žiaci skúmať vlastností inverzných funkcií pri riešení úloh z pracovného listu. Hlavná pozornosť je venovaná určovaniu inverzných funkcií k lineárnym, a po zúžení definičného oboru, aj ku kvadratickým funkciám. Na skúmanie vlastností funkcií sme pripravili učebné pomôcky vypracované v prostredí tabuľkového kalkulátora a dynamického geometrického systému.

Monotónnosť funkcie

Pri skúmaní lineárnej funkcie v úvode tematického celku žiaci znázorňovali pomocou grafov prírastky, prípadne úbytky jednej veličiny v závislosti na druhej. Na grafe lineárnej funkcie znázorňovali prírastok (úbytok) závislej premennej pri zväčšení nezávislej premennej o 1. Aj pri iných typoch funkcií možno z grafu analyzovať, ako sa menia hodnoty funkcie pri zmene nezávislej premennej x. Načrtnutie grafu funkcie však nemusí verne charakterizovať monotónnosť funkcie na okolí vybraných bodov. Na túto dôležitú okolnosť poukážeme pri riešení prvej úlohy.

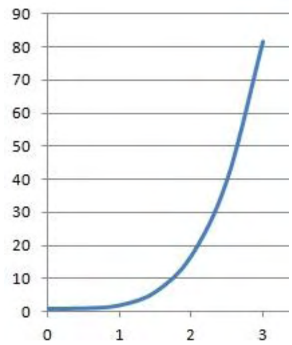
Úloha 1. Vytvorte tabuľku hodnôt danej funkcie f pre hodnoty x z množiny $\{0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$ a načrtnite graf funkcie f pre nezáporné hodnoty nezávisle premennej x.

$$f : y = x^4 - \frac{x^2}{50} + 1$$

a) Charakterizujte, ako sa menia hodnoty danej funkcie *f*, ak sa zväčšujú hodnoty nezávisle premennej *x*.

b) Doplňte tabuľku aj pre opačné hodnoty nezávisle premennej *x* a dokreslite graf funkcie *f* aj pre záporné hodnoty nezávisle premennej *x*.

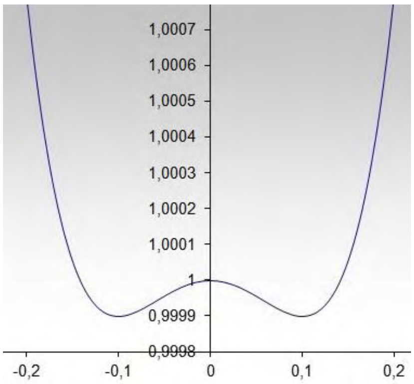
Pri riešení prvej časti úlohy by mohli žiaci používať aj tabuľkový kalkulátor MS Excel. Z tabuľky by zistili, že pre dané nezáporné hodnoty premennej *x* platí, že ak sa zväčšujú hodnoty premennej *x*, tak sa zväčšujú aj hodnoty funkcie *f*(*x*). Na obrázku (Obrázok 59) je načrtnutý graf funkcie *f* zostrojený na základe opisovanej tabuľky.



Obrázok 59. Graf funkcie vytvorený na základe tabuľky.

Pri riešení druhej časti úlohy žiaci zistia, že pre opačné hodnoty nezávisle premennej *x* získajú tie isté funkčné hodnoty ako pre zodpovedajúce kladné hodnoty premennej *x*. Po tomto zistení môžu dokresliť graf funkcie *f* aj pre záporné hodnoty premennej *x* a charakterizovať zmenšovanie hodnôt funkcie *f* pri zväčšovaní záporných hodnôt premennej *x*.

Potom by učiteľ vykonal interaktívnu demonštráciu s využitím súboru **priebeh_funkcie.xls**. Žiaci by sledovali zmeny grafu funkcie *f* pri zmenšovaní zobrazovaného okolia bodu 0. Na obrázku (Obrázok 60) je zobrazený graf funkcie *f* na intervale $\langle -0{,}2; 0{,}2 \rangle$.



Obrázok 60. Detailné zobrazenie grafu funkcie na malom okolí bodu 0.

Z grafu, ale aj analýzy predpisu funkcie *f*, ktorý možno upraviť na tvar:

$$y=\left(x^2-\frac{1}{100}\right)^2-\frac{1}{10000}+1$$

vyplýva, že pre zväčšujúce sa nezáporné hodnoty nezávisle premennej *x*, ktoré sú menšie ako 0,1, funkcia *f* nenadobúda stále väčšie hodnoty. Interaktívna demonštrácia by mala žiakov presvedčiť, že pri vyšetrovaní vlastností funkcií je potrebné analyzovať aj predpis na výpočet hodnôt funkcie. Učiteľ by mohol žiakov upozorniť aj na prípad lineárnej funkcie, pri ktorej súvislosť lineárneho koeficientu v predpise lineárnej funkcie s narastaním alebo klesaním jej hodnôt pre rastúce hodnoty premennej *x* umožňuje analyzovať vlastnosti lineárnej funkcie aj bez znázornenia grafu funkcie na základe predpisu funkcie.

Lineárnu funkciu využijeme aj pre analýzu a porozumenie vzťahov, ktoré vystupujú v definícii rastúcej a klesajúcej funkcie. Na základe skúmania konkrétnej lineárnej funkcie budú mať žiaci hľadať aj ďalšie funkcie s rovnakými vlastnosťami a postupne zovšeobecňovať svoje zistenia. Postupnosť úloh je zostavená vo forme pracovného listu **M 6.1_monotonnost_funkcii.docx**. Prvá úloha pracovného listu je zameraná na skúmanie monotónnosti lineárnej funkcie *f*: $y = 2x$.

Úloha 2. Daná funkcia $f: y = 2x$.

a) Porovnajte hodnoty funkcie *f* pre: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$; $x_1 = 3$, $x_2 = -1$; $x_1 = 0$, $x_2 > 0$; $x_1 > -1$, $x_2 \leq -1$; $x_1 < 2$, $x_2 > 0$.

b) Nech x_1, x_2 sú ľubovoľné čísla z D(*f*) také, že $x_1 < x_2$. Aký je vzťah medzi $f(x_1)$ a $f(x_2)$?

c) Pre aké $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: $f(x_1) < f(x_2)$?

V poslednej časti úlohy 2a) nemožno jednoznačne porovnať hodnoty $f(x_1)$ a $f(x_2)$. Žiaci by si mali uvedomiť, že ak máme presne určiť vzťah medzi $f(x_1)$ a $f(x_2)$, tak musí byť jednoznačne určený aj vzťah medzi x_1 a x_2. Potom už možno vyhodnotiť vzťah medzi $f(x_1)$ a $f(x_2)$. Porozumenie vzťahov medzi x_1 a x_2, $f(x_1)$ a $f(x_2)$ pre rastúcu funkciu majú žiaci preukázať pri načrtnutí grafov ďalších rastúcich funkcií. Potom majú načrtnúť aj grafy funkcií, ktoré nie sú rastúce. V ďalšej úlohe majú žiaci určiť vzťahy medzi x_1 a x_2, $g(x_1)$ a $g(x_2)$ pre zadanú klesajúcu lineárnu funkciu. V poslednej úlohe pracovného listu je daný graf funkcie, ktorej monotónnosť sa na skúmanej množine mení.

Úloha 3. Daný je graf funkcie f definovanej na intervale $\langle -4, 3\rangle$ (Obrázok 61).

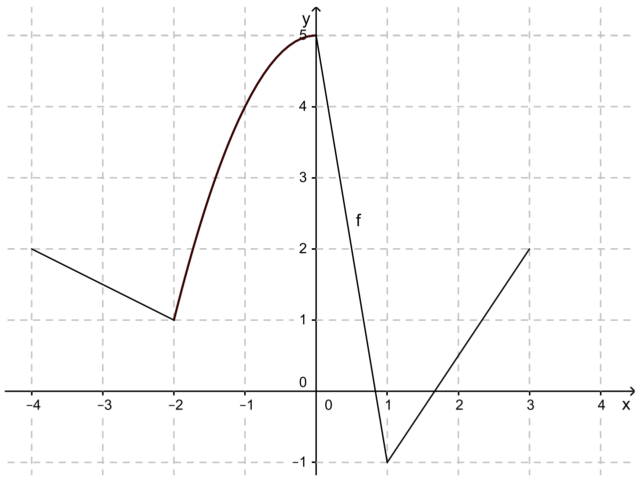
a) Určte H(f).

b) Nech x_1, x_2 sú ľubovoľné čísla z D(f), také, že $x_1 < x_2$. Aký je vzťah medzi $f(x_1)$, $f(x_2)$?

c) Určte podmnožiny $D(f)$, na ktorých platí, že pre ľubovoľné x_1, x_2:

- ak $x_1 < x_2$, tak $f(x_1) < f(x_2)$,
- ak $x_1 < x_2$, tak $f(x_1) > f(x_2)$.

d) Rozšírme definičný obor funkcie f na interval $\langle -4, 4\rangle$ a nech $f(4) = 2$. Možno dokresliť graf funkcie f tak, aby na intervale $\langle 1, 4\rangle$ bolo splnené, že pre ľubovoľné x_1, x_2, také, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$? Zdôvodnite svoje tvrdenie.

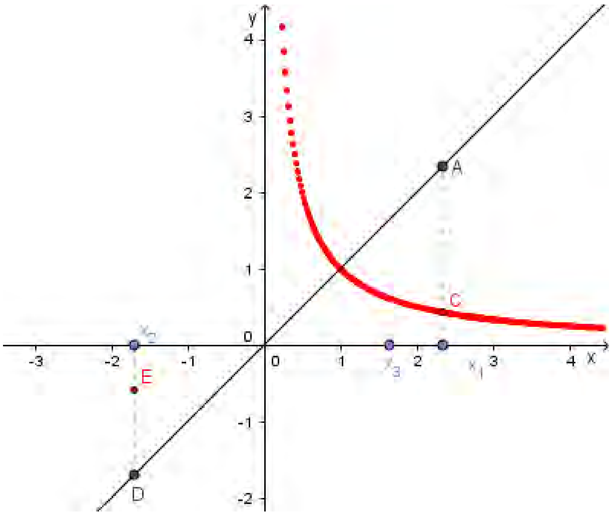


Obrázok 61. Graf funkcie k zadaniu úlohy 3.

Žiaci by si pri riešení úlohy mali uvedomiť, že pri určovaní monotónnosti danej funkcie f je potrebný rozklad D(f) na podmnožiny, na ktorých už možno charakterizovať monotónnosť funkcie f, a teda monotónnosť funkcie nemusí byť vyšetrovaná na celom definičnom obore. Po vyriešení úloh v pracovnom liste by učiteľ spolu so žiakmi zhrnul zistené súvislosti a zaviedol pojmy rastúca a klesajúca funkcia.

Zostrojovanie grafov funkcií

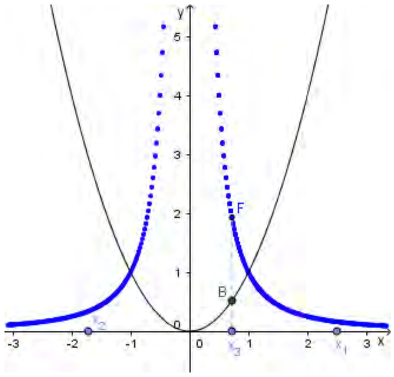
V ďalšej časti sa budeme venovať úvahám, ktoré môžu pomôcť pri načrtnutí grafu funkcie. Najprv budeme skúmať vzťah medzi grafmi dvoch funkcií, ktorých predpisy na výpočet hodnôt predstavujú navzájom prevrátené hodnoty. Učiteľ by mohol využiť interaktívnu demonštráciu využitím dynamickej konštrukcie uloženej v súbore **skumanie_grafov.ggb**. Pri posúvaní bodov x_1, x_2, x_3 po osi x možno postupne zostrojovať grafy funkcií s predpisom $y = 1/f(x)$ pre lineárnu a kvadratickú funkciu f.



Obrázok 62. Náčrt grafu funkcie.

V dynamickej konštrukcii možno pomocou prepínačov zobraziť a skúmať prevrátené hodnoty pri grafe lineárnej funkcie $y = x$ a pri grafe kvadratickej funkcie $y = x^2$. Na obrázku (Obrázok 62) je zobrazený náčrt grafu funkcie $y = 1/x$ využitím grafu funkcie $y = x$ pre kladné hodnoty premennej x. Učiteľ by najprv zadal žiakom otázky týkajúce sa prevrátených hodnôt konkrétnych kladných reálnych čísel. Potom by mali žiaci charakterizovať priebeh funkcie $y = 1/x$ pre čoraz väčšie hodnoty premennej x a pre hodnoty x blížiace sa k číslu 0. Po odpovediach žiakov by učiteľ pohybom bodu x_1 po kladnej časti osi x načrtol časť grafu funkcie $y = 1/x$. Na základe grafu by žiaci vedeli určiť, že pre kladné hodnoty x je funkcia $y = 1/x$ klesajúca. Učiteľ by mal vyžadovať od žiakov aj zdôvodnenie tejto vlastnosti funkcie využitím predpisu funkcie a definície klesajúcej funkcie. Potom by žiaci podobne charakterizovali aj priebeh funkcie $y = 1/x$ pre záporné hodnoty premennej x. Po načrtnutí grafu funkcie $y = 1/x$ by nasledovala otázka, či je funkcia $y = 1/x$ klesajúca na celom definičnom obore. Ak by sa žiaci v odpovedi zmýlili, mohol by učiteľ vo vytvorenom grafe porovnať hodnoty funkcie pre zápornú a kladnú hodnotu premennej x.

Podobné úvahy by mali žiaci využiť aj pri načrtnutí grafu funkcie $y = 1/x^2$ s využitím grafu funkcie $y = x^2$. Pri posúvaní bodu x_3 po osi x sa zobrazujú body z grafu funkcie $y = 1/x^2$. Na obrázku (Obrázok 63) je zobrazená zodpovedajúca časť dynamickej konštrukcie pre zostrojovanie grafu funkcie $y = 1/x^2$. Na záver by učiteľ mohol spolu so žiakmi zovšeobecniť opisovaný postup aj na zostrojovanie grafov funkcií $y = 1/x^n$ pre n rovné párnym alebo nepárnym prirodzeným číslam.



Obrázok 63. Náčrt grafu funkcie.

Na prehĺbenie poznatkov o monotónnosti funkcií môže učiteľ zadať žiakom úlohy obsiahnuté v pracovnom liste **M 6.3_rastuce_klesajuce_funkcie.docx**. V prvých dvoch úlohách majú žiaci zostrojiť grafy funkcií s požadovanými vlastnosťami. Okrem aplikovania poznatkov o rastúcich a klesajúcich funkciách majú žiaci v niektorých úlohách zostrojiť graf, ktorý má byť aj osovo súmerný podľa osi y. Tieto úlohy už považujeme za prípravné úlohy k párnym a nepárnym funkciám.

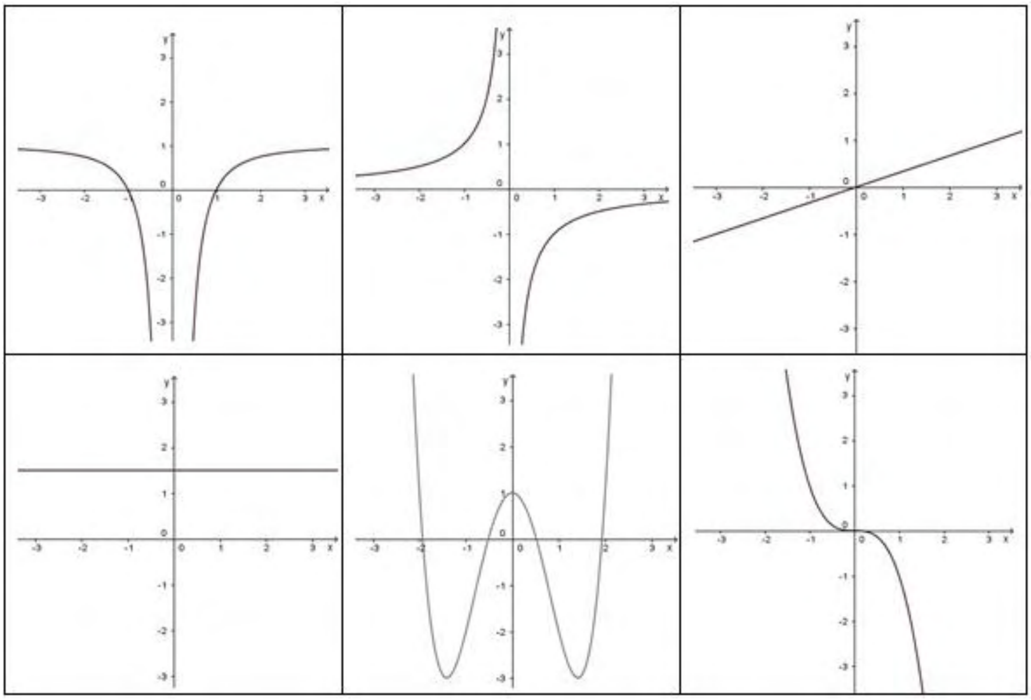
Metodická poznámka: Tretia úloha v pracovnom liste poskytuje námet na nasmerované bádanie. Žiaci majú preskúmať súčty a súčiny dvoch rastúcich funkcií. Budeme predpokladať, že obe funkcie majú rovnaký definičný obor. Pri bádaní môžu využívať aj program Geogebra. Po zapísaní definícií dvoch funkcií možno do príkazového riadku zapísať príkaz na súčet alebo súčin funkcií (napr. $h = f + g$). Pri hľadaní vhodných argumentov na zdôvodnenie svojich zistení by mali žiaci využívať nielen grafy funkcií, ale aj definíciu pojmu rastúca funkcia a predpisy na výpočet hodnôt funkcií.

Úloha 4. Preskúmajte, či súčet a súčin dvoch rastúcich funkcií je rastúca funkcia. Zabezpečte, aby obe funkcie mali rovnaký definičný obor. Svoje zistenia ilustrujte vhodnými príkladmi a nájdite vhodné argumenty na zdôvodnenie svojich zistení.

Na jednoduché zdôvodnenie tvrdenia, že súčet dvoch rastúcich funkcií je rastúca funkcia, možno využiť definíciu rastúcej funkcie. Zložitejšia situácia nastáva pri súčine rastúcich funkcií. Aj pri využití definície rastúcej funkcie by mohli žiaci zbadať, že aj keď $f(x_1) < f(x_2)$ a $g(x_1) < g(x_2)$, tak nemusí platiť, že $f(x_1) \cdot g(x_1) < f(x_2) \cdot g(x_2)$. Pre nájdenie vhodného protipríkladu možno využiť aj súčin dvoch lineárnych funkcií. Tvrdenie platí len pre rastúce funkcie, ktoré majú kladné hodnoty na celom definičnom obore.

V ďalšej časti sa budeme venovať párnym a nepárnym funkciám. Ako úvodnú aktivitu navrhujeme rozdeľovanie grafov funkcií na obrázkoch alebo kartičkách. Úlohou žiakov je analyzovať grafické informácie na obrázkoch a hľadať vlastnosti, na základe ktorých možno rozdeliť grafy funkcií do dvoch skupín obsahujúcich tri grafy.

Úloha 5. Preskúmajte grafy funkcií na obrázku (Obrázok 64) a nájdite vlastnosti, na základe ktorých ich možno rozdeliť do dvoch skupín obsahujúcich tri grafy.



Obrázok 64. Dané grafy funkcií v úlohe 5.

Na obrázkoch sú grafy funkcií, ktoré sú buď osovo súmerné podľa osi *y* alebo sú stredovo súmerné podľa počiatku súradnicovej sústavy. Po rozdelení daných grafov funkcií a charakterizovaní vlastností funkcií s danými grafmi (porovnanie hodnôt funkcie *f*(*x*) a *f*(–*x*)) by sa mohol učiteľ vrátiť k funkcii z úlohy 1. Žiaci by mali rozhodnúť, do ktorej skupiny funkcií patrí uvedená funkcia.

Metodická poznámka: Funkcie so špecifikovanými vlastnosťami majú názov: párne a nepárne funkcie. Učiteľ by zhrnul ich vlastnosti a zaviedol by aj definície týchto pojmov. Upozornil by žiakov, že pre symetriu grafov je dôležité, aby aj definičný obor týchto funkcií bol symetrický vzhľadom na bod [0, 0]. Žiakov by naviedol aj na sformulovanie zistenia, že existujú aj funkcie, ktoré nie sú ani párne ani nepárne.

Potom by mali žiaci hľadať predpisy funkcií, ktoré sú párne alebo nepárne. Pri skúmaní by mohli žiaci využívať aj program Geogebra. Učiteľ by mal od žiakov vyžadovať aj zovšeobecnenia ich zistení. Ak by napríklad žiaci uviedli ako párnu funkciu kvadratickú funkciu $y = x^2$, tak by mal učiteľ priviesť žiakov aj k zisteniu, že párne sú aj kvadratické funkcie, ktorých predpis možno zapísať v tvare $y = ax^2 + b$, kde a, b sú reálne čísla, $a \neq 0$. Podobné zovšeobecnenia by sa mohli týkať aj lineárnych funkcií, ktoré by mohli obsahovať aj absolútne hodnoty.

Na využitie a prehĺbenie poznatkov o párnych a nepárnych funkciách sme pripravili pracovný list **M 6.4_vlastnosti_funkcii.docx**. V prvej úlohe majú žiaci dokresliť graf funkcie, aby získali graf nepárnej funkcie. Ak by žiaci nevedeli identifikovať grafy stredovo súmerné podľa počiatku súradnicovej sústavy, mohlo by im pomôcť zostrojenie niekoľkých úsečiek s krajnými bodmi na grafe funkcie: $[x, f(x)]$ a $[-x, f(-x)]$ a znázornenie ich stredov. Zistenie, že stredom týchto úsečiek je bod [0, 0], poukazuje, že grafy by mohli byť stredovo súmerné podľa bodu [0, 0].

V druhej úlohe majú žiaci zostrojiť grafy mocninových funkcií f: $y = x^2$, g: $y = x^3$ a rozhodnúť o párnosti alebo nepárnosti funkcií f, g. Svoje zistenie by mali žiaci aj zovšeobecniť pre funkcie v tvare $y = x^n$, pre prirodzené čísla n. Pri zdôvodňovaní zistení by mali žiaci využívať aj definície pojmov párna a nepárna funkcia. V poslednej úlohe pracovného listu by mali žiaci skúmať súčet a súčin dvoch párnych alebo nepárnych funkcií.

Úloha 6. Pre súčet a súčin dvoch párnych alebo nepárnych čísel platia určité pravidlá. Preskúmajte, či analogické pravidlá platia aj pre súčet a súčin dvoch párnych alebo nepárnych funkcií. Svoje zistenia ilustrujte vhodnými príkladmi a nájdite vhodné argumenty na ich zdôvodnenie.

Podobne, ako súčet a súčin dvoch párnych čísel, aj súčet a súčin dvoch párnych funkcií je párna funkcia. Na zdôvodnenie tohto tvrdenia možno využiť definíciu párnej funkcie. Pri kreslení grafov by mohol učiteľ upozorniť žiakov na zvláštnu funkciu $y = 0$, ktorá je aj párna aj nepárna. Z tohto hľadiska aj keď bude v súčine vystupovať funkcia $y = 0$, dostaneme po vynásobení inou funkciou znova funkciu $y = 0$, ktorá je aj párna.

Na rozdiel od čísel, súčet dvoch nepárnych funkcií je nepárna funkcia. Analógia s číslami neplatí ani pre súčin dvoch nepárnych funkcií. Súčin dvoch nepárnych funkcií je totiž párna funkcia. Na zdôvodnenie oboch tvrdení možno využiť definíciu nepárnej funkcie.

Metodická poznámka: Tretia úloha v pracovnom liste predstavuje námet na nasmerované bádanie. Pri bádaní môžu žiaci využívať aj program Geogebra, ktorý umožňuje jednoducho zobraziť grafy súčtu alebo súčinu daných funkcií.

Inverzné funkcie

Ako prípravné úlohy k inverzným funkciám sme vybrali dve jednoduché úlohy na lineárnu funkciu. Žiakom by bolo vhodné pripomenúť predstavu funkcie ako automatu, ktorý pre číslo zadané na vstupe vyrobí výstupnú hodnotu. Predstavme si opačnú situáciu, že poznáme číslo na výstupe a chceli by sme určiť, akému vstupnému číslu odpovedá. Situáciu budeme ilustrovať na úlohe, ktorú sme riešili už pri lineárnej závislosti. Úloha je zameraná na prevod teploty z Celziovej teplotnej stupnice do Fahrenheitovej teplotnej stupnice. Žiaci mali k dispozícii tabuľku s niekoľkými dvojicami zodpovedajúcich si teplôt.

Tabuľka 6. Prevod teplôt vyjadrených v °C na °F.

°C	5	10	15	20
°F	41	50	59	68

Keďže rovnakým zmenám teploty v Celziovej teplotnej stupnici zodpovedajú rovnaké zmeny vo Fahrenheitovej teplotnej stupnici, možno prevod vyjadriť lineárnou funkciou. Zmene teploty o 5 °C pripadá zmena teploty o 9 °F. Hodnota koeficientu a tejto lineárnej funkcie je preto 9/5. Dosadením ľubovoľnej usporiadanej dvojice z tabuľky do predpisu lineárnej funkcie dostávame vzťah na prevod teplôt z Celziovej teplotnej stupnice do Fahrenheitovej stupnice: $Tf = 1{,}8Tc + 32$. Ponúka sa celkom prirodzená otázka:

- *Ako by sme mohli priradiť teplote vyjadrenej v °F teplotu vyjadrenú v °C?*

Úloha 7. Nájdite predpis na prevod teploty z Fahrenheitovej teplotnej stupnice do Celziovej teplotnej stupnice.

Je zrejmé, že v tomto prípade je číslu 41 priradené číslo 5, číslu 50 je priradené číslo 10, ... Žiaci by si mali uvedomiť, že znova možno tento prevod vyjadriť pomocou lineárnej funkcie. Hodnota lineárneho koeficientu a je 5/9. Po dosadení vybranej usporiadanej dvojice z tabuľky do predpisu lineárnej funkcie dostávame predpis na prevod teplôt z Fahrenheitovej teplotnej stupnice do Celziovej teplotnej stupnice: $Tc = \frac{5}{9}Tf - \frac{160}{9}$.

Ten istý vzťah získame aj vyjadrením premennej Tc zo vzťahu na výpočet premennej Tf uvedeného pred úlohou 7. Ako ďalší námet na porozumenie významu „opačnej úlohy“ sme vybrali jednoduchú hru na hádanie čísla. „Myslím si číslo. Po jeho vynásobení dvomi a zväčšení súčinu o 3 som dostal číslo 19. Aké číslo som si myslel?“ Ak by som si myslel číslo 2, tak opísaným postupom dostanem číslo 7. Situáciu znázorníme pomocou schémy:

$x \to \cdot\, 2 \to +\, 3 \to 2x + 3$, dostávame predpis $y = 2x + 3$

Ako by sme pri hre „uhádli“ myslené číslo? Od výsledku odpočítame 3 a získané číslo vydelíme číslom 2. Znázorníme tento opačný postup pomocou schémy:

$x \to -\, 3 \to :\, 2 \to (x - 3)/2$, dostávame predpis $y = \frac{x-3}{2}$

Ak je výsledok 19, tak na začiatku bolo myslené číslo 8. Opačný postup sme zostavili tak, že sme začali od konca a pri každej operácii v prvej schéme sme využili opačnú operáciu. Získali sme tak nové priradenie, ktoré obrazu priraďuje ten vzor, ktorému zasa pôvodná funkcia priradí uvažovaný obraz. Po vysvetlení postupu riešenia opačnej úlohy by učiteľ vyzval žiakov, aby vyskúšali tento postup aj pri riešení úlohy 7.

Po vyriešení úvodných úloh sa budeme venovať skúmaniu súmernosti grafov podľa osi súmernosti s rovnicou $y = x$. Aj keď skúmanie grafov s touto vlastnosťou zdanlivo nesúvisí s prvými dvoma úlohami, učiteľ by mohol uviesť skúmanie grafov ako pokračovanie úloh, aké boli riešené pri skúmaní grafov párnych a nepárnych funkcií. Úlohy pre žiakov sme pripravili vo forme pracovného listu **M 6.5_grafy_sumernost.docx**. Zámerom riešenia úloh v pracovnom liste je priviesť žiakov k objaveniu postupu odvodenia predpisu lineárnej funkcie, ktorej graf je obrazom grafu danej lineárnej funkcie v osovej súmernosti určenej osou s rovnicou $y = x$. V prvej úlohe pracovného listu majú žiaci zobrazovať body v súradnicovej sústave v osovej súmernosti podľa súradnicových osí. Žiaci by mali zistiť, akým spôsobom sa menia súradnice zobrazených bodov. V ďalšej úlohe majú zobraziť dané grafy funkcií v osovej súmernosti podľa osi s rovnicou $y = x$. Za úvodnými úlohami nasleduje dôležitá úloha, pri riešení ktorej majú žiaci objaviť súvislosť medzi súradnicami súmerne združených bodov v osovej súmernosti určenej osou s rovnicou $y = x$.

Úloha 8. Určte súradnice bodov, ktoré sú obrazmi bodov $K[3, 1]$, $L[-1, -2]$, $M[3, 3]$ v osovej súmernosti určenej osou s rovnicou $y = x$. Na základe súradníc zobrazených bodov sformulujte záver pre možnosť určenia súradníc obrazov bodov zobrazených v osovej súmernosti určenej osou s rovnicou $y = x$ bez ich zostrojovania.

Po preskúmaní obrazov bodov budú žiaci skúmať súvislosť medzi predpismi na výpočet hodnôt lineárnych funkcií, ktorých grafy sú súmerne združené v osovej súmernosti určenej osou s rovnicou $y = x$. Graf lineárnej funkcie f je zadaný pomocou dvoch bodov.

Úloha 9. Zostrojte graf a nájdite predpis na výpočet hodnôt lineárnej funkcie f, na grafe ktorej ležia body $A[-1,1]$ a $B[1,5]$. K funkcii f nájdite lineárnu funkciu g, ktorej graf je obrazom grafu funkcie f v osovej súmernosti určenej osou s rovnicou $y = x$. Nájdite aj predpis na výpočet hodnôt lineárnej funkcie g.

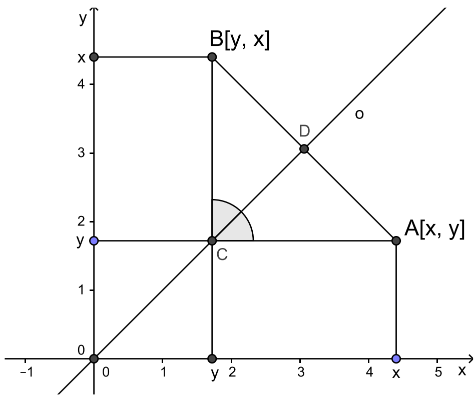
Na určenie predpisu lineárnej funkcie f môžu žiaci využiť viaceré spôsoby. Na základe súradníc daných bodov A, B možno zistiť, že pri zväčšení premennej x o 2 sa zväčšila hodnota funkcie f o 4. Preto pre koeficient a lineárnej funkcie f platí: $a = 2$. Dosadením súradníc bodu A alebo B do rovnice $y = 2x + b$ môžu žiaci zistiť, že predpis na výpočet hodnôt funkcie f je: $y = 2x + 3$. Prípadne môžu žiaci určiť koeficienty a, b v predpise funkcie f dosadením súradníc bodov A, B do predpisu lineárnej funkcie a vyriešením sústavy dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych.

Potom by mali žiaci určiť obrazy bodov A, B v osovej súmernosti podľa osi určenej rovnicou $y = x$. Využitím súradníc bodov A', B' možno niektorým z vyššie opísaných postupov určiť predpis na výpočet hodnôt lineárnej funkcie g: $y = \frac{x-3}{2}$.

Na kontrolu svojich výpočtov by žiaci mohli využiť aj program Geogebra. Mohli by aj meniť súradnice daných bodov A, B a pozorovať zmeny predpisov funkcií f, g. Ak si žiaci uvedomia, že pre každú dvojicu súmerne združených bodov na grafoch funkcií f, g v osovej súmernosti určenej osou s rovnicou $y = x$ platí, že majú navzájom vymenené súradnice, tak by mohli dôjsť k záveru, že by túto vlastnosť mali mať aj predpisy funkcií f, g. Potom by učiteľ zhrnul so žiakmi ich závery a postup na určenie predpisu lineárnej funkcie, ktorej graf je obrazom grafu danej lineárnej funkcie v osovej súmernosti určenej osou s rovnicou $y = x$. Potom by pripomenul žiakom výsledky z riešenia úlohy o určovaní mysleného čísla. Ukázalo sa, že pri využití opačného postupu s opačnými operáciami a pri vytvorení obrazu grafu lineárnej funkcie v osovej súmernosti určenej osou s rovnicou $y = x$ dostali ten istý výsledok.

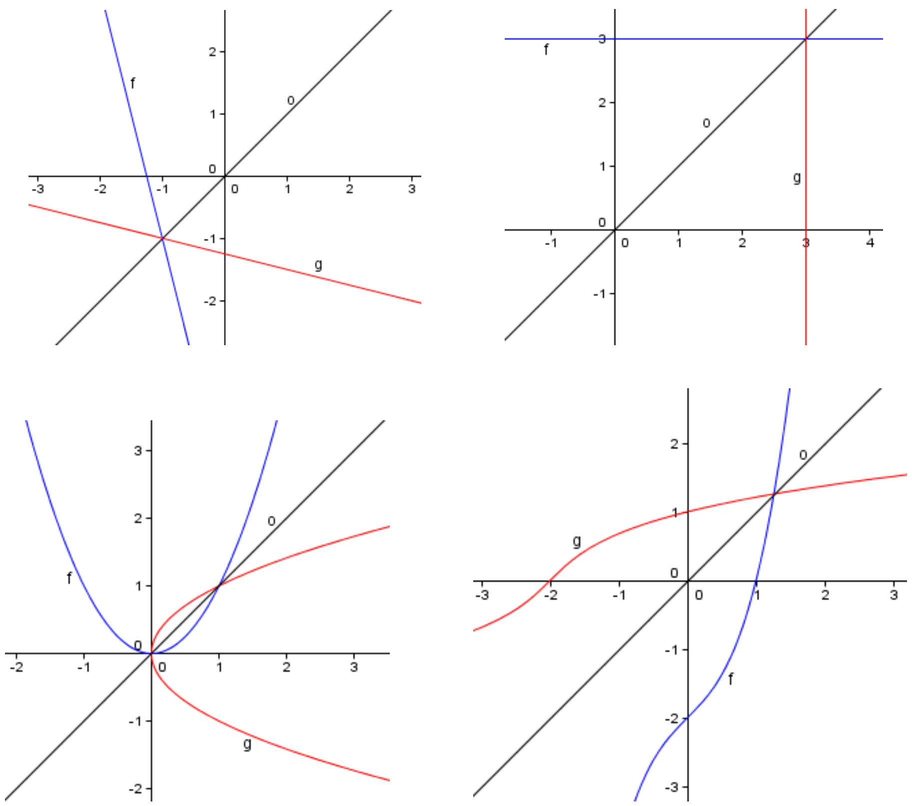
Pri hľadaní súvislosti medzi súradnicami súmerne združených bodov v osovej súmernosti určenej osou s rovnicou $y = x$ žiaci preskúmali niekoľko konkrétnych bodov. Platí objavená súvislosť pre každú dvojicu súmerne združených bodov podľa osi s rovnicou $y = x$? Je zrejmé, že táto súvislosť platí pre všetky body ležiace na osi. Tieto body sú samodružné a majú rovnakú x-ovú a y-ovú súradnicu. Nech bod A je ľubovoľný bod so súradnicami $[x, y]$, pričom x a y sú rôzne. Ukážeme, že bod B so súradnicami $[y, x]$ je obrazom bodu A v osovej súmernosti určenej osou o s rovnicou $y = x$.

Zostrojíme úsečku AB a rovnobežky so súradnicovými osami prechádzajúce cez body A, B. Rovnobežka s osou y prechádzajúca cez bod B sa pretne s rovnobežkou s osou x prechádzajúcou cez bod A v bode C $[y, y]$ ležiacom na osi o s rovnicou $y = x$ (Obrázok 65). Os o je osou uhla ACB a rozdeľuje uhol ACB na dva uhly s rovnakou veľkosťou. Keďže úsečky AC a BC majú rovnakú dĺžku $(x - y)$, trojuholníky ACD a BCD sú podľa vety sus zhodné. Platí, že úsečky AD a BD majú rovnakú dĺžku a uhly CDA a CDB majú rovnakú veľkosť, pričom súčet ich veľkostí je 180°. Úsečka AB je kolmá na os o a jej stredom je bod D. Body A, B sú súmerne združené v osovej súmernosti podľa osi o. Dalo by sa využiť aj doplnenie pravouhlého trojuholníka ABC na štvorec $CAEB$ s vrcholom E so súradnicami $[x, x]$.



Obrázok 65. Náčrt k zdôvodneniu experimentálne objaveného zistenia.

Potom budeme pokračovať v skúmaní grafov súmerne združených v osovej súmernosti podľa osi s rovnicou $y = x$. Žiakom predložíme štyri obrázky s grafmi.

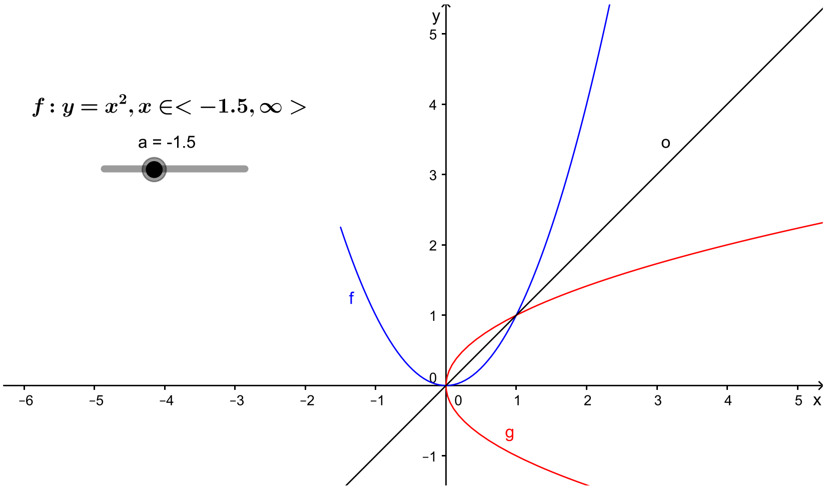


Obrázok 66. Náčrty ku skúmaniu grafov.

Učiteľ vyzve žiakov, aby našli spoločnú aj rozdielne vlastnosti grafov na obrázku. Vzhľadom na naznačenú os súmernosti by mali žiaci ľahko zbadať, že všetky dvojice grafov sú súmerne združené v osovej súmernosti podľa osi *o* s rovnicou $y = x$. Dôležitý rozdiel medzi grafmi predstavuje skutočnosť, že na dvoch obrázkoch grafy *g* nie sú grafmi funkcií. Tým sme žiakov upozornili na dôležitý fakt, že ak pri niektorých funkciách zobrazíme ich grafy v osovej súmernosti podľa osi s rovnicou $y = x$, tak nedostaneme graf funkcie. Učiteľ zadá žiakom otázku:

- *Ako by sa dali rozlíšiť grafy funkcií, ktorých obrazy v osovej súmernosti podľa osi s rovnicou $y = x$ sú grafy funkcií, od tých, ktorých obrazy nie sú grafmi funkcií?*

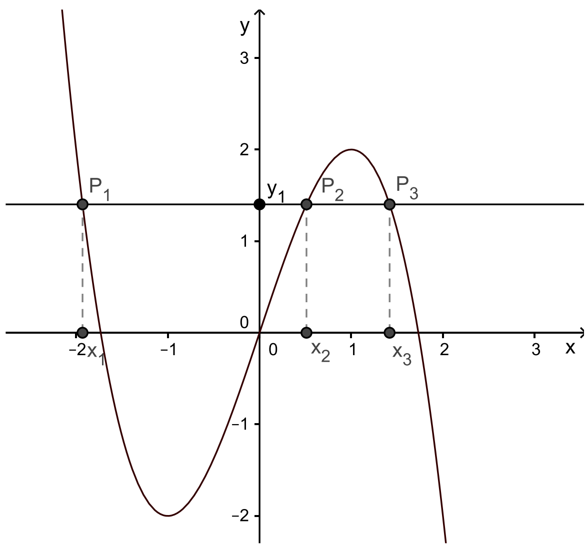
Zo skúmaných obrázkov vidno, že do druhého typu funkcií patrí aj kvadratická funkcia. Preto sa jej budeme venovať podrobnejšie. Využijeme interaktívnu demonštráciu uloženú v súbore **graf_kvadratickej_funkcie_demonstracia.ggb**. V konštrukcii na obrázku (Obrázok 67) možno meniť ľavú hranicu definičného oboru kvadratickej funkcie *f* pomocou posúvača *a*.



Obrázok 67. Dynamická konštrukcia k interaktívnej demonštrácii.

Žiaci by mali odpovedať na otázku, kedy bude obraz grafu kvadratickej funkcie *f* v osovej súmernosti podľa osi *o* znázorňovať graf funkcie. Pri opisovanej konštrukcii musí byť definičný obor funkcie *f* zúžený na podmnožinu nezáporných reálnych čísel. Pri zhrnutí objavených zistení by bolo vhodné využiť aj šípkový diagram. Žiaci by mali vybrať pre hodnoty premennej *x* aj dvojice navzájom opačných reálnych čísel a poukázať na nejednoznačnosť opačného priraďovania.

Žiaci by mohli hľadať aj ďalšie typy funkcií, pri ktorých by bolo opačné priradenie nejednoznačné. Na vizualizáciu vlastnosti grafu funkcie vyjadrenej v pojme prostá funkcia môže učiteľ využiť interaktívnu demonštráciu **demonstracia_funkcia_nie_prosta.ggb**. V dynamickej konštrukcii na obrázku (Obrázok 68) je zobrazený graf funkcie, ktorá nie je prostá.



Obrázok 68. Náčrt ku skúmaniu grafu funkcie.

V začiatočnej polohe by bola nastavená kolmica na os y v takej hodnote y_1, aby pretínala graf funkcie v jedinom bode, ktorému by odpovedalo číslo x_1. Učiteľ by sa žiakov spýtal, či by k funkcii so zobrazeným grafom mohla existovať inverzná funkcia. Pri zdôvodňovaní odpovede žiaka by presunul hodnotu y_1 do polohy zobrazenej na obrázku (Obrázok 68). Žiaci by mali vysvetliť, ako možno podľa grafu funkcie ľahko zistiť, či je prostá. Potom by učiteľ mohol zamerať pozornosť žiakov aj na súvis prostej funkcie s monotónnosťou funkcie.

Metodická poznámka: Po vytvorení predstavy a porozumení obsahu pojmov prostá a inverzná funkcia učiteľ zavedie definície týchto pojmov. Pre inverznú funkciu k funkcii f budeme využívať označenie f^{-1}. Aj keď sme sa zatiaľ sústredili na hľadanie predpisu inverznej funkcie a skúmanie grafov inverzných funkcií k lineárnym funkciám, žiaci by mali určovať inverzné funkcie aj pre iné typy prostých funkcií. Okrem zostrojovania grafov by mali vedieť určovať aj predpis inverznej funkcie založený na výmene premenných x, y a vyjadrení premennej y.

Pre porozumenie významu pojmu inverzná funkcia, by učiteľ mohol využiť aj príklady z reálneho života. Napr. nech funkcia $d(t)$ vyjadruje dráhu, ktorú prešlo auto za čas t. Žiaci by mali slovne opísať zápisy: $d(10) = 200$, $d^{-1}(500) = 20$. Odporúčame zaradiť aj námet z geometrie: Určte funkciu, ktorá štvorcu s dĺžkou strany x, priradí obsah štvorca ($S(x) = x^2$). Bude existovať funkcia $S^{-1}(x)$? Na zúženom definičnom obore $(0, \infty)$ je kvadratická funkcia prostá. Ak sa vrátime k opačným operáciám z úvodu, tak k umocneniu je opačná operácia odmocnenie. Predpis inverznej funkcie k funkcii $S(x)$ možno vyjadriť: $S^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Uvedené súvislosti by mohol učiteľ dať do súvisu aj s definíciou druhej odmocniny.

Ďalšie aspekty súvisiace s pojmom inverzná funkcia budú žiaci objavovať samostatne pri riešení úloh z pracovného listu **M 6.7_inverzna_funkcia.docx**. V prvej úlohe majú žiaci určiť pre dané hodnoty premennej x hodnoty lineárnej funkcie a k nej inverznej funkcie. Môžu zostaviť predpis inverznej funkcie alebo využiť definíciu inverznej funkcie. V druhej úlohe majú žiaci načrtnúť graf inverznej funkcie pre danú kvadratickú funkciu definovanú na intervale $(-\infty, 0\rangle$.

Nasledujú úlohy na určovanie inverznej funkcie ku kvadratickej funkcii definovanej na množine nezáporných reálnych čísel alebo na jej podmnožine. Pri ich riešení majú žiaci objaviť vzťah medzi definičnými obormi a obormi hodnôt funkcií a k nim prislúchajúcich inverzných funkcií.

Úloha 10. Daná je kvadratická funkcia $g: y = x^2 + 3$ definovaná na množine nezáporných reálnych čísel. Nájdite predpis na výpočet hodnôt funkcie g^{-1} a určte $D(g^{-1})$. Určte aj obory hodnôt oboch funkcií.

Na danom definičnom obore je funkcia g prostá a preto k nej existuje inverzná funkcia. Predpis na výpočet hodnôt inverznej funkcie g^{-1} je $y = \sqrt{x-3}$. $H(g) = \langle 3, \ \infty)$. Pre inverznú funkciu g^{-1} platí: $D(g^{-1}) = \langle 3, \infty), H(g^{-1}) = \langle 0, \infty)$. Na základe výsledkov riešenia úloh by mali žiaci sformulovať tvrdenie: $D(f^{-1}) = H(f), H(f^{-1}) = D(f)$.

Posledné úlohy v pracovnom liste sú zamerané na skladanie funkcie a k nej inverznej funkcie. Na začiatku sú žiaci vyzvaní, aby pomocou šípkového diagramu vyjadrili skladanie funkcie a k nej inverznej funkcie. Žiaci by mali načrtnúť diagram s opačným priradením pri inverznej funkcii a dôjsť k záveru, že pri skladaní funkcie a k nej inverznej funkcie je hodnote x priradená tá istá hodnota. Zistenie odvodené zo šípkového diagramu môžu žiaci vyskúšať pri riešení nasledujúcej úlohy, v ktorej majú nájsť k danej lineárnej funkcii h inverznú funkciu a určiť zložené funkcie $h^{-1}(h(x))$ a $h(h^{-1}(x))$. V poslednej úlohe pracovného listu budú žiaci pracovať s lineárnou lomenou funkciou.

Úloha 11. Na základe zistenia výsledku skladania funkcie a k nej inverznej funkcie rozhodnite, či funkcia $i: y = \dfrac{1}{x+5}$ je inverznou funkciou k funkcii $j: y = \dfrac{1}{x} - 5$.

Funkcia j je prostá, a preto k nej existuje inverzná funkcia. Pri vytvorení zloženej funkcie $i(j(x))$ dostávame:

$$i(j(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x} - 5 + 5}$$

Po úprave dostávame $i(j(x)) = x$. Podobne možno postupovať aj pri výmene poradia funkcií pri ich skladaní. Pre kontrolu môžu žiaci odvodiť k funkcii j inverznú funkciu j^{-1} využitím zámeny premenných x, y v predpise funkcie j a vyjadrením premennej y. Taktiež môžu určiť aj definičné obory a obory hodnôt funkcií i, j a preveriť, či pre ne platí vzťah objavený pri riešení predchádzajúcich úloh.

M7 – Kvadratická funkcia

<table>
<tr><td colspan="2">Tematický celok</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy</td></tr>
<tr><td>Cieľová skupina</td><td>Odhadovaný čas výučby</td></tr>
<tr><td>Druhý ročník SŠ</td><td>Tri vyučovacie hodiny</td></tr>
<tr><td>Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti</td><td>Kognitívne ciele</td></tr>
<tr><td>▪ Vedieť využívať rôzne reprezentácie pri skúmaní vlastností funkcií,
▪ vedieť charakterizovať zmeny grafu pri zmene koeficientov v predpise lineárnej funkcie s absolútnou hodnotou,
▪ vedieť zobraziť grafy kvadratických funkcií v osovej súmernosti podľa súradnicových osí,
▪ ovládať základné nástroje tabuľkového kalkulátora umožňujúce vytváranie tabuliek a grafov,
▪ ovládať základy práce v dynamickom geometrickom systéme Geogebra.</td><td>▪ Charakterizovať a porozumieť mieru rastu alebo klesania kvadratickej funkcie,
▪ určovať vlastnosti kvadratickej funkcie na základe jej grafu,
▪ charakterizovať vplyv koeficientov v predpise kvadratickej funkcie na jej graf a vlastnosti,
▪ preskúmať tvrdenia o vlastnostiach kvadratickej funkcie a hľadať vhodné argumenty na ich zdôvodňovanie,
▪ využiť poznatky o kvadratickej funkcii pri riešení problémov z reálneho života.</td></tr>
<tr><td>Bádateľské zručnosti</td><td>Didaktický problém</td></tr>
<tr><td>▪ Získavať a zaznamenávať hodnoty premenných získané pomocou modelovania,
▪ interpretovať údaje z tabuliek a z grafov funkcií pri charakterizovaní vlastností kvadratickej funkcie,
▪ určovať vzťahy medzi premennými veličinami, formulovať hypotézy,
▪ formulovať závery a hľadať vhodné argumenty na zdôvodňovanie matematických tvrdení.</td><td>▪ Žiaci často poznajú definíciu kvadratickej funkcie a vedia, že jej grafom je parabola, ale nevedia charakterizovať mieru rastu alebo klesania funkčných hodnôt kvadratickej funkcie a jej vzťah s koeficientmi v predpise kvadratickej funkcie. Tento nedostatok má za následok, že žiaci nevedia pri zadaných číselných údajoch aplikovať vhodnú funkciu na matematické vyjadrenie závislosti medzi skúmanými veličinami a nevedia aplikovať kvadratickú funkciu na riešenie úloh z reálneho života.</td></tr>
<tr><td>Didaktické materiálne prostriedky</td><td>Didaktické metódy a organizačné formy</td></tr>
</table>

▪ Pracovné listy na skúmanie a aplikovanie vlastností kvadratickej funkcie (M 7.1, M 7.4), ▪ interaktívny zošit vytvorený pomocou tabuľkového kalkulátora (M 7.3), ▪ dynamické konštrukcie vytvorené v programe Geogebra.	▪ Interaktívna demonštrácia, štruktúrované bádanie, ▪ riadený rozhovor, ▪ individuálna forma práce pri počítačoch, ▪ skupinová práca.

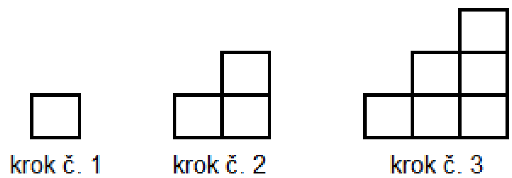
Úvod

V návrhu metodiky je spracovaný postup výučby kvadratickej funkcie. Pri organizácii učebných činností je využívaný najmä bádateľský prístup k výučbe. Žiaci majú hľadať odpovede na nastolené otázky a objavené zistenia ďalej skúmať a rozvíjať pri riešení úloh v pracovných listoch. Po zovšeobecnení objavených súvislostí a sformulovaní záverov sú žiaci vedení k hľadaniu vhodných argumentov na zdôvodňovanie matematických tvrdení. V prvej časti metodiky je hlavná pozornosť sústredená na skúmanie prírastkov kvadratickej funkcie a súvislostí medzi koeficientmi v predpise a grafom kvadratickej funkcie. Žiaci si majú osvojiť zostrojenie grafu kvadratickej funkcie, úpravu predpisu kvadratickej funkcie na štvorec a základné vlastnosti kvadratickej funkcie. Druhá časť metodiky je venovaná aplikovaniu osvojených poznatkov na riešenie úloh zameraných na hľadanie extrémov. Pre realizáciu bádateľských aktivít sme pripravili pracovné listy a učebné pomôcky vypracované v prostredí tabuľkového kalkulátora a dynamického geometrického systému.

Úvodný motivačný problém

Na prebudenie záujmu žiakov o skúmanie kvadratickej funkcie sme na úvod vybrali úlohu na trojuholníkové čísla. Predpokladáme, že žiaci ešte nepoznajú vzťah na výpočet súčtu prvých *n* členov aritmetickej postupnosti.

Úloha 1. Deti skladali z kociek schody (Obrázok 69). Určte, z koľkých kociek budú postavené schody v niekoľkých nasledujúcich krokoch. Nájdite vzťah na výpočet počtu kociek na stavbu schodov v *n*-tom kroku.



Obrázok 69. Stavba schodov z kociek.

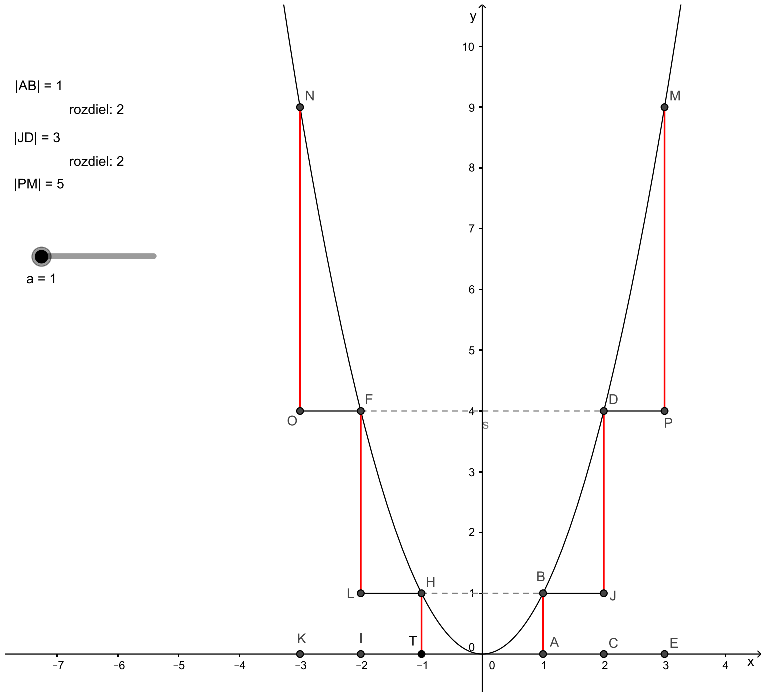
Žiaci môžu zapísať do tabuľky počet kociek využitých na postavenie schodov v niekoľkých ďalších krokoch, prípadne aj znázorniť príslušné usporiadané dvojice v súradnicovej sústave. Aj z tabuľky už vidno, že počet použitých kociek na stavbu schodov narastá v závislosti od výšky schodov rýchlejšie, ako by to bolo pri lineárnej závislosti medzi opisovanými premennými.

Metodická poznámka: Pri hľadaní vhodnej funkcie na charakterizovanie pozorovanej závislosti budú žiaci skúmať rýchlosť rastu niekoľkých typov funkcií. Pre porovnanie rýchlosti rastu hodnôt funkcií zaradíme medzi vyšetrované funkcie aj lineárnu funkciu. Odporúčame, aby pri skúmaní funkcií boli žiaci rozdelení do skupín. Po preskúmaní rýchlosti rastu rôznych typov funkcií by žiaci z jednotlivých skupín vysvetlili objavené zistenia. Pri zostavovaní tabuliek s hodnotami funkcií by žiaci mohli využívať aj tabuľkový kalkulátor.

Úloha 2. Porovnajte rýchlosť rastu lineárnej, kvadratickej a kubickej funkcie. Zamerajte sa na prípady, v ktorých je koeficient pri člene s najvyššou mocninou v predpise funkcie kladný. Pri riešení úlohy preskúmajte prírastky hodnôt funkcií pre vybrané nezáporné celé čísla.

Na začiatku by sa žiaci mohli sústrediť na prípady, kedy budú v predpise funkcie všetky koeficienty okrem koeficientu pri člene s najvyššou mocninou premennej x nulové. Ak by to bolo potrebné, učiteľ by upozornil žiakov, aby v tabuľkách boli hodnoty premennej x za sebou idúce nezáporné celé čísla. Potom by žiaci skúmali aj funkcie, ktorých predpisy na výpočet hodnôt by obsahovali aj viac ako jeden člen. Ak by napr. pri kvadratickej funkcii zvolili koeficient b v lineárnom člene záporný, v tabuľke by mohli hodnoty kvadratickej funkcie aj klesať. Žiaci by sa sústredili na tú časť tabuľky, v ktorej by hodnoty funkcie rástli. Z tabuliek by mali žiaci zistiť, že najrýchlejšie narastajú hodnoty kubickej funkcie. Po preskúmaní prírastkov kvadratickej funkcie by mali zbadať, že narastajú lineárne. To by sa jasne prejavilo, ak by žiaci určili aj rozdiely zo susedných prírastkov. Učiteľ by nasmeroval žiakov aj na skúmanie vplyvu koeficientov v predpise kvadratickej funkcie na rýchlosť rastu hodnôt funkcie.

Pri charakterizovaní rýchlosti rastu hodnôt funkcií by sa žiaci mohli dopracovať aj k zisteniu, že rýchlosť rastu hodnôt kvadratickej funkcie ovplyvňuje len kvadratický koeficient a (podobne ako lineárny koeficient pri lineárnej funkcii). Po prezentovaní výsledkov práce jednotlivých skupín by učiteľ zhrnul zistenia o rýchlosti rastu skúmaných funkcií. V ďalšej časti by sa už žiaci zamerali na kvadratickú funkciu. Na grafickú reprezentáciu prírastkov (úbytkov) kvadratickej funkcie by učiteľ mohol využiť interaktívnu demonštráciu **kvadraticka_funkcia_prirastky.ggb**.



Obrázok 70. Prírastky (úbytky) kvadratickej funkcie.

Na obrázku (Obrázok 70) je zobrazený graf kvadratickej funkcie $y = ax^2$ pre $a = 1$. Pomocou posúvača možno meniť hodnotu kvadratického koeficienta a pozorovať prírastky (úbytky) kvadratickej funkcie pre niekoľko za sebou idúcich celočíselných hodnôt premennej x. Pre kladné zväčšujúce sa hodnoty koeficienta a, narastajú hodnoty kvadratickej funkcie rýchlejšie a parabola predstavujúca graf kvadratickej funkcie sa zužuje. Keďže graf kvadratickej funkcie je osovo súmerný podľa osi paraboly, v časti definičného oboru na ktorej je kvadratická funkcia klesajúca, sa úbytky v absolútnej hodnote pre rastúce hodnoty x zmenšujú o rovnaké hodnoty, o aké sa zväčšujú zodpovedajúce prírastky.

Doteraz sme sa zamerali na vyšetrovanie hodnôt kvadratickej funkcie pre celočíselné hodnoty nezávisle premennej x. Na rozvíjanie objavených súvislostí a na preskúmanie prírastkov (úbytkov) kvadratickej funkcie pri zväčšovaní hodnôt premennej x aj o neceločíselné hodnoty využijeme ďalšiu interaktívnu demonštráciu. V súbore **skumanie_rozdielov.xlsx** je uložená tabuľka s vypočítanými hodnotami kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$. Hodnoty koeficientov a, b, c aj veľkosť prírastku hodnôt premennej x možno jednoducho meniť zmenou obsahu príslušných buniek (Obrázok 71).

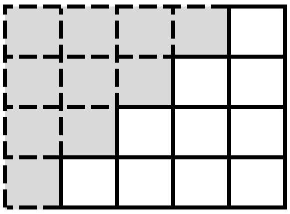
Ešte pred zmenami koeficientov v predpise na výpočet hodnôt kvadratickej funkcie by učiteľ zadal žiakom otázky týkajúce sa vplyvu zmien koeficientov a, c, b na veľkosť prírastkov hodnôt kvadratickej funkcie. Keďže zmena koeficientu c spôsobuje posúvanie grafu kvadratickej funkcie v smere osi y, tak z toho vyplýva jednoduchý záver, že táto zmena neovplyvní prírastky hodnôt kvadratickej funkcie. Trocha zložitejšia môže byť pre žiakov otázka týkajúca sa vplyvu zmien hodnôt koeficientu b na prírastky hodnôt kvadratickej funkcie.

a	b	c		h
5	0	4		0,25
x	f(x)	f(x+h)-f(x)	rozdiel rozdielov	
0	4			
0,25	4,3125	0,3125		
0,5	5,25	0,9375	0,625	
0,75	6,8125	1,5625	0,625	
1	9	2,1875	0,625	
1,25	11,8125	2,8125	0,625	
1,5	15,25	3,4375	0,625	
1,75	19,3125	4,0625	0,625	
2	24	4,6875	0,625	
2,25	29,3125	5,3125	0,625	
2,5	35,25	5,9375	0,625	
2,75	41,8125	6,5625	0,625	
3	49	7,1875	0,625	

Obrázok 71. Vyšetrovanie hodnôt kvadratickej funkcie.

Po pozorovaní zmien v tabuľke by učiteľ so žiakmi zhrnul experimentálne zistenia a potom by pristúpil k ich zdôvodneniu. Základnou myšlienkou zdôvodnenia pozorovaných vlastností kvadratickej funkcie je výpočet rozdielu hodnôt funkcie: $f(x+1) - f(x)$. Výsledkom uvedeného výrazu je lineárny výraz $2ax + a + b$. Lineárny koeficient funkcie $y = 2ax + a + b$ je $2a$. Preto, ak budú hodnoty premennej x nadobúdať za sebou idúce nezáporné celočíselné hodnoty, tak prírastky kvadratickej funkcie narastajú rovnomerne o hodnotu $2a$. Podobne možno ukázať, že aj za sebou idúce prírastky kvadratickej funkcie $f(x+h) - f(x)$, kde h je kladné reálne číslo, určujú lineárnu funkciu. Ak by sme začali zväčšovať hodnoty premennej x o 1 z neceločíselnej začiatočnej hodnoty, prírastky by sa znova zväčšovali o tie isté hodnoty $2a$. V tabuľke na obrázku (Obrázok 71) by sme zmenili začiatočnú hodnotu premennej x napr. na 0,4 a hodnotu h na 1.

V závere prvej časti sa vrátime k riešeniu motivačného problému. Teraz by už žiaci mali zbadať, že závislosť počtu kociek od poradového čísla kroku (výšky schodov) možno vyjadriť kvadratickou funkciou. Navyše prírastky kvadratickej funkcie narastajú rovnomerne o 1, preto kvadratický koeficient $a = 1/2$. Pre určenie hodnôt koeficientov b, c možno dosadiť napríklad usporiadané dvojice [1, 1] a [2, 3] do predpisu kvadratickej funkcie za hodnoty premenných x, y. Dostaneme sústavu dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych. Jej riešením sú hodnoty koeficientov $b = 1/2$, $c = 0$.



Obrázok 72. Doplnenie obrázku v 4. kroku.

Na potvrdenie získaného výsledku možno využiť aj geometrický model. Z grafického náčrtu, ktorý je súčasťou zadania úlohy možno vypozorovať, že ak priložíme k obrázku v *n*-tom kroku obrázok z predchádzajúceho kroku, tak získame štvorec so stranou *n* štvorčekov predstavujúcich kocky. Ak by sme k pôvodnému obrázku v *n*-tom kroku pridali ten istý pootočený obrázok, dostaneme obdĺžnik, ktorého strany tvorí $n + 1$ a n štvorčekov predstavujúcich kocky. Na obrázku (Obrázok 72) je znázornený opísaný postup pre 4. krok. Počet kociek v *n*-tom kroku potom možno vyjadriť vzťahom: $p(n) = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$.

Definícia a vlastnosti kvadratickej funkcie

Metodická poznámka: Po preskúmaní niektorých vlastností kvadratických funkcií v prvej časti návrhu metodiky by učiteľ zaviedol definíciu pojmu kvadratická funkcia. Vhodné by bolo spomenúť aj príklady na kvadratickú závislosť, s ktorými sa žiaci stretli pri skúmaní závislostí (napr. závislosť obsahu štvorca od dĺžky jeho strany, závislosť veľkosti dráhy, ktorú prešlo teleso pri rovnomerne zrýchlenom pohybe od času aj so špeciálnym prípadom rovnomerne zrýchleného pohybu, ktorým je voľný pád).

Popis vlastností kvadratickej funkcie začneme prípadom, keď predpis na výpočet hodnôt kvadratickej funkcie je upravený na štvorec. Žiaci by pri načrtnutí grafu kvadratickej funkcie už mali vidieť analógiu s inými typmi funkcií (napr. s grafmi lineárnych funkcií s absolútnou hodnotou) a po analýze predpisu na výpočet hodnôt kvadratickej funkcie by mali vedieť určiť súradnice vrcholu paraboly, jej tvar a charakterizovať monotónnosť kvadratickej funkcie.

Úloha 3. Načrtnite graf kvadratickej funkcie $f\colon y = (x + p)^2 + q$ pre zvolené hodnoty koeficientov p, q a určte jej vlastnosti.

Ak výraz v zátvorke $x + p$ nadobúda nulovú hodnotu, pripočítame k hodnote q najmenšie číslo, a preto nadobúda kvadratická funkcia f v bode $x = -p$ minimálnu hodnotu. Po určení súradníc vrcholu paraboly a jej tvaru môžu žiaci ľahko určiť intervaly monotónnosti kvadratickej funkcie. Z náčrtu grafu kvadratickej funkcie by mali žiaci ľahko určiť, či je konkrétna kvadratická funkcia párna alebo ani párna ani nepárna. Učiteľ by vyzval žiakov, aby preskúmali aj prípady, ak by v predpise na výpočet hodnôt kvadratickej funkcie bolo pred zátvorkou znamienko mínus.

Po vyriešení úvodných úloh by mohli žiaci ďalej rozvíjať svoje poznatky o charakterizovaní miery rastu a grafoch kvadratických funkcií riešením úloh z pracovného listu **M 7.1_kvadraticka_funkcia.docx**. V prvej úlohe majú žiaci doplniť do tabuľky hodnotu kvadratickej funkcie pre danú hodnotu premennej *x*. Predpis na výpočet hodnôt kvadratickej funkcie nie je zadaný. Pomocou tretieho riadku s prírastkami hodnôt kvadratickej funkcie a s využitím vlastnosti, že prírastky narastajú lineárne pri zväčšovaní premennej *x* o rovnaké hodnoty, môžu žiaci doplniť prázdne políčka v tabuľke aj bez určenia predpisu funkcie. Podobného typu je aj druhá úloha v pracovnom liste.

Úloha 4. Pri voľnom páde sa teleso pohybuje rovnomerne zrýchleným pohybom. V tabuľke je uvedená veľkosť dráhy, ktorú prešlo padajúce teleso v určených časových intervaloch. Doplňte do druhého riadku tabuľky chýbajúce údaje. Nájdite postup, ako by sme mohli určiť dĺžku dráhy prejdenej telesom za 5,5 s nie s využitím vzorca na výpočet prejdenej dráhy telesa pri voľnom páde, ale využitím poznatku, že závislosť dĺžky prejdenej dráhy na čase je kvadratická. (Za veľkosť tiažového zrýchlenia bola dosadzovaná hodnota 10 m/s^2.)

Tabuľka 7. Dĺžky dráhy padajúceho telesa pri voľnom páde.

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	4,5	5,5
s (m)	0	5	20	45	80			101,25	

Dĺžku prejdenej dráhy padajúceho telesa v závislosti od času možno určiť podľa známeho vzorca: $s = \frac{gt^2}{2}$.

Ak si žiaci pamätajú z fyziky tento vzorec, nebude pre nich ťažké doplniť chýbajúce hodnoty v druhom riadku tabuľky. Pri výpočte chýbajúcich hodnôt prejdenej dráhy v čase 5 s a 6 s by však mohli využiť aj vlastnosť lineárneho rastu prírastkov kvadratickej funkcie pri zväčšovaní hodnôt premennej *x* o rovnaké hodnoty. Ak žiaci doplnia v treťom riadku tabuľky prírastky kvadratickej funkcie, tak môžu pomocou nich doplniť hodnoty *s* pre *t* = 5 s a *t* = 6 s.

Pri určení hodnoty *s* pre *t* = 5,5 s sa možno niektorí žiaci zmýlia a vypočítajú priemernú hodnotu z *s*(5) a *s*(6). Ak predtým vypočítali aj *s*(5,5) pomocou vzorca, tak zistia, že im vychádza iná hodnota. Podobne, ak by aplikovali takýto výpočet na *s*(4,5) pomocou *s*(4) a *s*(5), tiež by dostali nesprávnu hodnotu. Žiaci by si mali uvedomiť, že pri zväčšovaní premennej *t* o 1 z hodnoty 0,5 možno rýchlosť rastu kvadratickej funkcie charakterizovať tou istou lineárnou funkciou ako pri zväčšovaní premennej *t* o 1 z hodnoty 0 ($y = 10t + 5$). Preto by mali v treťom riadku tabuľky doplniť prírastky kvadratickej funkcie pri zväčšovaní premennej *t* o 1. Pre hodnotu *t* = 4,5 s je prírastok kvadratickej funkcie pri zväčšení premennej *t* o 1 rovný 50. Ak pripočítame k číslu 101,25 číslo 50, dostaneme správny výsledok: *s*(5,5) = 151,25 m. Alebo žiaci preskúmajú prírastky dráhy pre *t* = 4 s, *t* = 4,5 s, *t* = 5 s a na základe nich určia prejdenú dráhu pre *t* = 5,5 s.

V tretej úlohe pracovného listu už žiaci nemajú pracovať s konkrétnymi hodnotami v tabuľkách, ale s predpismi na výpočet hodnôt funkcií.

Úloha 5. Nájdite predpis na výpočet hodnôt kvadratickej funkcie *f*, ak platí:

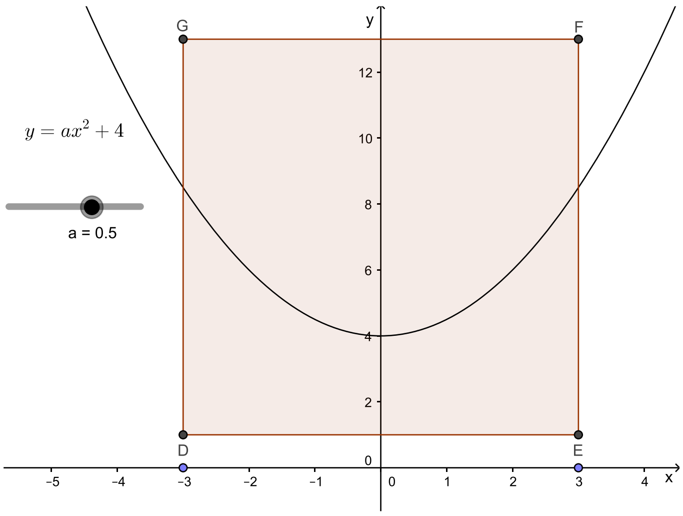
$$f(x+1) - f(x) = 2x + 3.$$

Už sme určili, že pre kvadratickú funkciu platí: $f(x+1) - f(x) = 2ax + a + b$. Porovnaním tohto výsledku s lineárnym výrazom $2x + 3$ dostávame: $2a = 2$, $a + b = 3$. Teda pre koeficienty hľadanej kvadratickej funkcie *f* platí: $a = 1$, $b = 2$. Koeficient *c* môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu. Žiaci by prípadne mohli vytvoriť aj tabuľku s hodnotami funkcie *f* pre celočíselné hodnoty premennej *x* narastajúce o 1 a vypočítať aj rozdiely hodnôt funkcie *f*.

V ďalších úlohách pracovného listu je úlohou žiakov nájsť predpis na výpočet hodnôt kvadratickej funkcie. Buď majú zadaný graf kvadratickej funkcie, alebo slovný opis jeho vlastností. Využitím súradníc vrcholu paraboly a niektorého jej ďalšieho bodu, môžu žiaci odvodiť predpis na výpočet hodnôt kvadratickej funkcie upravený na štvorec. Vhodný námet na bádanie predstavuje posledná úloha v pracovnom liste.

Úloha 6. Zistite, pre aké hodnoty kvadratického koeficientu *a* priradí funkcia $g: y = ax^2 + 4$ ľubovoľnému číslu z intervalu $\langle -3, 3\rangle$ číslo z intervalu $\langle 1, 13\rangle$.

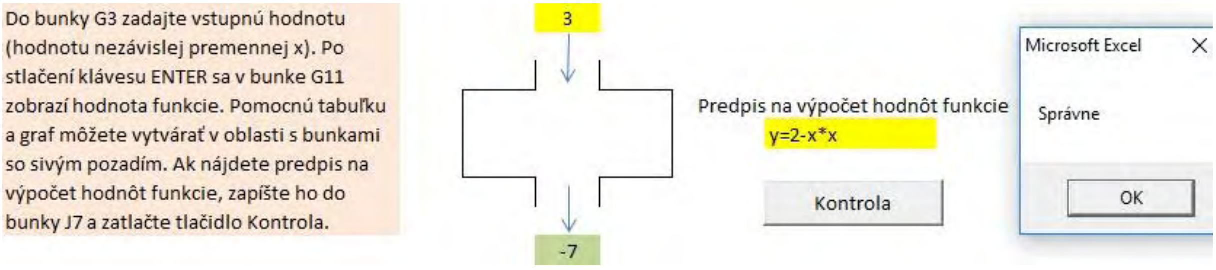
Pre získanie lepšej predstavy môžu žiaci vytvoriť pomocou programu Geogebra dynamickú konštrukciu, v ktorej budú skúmať grafy kvadratických funkcií bez lineárneho člena pri zmenách hodnoty kvadratického koeficientu a. Z grafu majú potom vypozorovať, či vyšetrovaná kvadratická funkcia spĺňa zadané podmienky (Obrázok 73).



Obrázok 73. Dynamická konštrukcia na vizualizáciu riešenia úlohy 6.

V načrtnutom prípade má kvadratická funkcia požadovanú vlastnosť. Ak by parabola pretínala úsečku *GF* v iných ako krajných bodoch, potom by už napr. číslam –3, 3 boli priradené hodnoty väčšie ako 13. Podobne možno interpretovať priesečníky paraboly s úsečkou *DE* pri záporných hodnotách koeficientu a. Žiaci môžu zbadať, že koeficient a môže nadobúdať kladné aj záporné hodnoty, a dokonca aj nulovú hodnotu, kedy dostaneme konštantnú funkciu, ktorá všetkým číslam z intervalu $\langle -3, 3\rangle$ priraďuje hodnotu 4. Ostáva nájsť výpočtom najväčšiu kladnú a najmenšiu zápornú hodnotu parametra a. Dosadíme niektorú z krajných hodnôt intervalu $\langle -3, 3\rangle$ do predpisu danej kvadratickej funkcie. Potom má platiť: $a \cdot (-3)^2 + 4 \leq 13$ a zároveň $a \cdot (-3)^2 + 4 \geq 1$. Po úprave dostávame: $a \leq 1$ súčasne $a \geq -1/3$. Koeficient a môže nadobúdať hodnoty z intervalu $\langle -1/3, 1\rangle$.

Po vyhodnotení žiackych riešení úloh z pracovného listu by učiteľ mohol zadať žiakom interaktívny pracovný zošit **M 7.3_predpis_funkcie.xlsm**, ktorý je zameraný na určovanie predpisov funkcií. V pracovnom zošite sú na jednotlivých hárkoch simulované čierne skrinky obsahujúce neznámy predpis funkcie. Po potvrdení čísla na vstupe vydá čierna skrinka číslo na výstupe predstavujúce hodnotu funkcie. Žiaci môžu na hárku po zadaní niekoľkých vstupných hodnôt vytvoriť tabuľku a snažiť sa identifikovať vzťah medzi premennými. Po zapísaní správneho predpisu funkcie do určenej bunky a zatlačení tlačidla Kontrola, dôjde k vyhodnoteniu žiackeho riešenia a v prípade, že je riešenie správne, zobrazí sa ďalší hárok obsahujúci novú úlohu (Obrázok 74). Po otvorení zošita sú dostupné len hárok s úvodnými inštrukciami a hárok s prvou úlohou. Pracovný zošit obsahuje osem úloh na lineárne funkcie, ktoré môžu v predpise obsahovať aj absolútnu hodnotu a kvadratické funkcie. Keďže je v zošite implementovaná aj jednoduchá spätná väzba, učiteľ môže využiť zošit na zorganizovanie súťaže medzi žiakmi. Žiaci môžu pracovať so zošitom jednotlivo, prípadne aj v dvojiciach. Vyhrajú tí žiaci, ktorým sa za určený čas podarí správne vyriešiť najviac úloh.



Obrázok 74. Simulácia čiernej skrinky obsahujúcej neznámy predpis funkcie.

Využitie poznatkov o kvadratickej funkcii pri riešení úloh

V poslednej časti návrhu metodiky sa zameriame najmä na určovanie monotónnosti kvadratickej funkcie. Kľúčovou úlohou pri určovaní intervalov, na ktorých je kvadratická funkcia rastúca alebo klesajúca, je nájdenie súradníc vrcholu paraboly predstavujúcej graf kvadratickej funkcie. Doteraz sme pri hľadaní vrcholov paraboly skúmali predpisy na výpočet hodnôt kvadratickej funkcie, ktoré neobsahovali lineárny člen, alebo boli upravené na štvorec. Žiaci by si mali osvojiť aj úpravu kvadratického trojčlena na štvorec využitím vzorca na umocňovanie dvojčlena.

Ako vhodnú oblasť na aplikovanie poznatkov o kvadratických funkciách sme vybrali riešenie jednoduchých úloh na hľadanie extrémov, ktoré vedú k vyšetrovaniu priebehu kvadratickej funkcie. V prvej úlohe budú ešte žiaci pracovať s predpisom na výpočet hodnôt kvadratickej funkcie, ktorý nebude obsahovať absolútny člen.

Úloha 7. V minulom roku, kedy stála reprezentatívna publikácia o pamiatkach mesta 75 €, bolo predaných len 500 kusov. Na základe prieskumu sa zistilo, že za každých 5 € zníženia ceny by si o 100 ľudí viac kúpilo publikáciu. Aká cena by mohla zabezpečiť maximálnu tržbu z predaja nového vydania publikácie?

Nech premenná x vyjadruje počet znížení ceny o 5 €. Potom na základe slovného zadania úlohy možno celkovú tržbu z predaja publikácie vyjadriť v tvare:

$$z(x) = (500 + 100x)(75 - 5x)$$

Po úprave dostávame: $z(x) = 500(x + 5)(15 - x)$

Funkcia $z(x)$ nadobúda nulové hodnoty pre $x = 15$ a $x = -5$. To znamená, že vrchol paraboly predstavujúcej graf kvadratickej funkcie $z(x)$ má x-ovú súradnicu rovnú 5. Po dosadení tejto hodnoty za premennú x dostávame, že vrchol paraboly má súradnice $[5, 50000]$.

Z predpisu na výpočet hodnôt funkcie $z(x)$ vidno, že po roznásobení zátvoriek má kvadratický koeficient zápornú hodnotu. Preto pre $x \leq 5$ je funkcia $z(x)$ rastúca a pre $x \geq 5$ je funkcia $z(x)$ klesajúca. Maximálnu tržbu z predaja publikácie by mohli dosiahnuť pri znížení ceny o 25 €.

V nasledujúcej úlohe už bude potrebné hľadať minimálnu hodnotu kvadratickej funkcie, ktorej predpisom na výpočet hodnôt je kvadratický trojčlen.

Úloha 8. Rovný kus drôtu dlhý 2 m rozstrihneme na dva kusy a každý kus drôtu poohýname do tvaru štvorca. Akú dĺžku majú mať vytvorené dva kusy drôtu, aby súčet obsahov oboch štvorcov bol minimálny?

Ak označíme dĺžku jednej časti drôtu x, tak pre súčet obsahov štvorcov $S(x)$ platí:

$$S(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{2-x}{4}\right)^2, \; S(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{8}$$

Aby sme v čitateli zlomku získali mocninu dvojčlena, upravíme ho: $x^2 - 2x + 1 + 1$. Tento výraz je ekvivalentný s výrazom $(x-1)^2 + 1$. Potom môžeme $S(x)$ vyjadriť v tvare:

$$S(x) = \frac{1}{8}\left[(x-1)^2 + 1\right]$$

Funkcia $S(x)$ má minimum v bode $x = 1$. Drôt má byť rozdelený na dva kusy s dĺžkou 1 m. Aby sme žiakov priviedli k zovšeobecneniu úprav kvadratického trojčlena na štvorec, zovšeobecníme riešenie úlohy na drôt dĺžky d. Pre súčet obsahov štvorcov $S(x)$ platí:

$$S(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{d-x}{4}\right)^2, \; S(x) = \frac{1}{8}\left(x^2 - dx + \frac{d^2}{2}\right)$$

Na základe prvých dvoch členov v zátvorke nájdeme dvojčlen, ktorý po umocnení dáva tieto dva členy a ešte tretí člen, ktorý je potrebné potom odčítať. Pri hľadaní dvojčlena musíme lineárny koeficient vo výraze v zátvorke vydeliť dvoma. Po úprave získavame:

$$S(x) = \frac{1}{8}\left[\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{2}\right]$$

Kvadratická funkcia $S(x)$ nadobúda minimálnu hodnotu pre $x = d/2$. To znamená, že drôt dĺžky d je potrebné rozstrihnúť na polovicu.

Metodická poznámka: Po precvičení úpravy niekoľkých konkrétnych kvadratických trojčlenov na štvorec by učiteľ spolu so žiakmi na základe tejto úpravy odvodil súradnice vrcholu paraboly predstavujúcej graf kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$, pre a rôzne od 0. Podľa hodnoty kvadratického koeficientu by žiaci určili aj intervaly monotónnosti kvadratickej funkcie.

Na prehlbovanie poznatkov o vlastnostiach kvadratickej funkcie a aplikáciu poznatkov na riešenie úloh z reálneho života sme pripravili pre žiakov pracovný list **M 7.4_vlastnosti_kvadratickej_funkcie.docx**. V prvej úlohe majú žiaci zistiť, pre aké hodnoty koeficientov a, b, c je kvadratická funkcia párna, nepárna. Z definície párnej funkcie vyplýva, že kvadratická funkcia je párna práve vtedy, ak lineárny koeficient $b = 0$. Z definície nepárnej funkcie môžu žiaci odvodiť, že kvadratická funkcia nemôže byť nepárna.

V druhej úlohe pracovného listu majú žiaci načrtnúť graf danej kvadratickej funkcie f a nájsť predpisy kvadratických funkcií, ktorých grafy sú obrazom grafu danej funkcie f v osovej súmernosti určenej osou x a osou y. Na záver riešenia úlohy majú žiaci výsledky riešenia pre konkrétnu kvadratickú funkciu zovšeobecniť pre ľubovoľnú kvadratickú funkciu. Aby bol graf kvadratickej funkcie obrazom grafu danej kvadratickej funkcie v osovej súmernosti určenej osou x je potrebné zmeniť hodnoty koeficientov a, b, c na opačné hodnoty. Pri vytvorení obrazu grafu danej kvadratickej funkcie v osovej súmernosti určenej osou y je potrebné zmeniť hodnotu lineárneho koeficientu b na opačnú hodnotu. Ak by bol lineárny koeficient rovný 0, tak graf kvadratickej funkcie je osovo súmerný podľa osi y a preto je priamo riešením úlohy. Po skúmaní grafov kvadratických funkcií a precvičení úpravy kvadratického trojčlena na štvorec nasledujú úlohy na hľadanie extrémov.

Úloha 9. Farmár chce ohradiť obdĺžnikový pozemok, ktorého jednu stranu tvorí stena stodoly. K dispozícii má 100 m pletiva.

a) Zistite, aké rozmery má mať pozemok, aby jeho obsah bol čo najväčší.

b) Farmár sa rozhodol, že pletivo, ktoré má k dispozícii, využije ešte aj na rozdelenie pozemku na dve časti plotom postaveným rovnobežne s hraničným plotom pozemku. Aké rozmery má mať celý pozemok, aby jeho obsah bol čo najväčší.

V úlohe a) majú žiaci zistiť, pre ktorú hodnotu nadobúda maximum kvadratická funkcia $S(x) = x \cdot (100 - 2x)$. Funkcia $S(x)$ so zápornou hodnotou kvadratického koeficientu nadobúda nulové hodnoty v bodoch 0 a 50, a preto nadobúda maximum v bode 25. Obdĺžnikový pozemok má mať rozmery 25 m, 50 m.

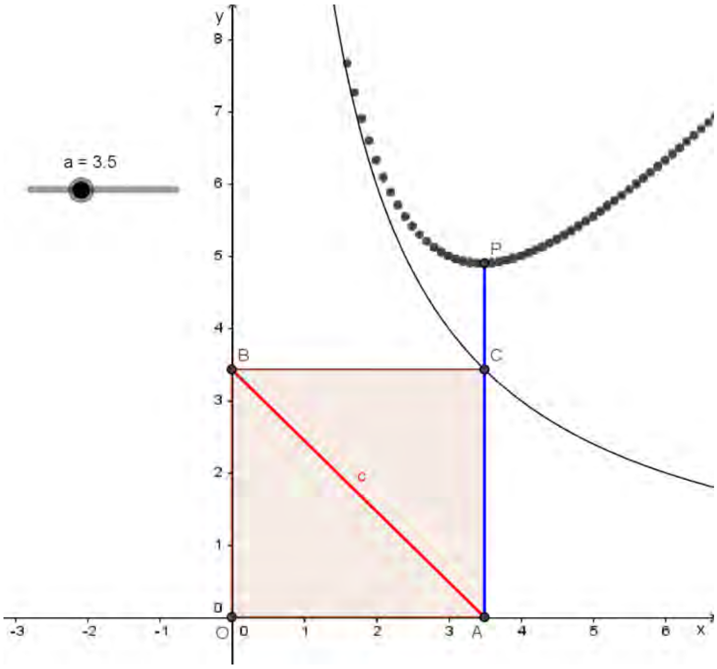
V úlohe b) prichádzajú do úvahy dva varianty. Ak bude deliaci plot rovnobežný so stenou stodoly, tak majú žiaci zistiť, kedy má obdĺžnik s daným obvodom maximálny obsah.

Pre obsah pozemku platí: $S(x) = x \cdot (50 - x)$. Maximálny obsah bude mať pozemok v tvare štvorca s dĺžkou strany 25 m. Ak bude deliaci plot kolmý na stenu stodoly, tak pre obsah pozemku platí: $S(x) = x \cdot (100 - 3x)$. Funkcia $S(x)$ má maximum v bode $x = 100/6$. Preto pozemok v tvare obdĺžnika má maximálny obsah pri rozmeroch 50/3 m, 50 m. Deliaci plot je rovnobežný s kratšou stranou pozemku a má dĺžku 50/3 m.

V poslednej úlohe pracovného listu by mohli žiaci pri bádaní využívať aj program Geogebra. Posledná úloha je zložitejšia ako predchádzajúce úlohy, a preto nemusí byť povinná pre všetkých žiakov. Pri skúmaní dĺžky prepony pravouhlých trojuholníkov s rovnakým obsahom doplníme trojuholník na obdĺžnik. Pri zmene dĺžok strán obdĺžnikov s rovnakým obsahom možno závislosť dĺžky jednej strany obdĺžnika od dĺžky druhej strany obdĺžnika charakterizovať nepriamou úmernosťou. Grafickou reprezentáciou tejto závislosti je vetva hyperboly prechádzajúca bodom *C* (Obrázok 75).

Úloha 10. Zo všetkých pravouhlých trojuholníkov daného obsahu určte ten, ktorého dĺžka prepony je minimálna.

Pri využití grafickej reprezentácie si zvolíme obsah pravouhlých trojuholníkov: 6 cm^2. Celý obdĺžnik zložený z dvoch zhodných pravouhlých trojuholníkov má potom obsah 12 cm^2. Pri zmenách dĺžky odvesny a možno charakterizovať zmeny dĺžky odvesny b vzťahom $b = 12/a$. Dĺžku odvesny a možno meniť pomocou posúvača. Pre zvolenú dĺžku odvesny a je dĺžka úsečky *AP* rovná dĺžke prepony c. Pre bod *P* je nastavená stopa, a tak pomocou zmien dĺžky odvesny a možno znázorniť závislosť dĺžky prepony c od dĺžky odvesny a. Experimentovaním s dynamickou konštrukciou možno zistiť, že prepona má najmenšiu dĺžku v prípade, keď je obdĺžnik štvorcom a teda pravouhlý trojuholník *ABC* je rovnoramenný.



Obrázok 75. Grafická reprezentácia závislosti dĺžky prepony od dĺžky odvesny v pravouhlom trojuholníku *ABC*.

Z obrázka (Obrázok 75) vidno, že závislosť dĺžky prepony c od dĺžky odvesny a nie je kvadratická. Napriek tomu využijeme na zdôvodnenie experimentálneho zistenia poznatky, ktoré si žiaci osvojili pri kvadratickej funkcii. Využijeme Pytagorovu vetu a vo vzťahu $a \cdot b = 12$ vyjadríme dĺžku odvesny b pomocou dĺžky prepony c:

$$a \cdot \sqrt{c^2 - a^2} = 12$$

Umocníme rovnicu a využijeme substitúciu $t = a^2$. Po úprave dostaneme rovnicu:

$$t^2 - c^2 t + 144 = 0$$

Kvadratický trojčlen na ľavej strane rovnice upravíme na štvorec:

$$\left(t - \frac{c^2}{2}\right)^2 - \frac{c^4}{4} + 144 = 0 \qquad (1)$$

Ak vo výraze na ľavej strane rovnice sa zväčšuje hodnota umocneného dvojčlena, tak aj výraz $c^4/4$ sa zväčšuje. Minimálnu hodnotu nadobúda výraz $c^4/4$ v prípade, ak dvojčlen v zátvorke je rovný 0, t. z. pre $t = \frac{c^2}{2}$. Po dosadení výrazu a^2 za premennú t a využití Pytagorovej vety pre preponu c dostávame:

$$a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Po úprave tohto vzťahu získame rovnosť $a = b$. Vychádzali sme z konkrétneho prípadu $a \cdot b = 12$. Ak $a = b$, tak dostaneme $a^2 = 12$. Z Pytagorovej vety platí: $c^2 = 2a^2$. Potom dostávame: $c^2 = 24$. Teda pre zvolený konkrétny obsah pravouhlých trojuholníkov dostávame rovnoramenný pravouhlý trojuholník s preponou $c = \sqrt{24}$. Ten istý výsledok získame aj z rovnice (1), ak platí: $t = \frac{c^2}{2}$.

Bádateľsky orientované vyučovanie informatiky

Bádateľský prístup vo vyučovaní má tradíciu najmä v prírodovedných predmetoch, v rámci ktorých majú žiaci možnosť pozorovať, experimentovať, vytvárať a overovať hypotézy, argumentovať, robiť závery atď. Pri implementácii bádateľsky orientovaného vyučovania informatiky je dôležité si uvedomiť niektoré špecifiká informatiky a vyučovania informatiky.

Zatiaľ čo v prírodných vedách žiaci väčšinou objavujú a overujú prírodné zákony, ktoré existujú nezávisle od existencie človeka, v informatike prevažne objavujú a overujú princípy a postupy definované človekom. Aj napriek tomu však môžeme bádateľské zručnosti žiakov rozvíjať aj vo vyučovaní informatiky. V niektorých našich učebniciach informatiky pre základné a stredné školy (Kalaš, 2007, 2009) nájdeme úlohy vyžadujúce experimentovanie, čítanie v tabuľkách a diagramoch, skúmanie a plánovanie správania, realizáciu vlastných prieskumov atď. Na rozdiel od vyučovania prírodných vied pre informatiku absentujú bádateľsky orientované metodiky.

Naším cieľom nebolo rovnomerne pokryť celý obsah školskej informatiky. Zamerali sme sa skôr na praktické predstavenie bádateľsky orientovaného vyučovania informatiky učiteľom. Pre predmet informatika sme vyvinuli bádateľsky orientované metodiky, ktoré zasahujú do nasledovných tém (Tabuľka 8):

Tabuľka 8. Pokrytie tém Inovovaného Štátneho vzdelávacieho programu bádateľskými metodikami.

	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8
Reprezentácie a nástroje								
práca s grafikou								
práca s textom	✓							
práca s prezentáciami	✓							
práca s multimédiami								
práca s tabuľkami	✓							
informácie	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓
štruktúry	✓							
Komunikácia a spolupráca								
prezentovanie informácií prostredníctvom webovej stránky								
vyhľadávanie na webe								
práca s nástrojmi na spoluprácu a zdieľanie informácií	✓							
práca s nástrojmi na komunikáciu	✓							
Algoritmické riešenie problémov								
analýza problému							✓	
jazyk na zápis riešenia								
pomocou postupnosti príkazov								
pomocou nástrojov na interakciu								

pomocou premenných						✓		
pomocou cyklov								
pomocou vetvenia								
interpretácia zápisu riešenia								
hľadanie a opravovanie chýb								
Softvér a hardvér								
práca so súbormi a priečinkami			✓					✓
práca v operačnom systéme								
počítač a prídavné zariadenia								
práca v počítačovej sieti a na internete		✓						
práca proti vírusom a špehovaniu								
Informačná spoločnosť								
bezpečnosť a riziká		✓		✓				
digitálne technológie v spoločnosti								
legálnosť používania								

Každá metodika obsahuje informačný list, ktorý ju stručne charakterizuje. Okrem samotného metodického postupu pre učiteľa sú súčasťou metodík úlohy a pracovné listy pre žiakov, podporné alebo pracovné súbory, odkazy na internetové zdroje, testy, návody na hodnotenie a pod.

Pri bádateľsky orientovanom vyučovaní informatiky môžeme klásť dôraz na informatický obsah alebo na bádateľskú metódu. Vďaka tomu sa uvedené metodiky čiastočne líšia svojou štruktúrou.

Úlohy a otázky pre žiakov sú formulované tak, aby podnietili žiacke bádanie. Naším cieľom je, aby žiaci pri riešení úloh skúmali, experimentovali, vyslovovali predpoklady, argumentovali, vyslovovali závery a kriticky prijímali tvrdenia. Boli by sme radi, ak by navzájom spolu s učiteľom vzájomne diskutovali, argumentmi obhajovali svoje názory.

Dôležitou súčasťou metodík sú aj ich alternatívy. Učiteľ si tak môže adaptovať metodiku podľa jeho vlastných podmienok.

I1 – Získavanie, spracovanie a prezentácia informácií

<table>
<tr><td colspan="2">Tematický celok</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reprezentácie a nástroje – informácie
Reprezentácie a nástroje – práca s textom
Reprezentácie a nástroje – práca s prezentáciami
Reprezentácie a nástroje – práca s tabuľkami
Reprezentácie a nástroje – štruktúry
Komunikácia a spolupráca – práca s nástrojmi na spoluprácu a zdieľanie informácií
Komunikácia a spolupráca – práca s nástrojmi na komunikáciu</td></tr>
<tr><td>Cieľová skupina</td><td>Odhadovaný čas výučby</td></tr>
<tr><td>Druhý ročník SŠ</td><td>Dlhodobý projekt, cca. 1 až 2 mesiace</td></tr>
<tr><td>Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti</td><td>Kognitívne ciele</td></tr>
<tr><td>▪ Používať tabuľkový kalkulátor a základné štatistické funkcie,
▪ vysvetliť význam základných štatistických funkcií a interpretovať ich výsledky,
▪ používať sieť internet na komunikáciu a získavanie informácií.</td><td>▪ Určiť skúmanú oblasť, definovať výskumný problém,
▪ analyzovať výskumný problém a stanoviť vhodné výskumné otázky a premenné, definovať vhodné hypotézy,
▪ navrhnúť efektívny spôsob zberu dát,
▪ analyzovať dáta a vyhodnotiť platnosť hypotéz,
▪ zostaviť záverečnú správu z výskumného projektu.</td></tr>
<tr><td>Bádateľské zručnosti</td><td>Didaktický problém</td></tr>
<tr><td>▪ Formulácia problému a plánovanie experimentu/modelu (identifikovať problém, ktorý sa bude skúmať a formulovať hypotézy, navrhnúť výskumné otázky, naplánovať postup, navrhnúť postup merania),
▪ realizácia a implementácia (pozorovať, merať, zaznamenávať výsledky pozorovania),
▪ analýza a interpretácia (transformovať výsledky do štandardných foriem, určovať vzťahy medzi premennými veličinami,</td><td>▪ Možnosti nástrojov, s ktorými sa žiaci oboznámia na hodinách informatiky, sú často prezentované na „umelých“, jednoduchých a nereálnych príkladoch, resp. dátach,
▪ pomerne málo času sa venuje možnosti žiakov prezentovať svoje zistenia a argumentovať na obhájenie pravdivosti zistených tvrdení.</td></tr>
</table>

porovnať dáta s hypotézou, diskutovať o obmedzeniach realizovaného prieskum, zovšeobecniť výsledky, formulovať nové otázky, problémy, formulovať závery), ▪ zdieľanie a prezentácia (prezentovať výsledky pred spolužiakmi, diskutovať/obhajovať výsledky/argumentovať, vypracovať formálnu správu o výsledkoch).	
Didaktické materiálne prostriedky	Didaktické metódy a organizačné formy
▪ Aplikácie pre zber (napr. elektronické dotazníky) a spracovanie dát (napr. tabuľkový kalkulátor) a aplikácie na tvorbu prezentácií, ▪ dataprojektor, tabuľa, ▪ ukážka realizácie relačného výskumného problému s komentárom jednotlivých častí riešenia problému – príloha I 1.1, ▪ šablóna rámca pre realizáciu žiackeho relačného výskumu – príloha I 1.2, ▪ rubrika pre hodnotenie žiackych výskumov – príloha I 1.3.	▪ Nasmerované bádanie, ▪ heuristický rozhovor, metóda cielených otázok, ▪ projektová metóda, ▪ samostatná práca žiakov, prípadne tímová práca v dvojčlenných skupinách.

Príprava výučby

Realizáciu uvedenej aktivity predpokladáme po prebratí tematického celku „Práca s tabuľkami“. Žiaci poznajú nástroje tabuľkového kalkulátora a prostredníctvom tejto aktivity ich použijú pri riešení reálneho problému. Uvedená metodika je primárne zameraná na metódy vedeckého výskumu aplikovateľné v prostredí školskej informatiky.

Priebeh výučby

Poznámka: Výskumník pri svojej práci môže realizovať rôzne typy výskumov. V uvedenej metodike sa zaoberáme relačným výskumom. V tomto type výskumu je úlohou nájsť a charakterizovať vzťahy medzi premennými a prispieť tak k obohateniu vedomostnej úrovne spoločnosti. Naše skúsenosti ukazujú, že žiaci sú schopní tento typ výskumu na primeranej úrovni zvládnuť. **Je však potrebné, aby učiteľ so žiakmi pracoval a priebežne korigoval ich postup.**

Pred samotnou aktivitou je vhodné so žiakmi spoločne prediskutovať rámcový postup (metodiku), ako sa riešia výskumné problémy tohto typu. V prílohe I 1.1 je uvedená fiktívna ukážka realizácie relačného výskumného problému. Je vhodné so žiakmi toto riešenie prediskutovať a žiakom vysvetliť význam jednotlivých častí. Žiaci by mal pochopiť, že všetky zložky rámcového postupu (Tabuľka 9) sú dôležité a žiadnu z nich nemožno vynechať.

Tabuľka 9. Etapy realizácie relačného výskumu.

väčšinou teoretická činnosť	Voľba výskumnej oblasti Definovanie výskumného problému
	↓
	Formulácia výskumných otázok Stanovenie premenných vo výskume
	↓
	Formulácia hypotéz
	↓
	Stanovenie výskumnej metódy Príprava dotazníka pre zber údajov Určenie položiek v dotazníku
	↓
väčšina práce prebieha v teréne	Zber dát
	↓
väčšinou teoretická činnosť	Spracovanie získaných dát
	↓
	Vytvorenie záverečnej správy Interpretácia výsledkov
	↓
komunikácia výsledkov	Prezentácia a obhajoba výsledkov výskumu

Predpokladá sa, že žiaci pracujú najmä mimo vyučovania a s učiteľom priebežne konzultujú kľúčové momenty a priebeh ich práce. Odporúčame jednotlivé časti konzultovať a uzatvárať podľa vopred dohodnutého časového harmonogramu, napr.

1. týždeň: návrh skúmanej oblasti, definícia výskumného problému,
2. týždeň: formulácia výskumných otázok, premenných a hypotéz,
3. týždeň: príprava dotazníka, návrh položiek dotazníka,

4. – 5. týždeň: zber dát,

5. – 6. týždeň: spracovanie dát, vytvorenie záverečnej správy,

7. týždeň: prezentácia a obhajoba výsledkov výskumu.

Pri samotnom výskume odporúčame, najmä ak žiaci takúto aktivitu robia prvýkrát, aby žiaci použili pripravenú šablónu pre rámec výskumu (príloha I 1.2).

Stanovenie výskumnej oblasti, definovanie výskumného problému

Úloha 1. Definujte výskumnú oblasť, v ktorej by ste radi získali nové poznatky.

Úloha 2. Definujte výskumný problém, konkrétnu úlohu, ktorú chcete riešiť.

Žiak si stanoví oblasť, ktorá ho zaujíma a v ktorej by rád zistil nejaké nové poznatky, napr. stravovanie žiakov, doprava žiakov do a zo školy, využívanie internetu žiakmi, príprava žiakov na vyučovanie, mimoškolské aktivity. Na základe vybranej oblasti žiak definuje výskumný problém. Z formulácie problému by malo byť jasné, čo sa bude skúmať. Skúmanie by malo priniesť niečo nové a hodnotné, problém by nemal byť triviálny a výsledok by mal posunúť naše poznanie dopredu. Výsledok by nemal byť vopred známy.

Poznámka: Skutočnosť, že výsledok výskumu nie je vopred známy, prináša žiakom užitočnú skúsenosť. Pri výskume sa musia spoľahnúť len na seba a svoj postup nemôžu korigovať pre dosiahnutie očakávaného výsledku.

Výskumné otázky a premenné výskumu

Úloha 3. Formulujte výskumné otázky vášho výskumu.

Následne je vhodné formulovať výskumné otázky. Otázky by nemali byť uzavreté. Z takejto odpovede (napr. áno/nie) sa veľa nedozvieme. Otázky pomôžu lepšie si uvedomiť, čo ideme skúmať. Keďže žiaci realizujú relačný výskum, otázky by mali mať relačný charakter. V relačných otázkach (napr. Ako vplýva dĺžka prestávky na výkon žiaka?) vystupujú premenné (dĺžka prestávky, výkon žiaka). Premenné musia navzájom súvisieť, nesmú byť izolované.

Úloha 4. Definujte premenné vášho výskumu.

Premenné sú vlastnosti, javy, podmienky, ktoré skúmame. Mali by byť merateľné (napr. výška človeka) alebo kategorizovateľné (napr. farba očí). Premenné môžu byť jednoduché, priamo merateľné (napr. výška človeka, množstvo použitej vody pri zalievaní rastlinky, dĺžka prestávky) alebo komplexnejšie, ktoré sa priamo odmerať nedajú (napr. *BMI* je funkciou výšky a hmotnosti, *IQ* sa meria ako výsledok v *IQ* teste, výkon žiaka môžeme merať jeho aktivitou, výsledkom v teste). Dôležité je mať jasno v tom, ktoré premenné sú závislé a ktoré nezávislé. Nezávislá premenná (napr. množstvo prijatých kalórií v potrave) je príčinou zmeny druhej premennej (napr. množstvo telesného tuku jedinca). Závislá premenná je tá, ktorá sa mení vplyvom inej premennej. Vo výskume potom overujeme vplyv nezávislej premennej na závislú premennú (relačný výskumný problém).

Poznámka: V tejto fáze výskumu je dôležité dať pozor na zámenu, resp. postavenie do rovnakého významu pojmov korelácia a kauzalita. Zatiaľ čo korelácia hovorí o tom, že existuje časová súvislosť pozorovaných javov (vzťah medzi premennými), kauzalita hovorí aj o príčinnej súvislosti (jeden jav je príčinou iného javu). Ak medzi javmi existuje korelácia, to ešte neznamená, že musí existovať aj kauzalita. Táto korelácia môže byť čisto náhodná.

Formulácia hypotéz

Hypotézy konkretizujú výskumný problém, rozdeľujú ho na menšie časti, bližšie určujú smerovanie výskumu a dajú sa buď potvrdiť alebo vyvrátiť. Hypotéza by mala vyjadrovať vzťah aspoň dvoch premenných. Hypotéza je oznamovacia veta.

Úloha 5. Formulujte hypotézy svojho výskumu.

Žiak sformuluje vety alebo tvrdenia, ktoré vysvetľujú nejaké javy alebo udalosti. Hypotézy by mali vychádzať z reálnych poznatkov, mali by objasňovať to, čo v čase ich vzniku nie je (úplne) známe, mali by byť overiteľné a formulované jednoducho. Napr.

- „Žiaci, ktorí uprednostňujú domácu (školskú) stravu pred rýchlym občerstvením, sú zdravší.“
- „Žiaci, ktorí si nevytvárajú časový plán, majú viac neskorých príchodov do školy ako tí, ktorí si čas plánujú.“
- „Žiaci, ktorí sa na vyučovanie pripravujú nárazovo alebo nesystematicky, majú horšie študijné výsledky ako tí, čo sa pripravujú priebežne.“

Odporúčame aby si každý žiak sformuloval dve, max. tri hypotézy. Záleží však aj na tom, ako náročné je premenné uvedené v hypotéze merať, resp. ako sú dané premenné komplexné.

Otázky pre zber dát, položky v dotazníku

Ďalším krokom je samotný zber dát. V tomto bode žiak navrhuje spôsob zberu dát a dáta, ktoré budú zberať. Vo všeobecnosti môže žiak pri zbere dát oslovovať respondentov a zaznamenávať ich odpovede alebo sledovať nejaké objekty a zaznamenávať pozorované skutočnosti.

Úloha 6. Premyslite si, akým spôsobom budete dáta získavať.

Elektronické verzie dotazníkov sú výhodnejšie z dôvodu ich distribúcie a aj z dôvodu ich neskoršieho spracovania. Žiak môže vytvoriť dotazník v tabuľkovom kalkulátore, v textovom procesore, pomocou „cloudových" služieb (napr. freeonlinesurveys.com, Google Docs) alebo sociálnych sietí a pod. Aj tlačená verzia má svoj zmysel, najmä ak nie je možné použiť verziu elektronickú (zber dát v teréne, mimo dosahu internetu alebo zdroja energie).

Úloha 7. Navrhnite otázky, resp. položky vo vašom dotazníku, príp. záznamovom liste.

Otázky, príp. položky v nejakom dotazníku by mali byť zostavené tak, aby sme vedeli zistiť hodnoty všetkých premenných. Hodnoty niektorých premenných vieme zistiť jednoduchou otázkou (pozorovaním), na iné potrebujeme položiť sériu otázok. Odporúčame, aby medzi otázkami boli otázky s výberom odpovede, ale aj otázka otvorená, prípadne polouzavretá.

Poznámka: Otvorené otázky sa používajú skôr v pilotáži pri tvorbe dotazníka. Na základe získaných odpovedí môžeme otvorenú otázku transformovať do uzatvorenej formy vo finálnej verzii dotazníka. Z časových dôvodov sme v tejto metodike etapu pilotáže dotazníka vynechali.

Pri otvorenej otázke si bude musieť žiak neskôr premyslieť vhodný spôsob kódovania odpovedí. Odpovede na takéto otázky nebude možné spracovať úplne automaticky. Otázky by mali byť postavené tak, aby na základe ich výsledkov (resp. vzťahov medzi výsledkami) bolo možné potvrdiť, resp. vyvrátiť sformulované hypotézy. V tejto časti žiak rieši problém, koľko otázok (resp. položiek) majú mať a koľko respondentov majú osloviť (resp. koľko objektov sledovať). Neodporúčame extrémne rozloženia (príliš veľa respondentov alebo otázok). Naše skúsenosti ukazujú, že je vhodné cca 10 otázok položiť 30 respondentom (spracovať teda cca 300 čiastkových údajov). Toto je zároveň aj spôsob, ako zrovnať náročnosť výskumov žiakov na približne rovnakú úroveň.

Zber dát

Spôsob zberu dát a samotný zber dát je ponechaný na žiakoch.

Úloha 8. Realizujte zber dát potrebných pre váš výskum. Dáta zaznamenajte.

V tejto etape je vhodné žiakov viesť k tomu, aby vzorka respondentov, resp. pozorovaných objektov, keďže je pomerne malá, nebola príliš rôznorodá. Vhodné je vzorku zúžiť, napr. žiaci jedného ročníka na tej istej škole, obyvatelia jednej ulice. V tomto zmysle by žiaci mali formulovať aj svoje závery.

Spracovanie dát

Získané dáta je potrebné upraviť pre ďalšie spracovanie. Otvorené odpovede je potrebné vhodne kódovať a identifikovať v nich jednotlivé javy.

Úloha 9. Získané dáta upravte pre ďalšie spracovanie a následne ich spracujte.

Pri samotnom spracovaní dát sa predpokladá základná štatistická charakteristika súboru dát (priemer, maximum, minimum, početnosť...) ale aj zisťovanie súvislostí (koeficient korelácie → propedeutika k téme štatistika v matematike). Žiak by mal zistiť, či medzi skúmanými veličinami existujú závislosti (potvrdenie, vyvrátenie hypotéz). Medzi dátami sa často objaví aj iná, vopred neuvažovaná závislosť. Žiak by teda mal dáta analyzovať a skúmať aj nad rámec stanovených hypotéz. Tieto novoobjavené závislosti môžu slúžiť ako motivácia pre ďalší výskum.

Poznámka: Pri interpretácii významu koeficienta korelácie by sme mali byť opatrní. V sociálnych vedách sú hranice závislosti posunuté bližšie k nule než vo vedách prírodných. Ako pomôcku uvádzame nasledovnú stupnicu pre interpretáciu koeficientu korelácie (r):

Sociálne vedy (Cohen, 1988):

- $|r| < 0,1$ neexistuje korelácia
- $0,1 <= |r| < 0,3$ slabá korelácia
- $0,3 <= |r| < 0,5$ stredná korelácia
- $0,5 <= |r| <= 1$ silná korelácia

Pre prírodné (exaktné) vedy sa môžeme inšpirovať stupnicou (Mcseveny, 2014):

- $|r| = 0$ neexistuje korelácia
- $0 <= |r| < 0,2$ veľmi slabá korelácia

- 0,2 <= $|r|$ < 0,4 slabá korelácia
- 0,4 <= $|r|$ < 0,6 mierna korelácia
- 0,6 <= $|r|$ <= 0,8 silná korelácia
- 0,8 <= $|r|$ < 1 veľmi silá korelácia
- $|r|$ = 1 ideálna korelácia

Vytvorenie záverečnej správy

Úloha 10. Získané výsledky spracujte do záverečnej správy.

Žiak vytvorí záverečnú správu, v ktorej zhrnú podstatné zistenia vyplývajúce z ich výskumu. Správa by mala obsahovať jasné vyjadrenie, či skúmané hypotézy platia alebo nie. Žiak by si mali uvedomiť, že **nepotvrdenie hypotézy nie je ich zlyhaním**. Aj dokázanie opaku môže byť významným zistením. Osvedčilo sa nám záverečnú správu vytvoriť priamo v tabuľkovom kalkulátore, kde na samostatné hárky žiaci umiestnia jednotlivé časti svojej práce. Zošit by mal obsahovať aj samotné získané dáta (i keď tie nemusia byť súčasťou záverečnej prezentácie). Tabuľky by mali obsahovať vzorce, ktoré odkazujú na získané dáta. Túto skutočnosť môžeme využiť aj pri záverečnej prezentácii, ak by sme chceli preskúmať niektoré z dát, nové závislosti, resp. upozorniť na chybu vo vyhodnotení.

Prezentácia výsledkov výskumného projektu

Poslednou časťou výskumu žiakov je prezentácia získaných výsledkov, napr. pred spolužiakmi v triede.

Úloha 11. Prezentujte svoj výskum a jeho závery pred spolužiakmi.

Žiak by mal jasne a stručne zhrnúť čo, prečo a ako skúmali a k akým výsledkom sa dopracovali. Celá prezentácia sa podľa našich skúseností dá stihnúť za 10 až 15 minút. V závere **žiak odpovedá na otázky a pripomienky** spolužiakov, resp. učiteľa. Toto je jeden z podstatných bodov samotného výskumu, lebo **žiak uvádza** (a z časti aj dokazuje, obhajuje, argumentuje) **tvrdenia, ktorých platnosť nie je všeobecne známa** (porovnajme napr. s výsledkom nejakej typickej školskej úlohy, ktorý sa dá overiť v časti riešenia úloh v učebnici).

Poznámka: Žiaci často skĺznu k tom, že len prerozprávajú čísla z grafov. Záverečná správa by však mala obsahovať aj interpretáciu týchto čísiel a grafov.

Alternatívy metodiky

Realizácia uvedenej metodiky je nielen časovo náročná, ale vyžaduje aj dodržanie rámca výskumu. Výskum možno zjednodušiť tým, že umožníme vytvorenie riešiteľských tímov a znížime tak zaťaženie jednotlivých žiakov. Žiakom môžeme vopred poskytnúť aj niektoré časti výskumu (oblasť, hypotézy, otázky, dáta). Týmto však podstatne znižujeme úroveň bádania potrebnú na realizáciu výskumu. Výskum je možné realizovať aj neskôr, keď žiaci získajú ďalšie vedomosti z matematiky z časti štatistika.

Hodnotenie žiackych výskumov

Pri hodnotení žiackej realizácie výskumu odporúčame zohľadniť skutočnosť, ak žiaci takýto typ výskumu realizujú prvýkrát. Táto metodika je primárne zameraná na metódy vedeckej práce a nie na obsah predmetu. S metódou ako takou sa žiaci musia oboznámiť a naučiť sa ju korektne používať. Pri samotnom hodnotení môžeme využiť rubriku (príloha I 1.3).

I2 – Komunikačné protokoly – papieriková komunikácia

<table>
<tr><td colspan="2">Tematický celok</td></tr>
<tr><td colspan="2">Softvér a hardvér – práca v počítačovej sieti a na internete
Informačná spoločnosť – bezpečnosť a riziká</td></tr>
<tr><td>Cieľová skupina</td><td>Odhadovaný čas výučby</td></tr>
<tr><td>Prvý (resp. druhý) ročník SŠ</td><td>Jedna až dve vyučovacie hodiny</td></tr>
<tr><td>Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti</td><td>Kognitívne ciele</td></tr>
<tr><td>▪ Používať sieť internet na komunikáciu a výmenu dát,
▪ vysvetliť pojmy: odosielateľ, prijímateľ, adresa,
▪ vysvetliť pojmy kódovane, komprimácia, šifrovanie.</td><td>▪ Vysvetliť princíp komunikácie v sieti internet,
▪ vysvetliť štruktúru IP paketu,
▪ vysvetliť význam komunikačných protokolov,
▪ vysvetliť základné pravidlá prenosu dát v sieti internet,
▪ analyzovať niektoré problémy sieťovej komunikácie a navrhnúť ich riešenie.</td></tr>
<tr><td>Bádateľské zručnosti</td><td>Didaktický problém</td></tr>
<tr><td>▪ Formulovať otázku, resp. problém,
▪ naplánovať postup,
▪ pozorovať/merať,
▪ vysvetľovať alebo upravovať postupy,
▪ diskutovať/obhajovať výsledky/argumentovať.</td><td>▪ Niektoré poznatky žiakom často predkladáme ako hotové fakty, pričom na ich objavenie však často stačí zdravá úvaha a chuť experimentovať,
▪ naše skúsenosti naznačujú miskoncepciu žiakov, že dáta sa v sieti internet prenášajú v celku,
▪ žiaci nerozumejú pravidlám prenosu dát v sieti,
▪ žiaci zrejme vedia, že internet ako taký nemá vlastníka, pravidlá komunikácie ale musel niekto navrhnúť a pre úspešnú komunikáciu je potrebné, aby ich všetci dodržiavali.</td></tr>
<tr><td>Didaktické materiálne prostriedky</td><td>Didaktické metódy a organizačné formy</td></tr>
<tr><td>▪ Papierové lístočky, písacie potreby,</td><td>▪ Štruktúrované bádanie,</td></tr>
</table>

▪ pracovný list – príloha I 2.1.	▪ hranie rolí, heuristický rozhovor, ▪ skupinová práca žiakov.

Príprava výučby

Realizáciu uvedenej aktivity predpokladáme po prebratí tematických celkov kódovanie, komprimácia, šifrovanie a práca v počítačovej sieti a na internete. Žiaci majú základnú predstavu (z pohľadu používateľa) o tom, ako prebieha komunikácia v sieti internet.

Priebeh výučby

Žiakov rozmiestnime v triede tak, aby dvojice žiakov mohli komunikovať len takým spôsobom, že si predajú papierový lístok (iný typ komunikácie nie je dovolený). Niektoré z dvojíc by mali byť spojené priamo, iné prostredníctvom ostatných žiakov. Žiaci budú hrať úlohy sieťových prvkov. Žiaci budú postupne navrhovať riešenia novovznikajúcich problémov. Riešenie každého problému, ktorý žiaci identifikujú, si postupne zaznamenávajú do pracovného listu (príloha I 2.1).

Globálny problém, ktorý by mali žiaci vyriešiť je:

Problém: Aký tvar a náležitosti by mala mať správa, ktorú posielame v sieti internet?

Navrhnite **štruktúru** takejto správy.

Podľa akých pravidiel sa riadi komunikácia v sieti internet?

V priebehu aktivity žiaci simulujú počítačovú sieť a komunikáciu v nej. Správy si posielajú napísané na papierikoch. Úlohou učiteľa je generovať chyby, situácie a problémy, ktoré sa môžu počas reálnej komunikácie v počítačovej sieti vyskytnúť. Úlohou žiakov je špecifikovať pravidlá komunikácie v sieti tak, aby eliminovali dôsledky týchto chýb.

Poradie generovania rôznych typov situácií učiteľom môže byť rôzne. Záleží na činnosti a reakciách žiakov. Táto aktivita si vyžaduje od učiteľa promptné reakcie na činnosti žiakov a dobré znalosti týkajúce sa štruktúry IP paketu a komunikačných protokolov.

V nasledujúcom texte popisujeme priebeh jednej vyučovacej jednotky (dvakrát 45 minút). Takýto formát sme zvolili zámerne. Opis jedného z priebehov hodín pôsobí prirodzenejšie a lepšie približuje náš zámer, než keby sme uviedli len úlohy, ktoré majú žiaci riešiť. Navyše ich poradie záleží od konkrétnej situácie, ktorá sa vyvinie v danej skupine žiakov. Uvádzame jeden z priebehov, ktorý sme počas vývoja tejto metodiky zaznamenali.

Súčasťou správy musí byť identifikátor odosielateľa a príjemcu

Vybrali sme jedného zo žiakov a zadali sme mu nasledovnú úlohu:

Úloha 1. Vyber si jedného so svojich spolužiakov a na papierovom lístočku mu pošli správu s konkrétnou otázkou.

Poznámka: Úlohu s položením otázky sme zvolili zámerne. Na otázku prirodzene očakávame aj odpoveď. Žiak by si mal uvedomiť, že nestačí zadať len príjemcu otázky (**Destination IP address**), ale musí uviesť aj odosielateľa (**Source IP address**), kam bude smerovať následná odpoveď na otázku. Očakávali sme, že identifikátor príjemcu a odosielateľa použijú žiaci celkom prirodzene. Nebolo tomu však tak. Žiaci si to uvedomili až vtedy, keď začali problémy s doručením papierového lístočka s odpoveďou. Predpokladáme, že čiastočne sme to zapríčinili aj my. Žiaci sa navzájom videli, takže každý vedel, kto je odosielateľom správy a nepovažovali za potrebné tento identifikátor explicitne uviesť.

Pomocou takéhoto aktívneho, zážitkového učenia môžeme rozpoznať aj niektoré z miskoncepcií žiakov. Napr. túto úlohu riešil jeden žiak tak, že na papierik napísal len samotnú otázku. Papierik potom „blúdil“ po žiackej sieti a márne si hľadal svojho príjemcu. Na otázku prečo tak spravil, odpovedal, že poslal spam. Papierik so správou skutočne prešiel cez každého žiaka (cez niektorých dokonca viackrát). Počet príjemcov (v tomto prípade skôr uzlov) bol veľký (tak isto ako pri spame), ale princíp rozposielania spamu je presne opačný. Spammer posiela veľa správ, ale každú konkrétnemu príjemcovi.

Táto situácia, i keď sme ju vopred neplánovali, nám umožnila položiť ďalšiu otázku.

Úloha 2. Ako dlho by mal tento papierik blúdiť po sieti?

Žiaci navrhovali počítať čas ako dlho papierik hľadá svojho príjemcu. Ak dosiahne nejakú kritickú hodnotu, mal by sa zničiť. Po sérii otázok typu:

- „Kto by to mal počítať?“
- „Ako zistiť čas, za ktorý sa papierik presunie medzi dvoma uzlami?“
- „Kde by sa mal tento čas pamätať?“
- ...

žiaci dospeli k záveru, že výhodnejšie bude pamätať si počet „skokov“ papierového lístočka, a to na samotnom lístočku. Každý, kto papierik presunie, zvýši toto číslo. Ak hodnota dosiahne nejakú, vopred definovanú hodnotu, papierik sa zničí. Podobne je to aj v počítačových sieťach (**Time To Live**), i keď tam sa hodnota tohto čísla znižuje. Zabráni sa tak zahlteniu siete, ktorú by mohli spôsobiť pakety zacyklené v nekonečných slučkách.

Potvrdenie prijatia správy

Aj tu sme vyzvali jedného zo žiakov, aby poslal otázku niektorému zo spolužiakov. Učiteľ (generátor chýb) však papierik cestou zničil.

Úloha 3. Navrhnite riešenie situácie, ak sa správa počas putovania v sieti stratí.

Poznámka: Odosielateľ správu odoslal, príjemca však o tom nevedel. Príjemca správu nedostal, o čom zase nevedel odosielateľ. Ako vyriešiť patovú situáciu?

Žiaci navrhli, aby prijímateľ správy potvrdil jej prijatie odosielateľovi. Komunikáciu sme zopakovali s novým pravidlom. Tentoraz sa však chyba „vyskytla“ pri doručení potvrdenia prijatia správy. Opäť vznikla problematická situácia, ktorú museli žiaci vyriešiť. Navrhli, že pokiaľ odpoveď nepríde do stanoveného časového limitu, odoslanie správy zopakujú.

Toto riešenie je zaujímavé aj z toho pohľadu, že definuje pravidlá komunikácie samotnej (komunikačný protokol). Ale, ak sú pravidlá komunikácie vopred jasné, je potrebné ich uvádzať aj v samotnej správe? Ak by sme sa zamerali na problematiku protokolov, diskusiu by sme mohli obrátiť aj týmto smerom. V tejto aktivite toto pravidlo ostalo súčasťou správy samotnej. Teda nie ako pravidlo komunikačného protokolu.

Fragmentácia správy

Opäť sme vybrali jedného žiaka a zadali mu nasledovnú úlohu.

Úloha 4. Navrhni spôsob, ako spolužiakovi poslať rozsiahlu správu. Vyber si jedného zo spolužiakov a pošli mu rozsiahlejšiu správu podľa navrhnutého spôsobu.

Poznámka: Z časových dôvodov sme nenútili žiakov, aby písali rozsiahlu správu. Správa mohla byť kratšia, ale dohodli sme sa, že na jeden papierik sa vojde len jedno slovo. Pri intelektuálnej vyspelosti žiakov sme si mohli dovoliť túto abstrakciu reality bez ujmy na pochopení skutočného problému. Vybratý žiak celkom intuitívne rozpísal správu na viac papierikov a poslal ju spolužiakovi. Správa síce dorazila k príjemcovi, ale nebolo jasné, v akom poradí jednotlivé papieriky poskladať. Žiak upravil svoj spôsob tak, že na každý papierik napísal číslo správy (**Fragment Offset**). Príjemca teda nemal problém zložiť časti správy v správnom poradí. Na otázku, či si môže byť istý tým, že správa je kompletná, však odpovedal, že nie. Pôvodný odosielateľ teda opäť upravil navrhnutý spôsob. Do každej správy pridal aj celkový počet správ (podobne ako **Flags**). Teraz už príjemca jednoznačne vedel poskladať celú správu a vedel, že je kompletná.

Overenie obsahu správy

Vyzvali sme jedného zo žiakov, aby poslal otázku vybratému spolužiakovi.

Počas prenosu tejto správy v žiackej sieti sme otázku v správe pozmenili. Zmenu sme spravili tak, aby otázka dávala zmysel a existovala na ňu odpoveď. Príjemca poslal odpoveď na prijatú otázku. Táto odpoveď však nedávala s pôvodne poslanou otázkou zmysel.

Úloha 5. Navrhnite spôsob, ako by mohol príjemca overiť, že prijatá správa sa cestou od odosielateľa nezmenila.

Je možné zabrániť takýmto zmenám správ počas prenosu?

Žiaci navrhovali rôzne možnosti overenia obsahu správy. Súčasťou správy by mal byť napr. počet jej písmen alebo slov. Na otázku, či vieme na základe týchto počtov s istotou overiť obsah správy, však odpovedali, že nie. Ďalej navrhovali správu kódovať do jednotiek a núl a overovať počet týchto znakov. Tu však narazili na rovnaký problém. Navrhli poslať správu dvakrát. Ak dorazia dve rovnaké správy, budeme si môcť byť skoro istí tým, že správa sa cestou nezmenila. Skutočnosť, že by sme museli posielať dvakrát viac dát, im v tejto chvíli neprekážala. Inak začali uvažovať, keď sme sa ich spýtali, či by im nevadilo, keby si film z internetu sťahovali dve hodiny namiesto jednej. Tu si už začali uvedomovať dôsledky takejto duplicity. Riešenie sme uzatvorili s tým, že nevieme s istotou overiť, že správa sa cestou nezmenila. Vieme to však povedať s vysokou pravdepodobnosťou (digitálny podpis). Rovnako je zaujímavé aj žiacke uvedomenie si efektivity. Pri malých množstvách dát je v podstate jedno, či pošleme dáta raz alebo dvakrát. Žiaci si nie vždy uvedomia dôsledky neefektivity v reálnych situáciách.

Aj hlavička IP paketu obsahuje informácie, ktorých integritu musíme počas komunikácie overovať. V časti **Header Checksum** je kontrolný súčet hlavičky IP paketu.

Utajenie správy

Opäť sme vyzvali vybratého žiaka, aby poslal otázku spolužiakovi. Odpoveď však mala byť súkromná. Úlohou žiaka bolo vymyslieť, ako správu utajiť.

Úloha 6. Navrhni spôsob, ako poslať správu tak, aby sa o jej obsahu pri putovaní v sieti nikto nedozvedel.

Poznámka: Pri doterajšom spôsobe posielania si správ bol ich obsah čitateľný pre každého žiaka v sieti. Stačilo, aby správa na ceste k prijímateľovi prešla cez daného žiaka.

Žiaci na základe svojich doterajších vedomostí navrhli správy šifrovať. Túto skutočnosť vyjadrili tak, že papierik so správou preložili napoly. Vnútro papierika obsahovalo samotnú správu. Na jeho vonkajšej strane boli uvedené potrebné informácie na jej doručenie. Otázku samotného šifrovania, typy šifry a prípadnej správy kľúčov sme už neriešili.

Záver hodiny

V závere hodiny vyzveme žiakov, aby si porovnali svoje objavené riešenie so skutočnou štruktúrou IP paketu. Niektoré ich riešenia budú ekvivalentom časti IP paketu. Iné môžu byť len podobné. O podobnosti, resp. rovnosti navrhnutých pravidiel s oficiálnou špecifikáciou môžeme vzájomne diskutovať (ak nepoužijeme oficiálnu špecifikáciu, využiť môžeme napr. Wikipédiu: https://sk.wikipedia.org/wiki/IPv4). Rovnako zaujímavá môže byť aj diskusia o tom, kto pravidlá navrhuje.

Zhodnotenie aktivity

Aktivita žiakov je zameraná na objavenie a zdôvodnenie štruktúry IP paketu a pravidiel komunikácie v sieti internet. Naším cieľom nie je poskytnúť žiakom hotové poznatky. Cieľom je, aby žiaci prostredníctvom riešenia jednoduchých problémov tieto poznatky objavili a svoje závery zdôvodnili. Sme presvedčení, že mnoho konceptov a princípov informatiky je založených na zdravom úsudku a logickom myslení. Domnievame sa preto, že k týmto poznatkom (i keď na zjednodušených modeloch) môžu dospieť aj samotní žiaci pod premysleným vedením učiteľa. Takéto vedomosti, ktoré žiak získal aktívnym riešením problémov, lepšie zapadnú do jeho štruktúry poznatkov a ako také budú mať aj dlhšiu trvácnosť než vedomosti poskytnuté žiakom ako hotové fakty.

Na prvý pohľad sa môže zdať, že množstvo času (dve vyučovacie hodiny) venované tejto aktivite je neúmerne veľké dosiahnutému cieľu (štruktúra IP paketu). Uvedomme si, že aktivita v sebe zahŕňa aj rozvoj žiackych kompetencií ako napr. kompetenciu k celoživotnému vzdelávaniu, kompetencie v oblasti informačných a komunikačných technológií, kompetenciu riešiť problémy, bádateľské zručnosti nevynímajúc. Cieľom teda nie je len samotný výsledok, ale aj cesta, po akej sa k nemu žiaci dopracovali.

Žiaci majú problém „znížiť" sa na intelektuálnu úroveň stroja. Často do činnosti stroja zapájajú svoje vlastnosti, skúsenosti a intelekt, ktoré stroje nemajú. Napr. odpoveď smerujú opačným smerom než smerom, z ktorého dorazila otázka, nečakajú na potvrdenie prijatia správy (veď som to videl), prijaté časti správy poskladajú v takom poradí, aby im dávali zmysel a pod. Na prvý pohľad sa môže zdať kontraproduktívne „nútiť" žiakov rozmýšľať takto primitívne. V skutočnosti sú však často konfrontovaní s primitívnou úrovňou strojov. Vedieť vopred odhadnúť správanie sa strojov môže byť pre žiakov v budúcnosti veľmi užitočné.

Žiaci považujú počítače za veľmi rýchle. Ich rýchlosť sa navyše stále zvyšuje. Neuvedomujú si však fakt, že počítače spracovávajú stále viac dát. Počet dát ale rastie rýchlejšie ako výkon počítačov. S týmto problémom sa stretávame najmä pri programovaní. Žiaci necítia potrebu a neuvedomujú si dôvody prečo sa zaoberať efektivitou algoritmov. Často sa uspokoja s tým, že program funguje.

Na začiatku aktivity sme predpokladali, že získané poznatky budú žiaci „nabaľovať" na seba a komunikácia bude čím ďalej tým premyslenejšia. V skutočnosti sa žiaci vždy zamerali na riešenie aktuálneho problému. Všetky papieriky obsahovali len správu a adresy prijímateľa a odosielateľa. Ostatné náležitosti žiaci použili len vtedy, ak sme riešili konkrétny podproblém komunikácie. Odporúčame preto v závere hodiny všetky poznatky sumarizovať na jednom mieste. Žiaci tak získajú komplexný pohľad na komunikáciu v sieti, jej možné problémy a spôsoby ako tieto problémy eliminovať.

Takéto aktivity nechápeme len ako jednorazové aktivity pre žiakov. Vždy sa snažíme navrhovať ich tak, aby sme na základe ich výsledkov mohli v budúcnosti budovať ďalšie poznávanie žiakov. Táto aktivita je vhodným úvodom do problematiky vrstvového modelu TCP/IP. V skutočnosti mená ľudí, ktorí navzájom komunikujú nie sú IP adresami. Identifikujú sa napr. na základe e-mailovej adresy. Ako sa však e-mailová správa dostane k správnemu príjemcovi, keď zariadenia v sieti sa identifikujú svojou IP adresou, je námetom pre ďalšiu žiacku aktivitu.

Nasledujúci obrázok zobrazuje štruktúru IP paketu. Sivou farbou sú zvýraznené časti, ktoré objavili žiaci.

<table>
<tr><td>Version</td><td colspan="2">IHL</td><td>Type of Service</td><td colspan="2">Total Length</td></tr>
<tr><td colspan="4">Identification</td><td>Flags</td><td>Fragment Offset</td></tr>
<tr><td colspan="2">Time to Live</td><td colspan="2">Protocol</td><td colspan="2">Header Checksum</td></tr>
<tr><td colspan="6">Source IP address
Destination IP address</td></tr>
<tr><td colspan="5">IP Options</td><td>Padding</td></tr>
<tr><td colspan="6">(Enrypted) Data</td></tr>
</table>

Obrázok 76. Štruktúra IP paketu.

Alternatívy metodiky

Aktivite nemusíme ponechať až taký voľný priebeh. Jednotlivé chyby (resp. časti IP paketu) môžeme zavádzať podľa vopred premysleného poradia. Zvážiť môžeme aj to, koľko a ktoré časti IP paketu necháme žiakov objaviť.

I3 – Komprimácia dát, komprimácia obrázkov

Tematický celok	
Reprezentácie a nástroje – informácie **Softvér a hardvér – práca so súbormi a priečinkami**	
Cieľová skupina	Odhadovaný čas výučby
Prvý ročník SŠ	20 – 30 minút
Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti	Kognitívne ciele
▪ Vysvetliť princíp kódovania rastrovej grafiky, ▪ porovnať rôzne grafické formáty (bmp, jpeg, gif, png), ▪ vysvetliť princíp komprimácie dát, ▪ komprimovať a dekomprimovať vybrané súbory dát využitím komprimačného programu.	▪ Odhadnúť komprimačný pomer vopred podľa typu komprimovaných dát, ▪ vysvetliť možnosti a limity komprimácie dát.
Bádateľské zručnosti	Didaktický problém
▪ Naplánovať postup, ▪ navrhnúť pozorovanie/postup merania, ▪ predpovedať výsledok experimentu, ▪ experimentovať s podporou softvéru, ▪ pozorovať/merať, ▪ zaznamenávať výsledky pozorovania a merania, ▪ transformovať výsledky do štandardných foriem, ▪ zovšeobecniť výsledky.	▪ Poznatky žiakov sú často izolované, žiaci si neuvedomujú niektoré súvislosti (napr. že niektoré grafické súbory sú vnútorne komprimované), ▪ naše skúsenosti naznačujú miskoncepciu, že komprimovať komprimované dáta vedie k podobnej úspore, ako v prípade nekomprimovaných dát.
Didaktické materiálne prostriedky	Didaktické metódy a organizačné formy
▪ Komprimačný program, rôzne typy grafických súborov, ▪ dataprojektor, tabuľa, ▪ pracovné súbory obrázkov v rôznych formátoch – prílohy I 3.1, ▪ pracovný list – príloha I 3.2.	▪ Štruktúrované bádanie, ▪ heuristický rozhovor, metóda cielených otázok, ▪ samostatná práca žiakov.

Príprava výučby

Realizáciu uvedenej aktivity predpokladáme po prebratí tém „Komprimácia dát“ a „Rastrová grafika“. Žiaci majú základnú predstavu o princípoch komprimácie a rozdieloch v reprezentácii grafickej informácie v závislosti od spôsobu jej kódovania (typ súboru). Žiaci by mali vedieť pracovať so súbormi v operačnom systéme na používateľskej úrovni a používať komprimačný program.

Odporúčame so žiakmi zopakovať spôsob výpočtu komprimačného pomeru (komprimované dáta / nekomprimované dáta).

Priebeh výučby

Žiakom sprístupníme vopred pripravené grafické súbory (príloha I 3.1):

- jednofarebný bmp súbor,
- pestrá fotografia v bmp formáte,
- jednofarebný jpeg súbor,
- pestrá fotografia v jpeg formáte,
- jednofarebný png súbor,
- pestrá fotografia v png formáte,
- jednofarebný gif súbor,
- pestrá fotografia v gif formáte.

Počas manipulácie s nimi si žiaci zaznamenávajú veľkosti súborov (príloha I 3.2).

Úloha1. Prezrite si pripravené obrázkové súbory a do tabuľky v pracovnom liste zaznamenajte veľkosť príslušných súborov.

V nasledujúcich častiach hodiny budú žiaci predpovedať zmenu veľkosti súboru po komprimácii. Po komprimácii žiaci zaznamenajú novú veľkosť a komprimačný pomer, následne konfrontujú svoj predpoklad so skutočnosťou. Rozdiely by mali vysvetliť.

Úloha 2. Do tabuľky v pracovnom liste uveďte svoje predpoklady ako sa zmení veľkosť obrázkových súborov po komprimácii.

Úloha 3. Skomprimujte uvedené obrázkové súbory. Zaznamenajte veľkosti súborov a vypočítajte komprimačný pomer. Údaje zaznamenajte do tabuľky v pracovnom liste.

Úloha 4. Ak sa líšia vaše predpoklady od skutočnosti, zdôvodnite rozdiel.

Časť žiakov si pred prvou komprimáciou neuvedomí tri skutočnosti:

1. Niektoré z grafických formátov sú už vnútorne komprimované, ich komprimačný pomer bude pomerne vysoký.
2. Komprimačný pomer závisí aj od toho, čo samotný obrázok obsahuje. Najlepšie sa budú komprimovať tie obrázky, ktoré obsahujú najviac opakujúcich sa častí. V našom prípade to budú jednofarebné obrázky.
3. Každý z rastrových formátov bol optimalizovaný pre nejaký typ obsahu. Aj toto má vplyv výsledok komprimácie.

Žiaci predpokladajú, že úroveň komprimácie bude podobná pre všetky súbory. Rôznorodosť výsledných komprimačných pomerov ich teda prekvapí. Kým pri jednofarebnom obrázku vo formáte bmp môžeme dosiahnuť komprimačný pomer na úrovni desatín percenta, pri farebných obrázkoch vo formátoch gif, jpeg alebo png je komprimačný pomer takmer 100 %. Očakávame, že disproporciu medzi očakávaným a skutočným komprimačným pomerom žiaci zdôvodnia v zmysle vyššie uvedených troch skutočností.

Celý cyklus s komprimovaním zopakujeme. Tentoraz budeme komprimovať už raz komprimované súbory.

Úloha 5. Do tabuľky v pracovnom liste uveďte svoje predpoklady ako sa zmení veľkosť komprimovaných obrázkových súborov po ďalšej komprimácii.

Úloha 6. Skomprimujte už raz komprimované obrázkové súbory. Zaznamenajte veľkosti súborov a vypočítajte komprimačný pomer. Údaje zaznamenajte do tabuľky v pracovnom liste.

Úloha 7. Ak sa líšia vaše predpoklady od skutočnosti, zdôvodnite rozdiel.

Poznámka: Je možné, že komprimačné programy neumožnia komprimovať dáta opakovane. Tento problém môžeme vyriešiť tak, že zmeníme príponu súboru (napr. zip → dat) alebo súbor skopírujeme do priečinka a komprimujeme celý priečinok.

Predpokladáme, že žiaci už budú obozretnejší vo svojich predpokladoch. Aj tak sa môže stať, že si neuvedomia nasledovné skutočnosti:

1. Všetky dáta, ktoré sa pokúsia komprimovať, sú už komprimované. Využijú skúsenosť po prvej komprimácii? Výsledný komprimačný pomer sa tak bude pohybovať na úrovni 100 %. Dokonca je pravdepodobné, že tento pomer bude

nad úrovňou 100 %. Komprimácia tak očakávane nešetrí dátovou kapacitou, ale naopak, paradoxne ju zväčšuje.

2. V niektorých prípadoch bude komprimačný pomer vysoko nad 100 %. Stane sa to zrejme v prípadoch, ak sme po prvej komprimácii dosiahli malé súbory dát (jednofarebné verzie obrázkov).
3. Zaujímavé je aj porovnanie absolútnych zmien množstva dát. Tu zistíme, že zmena je prakticky rovnaká a pohybuje sa na úrovni niekoľko stoviek bajtov. Tento takmer rovnaký prírastok sa dá vysvetliť tým, že objem komprimovaných dát sa prakticky nezmenil (dáta už sú komprimované), ale pribudla informácia o druhej komprimácii. Veľkosť tejto informácie je prakticky rovnaká pri všetkých súboroch. Pri malých množstvách dát však predstavuje percentuálne vyššiu hodnotu z celkového množstva ako pri väčších množstvách dát.

Očakávame, že disproporciu medzi očakávaním a skutočnosťou žiaci zdôvodnia v zmysle vyššie uvedených troch skutočností.

Záver

Žiaci by si mali uvedomiť na akom princípe ja založená komprimácia dát. A to bez ohľadu na to, či komprimácia je na prvý pohľad viditeľná (súbory typy zip, rar, 7z a pod.) alebo nie (súbory typu gif, jpeg, png ale aj mp3, mpeg a pod.). Dôsledkom je skutočnosť, že komprimovať už raz komprimované súbory sa prakticky neoplatí, skôr naopak. Tento poznatok sme však žiakom neposkytli ako hotový fakt. Dopracovali sa k nemu vlastným bádaním.

Poznámka: Niektoré komprimačné programy umožňujú vytvoriť archív typu „bez komprimácie“ (angl. solid compression, solid archive). V tomto prípade ide o spojenie súborov do jedného bloku bez ich komprimácie. Výhodou je ľahšia manipulácia s jedným veľkým súborom než s množstvom menších súborov. V tomto prípade má teda zmysel pridávať aj komprimované súbory.

Alternatívy metodiky

Všetci žiaci nemusia komprimovať všetky súbory. Súbory im môžeme prideliť po menších počtoch a výsledky zapisovať viditeľne pre všetkých (napr. na tabuľu). Niektoré výsledky (veľkosti súborov, komprimačné pomery) si žiak zistí sám, iné dostane hotové od spolužiakov. Očakávané výsledky a zdôvodnenie rozdielov od skutočnosti by mal každý žiak vypracovať samostatne. Po diskusii v rámci triedy môže svoje závery upraviť.

Z pripravených obrázkových súborov môžeme vybrať len niektoré, ktoré najlepšie demonštrujú vyššie uvedené zdôvodnenia. Pre rýchlejší prehľad uvádzame tabuľku veľkosti súborov (Tabuľka 10). Pri komprimácii sme použili open source softvér 7-Zip (http://www.7-zip.org/) a formát archívu 7z.

Tabuľka 10. Veľkosť originálnych a komprimovaných súborov.

		pôvodný súbor	**1. komprimácia**			**2. komprimácia**		
		veľkosť (B)	veľkosť (B)	zmena (B)	komprimačný pomer (%)	veľkosť (B)	zmena (B)	komprimačný pomer (%)
BMP	jednofarebný	5073654	999	-5072655	0,02	647	-352	64,76
BMP	pestrofarebný	5073654	3130909	-1942745	61,71	3131232	323	100,01
JPEG	jednofarebný	10334	363	-9971	3,51	510	147	140,50
JPEG	pestrofarebný	230519	230680	161	100,07	230850	170	100,07
PNG	jednofarebný	7495	375	-7120	5,00	522	147	139,20
PNG	pestrofarebný	4125622	4095049	-30573	99,26	4095423	374	100,01
GIF	jednofarebný	3222	2528	-694	78,46	2694	166	106,57
GIF	pestrofarebný	838045	835574	-2471	99,71	835774	200	100,02

Pripraviť môžeme aj iné obrázky. Tu je však potrebné zabezpečiť, aby boli vzájomne porovnateľné (napr. mali by mať rovnaké rozmery). Porovnávať iné typy súborov je už komplikovanejšie, pretože o ich vnútornej štruktúre nemusíme vedieť. Odporúčame overiť si vopred aké výsledky dosiahneme s vlastnými obrázkami.

I4 – Kódovanie znakov, kódovacie tabuľky

Tematický celok	
Reprezentácie a nástroje – informácie **Softvér a hardvér – práca so súbormi a priečinkami**	
Cieľová skupina	Odhadovaný čas výučby
Prvý ročník SŠ	10 – 15 minút
Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti	Kognitívne ciele
▪ Vysvetliť princíp digitalizácie, ▪ vysvetliť spôsob kódovania znakov na počítači, ▪ používať rôzne textové editory.	▪ Vysvetliť význam a použitie kódovacích tabuliek, ▪ používať rôzne kódovacie tabuľky pri ukladaní textov (znakov), ▪ porovnať výhody a nevýhody použitia rôznych kódovacích tabuliek.
Bádateľské zručnosti	Didaktický problém
▪ Naplánovať postup, ▪ navrhnúť pozorovanie/postup merania, ▪ experimentovať s podporou softvéru, ▪ pozorovať/merať, ▪ zaznamenávať výsledky pozorovania a merania, ▪ transformovať výsledky do štandardných foriem, ▪ určovať vzťahy medzi premennými veličinami, ▪ zovšeobecniť výsledky.	▪ Problematiku uloženia (kódovania) dát v počítači žiaci často chápu len povrchne, vo význame: dáta sú uložené pomocou núl a jednotiek, ▪ žiaci nerozumejú základným princípom kódovania dát a ich praktickej implementácii.
Didaktické materiálne prostriedky	Didaktické metódy a organizačné formy
▪ Rôzne textové editory, resp. aplikácie schopné zobraziť obsah súborov ako ASCII (hexadecimálne), ▪ dataprojektor, tabuľa, ▪ pracovný list – príloha I 4.1, ▪ vhodné textové (hex) editory.	▪ Štruktúrované bádanie, ▪ heuristický rozhovor, metóda cielených otázok, ▪ samostatná práca žiakov.

Príprava výučby

Realizáciu uvedenej aktivity predpokladáme po prebratí tematického celku „Kódovanie informácií“. Žiaci majú základnú predstavu o spôsobe ukladania dát v počítači, poznajú rôzne kódovacie tabuľky a ich význam. Odpovede na jednotlivé otázky a výsledky experimentovania si žiaci zaznamenávajú (pracovný list – príloha I 4.1). V pracovnom liste sú uvedené len prvé dve úlohy. Keďže zadania zvyšných úloh napovedajú časť riešenia, tieto v pracovnom liste neuvádzame. Navyše, text zadania sa môže podľa situácie v konkrétnej skupine žiakov líšiť. Odporúčame, aby učiteľ formuloval zadania úloh podľa konkrétnej situácie.

Priebeh výučby

Žiakom demonštrujeme nasledovný postup. Textový dokument s vopred známym obsahom (napr. konkrétne slovo) uložíme využitím rôznych kódovaní (napr. Windows-1250, UTF-8, UTF-16) Vzájomne porovnáme vlastnosti takto získaných dokumentov a požiadame žiakov, aby vysvetlili, prečo pre tie isté znaky potrebujeme rôzne dátové kapacity na disku počítača.

Úloha 1. Vysvetlite, prečo pre rovnaký text a rôzne spôsoby jeho kódovania využijeme rôzne dátové kapacity na disku počítača.

Poznámka: V zobrazených vlastnostiach súboru môže operačný systém poskytnúť dve rôzne hodnoty. „*Veľkosť*“ a „*Veľkosť na disku*“. Veľkosť predstavuje reálne množstvo dát v súbore. Veľkosť na disku je veľkosť alokovaného miesta na disku, ktoré je použité pri zápise súboru na disk. Pre potreby tejto metodiky pracujeme s údajom „*Veľkosť*.“

Očakávame odpoveď v zmysle „použité sú rôzne kódovacie tabuľky a každá používa na kódovanie znakov iný počet bajtov“. Samotný problém na skúmanie však je, ako textový editor dokáže zistiť, akú kódovaciu tabuľku má použiť na dekódovanie textu?

Úloha 2. Podľa čoho textový editor zistí, akú kódovaciu tabuľku sme použili pri ukladaní súboru?

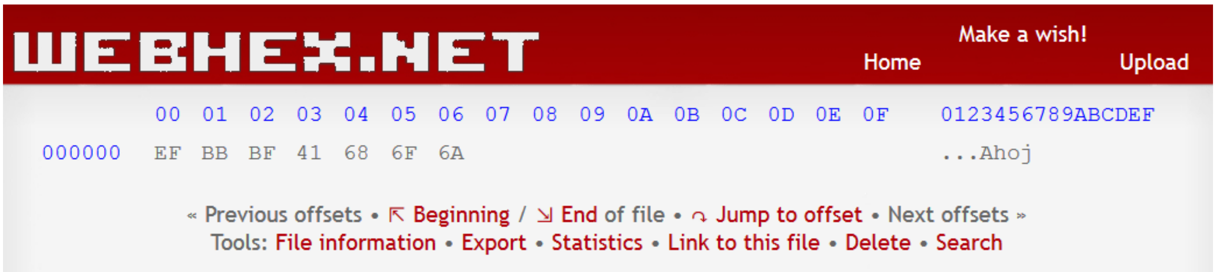
Odporúčame nechať žiakov riešiť úlohu 2 a verejne diskutovať o odpovediach. Žiaci by mali uvádzať argumenty pre resp. proti nejakému tvrdeniu. Povzbudiť diskusiu môžeme vhodne volenými otázkami tak, aby si žiaci na základe odpovedí uvedomili „slabé“ stránky ich návrhov. Na overenie nejakého tvrdenia môžeme vyzvať žiakov, aby ho prakticky overili. Ak žiaci nie sú schopní posunúť sa bližšie k očakávanému k riešeniu, vyzveme ich, aby skúmali ako vplývajú obsah súboru a jeho kódovanie na veľkosť.

Úloha 3. Experimentujte s obsahom a kódovaním súboru. Sledujte pritom, ako sa mení veľkosť súboru.

Vhodným experimentovaním s kódovaním a obsahom textových dokumentov žiaci zistia, že prázdny textový súbor môže mať nenulovú veľkosť. Teda aj v „prázdnom“ dokumente sú uložené nejaké dáta. Žiaci by si mali uvedomiť, že pri odhaľovaní závislosti pracujú s troma premennými (skúmajú vplyv obsahu súboru a vybraného kódovania na veľkosť súboru). Ak chcú nejakú závislosť odhaliť, musia si vopred premyslieť, s ktorou premennou chcú manipulovať. Mali by postupovať systematicky (aby otestovali všetky možnosti) a výsledky priebežne zaznamenávať (pracovný list – príloha I 4.1).

Úloha 4. Ak veľkosť prázdneho súboru je nenulová, zistite aké informácie sú v ňom uložené.

Poznámka: Pri skúmaní by žiaci mali použiť niektorý z hex editorov (resp. prehliadačov). Tie na rozdiel od textových editorov zobrazia nespracovaný (surový) obsah súboru (Obrázok 77). Informáciu o hex editoroch môžeme žiakom prezradiť.



Obrázok 77. Obsah textového súboru obsahujúci text „Ahoj“ uloženého v kódovaní UTF-8 zobrazený v online hex prehliadači webhex.net.

Vhodným zobrazením obsahu súboru (pomocou hex editora) dokážu žiaci zistiť, že pri zmene kódovania editor do súboru (na začiatok) uloží nasledovné údaje:

- UTF8 EF BB BF
- UTF-16 (BE) FE FF
- UTF-16 (LE) FF FE
- ANSI -
- Windows 1250 -
- ISO 8859-2 -

Po predchádzajúcom experimentovaní môžu žiaci uvažovať nasledovným spôsobom. Ak ukladáme prázdny text a meníme len spôsob kódovania dát v súbore, uvedené dáta predstavujú informáciu o použitom kódovaní.

Poznámka: ANSI je pomenovanie pre štandardné kódovanie OS (najmä v prostredí MS Windows). Neoznačuje teda konkrétne kódovanie. V prípadoch, že súbor neobsahuje BOM (Byte Order Mark), použije sa pri dekódovaní obsahu buď štandardné kódovanie OS alebo sa textový editor analýzou obsahu súboru pokúsi zistiť použité kódovanie.

Úloha 5. Zistite, aký význam majú dáta uložené na začiatku textového súboru.

Poslednou úlohou žiakov je zistiť, čo uvedené dáta znamenajú. V tomto prípade máme na mysli dáta, ktoré do súboru zapíše editor na základe zvoleného kódovania. Tu môžu ako zdroj informácií použiť internet. Internetové vyhľadávače ich pravdepodobne nasmerujú na zdroje pojednávajúce o BOM.

Poznámka: Aj keď BOM vo vyššie uvedených prípadoch zaberá až dva, resp. tri bajty, je to len jeden znak.

Záver

Žiaci by si mali uvedomiť, že v počítačových vedách aj navonok samozrejmé alebo na prvý pohľad neuvedomené skutočnosti podliehajú presným, vopred definovaným a premysleným pravidlám. Podobne je to aj v prípade kódovania textových súborov.

Získané znalosti žiaci využijú aj pri téme „Tvorba webových stránok“. Aj tu musí autor nejakým spôsobom oznámiť prehliadaču, aké kódovanie použil. Na rozdiel od textových dokumentov je však táto informácia viditeľnou súčasťou HTML kódu.

Alternatívy metodiky

Ak žiaci majú problém s nájdením správnej cesty (Úloha 3), môžeme ich nasmerovať na preskúmanie veľkosti prázdnych textových dokumentov a následne na použitie textových editorov, ktoré dokážu zobraziť obsah súboru (hex editor). V tomto prípade ale žiaci prichádzajú o možnosť bádania – hľadanie vhodného postupu.

Textové a hex editory (prehliadače)

- **Poznámkový blok** (systém MS Windows) – pre ukladanie súborov. Poznámkový blok neobsahuje hex editor.

- **HexDump Online** (http://www.fileformat.info/tool/hexdump.htm) – online nástroj pre zobrazenie obsahu súboru po bajtoch.
- **webhex.net - Online Hex Viewer** (http://en.webhex.net/) – jednoduchý online hex prehliadač, obsahuje aj jednoduché nástroje pre prácu s obsahom súboru,
- **PSPad Editor** (http://www.pspad.com/) – univerzálny editor. Pre ukladanie BOM v kódovaní UTF-8 (UTF-16) je potrebné zmeniť nastavenie programu. V menu: Nastavenie → Nastavenie programu → Program – správanie povoľte Ident. byty v kódovaní UTF-8. Kódovanie dokumentu sa určuje v menu Formát. Hex zobrazenie v menu Ukáž → Hexadecimálne.

Poznámka: Použitie BOM je voliteľné, niektoré editory ho pri ukladaní nemusia použiť. Odporúčame si vopred overiť, ako postupuje vami vybratý editor.

I5 – Bit, jednotka informácie

<table>
<tr><td colspan="2">Tematický celok</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reprezentácie a nástroje – informácie</td></tr>
<tr><td>Cieľová skupina</td><td>Odhadovaný čas výučby</td></tr>
<tr><td>Prvý ročník SŠ</td><td>Dve vyučovacie hodiny</td></tr>
<tr><td>Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti</td><td>Kognitívne ciele</td></tr>
<tr><td>Prevádzať celé čísla medzi pozičnými číselnými sústavami, určiť následníka čísla, sčitovať čísla v určitej pozičnej sústave,
aplikovať mocninové funkcie pri riešení úloh.</td><td>Objaviť a aplikovať algoritmus binárneho vyhľadávania na určenie hľadanej karty z balíka hracích kariet, resp. čísla z určitej množiny čísel,
zdôvodniť, že na určenie karty z balíka 32 kariet potrebujeme položiť 5 binárnych otázok (resp. 3 ternárne otázky na určenie karty z balíka 27 kariet).
vysvetliť, že každou odpoveďou na vhodne položenú otázku získame viac informácií o hľadanom objekte, po 1 otázke typu áno/nie získame 1 bit informácie (po ternárnej, resp. decimálnej otázke získame 1 trit, resp. 1 decit),
vysvetliť, že množstvo informácie potrebné na určenie vybranej karty závisí od celkového počtu kariet a tiež od spôsobu kladenia otázok (počtu rôznych možných odpovedí na otázku),
kódovať atribúty objektov (farbu a hodnotu karty) číslami dvojkovej sústavy,
riešiť problémy využitím rôznych stratégií – zjednodušením problému, nakreslením diagramu, hľadaním opakujúceho sa vzoru.</td></tr>
<tr><td>Bádateľské zručnosti</td><td>Didaktický problém</td></tr>
<tr><td>Navrhnúť postup experimentovania zameraného na výpočet množstva informácie,</td><td>Vo výučbe informatiky sa nevenuje patričný priestor jednoduchým</td></tr>
</table>

▪ zaznamenávať výsledky pozorovania pri určovaní hľadanej karty, ▪ určovať vzťahy medzi premennými– medzi najmenším počtom binárnych otázok a celkovým počtom kariet, ▪ argumentovať a formulovať závery z experimentálnych zistení – jednoznačnosti binárneho kódu, princípu „kúzelných kariet“.	výpočtom množstva informácie v správe. ▪ Experimentovaním a heuristickým rozhovorom vedieme žiakov, aby si uvedomili vzťah medzi bitom ako binárnou číslicou a jednotkou informácie, vedeli určiť minimálny počet (binárnych) otázok potrebných pri určovaní objektov (napr. kariet, čísel).
Didaktické materiálne prostriedky	Didaktické metódy a organizačné formy
▪ Pracovné listy (príloha I 5.1), súbor 4 „kúzelných kariet“ s číslami, ▪ applety Hádam karty a Hádam číslo: http://scratch.mit.edu/projects/18018918/, http://scratch.mit.edu/projects/13872378/.	▪ Štruktúrované bádanie, ▪ experimentovanie, heuristický rozhovor, ▪ skupinová a frontálna forma práce.

Príprava na výučbu

Pracovné listy, applety a diagramy

Každému žiakovi poskytneme tlačený pracovný list (z prílohy I 5.1) s postupnosťou zadaní úloh týkajúcich sa hier Hádaj kartu a Hádaj číslo. V prípade rozšíreného variantu metodiky zameraného na programovanie hry Hádaj číslo pomocou štyroch tzv. kúzelných kariet poskytneme žiakom tlačený pracovný list so zadaním hry a dotazníkom a skupinu ďalších troch pracovných listov s narastajúcou úrovňou pomoci žiakovi (z prílohy I 5.2).

Po riešení úlohy 4 z pracovného listu použijeme applet (z prílohy I 5.4, resp. z webovej stránky http://scratch.mit.edu/projects/18018918/) na demonštrovanie určenia súbežne štyroch myslených kariet. Pri riešení úlohy 8 z pracovného listu poskytneme každej dvojici žiakov súbor štyroch kúzelných kariet alebo applet (z prílohy I 5.6, resp. z webovej stránky http://scratch.mit.edu/projects/13872378/).

Pri expozícii a systemizácii učiva pomocou dataprojektora (prípadne interaktívnej tabule) zobrazujeme viaceré diagramy uvedené v metodike v časti Priebeh výučby (Obrázok 78 až Obrázok 85).

Zistenie a precvičenie predchádzajúcich vedomostí

Na predchádzajúcej vyučovacej hodine môžeme zistiť vstupné vedomosti a zručnosti žiakov potrebné pre preberané učivo na súbore precvičovacích, resp. testovacích úloh, napr.

- Uveďte, ktoré celé číslo nasleduje po čísle 10_2.
- Uveďte, ktoré celé číslo nasleduje po čísle 111_2.
- Preveďte číslo 37_{10} do dvojkovej sústavy.
- Preveďte číslo 101011_2 do desiatkovej sústavy.
- Určte výsledok sčitovania $1001_2 + 100_2$.
- Určte výsledok sčitovania $1101_2 + 1001_2$.
- Vypočítajte hodnoty výrazov 2^5, 5^2, $2 \cdot 5$.

Priebeh výučby

Výučbu odporúčame realizovať podľa teórie učebného cyklu 5E (Zapoj sa, Skúmaj, Vysvetli, Rozpracuj/Rozšír, Vyhodnoť, angl. Engage, Explore, Explain, Elaborate/Extend, Evaluate).

Osnova výučby

- Opis hry Hádaj kartu (Zapoj sa) a hranie hry v dvojiciach (Skúmaj).
- Heuristický rozhovor zameraný na objavenie efektívneho spôsobu určenia myslenej karty (Skúmaj) so zavedením pojmu bit ako jednotky informácie (Vysvetli).
- Frontálna demonštrácia hry s paralelným hádaním kariet zameraná na binárne kódovanie kariet (Zapoj sa, Skúmaj, Vysvetli).
- Precvičovanie a zovšeobecňovanie učiva – binárny strom, N-árne hádanie čísel/kariet (Rozpracuj/Rozšír).
- Celkové zhrnutie a vyhodnotenie prebraného učiva (Vyhodnoť).

Opis hry

V úvode výučby učiteľ opíše hru zameranú na uhádnutie jednej karty z balíka 32 nemeckých kariet (u nás známe ako tzv. sedmové karty). Rozdá žiakom pracovný list (z prílohy I 5.1) a vyzve ich, aby si vo dvojiciach striedavo zahrali túto hru (úloha 1). Požiada žiakov, aby sledovali pokyny v pracovnom liste a zapisovali do neho svoje zistenia – otázky pri hádaní karty s odpoveďami súpera, celkový počet otázok potrebných na uhádnutie myslenej karty súpera, spoločný čo najlepší postup danej dvojice pri hádaní myslenej karty.

Heuristický rozhovor

V ďalšej časti učiteľ vedie heuristický rozhovor, ktorým privedie žiakov k objaveniu efektívneho spôsobu určenia myslenej karty. Ukážka modelového dialógu učiteľa so žiakmi:

U: „Môžeme uhádnuť kartu na prvý pokus?"

Ž: „Áno, ale nie vždy sa nám to podarí."

U: „Koľko najviac otázok potrebujeme, aby sme uhádli kartu?"

Ž1: „No, keď nemáme šťastie, tak na 32 pokusov."
Ž2: „Môžeme hádať aj viac ako 32-krát, keď si nebudeme pamätať uvedené karty. Ale v najhoršom prípade by malo stačiť najviac 31 pokusov."

U: „Ako sa po každej otázke zmení množina, ktorá obsahuje hľadanú kartu?"

Ž1: „Bude sa stále zmenšovať."
Ž2: „Bude sa zmenšovať, len keď položíme správnu otázku. Keď položíme ešte raz rovnakú otázku, nič nové sa nedozvieme."

U: „Ako sa bude zmenšovať množina s hľadanou kartou?"

Ž: „Po každej otázke o jednu kartu."

U: „Ako by sme mali klásť otázky, aby sa po nich zmenšila množina s hľadanou kartou viac ako o jednu kartu?"

Ž: „Je to zeleň?"

U: „Výborne. Aká veľká bude množina s hľadanou kartou po odpovedi na túto otázku?"

Ž: „Ak bude odpoveď áno, tak hľadaná karta bude jednou z 8 kariet. Ak nie, tak bude jednou z 24 kariet."

U: „Ako by sme mali klásť otázky, aby sa množina s hľadanou kartou zmenšila na rovnakú veľkosť nezávisle od odpovede typu áno/nie?"

Ž: „Je hodnotou karty číslo?"

U: „Super. Ako sa teraz zmenší množina s hľadanou kartou?"

Ž: „Na polovicu."

U: „Áno. Ako budeme klásť otázky týkajúce sa farby karty, aby sa zmenšila množina s hľadanou kartou na polovicu?"

Ž: „Je to červeň alebo zeleň?"

U: „Aká bude ďalšia otázka týkajúca sa farby hľadanej karty?"

Ž: „No. Po tejto otázke budem vedieť, či hľadaná karta bude z množiny {červeň, zeleň} alebo množiny {žaluď, guľa}. Potom sa spýtam na jednu farbu z vybranej množiny, napr. ak je po prvej otázke odpoveď áno, tak sa ďalej opýtam, či je to červeň. Potom už budem vedieť farbu karty."

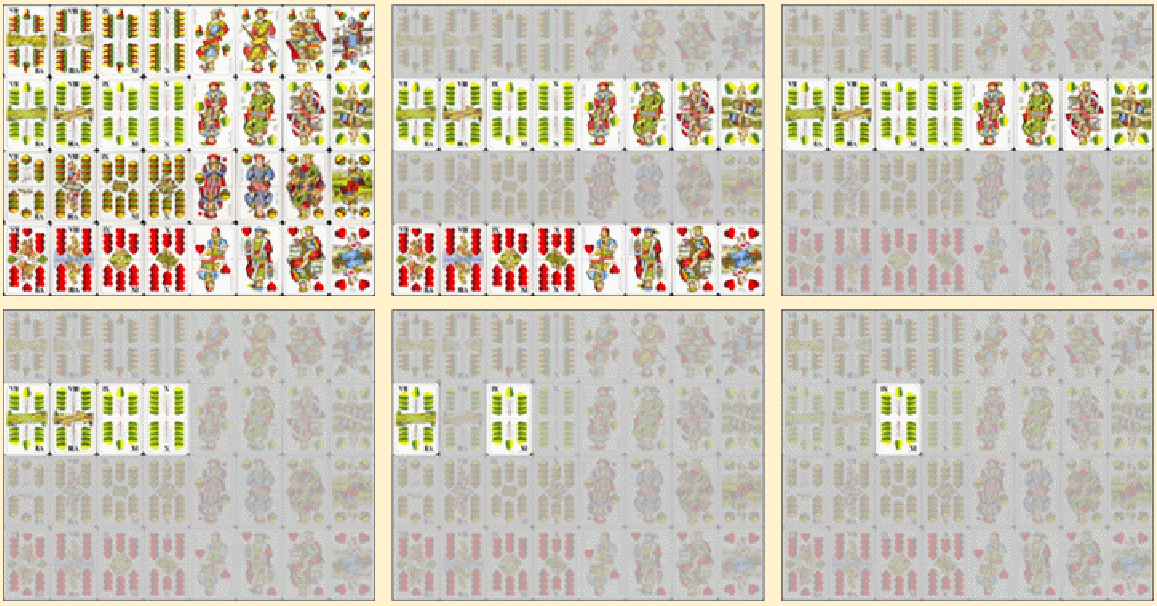
U: "Áno, po 2 otázkach vieme určiť farbu karty. Na začiatku máme 32 kariet. Po zodpovedaní prvej otázky typu áno/nie nám ostalo 16 kariet, po druhej otázke 8 kariet. Verím, že nebude pre vás ťažké vymyslieť ďalšie otázky na určenie hodnoty karty. Skúste to."

Ž: „Spýtam sa, či je to číslo. Po tejto otázke ostanú len 4 karty. Po ďalšej otázke len 2 karty a napokon len 1 karta."

U: „Koľko potom otázok potrebujeme na uhádnutie karty z balíka 32 nemeckých kariet?“

Ž: „Päť.“

U: „Áno. Potrebujeme 5 otázok typu áno/nie. Na začiatku má množina s hľadanou kartou 32 prvkov. Po každej otázke sa táto množina zmenšuje na 16, 8, 4, 2 prvky, až napokon na 1 prvok (Obrázok 78)“



Obrázok 78. Postupné zužovanie kandidátov na hľadanú kartu z 32 kariet na 1 kartu.

„Pri hádaní alebo presnejšie povedané pri určovaní myslenej karty z balíka 32 kariet odpoveď na každú otázku nám priniesla určitú informáciu. Týchto 5 odpovedí typu áno/nie nám prinieslo celú informáciu o karte. Podobne, ako vieme vážiť a merať predmety, vieme merať aj množstvo informácie.

Každá odpoveď typu áno/nie znižujúca na polovicu množinu s hľadaným objektom (napr. kartou) nám priniesla informáciu 1 bit, ktorý je základnou jednotkou informácie. Inak povedané, informáciu veľkosti 1 bitu získame zo správy, ktorá vyjadruje jednu z dvoch rovnako pravdepodobných možností.

Koľko najmenej otázok typu áno/nie potrebujeme na určenie farby karty a koľko na hodnotu karty? Ktoré sú to otázky?“

Ž: „Na určenie farby karty potrebujeme 2 otázky, napr.
1. Je to červeň alebo zeleň?
2. Je to červeň? resp. Je to guľa? (v prípade zápornej odpovede na prvú otázku)
Na určenie hodnoty karty potrebujeme 3 otázky, napr.
1. Je to číslo?
2. Je to číslo nepárne? resp. Je to horník alebo dolník? (v prípade zápornej odpovede na prvú otázku)
3. Je to číslo 7? resp. otázka na inú hodnotu karty v závislosti od odpovede na predchádzajúcu otázku.“

U: „Koľko bitové sú nasledovné správy (koľko otázok typu áno/nie je potrebných na ich určenie)?
a) Farba karty je zeleň.

b) Hodnota karty je kráľ.
c) Karta je červené eso.“ (Poznámka: Táto úloha je uvedená v pracovnom liste ako úloha 2)

Ž: „a) 2 bity,
b) 3 bity,
c) 5 bitov.“

U: „a) Farba zeleň je jednou zo 4 čiže 2^2 možných farieb kariet. Na jej určenie potrebujeme **dve** 1-bitové otázky.
b) Hodnota kráľ je jednou z 8 čiže 2^3 možných hodnôt kariet. Na jej určenie potrebujeme **tri** 1-bitové otázky.
c) Červené eso je jednou z 32 čiže 2^5 možných kariet. Na jej určenie potrebujeme **päť** 1-bitových otázok.“

Pri určovaní karty z balíka 32 nemeckých kariet môžeme získať 5 bitov niektorým z uvedených spôsobov, napr.

- ako **jednu** 5-bitovú informáciu (napr. „červený kráľ“),
- ako **päť** 1-bitových informácií (napr. „červená alebo zelená“, „červená alebo guľa“, „7, 8, 9 alebo10“, „7, 9, dolník alebo kráľ“, „7, 8, dolník alebo horník“),
- ako **jednu** 2-bitovú a **jednu** 3-bitovú informáciu (napr. „červená“, „kráľ“),
- ako **jednu** 4-bitovú a **jednu** 1-bitovú informáciu (napr. „jedna z dvoch najvyšších červených figúr“, „červený kráľ alebo červený horník“).

Ak v uvedenom dialógu obmedzíme potvrdzujúce hodnotiace odpovede učiteľa („Áno.“, „Výborne.“, „Super.“) a zapojíme do diskusie ďalších žiakov, mala by sa skvalitniť táto diskusia pri miernom navýšení času.

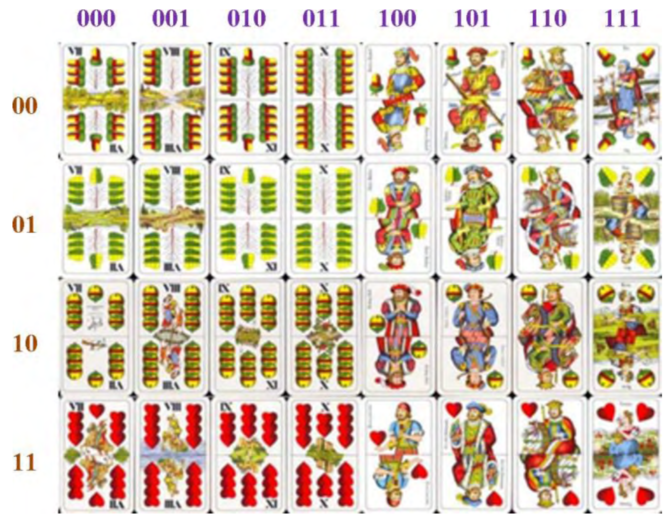
Frontálna demonštrácia hry s paralelným hádaním kariet

Ďalej učiteľ uvedie, že pri hádaní karty žiaci svoje otázky prispôsobovali výsledkom predchádzajúcich odpovedí. Opýta sa žiakov, či sa dá pomocou rovnakej postupnosti otázok uhádnuť ľubovoľná myslená karta (úloha 3 z pracovného listu).

Potom vyzve žiakov, aby si každý z nich myslel jednu z balíka 32 nemeckých kariet a zapísal ju do pracovného listu (úloha 4). Potom každý žiak zakrúžkuje odpovede typu áno/nie na 5 otázok pre svoju myslenú kartu a zakóduje ich pomocou dvojkových číslic. Učiteľ vyzve niekoľkých (napr. 4) žiakov, aby nahlas prečítali dvojkové kódy svojich kariet. Učiteľ zapíše uvedené kódy na tabuľu a každému kódu pohotovo priradí zodpovedajúcu kartu podľa obrázku (Obrázok 80). Následne pomocou schémy na obrázku (Obrázok 79) vysvetlí postup kódovania balíka 32 kariet do dvojkovej sústavy. Ukáže výsledné kódovanie farieb kariet: **Žaluď** = 00, **Zeleň** = 01, **Guľa** = 10, **Červeň** = 11 a kódovanie hodnôt kariet: **Sedem** = 000, **Osem** = 001, **Deväť** = 010, **Desať** = 011, **Dolník** = 100, **Horník** = 101, **Kráľ** = 110, **Eso** = 111.

červeň, guľa?	viem	červeň, zeleň?	viem	dolník, horník, kráľ, eso?	viem	9, 10, kráľ, eso?	viem	8, 10, horník, eso?	viem	dvojkový kód	desiatkový kód
0	žaluď, zeleň	0	žaluď	0	7, 8, 9, 10	0	7, 8	0	7	00000	0
								1	8	00001	1
						1	9, 10	0	9	00010	2
								1	10	00011	3
				1	dolník, horník, kráľ, eso	0	dolník, horník	0	dolník	00100	4
								1	horník	00101	5
						1	kráľ, eso	0	kráľ	00110	6
								1	eso	00111	7
		1	zeleň	0	7, 8, 9, 10	0	7, 8	0	7	01000	8
								1	8	01001	9
						1	9, 10	0	9	01010	10
								1	10	01011	11
				1	dolník, horník, kráľ, eso	0	dolník, horník	0	dolník	01100	12
								1	horník	01101	13
						1	kráľ, eso	0	kráľ	01110	14
								1	eso	01111	15
1	guľa, červeň	0	guľa	0	7, 8, 9, 10	0	7, 8	0	7	10000	16
								1	8	10001	17
						1	9, 10	0	9	10010	18
								1	10	10011	19
				1	dolník, horník, kráľ, eso	0	dolník, horník	0	dolník	10100	20
								1	horník	10101	21
						1	kráľ, eso	0	kráľ	10110	22
								1	eso	10111	23
		1	červeň	0	7, 8, 9, 10	0	7, 8	0	7	11000	24
								1	8	11001	25
						1	9, 10	0	9	11010	26
								1	10	11011	27
				1	dolník, horník, kráľ, eso	0	dolník, horník	0	dolník	11100	28
								1	horník	11101	29
						1	kráľ, eso	0	kráľ	11110	30
								1	eso	11111	31

Obrázok 79. Postup kódovania balíka 32 nemeckých kariet do dvojkovej sústavy.



Obrázok 80. Výsledok kódovanie balíka 32 nemeckých kariet do dvojkovej sústavy.

Pri súbežnom hádaní štyroch myslených kariet môže učiteľ použiť applet z prílohy I 5.4, resp. z webovej stránke http://scratch.mit.edu/projects/18018918/. Na precvičenie priradenia binárneho kódu kartám slúži úloha 5, ktorá je zameraná na určenie karty so zadaným binárnym kódom.

Učiteľ potom položí žiakom otázku, či majú karty navzájom rôzne kódovanie, či sa nemôže stať, že dvom kartám je priradená rovnaká postupnosť núl a jednotiek (úloha 6 z pracovného listu). Žiaci by sa mali poradiť a podať argumenty o jednoznačnosti takéhoto kódovania. Potom učiteľ zdôrazní súvislosť medzi bitom ako jednotkou informácie a bitom ako binárnou číslicou. Ak by sme namiesto kariet hádali 5-ciferné binárne čísla, tak sa môžeme pýtať postupne na každú cifru tohto čísla. Každá odpoveď nám prinesie informáciu veľkosti 1 bitu.

Precvičovanie a zovšeobecňovanie učiva

V ďalšej časti hodiny učiteľ uvedie príklad na určenie poradia hráča v turnaji pomocou binárneho stromu. Následne žiaci riešia ďalšie úlohy z pracovného listu smerujúce k precvičeniu, zovšeobecneniu a využitiu rôznych spôsobov kódovania informácií pri riešení praktických problémov.

Príklad určenia poradia hráča v pavúkovom nevylučovacom turnaji

V špeciálnom pavúkovom, ale nevylučovacom turnaji hrá každý zo 16 hráčov postupne 4 duely. Po každom dueli sa rozdelia víťazi a porazení do vlastných skupín, kde hrajú ďalej len medzi sebou. Po prvom dueli osmica víťazov vytvorí jednu skupinu (0) a osmica porazených ďalšiu skupinu (1), v ktorých turnaj pokračuje ďalej. Po druhom dueli víťazi skupiny 0 vytvoria štvorčlennú skupinu 00, porazení skupiny 0 štvorčlennú skupinu 01, víťazi skupiny 1 vytvoria štvorčlennú skupinu 10, porazení skupiny 1 štvorčlennú skupinu 11. Po treťom dueli vzniknú dvojčlenné skupiny a po štvrtom dueli ostanú len jednotlivci.

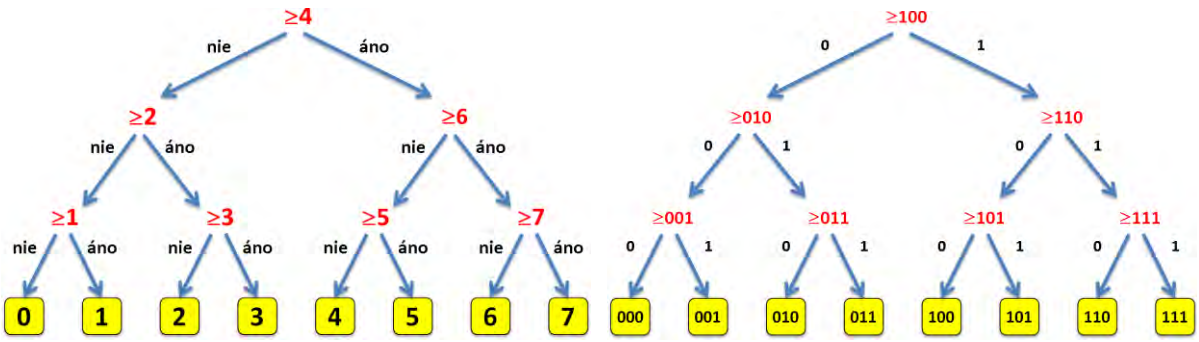
Užitočnou pomôckou pri riešení rôznych úloh je binárny strom (Obrázok 81). Ukazuje spôsob očíslovania výsledkov hráčov, z ktorého vieme určiť ich poradie v dueli:

výhra, výhra, výhra, výhra	0000
výhra, výhra, výhra, prehra	0001
výhra, výhra, prehra, výhra	0010
…	
prehra, prehra, prehra, prehra	1111

Obrázok 81. Strom určujúci poradie hráčov (v dvojkovej sústave) na základe výsledkov zápasov v prvom až štvrtom kole.

Hra Hádaj celé číslo od 0 do 7

Učiteľ vyzve žiakov zahrať si v dvojiciach hru Hádaj celé číslo od 0 do 7 (úloha 7 z pracovného listu), pričom ich nabáda k vytvoreniu si pomocníka pre hádanie čísla v tvare binárneho stromu. Úlohou žiakov je doplniť do stromu otázky, ktoré budú klásť pri hádaní čísla. Riešenie úlohy je vyjadrené vo forme binárneho stromu (Obrázok 82). Každá odpoveď na otázku typu áno/nie prinesie 1 bit informácie, t. j. 1 binárnu číslicu mysleného čísla.



Obrázok 82. Binárny strom pre hádanie čísla od 0 do 7 (v desiatkovej a dvojkovej sústave).

V závere úlohy majú žiaci určiť počet otázok pri hádaní celého čísla v rozmedzí $\langle 0, 7 \rangle$ a tiež v alternatívnom, resp. zovšeobecnenom rozmedzí $\langle 1, 8 \rangle$, resp. $\langle 1, 2^K \rangle$.

Hra Hádaj celé číslo od 0 do 15 pomocou kúzelných kariet

Ďalšia precvičujúca úloha 8 z pracovného listu je hra Hádaj celé číslo od 0 do 15 pomocou kúzelných kariet (Obrázok 83, vľavo). V každej dvojici si jeden žiak myslí číslo a druhému žiakovi podá len tie karty, na ktorých sa nachádza toto číslo. Druhý hráč má zistiť myslené číslo prvého hráča. Prvou podúlohou žiakov je prísť na princíp určenia mysleného čísla pomocou odovzdaných kariet. Nápoveďou pre žiakov môže byť prekrytie dolných častí vybraných kariet prstami. Druhou podúlohou je prísť na princíp zostavenia kúzelných kariet. Užitočnou pomôckou pre to sú karty s číslami prevedenými do dvojkovej sústavy (Obrázok 83, vpravo).

4. karta	3. karta	2. karta	1. karta	4. karta	3. karta	2. karta	1. karta
8	4	2	1	1000	0100	0010	0001
9	5	3	3	1001	0101	0011	0011
10	6	6	5	1010	0110	0110	0101
11	7	7	7	1011	0111	0111	0111
12	12	10	9	1100	1100	1010	1001
13	13	11	11	1101	1101	1011	1011
14	14	14	13	1110	1110	1110	1101
15	15	15	15	1111	1111	1111	1111

Obrázok 83. Kúzelné karty s desiatkovým a dvojkovým zápisom čísel.

Po usmerňujúcich otázkach „Čo majú spoločné čísla na prvej (druhej ...) karte?“ žiaci prídu na to, že na prvej (druhej ...) karte sú uvedené čísla, ktoré majú na prvom (druhom ...) mieste sprava číslicu 1. Myslené číslo sa bude nachádzať len na kartách, na ktorých má vo svojom dvojkovom zápise číslice 1. Jeho hodnota v desiatkovej sústave bude súčtom prvých čísel na každej karte obsahujúcej toto myslené číslo. Napríklad číslo 13 sa nachádza na 4., 3. a 1. karte, čo odpovedá jeho dvojkovému zápisu 1101_2 ($1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$).

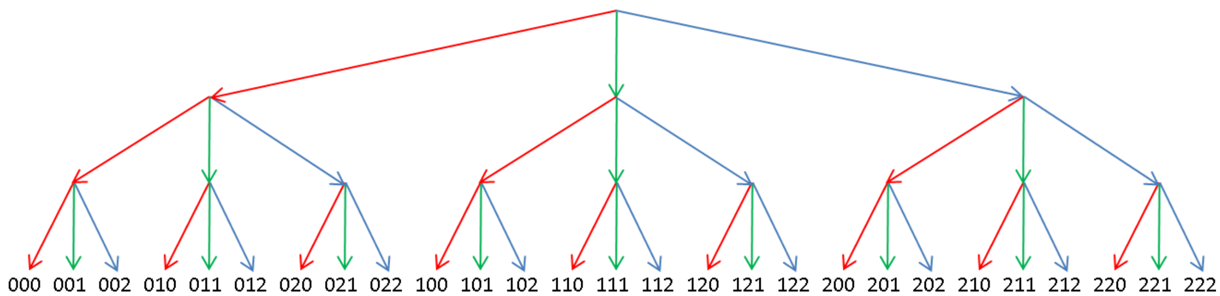
Úlohy na určenie veľkosti správ v bitoch týkajúcich sa balíka kariet

V úlohe 9 z pracovného listu majú žiaci určiť veľkosti jednotlivých správ týkajúcich sa balíka 32 kariet. V rámci heuristického rozhovoru s učiteľom žiaci už riešili obmenu zadaní prvých troch podúloh. Množstvo informácie zo správy chápali ako počet otázok, ktorých odpovede zužovali množinu s hľadanou kartou na polovicu. Teraz po skúsenostiach s úlohami 4 až 6 by mohli svoje riešenia odvádzať od toho, koľkými bitmi vieme popísať daný stav, napr. jednu zo 4, čiže 2^2 farieb 2 bitmi, jednu z 8, čiže 2^3 hodnôt kariet 3 bitmi, konkrétnu kartu z balíka 32, čiže 2^5 kariet 5 bitmi. Pri riešení štvrtej podúlohy (správa „Hodnota karty nie je číslo.“) môžeme pristupovať dvoma spôsobmi. Veľkosť správy je 1 bit, lebo správou zúžime množinu s hľadanou kartou na polovicu. Alebo veľkosť správy je 1 bit, lebo správou sme získali 1 binárnu číslicu popisujúcu hodnotu karty **1??**. Podobne pri piatej podúlohe (správa „Hodnota karty je párne číslo.“), veľkosť informácie získanej zo správy sú 2 bity, lebo sme postupne dvakrát zúžili na polovicu množinu s hľadanou kartou (celkovo na štvrtinu) alebo správou sme získali 2 binárne číslice popisujúce hodnotu karty **0?0**. Riešením šiestej a siedmej podúlohy je veľkosť informácie 4 bity, lebo pôvodná množina s hľadanou kartou bola 4-krát zúžená z 32 kariet na 2 karty, t. j. na 1/16. Iným riešením je pohľad odzadu – potrebujeme ešte získať informáciu veľkosti 1 bitu, aby sme získali celkovo 5 bitovú informáciu. Napokon v poslednej správe („Farba karty je červeň, zeleň, žaluď alebo guľa.“) sme nedostali žiadnu novú informáciu (0 bitov), lebo množina s hľadanou kartou sa po správe nezúžila.

Úloha 10 je na zovšeobecnenie vzťahu medzi počtom položených binárnych otázok na určenie myslenej karty a celkovým počtom N ($N = 2^K$) kariet v balíku, čo je rovnaký výsledok ako v poslednej podúlohe úlohy 6, v ktorej namiesto kariet vystupujú čísla.

Úlohy na určenie veľkosti správ v iných jednotkách ako bitoch

Úlohy 11 až 13 sú zamerané na určenie veľkosti informácií v decitoch a tritoch. V úlohe 11 majú žiaci určiť počet otázok na určenie trojciferného čísla. V prvej podúlohe sa očakáva žiacke riešenie pomocou binárnych otázok. V druhej a tretej podúlohe smerujeme žiakov k odhaleniu jednotky informácie decit, ktorú dostaneme po správe, ktorou zúžime množinu s hľadaným číslom na desatinu. Pomocou 3 decitov (3 dekadických číslic) vieme určiť trojciferné čísla. Úloha 12 je zameraná na objavenie princípu hry s 27 kartami a tiež jednotky informácie trit. Po 3 vyloženiach kariet do 3 stĺpcov, na základe 3 informácií typu vľavo / stred / vpravo určíme jednu z balíka 27, čiže 3^3 kariet. Pomocníkom pre vysvetlenie riešenia tejto hry môže byť ternárny strom zobrazený na obrázku (Obrázok 84) a diagram na obrázku (Obrázok 85) s tromi vyloženiami kariet a tromi zúženiami množiny s myslenou kartou na tretinu.



Obrázok 84. Ternárny strom s troma úrovňami hĺbky s číslami zapísanými v trojkovej sústave.

000	001	002
010	011	012
020	021	022
100	101	102
110	111	112
120	121	122
200	201	202
210	211	212
220	221	222

	V	
0	**1**	2
0	1	2
0	1	2
0	1	2
0	1	2
0	1	2
0	1	2
0	1	2
0	1	2
0	1	2

		V
0	1	**2**
10	11	12
10	11	12
10	11	12
00	01	02
00	01	02
00	01	02
20	21	22
20	21	22
20	21	22

V		
0	1	2
120	121	122
100	101	102
110	111	112
000	001	002
010	011	012
020	021	022
200	201	202
210	211	212
220	221	222

Obrázok 85. Ukážka určenia karty z balíka 27 kariet na základe troch zúžení množiny s hľadanou kartou.

Úloha 13 je na zovšeobecnenie vzťahu medzi počtom položených L-árnych otázok (s L rôznymi možnými odpoveďami) na určenie myslenej karty a celkovým počtom N ($N = L^K$) kariet v balíku.

Celkové zhrnutie a vyhodnotenie prebraného učiva

Na záver vyučovacej jednotky učiteľ zrekapituluje prebrané učivo, pričom žiaci vyplnia (seba)hodnotiace škály k danému učivu (úlohy 14 a 15 v pracovnom liste):

- Bit ako základná jednotka informácie aj ako číslica dvojkovej sústavy.
- Objavenie a aplikovanie algoritmu binárneho vyhľadávania, využitie binárneho stromu.
- Určenie množstva informácie v bitoch v správe týkajúcej sa balíka 32 kariet.
- Zdôvodnenie jednoznačnosti kódovania kariet do binárnych číslic.
- Vzťah medzi počtom položených binárnych otázok na určenie myslenej karty z balíka 2^K kariet a počtom kariet v balíku.
- Súvislosť medzi hĺbkou binárneho stromu a počtom číslic binárneho čísla (resp. počtom položených binárnych otázok).
- *Iné jednotky informácií, napr. trit, decit.
- *Vzťah medzi počtom položených L-árnych otázok na určenie myslenej karty z balíka L^K kariet a počtom kariet v balíku.

Vedomosti žiakov môže učiteľ overiť konceptuálnym testom z prílohy I 5.3. Prvých šesť úloh testu súvisí s balíkom 32 nemeckých kariet (správne odpovede sú označené tučne):

1) Správa „Farba karty je žaluď.“:

   a) je 1-bitová, lebo určuje 1 farbu karty,

   b) je 2-bitová, lebo žaluď je 1 z 4 čiže 2^2 možných farieb,

   c) je 3-bitová, lebo je potrebné položiť ešte 3 otázky na určenie karty,

   d) je 5-bitová, lebo kariet je spolu 32 čiže 2^5.

2) Správa „Farba karty je žaluď alebo guľa.“:

   a) je 0-bitová, lebo nevieme povedať, ktorú z farieb žaluď/guľa má karta,

   b) je 1-bitová, lebo sa pôvodná množina kariet zúžila na polovicu,

   c) je 2-bitová, lebo sú 4 čiže 2^2 možné farby kariet,

   d) je 4-bitová, lebo sú 4 možné farby kariet.

3) Správa „Farba karty je žaluď, guľa, zeleň alebo červeň.“:

   a) je 0-bitová, lebo sme nedostali žiadnu novú informáciu o karte,

   b) je 2-bitová, lebo sú 4 čiže 2^2 možné farby kariet,

   c) je 4-bitová, lebo sú 4 možné farby kariet,

   d) je 5-bitová, lebo kariet s uvedenými farbami je spolu 32 čiže 2^5.

4) Správa „Hodnota karty je nepárne číslo.“:

   a) je 0-bitová, lebo nevieme určiť presne, o akú kartu ide,

   b) je 1-bitová, lebo sme zúžili pôvodnú množinu kariet na polovicu,

   c) je 2-bitová, lebo sme zúžili pôvodnú množinu kariet na štvrtinu,

   d) je 3-bitová, lebo hodnota karty je jednou z 8 čiže 2^3 možností.

5) Správa „Hodnota karty je desiatka.“:

   a) je 0-bitová, lebo nevieme určiť farbu karty,

   b) je 1-bitová, lebo máme informáciu o presnej hodnote karty, nie farby,

   c) je 2-bitová, lebo potrebujeme ešte zistiť hodnotu jednej zo 4 čiže 2^2 farieb,

d) je 3-bitová, lebo uvedená hodnota karty je jednou z 8 čiže 2^3 možností.

6) Správa „Karta je červená osmička.“:

a) je 0-bitová, lebo už poznáme kartu a nepotrebujeme ďalšiu informáciu,

b) je 1-bitová, lebo uvedená karta je jedinou kartou z balíka kariet,

c) je 2-bitová, lebo vieme 2 informácie – farbu karty a číslo karty,

d) je 5-bitová, lebo už poznáme kartu z balíka 32 čiže 25 kariet.

7) Správa „Číslo má dvojkový zápis 1??10.“:

a) je 0-bitová, lebo nevieme presne určiť hodnotu uvedeného čísla,

b) je 2-bitová, lebo potrebujeme zistiť ešte 2 binárne číslice,

c) je 3-bitová, lebo poznáme 3 binárne číslice,

d) je 5-bitová, lebo číslo pozostáva z 5 binárnych číslic.

8) Na určenie karty z balíka 2^K kariet potrebujeme položiť najmenej:

a) 2^K binárnych otázok,

b) $2^K - 1$ binárnych otázok,

c) 2 binárne otázky,

d) K binárnych otázok.

9) *Správa „Číslo má trojkový zápis 1?2?10.“:

a) je 0-tritová, lebo nevieme presne určiť hodnotu uvedeného čísla,

b) je 2-tritová, lebo potrebujeme zistiť ešte 2 ternárne číslice,

c) je 4-tritová, lebo poznáme 4 ternárne číslice,

d) je 6-tritová, lebo číslo pozostáva zo 6 ternárnych číslic.

10) *Na určenie karty z balíka K^2 kariet potrebujeme položiť najmenej:

a) K^2 binárnych otázok,

b) K^2 K-árnych otázok,

> **c) 2 K-árne otázky,**
>
> d) *K* binárnych otázok.

Pozorovania a zistenia z výučby

V období september – november 2014 na štyroch gymnáziách zapojených do projektu VEMIV realizovalo päť učiteľov výučbu témy Bit, jednotka informácie podľa metodiky zo septembra 2014. Pôvodne navrhovaný 45-minútový rozsah výučby tejto témy umožnil vyriešiť len časť úloh uvedených v metodike. Učitelia sa sústredili vo výučbe hlavne na úlohy uvedené v žiackych pracovných listoch (pokrývajúce v súčasnej verzii pracovného listu úlohy 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10).

Vo výučbe sa využívali rôzne organizačné formy, hlavne práca vo dvojiciach a heuristický rozhovor. Učitelia využili z metodiky obrázky a diagramy pri zadávaní úloh, zdôvodňovaní tvrdení a zhrnutí učiva (napr. tabuľku na obrázku (Obrázok 79) pri úlohách 4 a 6). Jedna učiteľka nepoužila pracovný list v predloženej podobe, aby sa neovplyvnilo riešenie úlohy 3, ktoré súvisí so zadaním nasledovnej 4. úlohy. V dvoch triedach prišlo žiakom na um vyriešiť aj duálnu úlohu k úlohe 4, a to určiť kartu podľa zadaného binárneho kódu. Na základe týchto skúseností sme doplnili do pracovného listu niektoré obrázky, oddelili na rôzne strany závislé úlohy 3 a 4, doplnili novú úlohu 5 (duálnu k úlohe 4) a ďalšie precvičujúce úlohy, ktoré boli pôvodne uvedené len v metodike. Časovú dotáciu výučby podľa tejto metodiky sme upravili na 90 minút.

Podľa učiteľov aktivity uvedené v metodike žiakov zaujali a nepovažujú ich za náročné. Realizované bádateľské aktivity majú podľa nich pozitívny vplyv na porozumenie osvojovaných poznatkov žiakov, ktorí prejavovali radosť z vlastného objavovania poznatkov. Jeden učiteľ, ktorý v časti výučby hral rolu kúzelníka, uviedol zaujímavú otázku žiačky: „To aj kúzelníci s kartami používajú takúto fintu s binárnymi kódmi?“

Učitelia uviedli nasledovné bádateľské zručnosti, ktoré sa u žiakov najviac rozvíjali počas realizácie výučby podľa danej metodiky:

- Identifikovať problém, ktorý sa má skúmať.
- Formulovať hypotézu/teoretický model.
- Vytvárať predpovede/hypotézy týkajúce sa modelu.

- Zbierať, usporiadať a analyzovať dáta – sformulovať princíp alebo zákon/zákonitosť na základe výsledkov experimentu (použitím grafických metód, resp. matematických modelov).
- Formulovať závery na základe dosiahnutých výsledkov.

Na základe žiakmi vyplnených 34 pracovných listov s úlohami 1, 3, 4, 6, 7 môžeme uviesť nasledovné výsledky:

- Úlohu 1, zameranú na uvedenie zoznamu otázok a odpovedí pri hádaní karty z balíka 32 kariet, vyriešilo optimálne len 7 z 33 žiakov. Ostatné riešenia boli nesystematické, neúplné či nesprávne. V niektorých riešeniach boli zbytočne uvedené otázky, ktorých odpoveď bola zrejmá z predchádzajúcich odpovedí. V iných riešeniach chýbali odpovede na položené otázky. V správnych riešeniach sa objavili aj zaujímavé otázky, napr. „Má karta motív, ktorý rastie na stromoch?“ alebo úsporne formulované otázky, napr. „Ž/S?“, „L?“, „>10?“, „J/Q?“ a „A?“. Druhú časť úlohy 1, ktorá požadovala od dvojice žiakov uviesť vylepšené riešenie prvej časti úlohy, riešilo len 20 žiakov. Štyria žiaci uviedli všeobecné optimálne riešenie (možno vďaka odpozeraniu zadania úlohy 4), 10 žiakov uviedlo konkrétnu postupnosť piatich otázok zužujúcich množinu s hľadanou kartou na polovice, 5 žiakov uviedlo stratégiu riešenia úlohy (najprv určenie farby, potom hodnoty karty), resp. nedokončili správne rozpracované riešenie a len 1 žiak uviedol nesprávne riešenie. Očakávaná vyššia úspešnosť riešenia druhej časti úlohy potvrdila význam rozdelenia tejto úlohy na dve časti a jej zaradenie pred 4. úlohu.
- V úlohe 3, zameranej na vyjadrenie sa k existencii rovnakej postupnosti otázok pri hádaní ľubovoľného čísla, odpovedalo 15 z 26 žiakov negatívne, t. j. že nevie zostaviť takú postupnosť, ale len 6 z 25 žiakov uviedlo, že takúto postupnosť otázok nie je vôbec možné zostaviť. Očakávali sme vyššiu mieru negatívnych odpovedí na druhú časť úlohy, čo bolo pravdepodobne skreslené nasledujúcou úlohou 4, v ktorej zadaní bola takáto postupnosť otázok uvedená.
- Úlohu 4, zameranú na priradenie binárneho kódu pre vlastnú zadanú kartu pomocou piatich otázok, vyriešilo správne až 33 z 34 žiakov. Podobné výsledky sme očakávali aj v druhej časti úlohy zameranej na vyznačenie častí kódu pre farbu a hodnotu. Túto však správne vyriešilo len 19 žiakov.

- V úlohe 6, zameranej na zdôvodnenie jednoznačnosti kódovania kariet do binárneho kódu, žiaci odpovedali veľmi stručne a nedôsledne. K očakávanej správnej odpovedi sa priblížilo 11 z 34 žiakov, ktorí uviedli, že každá karta má iný binárny kód. Chýbalo im zdôvodnenie jednoznačnosti binárnych kódov, napr. konštrukciou týchto kódov pomocou binárneho stromu.
- Úlohu 7, zameranú na vykreslenie binárneho stromu ako pomôcky pri hádaní celého čísla od 0 do 7, vyriešilo správne 14 z 29 žiakov. Z toho v 4 riešeniach boli namiesto jedného stromu uvedené dva binárne podstromy. V iných 5 riešeniach bol použitý binárny strom na zostavenie trojice otázok – „Je to niektoré z čísel: 4, 5, 6, 7?“, „Je to niektoré z čísel: 2, 3, 6, 7?“, „Je to niektoré z čísel: 1, 3, 5, 7?“. V 6 zo 14 správnych riešení bolo navyše uvedené binárne kódovanie čísel od 0 do 7. V 8 nekompletných riešeniach bol uvedený binárny strom s binárnymi číslicami, ale bez otázok, vedľa neho bolo binárne kódovanie čísel od 0 do 7. V ďalších 7 nekompletných alebo nesprávnych riešeniach nebol uvedený vôbec binárny strom.

Celkovo sa ukázalo, že niektoré úlohy žiaci neriešili, lebo ich učitelia nezaradili do výučby. Niektoré typy riešení úloh boli charakteristické pre jednotlivé školy, čo môže byť ovplyvnené spôsobom výučby jednotlivých učiteľov. Niektoré úlohy, podľa variability ich riešení, evidentne neriešili žiaci ako jednotlivci, ale skupinovo.

Alternatívy metodiky

Aj keď má metodika svoju jasnú líniu vymedzenú pracovným listom, je na samotnom učiteľovi, aby podľa schopností žiakov a časových možností rozhodol o výbere úloh, miere podpory pre žiakov a miere objavovania poznatkov žiakmi.

Metodiku je možné zúžiť len na jednotku informácie bit bez uvádzania ostatných jednotiek informácie (napr. trit, decit), t. j. vynechať z pracovného listu úlohy 11 – 13 označené hviezdičkou *.

Precvičovaciu etapu môže učiteľ, jednak redukovať, napr. o úlohu 8, jednak rozšíriť o ďalšie úlohy, napr. Určenie životodarných roztokov spomedzi 8 vzájomne nereagujúcich roztokov ich otestovaním na 3 rôznych kvetinách (je obmenou úlohy 8).

Jednou z možnosti rozšírenia tejto metodiky je zameranie sa nielen na pochopenie princípu hry Hádaj celé číslo od 0 do 15 pomocou kúzelných kariet, ale aj na vytvorenie užitočného artefaktu – naprogramovanie tejto hry. V prílohe I 5.2 sú uvedené pracovné listy k programovaniu tejto hry v prostredí Scratch s odstupňovanou pomocou (individuálne poskytnutou učiteľom) spolu s krátkym hodnotiacim dotazníkom. Pri programovaní tejto hry môže učiteľ poskytnúť žiakom pracovný súbor uvedený v prílohe I 5.5.

Ak žiaci poznajú pojem logaritmickej funkcie (najčastejšie od 2. ročníka SŠ), mohli by s určitou mierou pomoci učiteľa objaviť vzťah medzi počtom položených L-árnych otázok na určenie myslenej karty z balíka kariet a počtom $N = L^K$ kariet ($K = \log_L N$). Žiaci môžu prísť aj na súvislosť medzi počtom číslic L-árneho čísla, hĺbkou L-árneho stromu a logaritmu so základom L.

U nadaných žiakov, ktorí poznajú pojem pravdepodobnosť, by sme mohli od výrazu $\log_2 N$, určujúceho počet bitov potrebných na určenie jedného z N objektov, prejsť k známej Shannonovej-Hartleyovej formule $I(A) = -\log_2 P(A)$ vyjadrujúcej množstvo informácie získanej zo správy, že nastal jav A s pravdepodobnosťou výskytu P(A). Pomocou tejto formuly môžeme určiť množstvo informácií v správe, ktorá zužuje množinu na ľubovoľnú časť, nielen na polovicu. Napr. po troch negatívnych odpovediach na otázky na farbu karty („Je to zeleň?“, „Je to guľa?“, „Je to žaluď?“) postupne dostaneme informácie s veľkosťou $-\log_2 \frac{3}{4}$, $-\log_2 \frac{2}{3}$, $-\log_2 \frac{1}{2}$ bitov, čo predstavuje spolu celkovú informáciu veľkosti $-\log_2 \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}$, čiže 2 bity. Ďalším rozšírením metodiky by mohlo byť zavedenie a precvičenie pojmu entropie (ako miery neurčitosti výskytu určitého javu) a výpočtov entropie pravdepodobnostných polí s rôznymi javmi.

I6 – Odhaľujeme princípy fungovania čiernych skriniek

Tematický celok	
Reprezentácie a nástroje – informácie **Algoritmické riešenie problémov – pomocou premenných**	
Cieľová skupina	Odhadovaný čas výučby
Prvý ročník SŠ	Jedna vyučovacia hodina
Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti	Kognitívne ciele
▪ Formálne vyjadriť (lineárnu) funkciu pomocou predpisu.	▪ Objaviť funkčné závislosti medzi skupinami dvojíc vstupov a výstupov rôznych údajových typov (čísla, texty, logické hodnoty, obrázky) vo vzťahu ku kódovaniu a šifrovaniu údajov, ▪ vysvetliť čiernu skrinku ako model funkcie či programu, ktorý na základe zadaných vstupov vypočíta výstupy, ▪ kriticky si uvedomovať skutočnosť, že experimentovaním môžeme dospieť len k hypotéze o princípe fungovania čiernej skrinky, presný princíp fungovania čiernej skrinky zistíme až jej odhalením, ▪ pomenovať čierne skrinky kreatívne a čo najvýstižnejšie, aby ich meno zodpovedalo princípu ich fungovania.
Bádateľské zručnosti	Didaktický problém
▪ Formulovať a overovať hypotézy o princípoch fungovania čiernych skriniek na základe záznamov ich správania a tiež na základe experimentovania s interaktívnymi čiernymi skrinkami, ▪ určovať vzťahy medzi premennými veličinami na základe tabuliek – vstupmi a výstupmi čiernej skrinky, ▪ porovnať dáta s hypotézou, ▪ formulovať závery o princípoch fungovania skúmaných čiernych skriniek.	▪ Pri usudzovaní a tvorbe záverov žiaci zvyknú nekriticky zovšeobecniť poznatky z čiastočne pozorovaných/nameraných údajov. Pri riešení problémov nemajú patričné skúsenosti, ani nepoznajú užitočné prístupy, ako napr. metódu čiernej skrinky. ▪ Nácvik metódy čiernej skrinky ako systematického prístupu riešenia problémov im pomôže pochopiť koncepty údajový typ, funkcia programu, kódy, šifry, ale tiež ju použiť, napr.

	pri odhaľovaní štruktúry údajového typu s pohyblivou rádovou čiarkou.
Didaktické materiálne prostriedky	Didaktické metódy a organizačné formy
▪ Súbor 4 pracovných listov (príloha I 6.1): ○ pre odhaľovanie 19 čiernych skriniek na základe záznamov ich správania, ○ pre hru Biliardové tajomstvo, ○ pre experimentálne odhaľovanie skupiny 12 interaktívnych číselných čiernych skriniek (Scratch), ○ pre experimentálne odhaľovanie skupiny 5 interaktívnych čiernych skriniek (PHP). ▪ Applety s interaktívnymi čiernymi skrinkami: http://scratch.mit.edu/projects/17048661/, http://di.ics.upjs.sk/vyucba/pomocne_materialy/cierna_skrinka/.	▪ Štruktúrované bádanie, ▪ pozorovanie, experimentovanie, rozhovor, diskusia, ▪ individuálna a skupinová forma práce.

Príprava na výučbu

Pracovné listy a applety

Pre rôzne varianty výučby odhaľovania princípov fungovania čiernych skriniek sú pre žiakov pripravené štyri tlačené pracovné listy (z prílohy I 6.1):

- pre odhaľovanie 19 čiernych skriniek na základe záznamov ich správania,
- pre hru Biliardové tajomstvo,
- pre experimentálne odhaľovanie 12 číselných čiernych skriniek,
- pre experimentálne odhaľovanie 5 čiernych skriniek,

a tiež dva interaktívne applety so skupinou 12 číselných čiernych skriniek[1] a skupinou 5 čiernych skriniek[2].

[1] Applet s 12 číselnými čiernymi skrinkami (aj v prílohe I 6.2): http://scratch.mit.edu/projects/17048661/.

[2] Applet s 5 čiernymi skrinkami: http://di.ics.upjs.sk/vyucba/pomocne_materialy/cierna_skrinka/.

Na 1. pracovnom liste majú žiaci odhaľovať predpisy 19 funkcií (Tabuľka 11):

Tabuľka 11. Predpisy 19 funkcií na 1. pracovnom liste.

$f_1(x) = x$	$f_8(x) = x \bmod 3$	$f_{14}(x)$ = jePalindrom?(x)
$f_2(x) = x + 1$	$f_9(x, y) = x + y$	$f_{15}(x)$ = početVrcholovGrafu(x)
$f_3(x) = 10 - x$	$f_{10}(x, y) = xy$	$f_{16}(x)$ = početHránGrafu(x)
$f_4(x) = 6x$	$f_{11}(x)$ = binárnyZápis(x)	$f_{17}(x)$ = otočenie(x)
$f_5(x) = 3x + 1$	$f_{12}(x, y)$ = binárneSčítanie(x, y)	$f_{18}(x)$ = posunZnakov(x)
$f_6(x) = 20 - 5x$	$f_{13}(x)$ = dĺžka(x)	$f_{19}(x)$ = otočenieSpoluhláskokOdzadu(x)
$f_7(x) = 1$		

Na 2. pracovnom liste je uvedený princíp hry, ukážka jedného riešenia tejto hry a viaceré hracie plány pre dvojice hráčov na odhaľovanie štruktúry krabice s prekážkami.

Na 3. pracovnom liste je tabuľka na zaznamenanie výsledkov skúmania 12 číselných čiernych skriniek s predpismi funkcií (Tabuľka 12):

Tabuľka 12. Predpisy 12 funkcií na 3. pracovnom liste.

$f_1(x) = 5 - x$	$f_7(x) = 31$
$f_2(x) = x$	$f_8(x)$ = súRovnakéPosledné2Cifry?(x)
$f_3(x)$ = početCifier(x)	$f_9(x)$ = 10 celáDolnáČasť(x / 10)
$f_4(x) = 27 - 4x$	$f_{10}(x)$ = cifernýSúčetTrojciferného Čísla(x)
$f_5(x)$ = jeNepárne?(x)	$f_{11}(x) = (x \bmod 3) + 1$
$f_6(x) = x^2$	$f_{12}(x) = 50 - \mathrm{abs}(x - 50)$

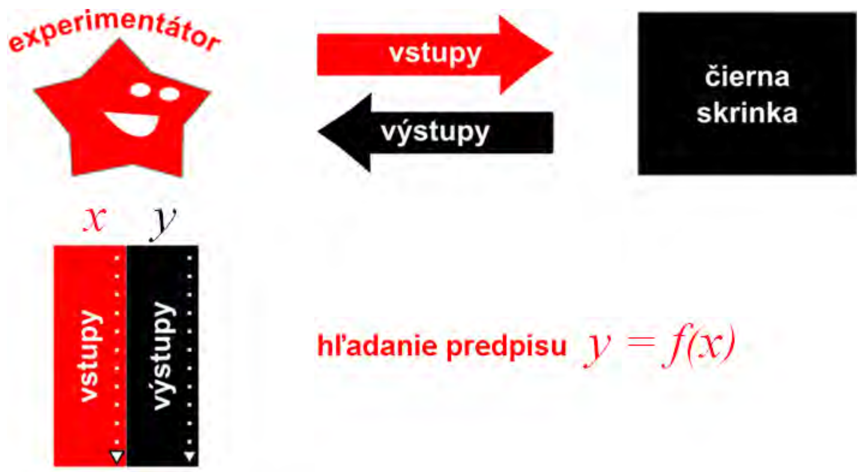
Na 4. pracovnom liste je tabuľka na zaznamenanie výsledkov skúmania 5 čiernych skriniek s predpismi funkcií (Tabuľka 13):

Tabuľka 13. Predpisy 5 funkcií na 4. pracovnom liste.

$f_1(x)$ = dĺžkaReťazca(x)	$f_4(x, y)$ = rotovanýReťazec(x, y)
$f_2(x, y)$ = reťazecBezPodreťazca(x, y)	$f_5(a, b, c, x_1, x_2)$ = jeRiešenieRovnice?(a, b, c, x_1, x_2)
$f_3(x)$ = posunZnakovO3(x)	

Teoretické východiská – Metóda čiernej skrinky pri učení sa objavovaním

Čiernou skrinkou označujeme systém (objekt, proces, jav) s neznámym princípom fungovania/štruktúrou, ktorý skúmame a odhaľujeme na základe našich podnetov na vstupy neznámeho systému a reakcií registrovaných na jeho výstupe. Metódu čiernej skrinky ako interakciu pozorovateľa s čiernou skrinku s postupným spresňovaním hypotézy o princípe jej fungovania zachytáva schéma na obrázku (Obrázok 86).



Obrázok 86. Schéma metódy čiernej skrinky pri odhaľovaní princípu fungovania neznámeho systému.

Čierne skrinky ako metódu skúmania a odhaľovania správania sa neznámych systémov môžeme využiť vo vyučovaní informatiky, matematiky a ďalších predmetov, konkrétne:

- na rozvoj bádateľských zručností (napr. pozorovania, usudzovania, tvorby a overovania hypotéz, vytvárania záverov, argumentovania), na rozvoj stratégií riešenia problémov (napr. hľadania opakujúceho sa vzoru), na rozvoj kritického myslenia a kreativity,
- na skúmanie lineárnych funkcií, na propedeutiku teórie grafov, na skúmanie a navrhovanie kódovania medzi rôznymi typmi dát, binárneho prevodu čísel, šifrovania dát, na testovanie vytvorených programov.

Odhaľovanie čiernych skriniek je pomerne flexibilnou aktivitou, ktorá sa dá použiť vo formálnom aj neformálnom vzdelávaní, u žiakov od základnej po vysokú školu s časovou náročnosťou od 5 minút až po celú vyučovaciu hodinu.

Priebeh výučby

Čierne skrinky môžu byť predložené žiakom rôznymi spôsobmi, od čoho sa odvíjajú uvedené varianty priebehu výučby:

- tabuľkou s dvojicami hodnôt vstupov a výstupov, ktoré sú záznamom interakcie človeka s čiernou skrinkou (variant A),
- hernou aktivitou – dialógom žiaka s čiernou skrinkou, ktorú zastupuje iný žiak, resp. učiteľ (variant B),
- interaktívnym appletom reagujúcim na podnety žiaka (variant C).

Variant A

Hlavnými kognitívnymi cieľmi výučby podľa tohto variantu metodiky je prehĺbenie si bádateľských zručností (pozorovanie záznamov interakcie s čiernymi skrinkami, usudzovanie, vytváranie predpokladov a záverov o princípoch ich fungovania) a precvičenie si kódovania rôznych údajových typov a šifrovania textov.

Žiakom poskytneme pracovný list 1 (z prílohy I 6.1) so záznamami interakcie človeka s 19 čiernymi skrinkami. V prípade výučby nadaných žiakov môžeme nechať vyplniť celý pracovný list žiakom ako didaktický test. Pri výučbe bežnej populácie odporúčame nasledovný priebeh výučby:

- Motivujeme žiakov, aby prijali rolu detektíva a odhaľovali princíp fungovania jednotlivých čiernych skriniek,
- ukážeme žiakom na prvej, resp. aj na druhej čiernej skrinke spôsob riešenia úloh a zaznamenania ich výsledkov do pracovného listu,
- necháme žiakov riešiť skupiny úloh – najprv samostatne, potom vo dvojiciach a napokon riešenie uzavrieme spoločnou diskusiou v rámci celej triedy,
- necháme žiakov samostatne zodpovedať záverečné otázky v pracovnom liste, týkajúce sa jednoznačnosti riešenia úloh, ich náročnosti, zaujímavosti a reflexie k tomu, čo sa naučili riešením týchto úloh,
- zhrnieme výsledky jednotlivých úloh vo vzťahu ku kódovaniu a šifrovaniu informácií, a tiež k metóde čiernej skrinky ako jednej z metód riešenia problémov, ktorá však nezaručuje jednoznačnosť riešenia úloh.

Jednotlivé skupiny úloh mapujú rôzne prvky učiva:

- úlohy 1 – 7: lineárnu funkciu,
- úlohy 8: funkciu modulo (príklad periodickej funkcie),
- úlohy 9 – 10: funkcie s dvoma premennými (súčet, zreťazenie reťazcov),
- úlohy 11 – 12: dvojkové čísla (prevod do dvojkovej sústavy, súčet dvojkových čísel),
- úlohy 13 – 14: textové reťazce (dĺžku reťazca, palindromickosť čiže symetriu reťazca),

- úlohy 15 – 16: základné pojmy teórie grafov (počet vrcholov grafu, počet hrán grafu),
- úlohy 17 – 19: šifrovanie textov (obrátený reťazec, reťazec s nahradenými znakmi s posunom o 1 znak, reťazec s obrátenými spoluhláskami).

Na základe diskusie so žiakmi k riešeniu jednotlivých skupín úloh a tiež výsledkov pracovného listu môžeme vyhodnotiť výučbu z pohľadu nasledovných aspektov:

- miery samostatnosti žiakov pri riešení úloh,
- miery schopnosti žiakov klásť logické predpoklady,
- miery exaktnosti vyjadrovania pravidiel (matematickým/slovným opisom),
- miery výstižnosti pomenovania čiernej skrinky vzhľadom na princíp jej fungovania, kreativitu a zmysel pre humor pri tvorbe pomenovaní,
- úspešnosti jednotlivých žiakov pri riešení úloh,
- náročnosti jednotlivých úloh,
- postojov žiakov k náročnosti a zaujímavosti predložených úloh,
- predstáv žiakov o jednoznačnosti riešenia úloh,
- záujmu žiakov riešiť podobné úlohy,
- vyjadrenia sa žiakov k učivu, ktoré sa naučili.

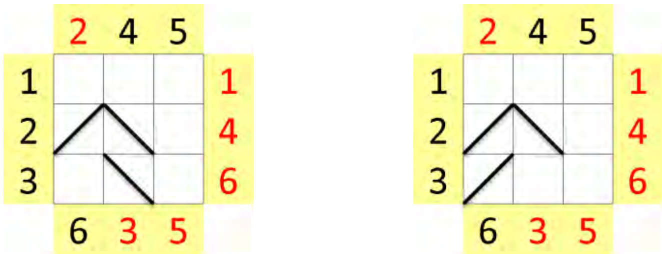
Variant B

Tento variant je oproti variantu A viac hravý, nevyžadujúci si exaktné matematické vyjadrovanie. Hlavným kognitívnym cieľom výučby podľa tohto variantu metodiky je prehĺbenie si bádateľských zručností (experimentovanie s rôznymi vstupmi čiernych skriniek, vytváranie a overovanie hypotéz, vytváranie záverov o princípoch ich fungovania).

Žiakom poskytneme pracovný list 2 (z prílohy I 6.1), v ktorom sú uvedené základné pravidlá hry Biliardové tajomstvo, ukážka priebehu hry a jej výsledku a viaceré hracie plány hry. Pri výučbe odporúčame nasledovný priebeh výučby:

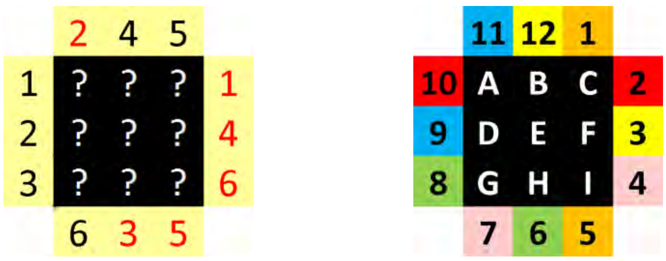
- Uvedieme pravidlá hry spolu s ukážkou priebehu hry a jej výsledku.
- Necháme žiakov hrať hru vo dvojiciach.

- Necháme žiakov vo dvojiciach experimentovať s rôznym počtom a tvarom prekážok, rôznymi rozmermi krabice, tvoriť závery k riešiteľnosti úlohy a jednoznačnosti jej riešenia.
- Zhrnieme získané výsledky jednotlivých variantov tejto hry, ukážeme rôzne riešenia rozloženia prekážok v krabici s rovnakým správaním čiernej skrinky (Obrázok 87), zdôvodníme neriešiteľnosť rozloženia prekážok pre vybrané správania čiernej skrinky, zdôrazníme význam vhodného označenia vstupov, výstupov a prekážok v krabici.



Obrázok 87. Rôzne rozloženia prekážok v krabici s rovnakým správaním čiernej skrinky.

Ak majú obaja hráči pred sebou hrací plán, dajú sa vstupy aj výstupy označovať zodpovedajúcimi číslovkami (resp. tvarmi, farbami) a riešenie úlohy (rozloženie prekážok) zakresliť priamo do hracieho plánu. Ak žiaci nepoužívajú spoločný vizuálne kontrolovaný hrací plán, ale len sa hlasom informujú o vstupoch a výstupoch, tak je potrebné precíznejšie označiť vstupy, výstupy a tiež rozmiestnenie prekážok v krabici (Obrázok 88).



Obrázok 88. Rôzne označenia pre zadané vstupy a výstupy. Označenie vľavo pre vizuálnu a označenie vpravo pre hlasovú komunikáciu hráčov.

Správanie čiernej skrinky uvedenej na obrázku (Obrázok 88) môžeme zaznamenať postupnosťou dvojíc vstupov a výstupov: 10 – 2, 9 – 11, 8 – 6, 12 – 3, 1 – 5, 7 – 4. Riešenie 1, resp. 2 uvedené na obrázku (Obrázok 87) môžeme zaznamenať zoznamom pozícií prekážok a ich typov: D/, E\, H\, resp. D/, E\, G/. Iný spôsob označenia riešenia je po riadkoch pomocou znakov: (· · ·, / \ · , · \ ·), resp. (· · ·, / \ · , / · ·).

Experimentovanie žiakov vo dvojiciach môžeme usmerniť vhodnými otázkami a úlohami, napr.

- *Dá sa vždy navrhnúť čierna skrinka s očakávanými vstupmi a výstupmi?*
- *Navrhnite čiernu skrinku s dvojicami vstupov a výstupov: 10 – 2, 9 – 3, 8 – 4.*
- *Koľko prekážok potrebujete umiestniť do krabice postupne pre rôzne dvojice vstupov a výstupov 9 – 3, 9 – 2, 9 – 12?*
- *Dá sa navrhnúť čierna skrinka len pomocou uvedených 2 typov prekážok, aby bol vstup zároveň výstupom?*
- *Preskúmajte prípady rozmiestnenia prekážok, pri ktorých sa dostaneme zo vstupu 12 postupne do každého z výstupov 1 až 12.*
- *Preskúmajte prípady rozmiestnenia prekážok, pri ktorých sa dostaneme zo vstupu 4 do výstupu 7 a zároveň zo vstupu 6 do výstupu 8.*
- *Aké nové typy prekážok navrhujete doplniť pri riešení úloh?*

Variant C

Hlavnými kognitívnymi cieľmi výučby podľa tohto variantu metodiky je prehĺbenie si bádateľských zručností (rovnakých ako sú uvedené vo variante B) a precvičenie si kódovania a šifrovania údajov pomocou rôznych matematických funkcií (napr. lineárnej, absolútnej hodnoty, modulo, počtu cifier, ciferného súčtu).

Žiakom poskytneme pracovné listy 3 a 4 (z prílohy I 6.1), do ktorých budú zaznamenávať do tabuliek vstupy a výstupy svojho individuálneho experimentovania s čiernymi skrinkami vo forme appletov. Odporúčame nasledovný priebeh výučby:

- Necháme žiakov samostatne experimentovať s čiernymi skrinkami vo forme appletov. Tí do tabuľky pracovného listu zapíšu zadané vstupy a zodpovedajúce výstupy jednotlivých čiernych skriniek a nakoniec aj pravidlá fungovania uvedených čiernych skriniek. Na základe zaznamenaných dvojíc vstupov a výstupov pre vybranú čiernu skrinku môžu žiaci formulovať hypotézu o princípe fungovania čiernej skrinky a ďalším experimentovaním overiť platnosť vyslovenej hypotézy.
- Potom necháme žiakov vo dvojiciach prediskutovať svoje zistenia o predpisoch čiernych skriniek zaznamenaných v individuálnych pracovných listoch.
- V závere zhrnieme výsledky jednotlivých úloh a s celou triedou prediskutujeme zistené predpisy a porovnáme ich s predpismi uvedenými v zdrojovom texte

Scratch appletu s 12 čiernymi skrinkami. V prípade appletu s 5 čiernymi skrinkami riešenie vyvoláme zadaním reťazca **?rcs<*n*>**, kde $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, do ľubovoľného textového políčka so vstupmi.

Obzvlášť zaujímavá je posledná, piata čierna skrinka z appletu so súborom 5 čiernych skriniek, ktorá sa dá použiť pri overovaní nutnej podmienky správnosti programu na výpočet koreňov kvadratickej rovnice a nacvičovaní testovacích údajov.

Experimentovanie žiakov s čiernymi skrinkami vo forme appletov môžeme usmerniť vhodnými otázkami, napr.

- *Akého typu sú vstupy čiernej skrinky, akého výstupy?*
- *Aký vstup zadáte teraz?*
- *Aký výstup očakávate na zadaný vstup?*
- *Akú funkciu predstavujú usporiadané dvojice vstupov a výstupov (rastúcu, periodickú, ...)?*
- *Mení sa výstup rovnomerne pri rovnakom zvyšovaní hodnôt vstupov (lineárna funkcia)? Aký sme dostali výstup pri vstupe 0? O koľko sa zvýši/zníži výstup pri zmene vstupu o 1?*
- *Platí predpokladaný predpis aj pre väčšie (napr. dvojciferné, trojciferné) čísla?*
- *Akú máte hypotézu o princípe fungovania čiernej skrinky?*

Všeobecné poznámky k priebehu výučby

Celkovo vo všetkých troch variantoch metodiky výučby je veľmi dôležité upozorniť žiakov, že tieto predpisy sú len jednou z možností, nie jednoznačným riešením princípu fungovania jednotlivých čiernych skriniek. Skutočné pravidlo zistíme až odhalením čiernej skrinky. Kritické myslenie žiakov môžeme rozvíjať diskusiou k riešeniam čiernych skriniek. Napr. správanie prvej čiernej skrinky zo súboru 19 čiernych skriniek z variantu A môže byť popísané funkciou $f(x) = x$. Ale pri vstupoch, napr. $x < 100$, vyhovuje riešeniu aj iné funkcie, napr. $f(x) = x \bmod 100$, či $f(x) = 100 - \mathrm{abs}(x - 100)$. Postupnosť čísel 1, 2, ... môžeme doplniť ľubovoľným číslom, čo vieme žiakom zdôvodniť alebo aspoň ukázať, že dvomi bodmi v rovine vieme viesť jedinú priamku, ale nekonečne veľa parabol. V tabuľke 4 sú uvedené kvadratické a lineárne funkcie zodpovedajúce rôznym trojiciam bodov vypočítané appletom (http://www.solvemymath.com/online_math_calculator/interpolation.php).

Tabuľka 14. Kvadratické a lineárne funkcie zodpovedajúce súradniciam troch bodov.

Súradnice 3 bodov	[1, 1], [2, 2], [3, **2**]	[1, 1], [2, 2], [3, **3**]	[1, 1], [2, 2], [3, **4**]
Zodpovedajúca funkcia	$-\frac{x^2-5\,x+2}{2}$	x	$\frac{x^2-x+2}{2}$

Žiakom, ktorí poznajú mocninové funkcie, môžeme ukázať, že doplnenie nasledujúceho člena postupnosti čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8 nemusí mať jediné riešenie číslo 13, ako sa to predpokladá v psychologických testoch, ktoré merajú schopnosť človeka zistiť prvoplánový vzťah medzi číslami (číslo je rovné súčtu predchádzajúcich dvoch čísel). Pomocou vyššie uvedeného appletu nájdeme pre nasledujúce číslo postupnosti 12 polynóm $\frac{2\,x^6-51\,x^5+515\,x^4-2595\,x^3+6863\,x^2-8694\,x+4320}{360}$, resp. pre číslo 14 polynóm $\frac{x^6-24\,x^5+230\,x^4-1110\,x^3+2829\,x^2-3486\,x+1680}{120}$, ktorý popisuje prvých 7 členov postupnosti čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 12, resp. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 14.

Okrem rozvoja slovnej kreativity pri pomenúvaní čiernych skriniek môžu žiaci, prípadne ich učitelia, prejaviť kreativitu pri vytváraní vlastných, obmenených či parametrizovaných čiernych skriniek v tlačenej alebo elektronickej podobe, napr. remixovaním Scratch projektu[3].

Pre skvalitnenie vlastnej výučby učiteľa a tiež pre skvalitnenie predloženej metodiky je dôležité urobiť reflexiu vlastnej výučby a tiež poskytnúť autorom metodiky spätnú väzbu k vytvorenej metodike spolu s výsledkami žiakov (napr. vyplnenými pracovnými listami, riešeniami didaktických testov, žiackymi projektmi, dotazníkmi, videozáznamami z výučby). Po ukončení výučby by mal učiteľ urobiť reflexiu tejto výučby, napr. zodpovedaním si nasledovných otázok:

- *Ktoré z uvedených čiernych skriniek žiaci zvládli a s ktorými mali problém?*
- *Ako zvládli učivo šikovnejší, resp. slabší žiaci?*
- *V čom bola príčina nesprávneho/nepresného riešenia (matematická náročnosť úlohy, nízka úroveň formálneho vyjadrovania sa, nedostatok času, nezáujem)?*
- *Bola vytvorená priaznivá tvorivá atmosféra pri výučbe?*

[3] Scratch projekt s 12 číselnými čiernymi skrinkami: http://scratch.mit.edu/projects/17048661/.

- *Prejavili žiaci záujem o odhaľovanie či tvorbu ďalších čiernych skriniek?*
- *Aké zaujímavé postrehy či nápady na čierne skrinky priniesli žiaci?*

Pozorovania a zistenia z výučby

V novembri 2014 sa realizovala dvojhodinová výučba metódy čiernej skrinky v dvoch triedach (kvintách) jedného osemročného gymnázia. Vo výučbe s celou triedou učiteľka použila variant A metodiky výučby s použitím vytlačených pracovných listov. Na začiatku výučby vysvetlila pojem čiernej skrinky, potom hrala rolu čiernej skrinky, keď do niektorých riadkov tabuľky vpisovala vstupy a im zodpovedajúce výstupy, a diskutovala so žiakmi, ako by doplnili hodnoty neuvedených vstupov či výstupov. Žiaci, ktorí riešia matematické a informatické súťaže, reagovali pohotovejšie a presnejšie. Ďalej žiaci individuálne riešili ostatné čierne skrinky. Viacerí z nich boli zaskočení požiadavkou primerane pomenovať zodpovedajúce predpisy čiernych skriniek. Na príkladoch žiakmi nevhodne pomenovaných čiernych skriniek učiteľka ukázala na dôležitosť správneho pomenovania nielen čiernych skriniek, ale aj iných objektov (premenných, procedúr), ktoré je veľmi nápomocné pri riešení problémov. V závere hodiny bola žiakom predstavená a demonštrovaná hra Biliardové tajomstvo (s jednou a následne s troma prekážkami) z variantu B, ktorú dostali za domácu úlohu zahrať si ju vo dvojiciach. Na druhej hodine učiteľka najprv so žiakmi prediskutovala riešenia hry Biliardové tajomstvo a potom ich nechala individuálne odhaľovať 12 čiernych skriniek pomocou interaktívneho Scratch appletu. Na záver hodiny si žiaci vzájomne porovnali výsledky aj rôzne zápisy týchto výsledkov a na domácu úlohu dostali vyriešiť zvyšné čierne skrinky.

V dotazníku učiteľka uviedla, že žiaci pracovali prevažne jednotlivo, prípadne vo dvojiciach a ona bola aktívna len pri uvádzaní metódy čiernej skrinky a pri sumarizácii a hodnotení výsledkov žiakov. Zaujímavé pre ňu bolo sledovať, ako žiaci postupujú pri riešení úloh: niektorí preskakovali úlohy, ktoré hneď nevedeli vyriešiť. Niektorí slabší žiaci stratili už pri 6. čiernej skrinke (variant A) vnútornú motiváciu riešiť ďalšie úlohy. Vo variante A boli pre žiakov náročné skrinky 12 (nepreberal sa ešte súčet čísel v dvojkovej sústave) a 19 (nečakali pravidlo zložené z dvoch pravidiel – jedného pre samohlásky a druhého pre spoluhlásky). V riešení 12. čiernej skrinky (variant C) žiaci nepoužili absolútnu hodnotu, ale uviedli pravidlo $y = x$ (pre $x \leq 50$) a pravidlo $y = 100 - x$ (pre $50 < x \leq 100$). Celkovo žiakov čierne skrinky zaujali (na úrovni áno pre variant A a na úrovni skôr áno pre variant C) a pokladajú ich riešenie za náročné (na úrovni skôr áno pre variant A a na úrovni áno pre variant C).

Učiteľka uviedla nasledovné bádateľské zručnosti, ktoré sa u žiakov rozvíjali počas realizácie danej metodiky:

- Formulovať hypotézu/teoretický model,
- používať technológie a matematiku počas skúmania,
- formulovať závery na základe dosiahnutých výsledkov,
- vysvetliť neočakávané výsledky – identifikovať možné zdroje chýb,
- prezentovať a obhajovať výsledky skúmania pred publikom.

Učiteľka považuje obsah učiva za primeraný, dokonca navrhuje pridať 3 – 4 čierne skrinky pre najšikovnejších žiakov. Konštatuje, že žiaci neradi argumentujú svoje riešenia v slovnej či písomnej podobe, lebo tieto riešenia považujú za zrejmé. V interaktívnych Scratch appletoch odporúča ošetriť hraničné hodnoty pre vstupy a výstupy čiernych skriniek.

Na základe žiakmi vyplnených 13 pracovných listov pre variant A môžeme uviesť nasledovné výsledky:

- Najnižšiu úspešnosť riešenia dosiahli žiaci pri čiernych skrinkách 19 (reťazec s obrátenými spoluhláskami), 12 (súčet dvojkových čísel) a 14 (palindromickosť reťazca) s úspešnosťami riešenia 1/13, 6/13, 7/13. Je zaujímavé, že žiaci považovali za najťažšie tiež tieto čierne skrinky, ale v inom poradí, 12 a 14 s 19. Odpovede žiakov na to, ktorú úlohu považujú za najľahšiu, mali približne rovnaké početnosti.
- Žiaci uvádzali v rôznej miere výstižné názvy čiernych skriniek, niektoré z nich boli veľmi zaujímavé, iné sa objavili pri viacerých rôznych čiernych skrinkách (napr. 1 ($y = x$): **reproduktor**, **zrkadlo**; 2 ($y = x + 1$): **pridávač**, **posúvač**; 3 ($y = 10 – x$): **doplňovák**; 4 ($y = 6x$): **šestorák**; 8 ($y = x$ mod 3): **vlnič**; 9 ($z = x + y$): **súčtovateľ**; 16 (y = počet hrán grafu): **výplet**; 17 (y = obrátený reťazec): **zrkadlo**; 18 (y = nahradenie znakov nasledovníkmi): **posunovač**; 19 (y = reťazec s obrátenými spoluhláskami): **nevedko**).
- V niektorých čiernych skrinkách žiaci uviedli iné ako autorské riešenia (napr. 11 (y = dvojkový nasledovník): doplnenie $6 = 1000_2$, $7 = 1001_2$, pravidlo: ak párne vynásob 10, inak pričítaj 1; 12 (z = dvojkový súčet): pravidlo: $x + y$, pre $x \neq y$, resp. pravidlo: $10x$, pre $x = y$, 14 (y = palindromickosť reťazca): pravidlo: ak rovnaké

znaky, tak 1, inak 0, alebo pravidlo: ak rovnaké prvé a posledné znaky, tak 1, inak 0; 15 (y = hrany grafu): pravidlo: vonkajšie hrany).

- Z 13 žiakov 10 uviedli, že tieto úlohy boli pre nich zaujímavé a primerané, a tiež, že majú chuť aj nabudúce odhaľovať čierne skrinky.
- Na otázku, čo sa naučili pri riešení týchto úloh, žiaci odpovedali veľmi rôznorodo, napr. „spolupráca tíme“ (3), „rozvoj logického myslenia“ (3), „pohľad na veci z inej strany“ (2), „precvičenie si výpočtov s postupnosťami“ (2), „nácvik trpezlivosti“ (1), „zopakovanie si matematiky“ (1).
- U žiakov, ktorí nevyjadrili svoje riešenie matematickým predpisom ani slovným vysvetlením, bolo jedinou indíciou správnosti ich riešenia pomenovanie čiernej skrinky, resp. doplnenie jednej či viacero dvojíc vstupov a výstupov čiernej skrinky. Týmto pracovným listom sa dá diagnostikovať miera logického myslenia žiakov a tiež úroveň ich matematického vyjadrovania.

Experimentovanie 16 žiakov s appletom (variant C) prinieslo tieto výsledky:

- Najnižšie skóre dosiahli riešenia čiernych skriniek 8 (rovnaká cifra na mieste desiatok a jednotiek) a 9 (zaokrúhlenie nadol na desiatky).
- Traja žiaci mali úspešnosť riešenia 100 % a 10 žiakov úspešnosť nad 83 %.

Alternatívy metodiky

Pri príprave výučby metódy čiernej skrinky treba zohľadniť viaceré aspekty jej nasadenia vo výučbe:

- dôraz na metódu čiernej skrinky (rôznorodé čierne skrinky) alebo na informatické učivo (čierne skrinky zamerané na vybranú tému),
- časové možnosti (výber určitej podmnožiny z predložených čiernych skriniek),
- vekové zvláštnosti (spôsob podania čiernych skriniek),
- matematický aparát (výber čiernych skriniek s vybranými predpismi).

Je na samotnom učiteľovi, ktorý z variantov metodiky A, B, C vyberie, či si sám zostaví vlastný variant metodiky vytvorený redukciou, rozšírením či kombináciou uvedených variantov. Vo výučbe bežnej populácie žiakov odporúčame kombináciu variantu A a variantu C (s vybranými čiernymi skrinkami). Variant B pokladáme za vhodný pre výučbu informatiky nevyžadujúcu od žiakov znalosti matematických funkcií alebo pre mimoškolské vzdelávacie aktivity. Variant A v plnom rozsahu s 19 čiernymi skrinkami so záznamami ich správania odporúčame použiť len vo výučbe nadaných žiakov, pre ktorých je intelektuálnou výzvou individuálne alebo v skupinách zisťovať správanie uvedených čiernych skriniek za čo najkratší čas.

Po uvedení metódy čiernej skrinky a po vyriešení niekoľkých čiernych skriniek na jednej vyučovacej hodine sa dá k metóde čiernej skrinky vracať v rôznych témach školskej informatiky (napr. kódovanie, šifrovanie, testovanie programov, princípy aritmetiky počítača). Učiteľ alebo aj samotní žiaci môžu pripraviť, prípadne aj naprogramovať vlastné čierne skrinky so zameraním na vybranú tému (napr. na lineárnu funkciu, šifrovanie) a využiť ich, napr. pri tímových súťažiach typu Náboj.

V duchu teórie zóny najbližšieho vývoja stojí za to použiť v čiernych skrinkách aj funkcie, ktoré žiaci vedia popísať zatiaľ len slovne, lebo ich doposiaľ nemali formalizované (napr. funkcia modulo).

Pre šikovných žiakov môžeme vytvárať ďalšie typy čiernych skriniek, napr. s výstupom závislým aj od poradia zadaného vstupu, čiernych skriniek zložených z viacerých jednoduchých čiernych skriniek (s využitím zložených funkcií), čiernych skriniek s ďalšími typmi vstupov a výstupov, napr. zvuk, hmat, gesto (pri práci so žiakmi s poruchami zraku a sluchu, či na simulovanie týchto porúch u zdravých detí).

I7 – Vytvárame humorné kódy (jednoznačnosť kódovania a dekódovania)

<table>
<tr><td colspan="2">Tematický celok</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reprezentácie a nástroje – informácie
Algoritmické riešenie problémov – analýza problému</td></tr>
<tr><td>Cieľová skupina</td><td>Odhadovaný čas výučby</td></tr>
<tr><td>Prvý ročník SŠ</td><td>Dve vyučovacie hodiny</td></tr>
<tr><td>Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti</td><td>Kognitívne ciele</td></tr>
<tr><td>▪ Kódovať slová zreťazením kódov jednotlivých znakov.</td><td>▪ Vytvárať binárne kódy znakov pre zadané dvojice (trojice) slov, aby sa dosiahla rovnosť kódovania zadaných slov,
▪ zdôvodniť neexistenciu riešenia pre jednoduché prípady kódovania dvojíc slov,
▪ zdôvodniť potrebu zabezpečenia jednoznačnosti kódovania a dekódovania znakov a slov,
▪ aplikovať rôzne stratégie riešenia problémov (napr. hľadaj vzor, vyskúšaj a vylepši, vylučuj možnosti) pri tvorbe binárnych kódov znakov.</td></tr>
<tr><td>Bádateľské zručnosti</td><td>Didaktický problém</td></tr>
<tr><td>▪ Formulovať a overovať hypotézy o existencii binárneho kódovania znakov pre každú dvojicu rôznych slov s rovnakým kódovaním,
▪ určovať vzťahy medzi premennými veličinami na základe tabuliek s rôznymi kódmi znakov,
▪ argumentovať neriešiteľnosť vytvorenia binárneho kódovania znakov pre vybrané dvojice slov,
▪ formulovať závery o jednoznačnosti kódovania a dekódovania znakov a slov.</td><td>▪ Vo výučbe kódovania sa žiakom predkladajú hotové kódovacie systémy (napr. ASCII), v ktorých precvičujú kódovanie rôznych slov, pričom jednoznačnosť kódovania a dekódovania sa považuje za samozrejmosť.
▪ Prostredníctvom humorného kódovania majú žiaci možnosť heuristicky navrhovať vlastné kódovacie systémy, uvedomiť si riešiteľnosť problému nájdenia vhodného kódovania a potrebu jednoznačnosti kódovania a dekódovania znakov. Táto sa dá zabezpečiť rôznymi spôsobmi – rovnakou dĺžkou kódov znakov</td></tr>
</table>

	(ASCII), špeciálnym symbolom na oddelenie kódov znakov (Morseova abeceda), prefixovými bitmi na rozlíšenie typu (dĺžky) kódu znaku (UTF-8).
Didaktické materiálne prostriedky	Didaktické metódy a organizačné formy

▪ Pracovný list vo forme:
  ○ tlačenej, resp. elektronickej ako textový dokument (príloha I 7.1),
  ○ alebo interaktívneho excelovského zošita (príloha I 7.2),
▪ videoukážka riešenia nájdenia kódovania pre rovnosť slov `MAMA` = `OCKO` (príloha I 7.3).
	▪ Štruktúrované bádanie,
	▪ experimentovanie, heuristický rozhovor,
	▪ individuálna a skupinová forma práce.

Príprava na výučbu

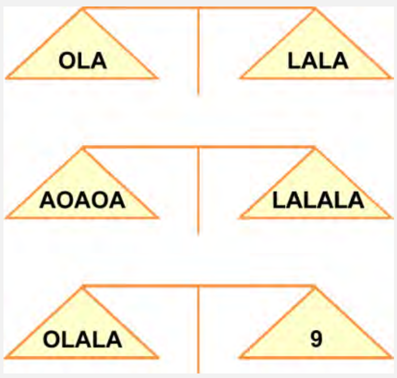
Pracovné listy

Učiteľ pripraví pre každého žiaka pracovný list v tlačenej forme (z prílohy I 7.1) alebo vo forme interaktívneho excelovského zošita so zabezpečenými hárkami. Interaktívny excelovský zošit, okrem 16 úloh uvedených aj v tlačenej forme, obsahuje 8 ďalších precvičovacích úloh. Interaktívny pracovný list poskytuje žiakovi spätnú väzbu a podporu pri riešení úloh a učiteľovi uľahčuje vyhodnotenie riešenia žiakov.

Zistenie a precvičenie predchádzajúcich vedomostí

Na predchádzajúcej vyučovacej hodine môže učiteľ zistiť a precvičiť potrebné vstupné vedomosti a zručnosti žiakov prostredníctvom úloh, napr.

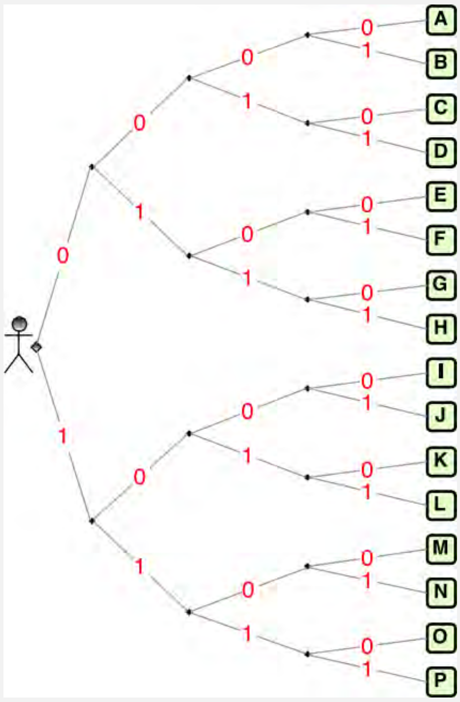
Na rovnoramenných váhach sme vážili slová pozostávajúce zo znakov {A, L, O}. Výsledky troch vážení sú zachytené na obrázku. Samostatne zistite hmotnosť znakov {A, L, O} a potom si vo dvojiciach navzájom ukážte a prediskutujte svoje postupy riešenia.



Poznámka: Úloha je zameraná na rozvoj rôznych stratégií riešenia problémov, metakogníciu, precvičenie unárneho kódovania.

Panáčik stojí na začiatku bludiska s rozvetvenými chodbami. Jeho úlohou je dostať sa od začiatku k miestam označeným samohláskami, kde sú schované poklady.

- Napíšte pre panáčika cestu od začiatku bludiska ku každej samohláske.
- Napíšte pre panáčika cestu od začiatku bludiska cez jednotlivé samohlásky až naspäť na začiatok bludiska.
- Je táto cesta jednoznačne zapísaná?



Poznámka: Úloha je zameraná na precvičenie binárneho kódovania cesty zreťazením znakov 0 a 1, uvedomenie si potreby jednoznačného zápisu cesty k jednotlivým písmenám, použitie binárneho stromu pri riešení úloh.

Priebeh výučby

Výučbu odporúčame realizovať podľa teórie učebného cyklu 5E (Zapoj sa, Skúmaj, Vysvetli, Rozpracuj/Rozšír, Vyhodnoť, angl. Engage, Explore, Explain, Elaborate/Extend, Evaluate).

Osnova výučby

- Motivačná ukážka (Zapoj sa).
- Samostatná práca žiakov (Skúmaj).
- Diskusia k riešeniu úloh a tvorba záverov (Vysvetli).
- Precvičovanie a zovšeobecňovanie učiva (Rozpracuj/Rozšír).
- Celkové zhrnutie a vyhodnotenie prebraného učiva (Vyhodnoť).

Motivačná ukážka

Na začiatku vyučovacej hodiny učiteľ ukáže využitie kódovania znakov na dvoch humorných príkladoch. Jedným je ukázanie rovnosti kódovania dvojice slov **JA** a **TY** (ako informatické vyznanie lásky, či vyjadrenie dôvery partnerovi) a druhým je ukázanie rovnosti kódovania trojice slov **DULA**, **KAKI** a **LIČI** (ako prejav rovnakého záujmu o tri uvedené druhy ovocia).

Predstaví žiakom kódy znakov {**A**, **J**, **T**, **Y**} priradením binárnych číslic, napr. **A** = **0**, **J** = **11**, **T** = **1**, **Y** = **10** a ukáže vytvorenie binárneho kódu slov **JA** a **TY** (**110**) zreťazením kódov jednotlivých znakov.

V druhom príklade učiteľ uvedie binárne kódy znakov **A** = **01**, **Č** = **0011110**, **D** = **111**, **I** = **1**, **K** = **1110**, **L** = **11**, **U** = **0011** a nechá žiakov vytvoriť kódy slov **DULA**, **KAKI** a **LIČI** a overiť rovnosť binárnych kódov týchto slov.

Po týchto ukážkach by mali žiaci pochopiť spôsob vytvárania kódov slov zreťazením kódov jednotlivých znakov, pričom kódy jednotlivých znakov sú navzájom rôzne a tiež by mali byť motivovaní pre vytváranie binárnych kódov znakov pre iné dvojice (trojice) slov.

Samostatná práca žiakov

V ďalšej časti žiaci samostatne riešia úlohy z pracovného listu. Odporúčame použiť interaktívny excelovský zošit (z prílohy I 7.2). V úlohe 1 majú žiaci vytvoriť binárne kódovanie znakov pre ukázanie rovnosti kódov slov **UČ** = **TU**. Riešenie tejto jednoduchej úlohy môžu žiaci dosiahnuť aj metódou pokus – omyl.

Pri riešení úlohy 2 (rovnosť kódov slov **MAMA** = **OCKO**) sa od žiakov očakáva systematickejší prístup s využitím rôznych stratégií riešenia problémov. V tejto úlohe sú žiaci vyzvaní uviesť viacero riešení, čo napomáha k rozvoju ich divergentného myslenia.

Po vyriešení prvých dvoch úloh je vhodné nechať žiakov vyriešiť úlohu 3, v ktorej majú urobiť predpoveď, či sa dá pre každú dvojicu slov nájsť vhodné binárne kódovanie, v ktorom by sa binárne kódy týchto slov rovnali.

Úlohy 4 a 5 (rovnosť kódov slov **ÚL** = **L** a **ANNA** = **MAMA**) nemajú riešenie. Žiaci majú prísť na to, že tieto úlohy nevedia vyriešiť, v lepšom prípade by mali uviesť, že vôbec neexistuje riešenie týchto úloh, a tiež to zdôvodniť patričnými argumentmi.

Úlohy 6 – 9 je vhodné nechať žiakov riešiť kolaboratívne vo dvojiciach. V úlohe 6 majú žiaci prísť na viaceré rôzne riešenia pri dekódovaní binárneho reťazca **11100111101** a v nepovinnej úlohe 7 majú vytvoriť binárne kódovanie znakov pre rovnosť slov, ktoré si sami vybrali. V úlohe 8 majú žiaci uviesť význam viacznačného kódovania znakov v praxi a v úlohe 9 navrhnúť spôsob binárneho kódovania znakov, ktoré by bolo jednoznačné pri dekódovaní binárneho reťazca.

Diskusia k riešeniu úloh a tvorba záverov

Po vyriešení úloh 1 až 9 prediskutujeme ich riešenia spoločne s celou triedou. V úlohách 1 a 2 upriamime pozornosť na počet riešení týchto úloh a tiež na rôzne dĺžky binárnych kódov slov v žiackych riešeniach (propedeutika ku komprimácii údajov). Vybraných žiakov necháme prezentovať a komentovať svoje riešenia úlohy 2, pri ktorej zdôrazníme použitie rôznych stratégií riešenia problémov podporené logickým usudzovaním. Ukážku priebehu autorského riešenia úlohy 2 spolu so sprievodným slovným komentárom uvádzame v záznamovom videu v prílohe I 7.3. V úlohe 2 sa môžu vyskytnúť žiacke riešenia s uvedením len jednej z číslic {`0`, `1`} (unárne kódovanie), ktoré by sme nemali zamietnuť, ale skôr využiť na okomentovanie ich algebrického riešenia, podobne ako pri prvej úlohe uvedenej v časti Príprava na výučbu.

Vyhodnotíme predpoklady žiakov o riešiteľnosti vytvorenia binárneho kódovania pre rovnosť kódov ľubovoľnej dvojice slov (uvedené v riešení úlohy 3) a porovnáme ich so závermi uvedenými v riešeniach úloh 4 a 5. Tieto úlohy sú výbornými indikátormi úrovne argumentačných schopností žiakov. V úlohe 4 sa dá neriešiteľnosť úlohy zdôvodniť tým, že dĺžka kódu slova je väčšia ako dĺžka kódu jeho podslova. V úlohe 5 sa dá ľahko vyvodiť, že znaky **`M`** a **`N`** musia mať rovnakú dĺžku kódov. Podľa pozície týchto znakov v oboch slovách sa dá ďalej vyvodiť, že majú aj rovnaké binárne kódy, čo je v rozpore s predpokladom, že všetky znaky majú navzájom rôzne binárne kódy. Tieto zdôvodnenia môže uviesť učiteľ sám alebo sa k ním dopracovať spoločne so žiakmi prostredníctvom usmerňujúcich otázok, napr. v úlohe 5: „Akú dĺžku binárnych kódov majú znaky **`M`** a **`N`**?“, „Aké budú binárne kódy posledných dvoch znakov slov **`ANNA`** a **`MAMA`**?“, „Aký záver možno urobiť na základe rovnosti binárnych kódov slov **`MA`** a **`NA`**?“. Diskusiu k riešiteľnosti by sme mohli rozšíriť otázkou „Podľa čoho by ste odhalili kódovaciu úlohu, ktorá nemá riešenie?“

V úlohe 6 dvojice žiakov uvedú počty riešení úlohy, na ktoré prišli. Na základe učiteľovej usmerňujúcej otázky „Ako z jedného riešenia úlohy vytvoríme ďalšie riešenie?“ by mohli žiaci dospieť k odpovedi, napr. „Nájdením dvojíc podslov s rovnakým kódovaním, napr. **`D`** = **`IL`**, **`D`** = **`LI`**, **`L`** = **`II`**, **`DA`** = **`KI`**, **`ČI`** = **`ULA`**, **`DČ`** = **`KAK`**“. Logicky na túto úlohu nadväzuje úloha 8 zameraná na uvedenie významu viacznačného kódovania v praxi. Okrem prípadu tvorby humorných kódov slov a prípadu zabezpečenia rôznych skupín kľúčov pre otvorenie rovnakého zámku smerujeme diskusiu k potrebe mať skôr jednoznačne ako viacznačne dekódovateľné binárne kódy.

Úloha 9 je východiskom pre ďalšie úlohy zamerané na rôzne spôsoby zabezpečenia jednoznačnosti kódovania a dekódovania. V nej žiaci uvedú svoje návrhy binárnych kódovaní znakov tak, aby bolo zabezpečené jednoznačné dekódovanie prijatých binárnych reťazcov.

Úlohu 7 považujeme za nepovinnú. Pre tvorivých žiakov môže byť veľkou výzvou a náročnou zábavou vytvárať binárne kódy pre rovnosť kódov vlastných dvojíc (trojíc) slov s určitým tematickým zameraním, napr. krstné mená, informatické pojmy.

Precvičovanie a zovšeobecňovanie učiva

V nasledujúcej časti hodiny precvičíme, rozšírime a zovšeobecníme prebrané učivo. Na precvičenie učiva odporúčame vybrať niektoré z úloh C1 – C8 uvedené v interaktívnom excelovskom zošite v hárkoch Cviko1 – Cviko3 (s rovnosťami slov **ANKA** = **KIKA**, **ANINA** = **MAMA**, **BABA** = **COOL**, **BABA** = **DEDO**, **BABA** = **DODO**, **UČENIE** = **RADOSŤ**, **TEACHER** = **PUPILS**, **RUKA** = **KRK** = **HLAVA**). Na rozšírenie a zovšeobecnenie učiva použijeme úlohy 10 – 14. V úlohe 10, resp. 12 majú žiaci za pomoci tabuliek dekódovať binárny reťazec zakódovaný v kódovaní ASCII, resp. UTF-8. Pred riešením úlohy 10 môžeme žiakom ukázať, že znaky môžeme zadávať aj pomocou Alt-sekvencií (napr. znak „A“ ako Alt-65). Úloha 11 je zameraná na dekódovanie znakov zakódovaných pomocou Morseovej abecedy oddelených od seba medzerami. Okrem precvičenia si dekódovania znakov sa žiaci v úlohách 10 – 12 oboznámia s viacerými známymi spôsobmi kódovania znakov a vyjadria sa k počtu riešení pri dekódovaní znakov pomocou uvedených troch kódovaní.

V úlohe 13 majú žiaci uviesť spoločné a odlišné črty kódovaní ASCII, Morseovej abecedy a UTF-8 (jednoznačnosť kódovania znakov a dekódovania slov, rôzne spôsoby kódovania: s rovnakou dĺžkou kódov znakov, s rôznou dĺžkou kódov znakov so špeciálnym oddeľovacím znakom alebo s rôznym prefixom pre 8-bitové a 16-bitové kódy znakov).

V úlohe 14 sú formou stromov zadané štyri rôzne kódovania znakov, pre ktoré majú žiaci riešiť čiastkové úlohy: kódovať slová a dekódovať binárne reťazce do znakov, určiť, ktoré z kódovaní majú jednoznačné kódy znakov a v ktorých kódovaniach sa dajú jednoznačne dekódovať slová, sformulovať závery o jednoznačnosti kódovania a dekódovania.

Celkové zhrnutie a vyhodnotenie prebraného učiva

Na záver vyučovacej jednotky sa žiaci vyjadria k tomu, čo nové sa naučili pri riešení všetkých uvedených úloh (úloha 15 v pracovnom liste) a do akej miery boli tieto úlohy pre nich zaujímavé a náročné (úloha 16 v pracovnom liste). Učiteľ formou diskusie zrekapituluje prebrané učivo:

- Pri kódovaní slov môžeme použiť niektoré zo známych kódovaní (napr. ASCII, UTF-8), ale tiež navrhnúť vlastné (binárne) kódovanie znakov.
- Kódovanie znakov má význam, keď je jednoznačné, t. j. rôznym znakom priradíme rôznu postupnosť symbolov z množiny {`0`, `1`}, a tiež keď je jednoznačné aj ich dekódovanie.
- Pri tvorbe vlastných binárnych kódov znakov, ktorými chceme dosiahnuť rovnaké kódovanie vybraných slov, si podobne ako pri rôznych logických hrách precvičujeme logické myslenie, rôzne stratégie riešenia problémov, a tiež zručnosti pri kódovaní znakov.
- Pre niektoré dvojice (trojice) slov neexistuje žiadne také binárne kódovanie znakov, aby sa dosiahlo rovnaké kódovanie týchto slov, pre iné dvojice (trojice) slov existujú viaceré riešenia.
- V niektorých úlohách zameraných na kódovanie znakov s rovnakým kódovaním vybraných slov vieme ľahko dokázať, že neexistuje riešenie (napr. pri kódovaní slova a jeho podslova).
- Vytváranie binárnych kódovaní znakov pre rovnosť dvoch či viacerých rôznych slov môže mať praktický význam len v niektorých prípadoch – ako intelektuálna zábava (rozvíjajúca logické myslenie, stratégie riešenia problémov a kreativitu) pri vytváraní humorných rovností vybraných slov a tiež pre tvorbu binárnych kódov znakov pre dve slová s rovnakým kódom, napr. pre riešenie problému poskytnúť dvom ľuďom prístup od jedných dverí, pričom každý z nich použije iné prístupové slová pre otvorenie dverí.
- Pre prax má význam také kódovanie znakov, pri ktorom je jednoznačné nielen kódovanie znakov, ale aj dekódovanie postupnosti kódov znakov. Jednoznačnosť dekódovania sa dá dosiahnuť rôznymi spôsobmi: rovnakou dĺžkou kódov znakov (napr. pri ASCII kódovaní) a pre rôzne dĺžky kódov znakov špeciálnym

oddeľovacím znakom (napr. pri Morseovej abecede) alebo rôznym prefixom pre rôzne typy znakov (napr. pri UTF-8 kódovaní).

- Pri zápise kódov znakov formou binárnych stromov sa jednoznačnosť dekódovania slov zabezpečí tak, že kód žiadneho znaku nie je prefixom (predponou) kódu iného znaku, t. j. na ceste od koreňa ku každému znaku sa nevyskytuje iný znak. Pri dekódovaní slov nemôže nastať situácia, keď nevieme prečítanému binárnemu kódu priradiť žiaden znak (napr. ak na konci čítania binárneho kódu sa nedostaneme k žiadnemu listu kódovacieho stromu). Ak táto situácia nastane, je to chyba (ale nie spôsobená samotným kódovaním).

Vedomosti žiakov môže učiteľ preveriť pomocou konceptuálneho testu (s viacerými možnými správnymi odpoveďami) obsahujúceho, napr. nasledovné úlohy (tučným písmom sú označené správne odpovede):

1) Dá sa pre každú dvojicu slov vytvoriť také binárne kódovanie znakov, aby mali obe slová rovnaký kód?

   a) Áno, vhodnou kombináciou núl a jednotiek sa dá vždy zostaviť taký kód.

   b) Nie, také kódovanie sa dá vytvoriť len pre slová s rovnakým počtom znakov.

   c) Nie, pre niektoré slová sa nedá vytvoriť také kódovanie.

   d) Nie, pre žiadne slová sa to nedá vytvoriť také kódovanie.

2) Ktoré z tvrdení možno vyvodiť z rovnosti binárnych kódov slov `ROSS` = `NORO`?

   a) Obe slová majú rovnaký druhý znak `O`, z čoho vyplýva, že ich počiatočné znaky `R` a `N` musia mať rovnaké binárne kódy.

   b) Kódy znakov `R` a `N` začínajú na rovnaký binárny znak.

   c) Kódy znakov `R` a `N` končia na rovnaký binárny znak.

   d) Súčet dĺžok kódov znakov `N`, `O` je dvakrát väčší ako dĺžka kódu znaku `S`.

3) Ktoré z tvrdení možno vyvodiť z rovnosti binárnych kódov slov `LOLO` = `OTTO`?

   a) Znaky `L` a `T` majú rovnakú dĺžku binárneho kódu.

   b) Znaky `L` a `T` majú rovnaké binárne kódy.

   c) Binárny kód slova `OTTO` je symetrický, t. j. číta sa rovnako spredu aj zozadu.

   d) Dĺžka kódu slova `LOLO` je párne číslo.

4) V kódovaní ASCII:

   a) Každý znak má kód rovnakej dĺžky.

   b) Za sebou idúce znaky anglickej abecedy majú binárne kódy za sebou idúce binárne čísla.

   c) Rovnaké kódy majú veľké aj malé znaky anglickej abecedy.

   d) Dekódovanie slov nie je jednoznačné, napríklad pri symetrických slovách, ktoré sa čítajú rovnako spredu aj zozadu.

5) V kódovaní Morseovej abecedy:

   a) Každý znak má kód rovnakej dĺžky.

   b) Za sebou idúce znaky anglickej abecedy majú binárne kódy za sebou idúce binárne čísla.

   c) Na zakódovanie skupín slov je okrem bodky a čiarky potrebný ďalší symbol.

   d) Dekódovanie slov nie je jednoznačné, lebo kódy niektorých znakov sú podmnožinou kódov iných znakov.

6) V kódovaní UTF-8:

   a) Každý znak má kód rovnakej dĺžky.

   b) Za sebou idúce znaky slovenskej abecedy majú binárne kódy za sebou idúce binárne čísla.

   c) Niektoré znaky slovenskej abecedy majú dĺžku kódu 8 bitov, iné dĺžku 16 bitov.

   d) Dekódovanie slov nie je jednoznačné, lebo jednotlivé znaky majú rôznu dĺžku kódov.

7) Ktoré z podmienok samostatne zabezpečia jednoznačné dekódovanie slov?:

   a) Rôznym znakom sú priradené rôzne bitové kódy.

   b) Kódy všetkých znakov sú jednoznačné a majú rovnakú veľkosť.

   c) Kódy všetkých znakov sú jednoznačné a kód žiadneho znaku nie je prefixom (predponou) kódu iného znaku.

   d) **Kódy všetkých znakov sú jednoznačné a medzi znakmi je použitý ďalší symbol – oddeľovač znakov.**

Pozorovania a zistenia z výučby

V októbri 2014 sa na 5 gymnáziách zapojených do projektu VEMIV realizovala výučba témy Humorné kódovanie podľa metodiky zo septembra 2014. Väčšina učiteľov vyučovala túto tému v rozsahu 45 minút so zameraním sa na riešenie úloh 1 – 5, 15 – 16 pracovného listu (očíslovaných podľa súčasnej verzie). Na jednom gymnáziu vďaka 90-minútovej dotácii žiaci riešili aj precvičujúce úlohy C1 – C7.

Výučba na gymnáziách prebiehala podľa metodikou vymedzenej línie – od ukážky vlastného (humorného) kódovania, cez riešenie kódovacích úloh, až k diskusii a zhrnutiu prebraného učiva. Jednotliví učitelia však zdôrazňovali vo svojej výučbe rôzne aspekty. Jedni rozšírili motivačnú časť o ukážku rôznych kódovaní webových stránok, iní vybrali len jednu z uvedených ukážok humorných kódovaní (**`JA`** = **`TY`**, resp. **`DULA`** = **`KAKI`** = **`LIČI`**). Niektorí učitelia pri riešení úlohy 1 usmerňovali žiakov, aby našli čo najkratšie kódovanie, pri riešení úlohy 2 nechali žiakov hľadať čo najviac riešení (niektorí žiaci ich našli až 6). Iní učitelia dali žiakom za dobrovoľnú domácu úlohu vyriešiť precvičujúce úlohy C1 – C8 či vymyslieť vlastnú úlohu na humorné kódovanie. Žiaci našli humorné kódovanie pre rovnosť kódov slov **`VODA`** = **`ZIMA`**, **`ČOKO`** = **`ČÍRO`**. Na základe tohto impulzu z praxe sme do aktuálnej verzie pracovného listu zaradili kreatívnu úlohu 7 na vytvorenie humorného kódu pre dve vlastné navrhnuté slová. Za použitie elektronickej verzie pracovného listu v ďalšej výučbe sa vyjadrili aj tí učitelia, ktorí pôvodne použili tlačenú verziu pracovného listu.

Podľa vyjadrení učiteľov aktivity uvedené v metodike žiakov zaujali. Názory učiteľov na obťažnosť úloh sa líšili: dvaja považovali aktivity za obťažné, ďalší dvaja za ľahké, resp. skôr ľahké. Za náročné pre žiakov pokladali hlavne schopnosť odpovedať na otázky na formuláciu záverov, zdôvodnenie (neriešiteľnosti úlohy), vyjadrenie vlastného názoru a postojov, metakognície (čo sa nové naučili, význam riešiť dané úlohy vo vzťahu k informatike). Realizované bádateľské aktivity majú podľa učiteľov pozitívny vplyv na porozumenie osvojovaných poznatkov žiakov, ktorí prejavovali radosť z vlastného objavovania poznatkov.

Učitelia uviedli nasledovné bádateľské zručnosti, ktoré sa u žiakov najviac rozvíjali počas realizácie výučby podľa danej metodiky:

- Formulovať závery na základe dosiahnutých výsledkov.
- Identifikovať problém, ktorý sa má skúmať.

Na základe žiakmi vyplnených 49 pracovných listov s úlohami 1 – 5, 15 – 16, C1 – C8 (očíslovaných podľa aktuálnej verzie pracovného listu) môžeme uviesť nasledovné výsledky:

- Úlohu 1 (na rovnosť kódov slov `UČ` = `TU`) úspešne vyriešilo 45 zo 47 žiakov. Zo 14 rôznych riešení najčastejším riešením úlohy bolo `Č` = `01`, `T` = `10`, `U` = `1` alebo jeho duálna podoba `Č` = `10`, `T` = `01`, `U` = `0`, ktoré uviedli 25 žiaci.
- Úlohu 2 (na rovnosť kódov slov `MAMA` = `OCKO`) úspešne vyriešilo 45 zo 48 žiakov. Podľa zadania mali žiaci nájsť viacero riešení úlohy – 1 žiak našiel 6 riešení, 4 žiaci 5 riešení, 12 žiakov 4 riešenia, 5 žiakov 3 riešenia, 6 žiakov 2 riešenia a 17 žiakov 1 riešenie. Z 52 rôznych riešení najčastejším riešením úlohy bolo `A` = `01`, `C` = `001`, `K` = `100`, `M` = `10`, `O` = `1` alebo jeho duálna podoba `A` = `10`, `C` = `110`, `K` = `011`, `M` = `01`, `O` = `0`, ktoré uviedli 30 žiaci. Len 4 žiaci uviedli 6 rôznych riešení pomocou unárneho kódovania, napr. `A` = `11`, `C` = `111`, `K` = `1111111`, `M` = `1111`, `O` = `1`.
- Úlohu 3, zameranú na vytvorenie predpovede a zdôvodnenie existencie vhodného binárneho kódovania pre každú dvojicu slov s rovnakým kódom slov, riešilo 34 žiakov, ktorí všetci uviedli správnu odpoveď nie. Druhú časť úlohy – zdôvodnenie uviedlo 24 žiakov, z toho len 13 žiaci uviedli relevantné zdôvodnenie – 7 z nich uviedli konkrétny kontrapríklad, 5 uviedli všeobecný kontrapríklad slova a jeho podslova, 1 uviedol všeobecný kontrapríklad dvoch jednoznakových slov. Nesprávne alebo nejasné zdôvodnenia uviedlo 11 žiakov – 8 z nich uviedli dôvod rôzny počet znakov slov, 1 uviedol dôvod rôznosť kódu jednotlivých znakov, 2 žiaci uviedli nejasné zdôvodnenia. Celkovo sa 9 žiakov odvolávalo na kontrapríklad z nasledujúcej úlohy 4, čo eliminovalo diagnostickú funkciu tejto

úlohy 3 (zistenia ich predpovedí). Preto sme v aktuálnej verzii pracovného listu uviedli úlohy 3 a 4 oddelene na rôznych stranách, resp. hárkoch.

- Úlohu 4 (na rovnosť kódov slov **ÚL** = **L**) riešilo 45 žiakov, 39 z nich uviedlo, že sa úloha nedá vyriešiť a 16 žiakov to aj správne zdôvodnilo.
- Úlohu 5 (na rovnosť kódov slov **MAMA** = **ANNA**) riešilo 35 žiakov, 29 z nich uviedlo, že úloha nemá riešenie (7 žiakov), resp. sa nedá vyriešiť (19 žiakov), resp. ju žiaci nevedia vyriešiť (3 žiaci). Len 8 žiakov uviedlo zdôvodnenie o neriešiteľnosti úlohy, z toho 3 žiaci uviedli správne argumenty a 5 žiaci nesprávne alebo neúplné argumenty.
- Na dotazníkovú úlohu 15, zameranú na uvedenie učiva, ktoré sa žiaci naučili pri riešení týchto úloh, odpovedalo 34 žiakov. Z toho 18 žiakov uviedlo problematiku kódovania informácií (7 z nich uviedlo kontext rovnosti kódovania slov), 5 jednoznačnosť kódovania, 6 použitie dvojkovej sústavy a 4 žiaci uviedli logické myslenie.
- Na dotazníkovú úlohu 6 (uvedenú len v predchádzajúcej verzii pracovného listu), zameranú na uvedenie významu riešiť uvedené úlohy, odpovedalo 35 žiakov. Najčastejšími odpoveďami boli: rozvoj logického myslenia (20 žiakov), súvis s kódovaním informácií (11 žiakov) a použitie dvojkovej sústavy, resp. binárneho kódu (9 žiakov).
- Na dotazníkovú úlohu 16, zameranú na zaujímavosť a náročnosť zadaných úloh, odpovedalo 33 žiakov. Pre 17 žiakov boli zadané úlohy zaujímavé, pre 15 normálne a pre 1 žiaka nudné. Pre 4 žiakov boli zadané úlohy ľahké, pre 22 primerané a pre 7 žiakov ťažké.
- Úlohu C1 (na rovnosť kódov slov **ANKA** = **KIKA**) úspešne vyriešilo 8 z 9 žiakov. Zo 4 rôznych riešení najčastejším riešením úlohy bolo **A** = `1`, **I** = `0`, **K** = `10`, **N** = `00`, ktoré uviedli 4 žiaci.
- Úlohu C2 (na rovnosť kódov slov **ANINA** = **MAMA**) úspešne vyriešilo 8 žiakov. Z 3 rôznych riešení najčastejším riešením úlohy bolo **A** = `1`, **I** = `11`, **M** = `10`, **N** = `0`, ktoré uviedlo 5 žiakov.

- Úlohu C3 (na rovnosť kódov slov **BABA** = **COOL**) úspešne vyriešilo 8 žiakov. Žiaci uviedli riešenie **A** = 01, **B** = 10, **C** = 100, **L** = 001, **O** = 1 alebo jeho duálnu podobu **A** = 10, **B** = 01, **C** = 011, **L** = 110, **O** = 0.
- Úlohu C4 (na rovnosť kódov slov **BABA** = **DEDO**) úspešne vyriešili 2 z 5 žiakov. Žiaci uviedli riešenie **A** = 10, **B** = 01, **D** = 0, **E** = 11, **O** = 0110.
- Úlohu C5 (na rovnosť kódov slov **BABA** = **DODO**) úspešne vyriešilo 8 žiakov. Z 3 rôznych riešení najčastejším riešením úlohy bolo **A** = 10, **B** = 1, **D** = 11, **O** = 0, ktoré uviedlo 5 žiakov.
- Úlohu C6 (na rovnosť kódov slov **UČENIE** = **RADOSŤ**) úspešne vyriešilo 8 žiakov. Z 3 rôznych riešení najčastejším riešením úlohy bolo **A** = 11, **Č** = 01, **D** = 010, **E** = 101, **I** = 00010, **N** = 011, **O** = 110, **R** = 10, **S** = 001, **Ť** = 0101, **U** = 1, ktoré uviedlo 5 žiakov. Najkratšie riešenie uviedol 1 žiak **A** = 1, **Č** = 001, **D** = 00, **E** = 11, **I** = 10, **N** = 010, **O** = 111, **R** = 0, **S** = 0101, **Ť** = 011, **U** = 01.
- Úlohu C7 (na rovnosť kódov slov **TEACHER** = **PUPILS**) úspešne vyriešilo 7 žiakov. Z 3 rôznych riešení najčastejším riešením úlohy bolo **A** = 0, **C** = 100, **E** = 11, **H** = 011, **I** = 010, **L** = 001, **P** = 1, **R** = 0100, **S** = 1110100, **T** = 10, **U** = 01, ktoré uviedli 4 žiaci.
- Úlohu C8 (na rovnosť kódov slov **RUKA** = **KRK** = **HLAVA**) nevyriešil nikto z 3 žiakov.
- Z riešení úloh C1 – C7 sme zistili spoluprácu dvojice a pätice žiakov, ktoré mali v skupinách rovnaké riešenia, ale zároveň rôzne riešenia medzi skupinami.

Celkovo konštatujeme, že žiaci v pracovných listoch nevypĺňali dôsledne všetky polia v riešení úloh, čo neumožnilo učiteľovi získať patričné informácie o vedomostiach žiakov, ktoré by mohol využiť pri formatívnom a sumatívnom hodnotení učebných výsledkov žiakov. Preto pri ďalších overeniach metodiky odporúčame učiteľom, aby vyžadovali od žiakov dôsledne vypĺňanie pracovných listov.

Vzhľadom na viaceré faktory (odporúčania učiteľov, výsledky žiakov, rozšírenie pracovného listu o ďalšie úlohy) sme upravili časovú dotáciu výučby podľa aktuálnej metodiky na 90 minút.

Alternatívy metodiky

Ak nemáme zámer venovať sa podrobnejšie problematike viacznačných kódov s rozvíjaním stratégií riešenia problémov, môžeme z predloženej metodiky vybrať len niektoré úlohy na viacznačné kódovanie a viac sa venovať jednoznačnému kódovaniu a viacerým jeho podobám. Konkrétne, po ukážke viacznačného binárneho kódovania znakov pre rovnosť slov `JA` = `TY` a po vyriešení úlohy 1 (`UČ` = `TU`) žiakmi vedieme s nimi diskusiu o problematike jednoznačnosti kódovania a dekódovania znakov. Potom necháme žiakov vyriešiť úlohu 9 zameranú na vytvorenie návrhu ako zabezpečiť jednoznačnosť dekódovania binárneho reťazca, a ďalšie úlohy 10 – 14 zamerané na precvičenie dekódovania textov pomocou rôznych kódovaní (ASCII, Morseova abeceda, UTF-8) smerujúce k vysloveniu záveru k jednoznačnosti kódovania a dekódovania znakov.

Okrem uvedeného variantu s oddelenými etapami 2 a 3 – samostatnej práce a diskusie – môžeme viesť krátku diskusiu so žiakmi po každom samostatnom vyriešení niekoľkých úloh a na konci ich nechať urobiť závery k problematike jednoznačnosti kódovania a dekódovania znakov a slov.

V náročnejšom variante metodiky necháme žiakom priestor na riešenie úloh C1 – C8 z interaktívneho excelovského zošita a na tvorbu binárnych kódov pre vlastné dvojice (trojice) slov (úloha 7). Vedieme ich k tomu, aby o svojich riešeniach vzájomne diskutovali, aby ich optimalizovali, vyslovovali a overovali hypotézy a nakoniec aj závery týkajúce sa zabezpečenia jednoznačnosti kódovania a dekódovania znakov. Zadanie úlohy 11 môžeme rozšíriť o navrhnutie binárneho kódovania Morseovej abecedy (napr. bodka = `1`, čiarka = `111`, medzera medzi bodkami a čiarkami v znaku = `0`, medzera medzi znakmi = `000`, medzera medzi slovami = `0000000`). Žiakov môžeme nechať prediskutovať aj otázku jednoznačného dekódovania slov zapísaných v unárnom kódovaní a tiež využitie unárneho kódovania.

Pri vyhodnocovaní žiackych riešení je možné okrem vyplnených excelovských zošitov použiť videozáznam aktivít žiaka na monitore zachycujúci nielen výsledok, ale celý postup riešenia úlohy, čo poskytne učiteľovi viac informácií o myšlienkových pochodoch žiakov.

Pri výučbe nadaných žiakov by sme mohli problematiku kódovania uvedenú v tejto metodike rozšíriť a nechať žiakom preskúmať ďalšie aspekty kódovania, napr. komprimáciu a frekvenčnú analýzu (Huffmanov kód), či tvorbu kódov identifikujúcich, resp. aj opravujúcich určitý počet chýb pri prenose správy komunikačným kanálom (Hammingova vzdialenosť kódu).

I8 – Odhaľujeme tajomstvá textových súborov

<table>
<tr><td colspan="2">Tematický celok</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reprezentácie a nástroje – informácie
Softvér a hardvér – práca so súbormi a priečinkami</td></tr>
<tr><td>Cieľová skupina</td><td>Odhadovaný čas výučby</td></tr>
<tr><td>Druhý ročník SŠ</td><td>Jedna vyučovacia hodina</td></tr>
<tr><td>Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti</td><td>Kognitívne ciele</td></tr>
<tr><td>▪ Vytvárať a upravovať textové súbory,
▪ zobraziť obsah súboru v šestnástkovom zápise,
▪ zistiť veľkosť textového súboru v operačnom systéme.</td><td>▪ Opísať vlastnými slovami pojem kódovacia tabuľka a uviesť príklady aspoň 3 kódovacích tabuliek (napr. ASCII, Windows CP1250, ISO 8859-2, UTF-8),
▪ vysvetliť a rozlišovať pojmy veľkosť súboru a veľkosť súboru na disku,
▪ vysvetliť pojem označenie poradia bajtov (angl. Byte Order Mark, skr. BOM) ako skupinu špeciálnych znakov na začiatku súboru,
▪ vysvetliť pojem znak(y) konca riadkov v textových súboroch a rozlišovať tieto znaky v rôznych operačných systémoch (napr. CR, LF, CR+LF),
▪ vysvetliť pojem klaster (angl. cluster) v danom súborovom systéme,
▪ vypočítať veľkosť súboru na disku na základe veľkosti súboru a veľkosti klastra.</td></tr>
<tr><td>Bádateľské zručnosti</td><td>Didaktický problém</td></tr>
<tr><td>▪ Formulovať a overovať hypotézy o uložení textových súboroch v rôznych kódovaniach v rôznych operačných systémoch,
▪ určovať vzťahy medzi premennými veličinami na základe tabuliek s rôznym obsahom textových súborov v rôznych kódovaniach v rôznych operačných systémoch,</td><td>▪ Problematika kódovania znakov sa nezvykne vyučovať v súvislosti s uložením znakov v textových súboroch. Nevenuje sa patričná pozornosť vnútornej štruktúre textových súborov s rôznymi kódovaniami a tiež pojmu klaster (ako základnej alokačnej jednotky) a s ním súvisiacim pojmom veľkosť súboru na disku.</td></tr>
</table>

▪ Formulovať závery o faktoroch ovplyvňujúcich veľkosť textového súboru a veľkosť textového súboru na disku.	▪ Prostredníctvom aktivít tejto metodiky majú žiaci možnosť experimentovaním preskúmať štruktúru textových súborov s rôznym obsahom s rôznym kódovaním a uložených v rôznych operačných systémoch. Týmto môže žiak hlbšie porozumieť pojmom kódovacia tabuľka, označenie poradia bajtov, znaky konca riadkov, klaster a tiež rozvíjať bádateľské zručnosti súvisiace s experimentovaním, tvorbou hypotéz a záverov.
Didaktické materiálne prostriedky	Didaktické metódy a organizačné formy
▪ Pracovný list v 3 alternatívach (prílohy I 8.1, I 8.2, I 8.3) ▪ Pracovné súbory v archíve (príloha I 8.4) ○ s rôznym kódovaním (v priečinku subory12), ○ pre rôzne operačné systémy (v priečinku subory3), ○ s rôznymi veľkosťami (v priečinku subory4).	▪ Štruktúrované, resp. nasmerované bádanie, ▪ experimentovanie, heuristický rozhovor, ▪ individuálna a skupinová forma práce.

Príprava na výučbu

Programy (applety), pracovné listy a pracovné súbory

Na výučbu potrebujeme:

- mať inštalovaný textový editor (napr. Poznámkový blok, PSPad) na vytváranie textových súborov a ich ukladanie v rôznych kódovaniach a program/applet na prehliadanie textových súborov v šestnástkovovm kóde (napr. PSPad, http://www.webhex.net/, debug.exe),
- pracovný list (v elektronickej, či tlačenej podobe) pre každého žiaka umožňujúci robiť predpovede, zaznamenávať údaje z experimentovania, tvoriť závery – podľa úrovne žiakov a vymedzeného času vyberieme jednu z troch alternatív náročnosti (**A**: žiak vytvára pracovné súbory, zapisuje do tabuliek svoje zistenia pri skúmaní týchto súborov, argumentuje a robí závery, **B**: žiak zapisuje do tabuľky svoje zistenia pri skúmaní pracovných súborov, argumentuje a robí závery, **C**: žiak

na základe hodnôt zapísaných v tabuľkách argumentuje a robí závery), ak je to možné, odporúčame použiť alternatívu B,

- pracovné súbory pre alternatívu B pracovného listu, ktoré sú uložené v priečinkoch subory12 (súbory s rôznym kódovaním), subory3 (súbory pre rôzne operačné systémy) a subory4 (súbory s rôznymi veľkosťami) prílohy I 8_4.

Zistenie a precvičenie predchádzajúcich vedomostí

Predchádzajúce vedomosti žiakov môžeme zistiť vstupným konceptuálnym testom so štyrmi otázkami a úlohou 0, ktoré sú súčasťou pracovného listu:

I1: Akú veľkosť má textový súbor obsahujúci 6 znakov „košice“? Zdôvodnite svoju odpoveď.

I2: Zdôvodnite, prečo sa na niektorých webových stránkach nezobrazia správne znaky s diakritikou.

I3: Po skopírovaní textového súboru na webový server sa stalo, že tento súbor mal inú veľkosť ako pôvodný súbor. Uveďte možné príčiny.

I4: O koľko bajtov sa zníži voľná kapacita disku po vytvorení a uložení textového súboru s veľkosťou 100 B? Zdôvodnite svoju odpoveď.

Úloha 0: Kým sa pustíme do skúmania textových súborov, poupratujme si vedomosti, ktoré máme o tejto téme. Do prvého stĺpca tabuľky uveďte, **čo už viete** o textových súboroch (ich spôsoboch uloženia na disku, ich veľkosti ...). Do druhého stĺpca uveďte, **čo nové by ste sa chceli naučiť** o textových súboroch.

Otázky I1 a I2 mapujú znalosti pojmu kódovacia tabuľka, otázka I3 pojem znak(y) konca riadkov v rôznych operačných systémoch a otázka I4 pojem klaster. Úloha 0 slúži na občerstvenie a zhrnutie známych poznatkoch o textových súboroch a ich kódovaní a tiež na prejavenie záujmu o získanie nových, či vysvetlenie už preberaných, ale nepochopených poznatkov. Odporúčame ju realizovať individuálne, následne vo dvojiciach a napokon uzavrieť diskusiou s celou triedou.

Priebeh výučby

Výučbu odporúčame realizovať ako štruktúrované bádanie, kde žiakov uvedieme do problému a poskytneme im postup bádania, ktorý je zachytený v pracovnom liste alternatíva B. Žiakov usmerňujeme, aby jednotlivé problémy skúmali najprv individuálne a až následne s našou podporou (hlavne formou usmerňujúcej diskusie) dospeli k vlastným záverom.

Pri rozvíjaní bádateľských zručností je veľmi dôležité, aby žiaci **dôsledne vypĺňali** pracovné listy, na čo by sme mali dohliadnuť.

Po vstupnom konceptuálnom teste a riešení úlohy 0 uvedieme, že existuje viacero kódovaní textov, ktoré ideme ďalej hlbšie skúmať (napr. kód ASCII pre kódovanie textov bez diakritiky, Windows CP1250 používaný v OS Windows, či v súčasnosti najrozšírenejší kód UTF-8). Žiakom postupne predkladáme na riešenie päť úloh z pracovného listu alternatíva B. Po nich necháme žiakov vyplniť výstupný konceptuálny test a stručný hodnotiaci dotazník.

Úloha 1 je zameraná na preskúmanie veľkosti textových súborov uložených v rôznych kódovaniach (ANSI[4], Unicode little/big endian (UTF-16 LE/BE), UTF-8).

V podúlohe 1a majú žiaci zistiť veľkosť textových súborov uložených v priečinku subory12 archívu I 8.4, ktoré obsahujú jedno slovo („košice“, „kosice“, „čaša“, „casa“ a „“) v uvedených kódovaniach a do pripravenej tabuľky 1 zapísať zistené hodnoty.

Tabuľka 15. Zistené veľkosti súborov s rôznym obsahom v rôznych kódovaniach (riešenie).

Kódovanie / Veľkosť	„košice“	„kosice“	„čaša“	„casa“	„“
ANSI (Windows CP1250)	6	6	4	4	0
UTF-16 LE	14	14	10	10	2
UTF-16 BE	14	14	10	10	2
UTF-8	10	9	9	7	3

Po vyplnení tabuľky zistenými veľkosťami súborov majú žiaci v podúlohe 1b uviesť vlastné závery o veľkosti textových súborov v rôznych kódovaniach. V následnej spoločnej diskusii so žiakmi môžeme skonštatovať prinajmenšom to, že veľkosti súborov sa líšia v rôznych kódovaniach, že v kódovaní Windows CP1250 majú súbory menšiu veľkosť ako v ostatných kódovaniach, že súbor s prázdnym slovom má nenulovú veľkosť v kódovaniach UTF-16 LE/BE a UTF-8.

V podúlohe 1c majú žiaci uviesť, v čom vidia dôvody rozdielu veľkostí textových súborov. Tu očakávame predpoklady žiakov, ktoré sa overia alebo vyvrátia pri riešení nasledovnej úlohy 2.

Úloha 2 je zameraná na preskúmanie štruktúry textových súborov v kódovaniach Windows CP1250, UTF-16 LE/BE a UTF-8. V podúlohe 2a majú žiaci pomocou programu

[4] Označenie ANSI ako kódovania je nepresné. Niektoré programy, ako napr. Poznámkový blok, ním označujú kódovanie Windows CP 1250. V zámorí je zaužívané označenie ANSI pre kódovanie Windows CP 1252.

PSPad (prípadne http://www.webhex.net/) zistiť a do tabuľky zapísať šestnástkové zápisy obsahu textových súborov obsahujúcich jedno slovo („čaša“, „casa“ a „“) uložených v priečinku subory12 archívu I 8.4. V tabuľke 2 je uvedené riešenie podúlohy 2a.

Tabuľka 16. Zistené šestnástkové zápisy obsahu súborov v rôznych kódovaniach (riešenie).

Kódovanie / Obsah	„“	„čaša“	„casa“
Windows CP1250		E8 61 9A 61	63 61 73 61
UTF-16 LE	FF FE	FF FE 0D 01 61 00 61 01 61 00	FF FE 63 00 61 00 73 00 61 00
UTF-16 BE	FE FF	FE FF 01 0D 00 61 01 61 00 61	FE FF 00 63 00 61 00 73 00 61
UTF-8	EF BB BF	EF BB BF C4 8D 61 C5 A1 61	EF BB BF 63 61 73 61

V podúlohe 2b majú žiaci na základe štúdia zistených údajov zaznamenaných do tabuľky 2 uviesť vlastné závery o štruktúre textových súborov v uvedených kódovaniach.

Pozorovaním stĺpca s kódovaniami prázdneho reťazca „“ môžu žiaci uviesť, že súbor s kódovaním Windows CP1250 nemá hlavičku, ostatné kódovania majú dvoj až trojbajtovú hlavičku, ktorá sa objavuje aj pri kódoch slov „čaša“ a „casa“. Pre kódovanie Windows CP1250 sa dá povedať, že každý znak je kódovaný 1 bajtom[5]. Kódovania UTF-16 majú 2-bajtovú hlavičku a každý znak je zakódovaný 2 bajtmi. Obe UTF-16 kódovania sa líšia poradím dvojíc bajtov. Kódovanie UTF-8 má 3-bajtovú hlavičku. Jeho zvláštnosťou oproti iným kódovaniam je, že na kódovanie slova s diakritikou potrebujeme viac bajtov ako na zakódovanie slova bez diakritiky. Znak s diakritikou je kódovaný 2 bajtmi a znak bez diakritiky len 1 bajtom.

Pri tvorbe týchto záverov môžeme žiakom pomôcť niektorými z nasledovných otázok:

- *Aký je rozdiel medzi kódovaním Windows CP1250 a ostatnými kódovaniami?*
    - Možná odpoveď: Špeciálne znaky na začiatku súboru.
- *Aký je vzťah medzi UTF-16 LE a UTF-16 BE?*
    - Možná odpoveď: Poradie bajtov kódovaných znakov je prehodené.

[5] V slovenčine písmená „ch“, „dz“, „dž“ sú uložené v počítači ako dva znaky, preto nemôžeme stotožniť pojem počet znakov slova a pojem dĺžka slova , čo vieme ilustrovať, napr. na slovách „**ch**lapec“, „via**ch**lasný“, „hr**dz**a“, „po**dz**ámok“.

- *Akým šestnástkovým kódom je kódované písmeno „a" v jednotlivých kódovaniach?*
    - Možná odpoveď: 61, 00 61 alebo 61 00.
- *Koľkými bajtmi sú kódované písmená v kódovaní UTF-16 LE a UTF-16 BE?*
    - Možná odpoveď: Dvoma bajtmi.
- *Prečo je v kódovaní UTF-8 rozdielna veľkosť súboru pri uložení slova „čaša" a slova „casa"?*
    - Možná odpoveď: Znaky bez diakritiky sa kódujú jedným bajtom a znaky s diakritikou dvoma bajtmi.
- *Ktoré faktory určujú veľkosť textového súboru uloženého v kódovaní Windows CP1250 (resp. UTF-16, UTF-8)?*
    - Možná odpoveď: Veľkosť textového súboru v kódovaní Windows CP1250 je rovná dĺžke slova, v kódovaní UTF-16 dvojnásobku dĺžky slova zväčšeného o 2, čo je počet špeciálnych znakov na začiatku súboru, v kódovaní UTF-8 je veľkosť súboru rovná dĺžke slova zväčšenej o počet znakov s diakritikou a o 3, čo je počet špeciálnych znakov na začiatku súboru.

Na konci môžeme zhrnúť žiacke závery a vysvetliť niektoré pojmy a princípy, napr.

- označenie poradia bajtov (angl. Byte Order Mark, skr. BOM):
    - FF FE pre UTF-16 LE,
    - FE FF pre UTF-16 BE,
    - EF BB BF pre UTF-8,
- kódovanie UTF-16:
    - jeho dve podoby: LE a BE,
- kódovanie UTF-8:
    - veľkosti kódovania znakov: 1 až 6 bajtov,
- štruktúru 1- resp. 2-bajtových znakov: `0xxxxxxx`, resp. `110xxxxx 10xxxxxx`,
    - jednoznačnosť dekódovania pri postupnom čítaní znakov,
    - prepis znaku medzi UTF-16 BE a UTF-8, napr.

- znak „č“ v UTF-16 BE: `01 0D = 00000001 00001101`,
- znak „č“ v UTF-8: `C4 8D = 11000100 10001101`,
- znak „š“ v UTF-16 BE: `01 61 = 00000001 01100001`,
- znak „š“ v UTF-8: `C5 A1 = 11000101 10100001`.

Úloha 3 je zameraná na preskúmanie znaku (znakov) konca riadkov textových súborov uložených pre rôzne operačné systémy. V podúlohe 3a majú žiaci pomocou programu PSPad zistiť a do tabuľky zapísať šestnástkové zápisy obsahu a veľkosti dvojriadkových textových súborov s kódovaním UTF-8 s nastavením pre operačné systémy DOS/Windows, Linux, Mac OS (uložených v priečinku subory3). V tabuľke 3 je uvedené riešenie podúlohy 3a.

Tabuľka 17. Zistená štruktúra textových súborov uložených v rôznych operačných systémoch (riešenie).

OS / Štruktúra súboru	Šestnástkový zápis obsahu súboru	Veľkosť súboru (B)
DOS / Windows	31 0D 0A 32	4
Linux	31 0A 32	3
Mac OS	31 0D 32	3

Po vyplnení tabuľky so zistenou štruktúrou a veľkosťami súborov majú žiaci v podúlohe 3b uviesť vlastné závery o štruktúre textových súborov uložených v rôznych operačných systémoch. Na základe porovnania údajov v tabuľke môžu žiaci uviesť, že súbor uložený pre DOS/Windows má väčšiu veľkosť ako súbor uložený pre operačné systémy Linux a Mac OS. Každý z uvedených operačných systémov používa iný znak, resp. iné znaky konca riadkov.

Pri tvorbe týchto záverov môžeme žiakom pomôcť niektorými z nasledovných otázok:

- *Aké znaky koncov riadkov sú uvedené v jednotlivých operačných systémoch (DOS/Windows, Linux, Mac OS)?*
  - Možná odpoveď: 0D 0A pre Windows (CR+LF), 0A pre Linux (LF), 0D pre Mac OS (CR).
- *Od čoho závisí veľkosť viacriadkového textového súboru s kódovaním Windows CP1250?*
  - Možná odpoveď: Od počtu znakov, počtu riadkov, výberu operačného systému.

Na konci môžeme zhrnúť žiacke závery a uviesť historickú poznámku, že použitie dvoch znakov na zakódovanie konca riadka v DOS/Windows má pôvod od písania na písacom stroji (znak CR = Carriage Return predstavoval návrat vozíka s písacou hlavou na začiatok riadku a znak LF = Line Feed posunutie valca s papierom o riadok nahor) a hlavne záver, že veľkosť textového súboru závisí od nasledovných faktorov:

- celkového počtu znakov,
- počtu riadkov,
- vybraného kódovania,
- vybraného operačného systému,
- v prípade kódovania UTF-8 aj od počtu znakov s diakritikou.

Úloha 4 je zameraná na rozlíšenie pojmov veľkosť súboru a veľkosť súboru na disku a preskúmanie pojmu klaster (v kontexte súborového systému). V podúlohe 4a majú žiaci pre vybrané súbory z priečinka subory4 urobiť najprv predpovede k ich veľkosti a ich veľkosti na disku. Následne majú pomocou Prieskumníka (v režimoch Podrobnosti, Dlaždice, Obsah, Vlastnosti) zistiť ich skutočné veľkosti a skutočné veľkosti na disku a zapísať ich do tabuľky. V tabuľke 4 je uvedené riešenie podúlohy 4a.

Tabuľka 18. Zistené veľkosti súborov a veľkosti súborov na disku (riešenie).

Veľkosť (Vlastnosti)	**Veľkosť (Podrobnosti)**	**Veľkosť (Dlaždice, Obsah)**	**Veľkosť na disku (Vlastnosti)**
10 B	1 kB	10 B	4,00 kB (4096 B)
100 B	1 kB	100 B	4,00 kB (4096 B)
1000 B	1 kB	1000 B	4,00 kB (4096 B)
4095 B	4 kB	3,99 kB	4,00 kB (4096 B)
4096 B	4 kB	4,00 kB	4,00 kB (4096 B)
4097 B	5 kB	4,00 kB	8,00 kB (8192 B)

V podúlohe 4b majú žiaci uviesť vlastné závery o veľkosti textových súborov a ich veľkosti na disku na základe vlastných predpovedí a zistení skutočných veľkostí súborov a veľkostí súborov na disku z priečinka subory4. Ak žiaci nepoznajú pojem klaster, bude pre nich prekvapením, že veľkosť súboru na disku sa líši od veľkosti súboru. Z tabuľky 4 zistia, že hodnoty veľkosti súborov sa líšia v závislosti od režimu zobrazenia v Prieskumníkovi (iná hodnota je v režime Podrobnosti a iná v režimoch Dlaždice a Obsah).

Pri tvorbe týchto záverov môžeme žiakom pomôcť niektorými z nasledovných otázok:

- *Ako zdôvodnite rozdiely výpisu veľkostí súborov v režimoch?*
    - Možná odpoveď: Nerovnaký spôsob zaokrúhľovania v rôznych režimoch, hodnoty uvedené v režimoch Podrobnosti, Dlaždice, Obsah považujeme za orientačné, smerodajné pre nás sú hodnoty uvedené v režime Vlastnosti.
- *Prečo veľkosť súborov na disku je u prvých piatich súborov rovnaká a pri poslednom je o 4096 B viac?*
    - Možná odpoveď: Súbory sa na disk ukladajú akoby do „kontajnerov" veľkosti 4096 B, každý nový súbor sa ukladá do ďalšieho „kontajnera".

Po experimentovaní žiakov urobíme krátky výklad k štruktúre disku (pozostávajúceho zo sústredných stôp), vysvetlíme pojem sektor (jeho veľkosť 512 B) a následne uvedieme pojem klaster ako skupinu sektorov, ktorý je z hľadiska súborového systému základnou alokovateľnou jednotkou (súbory sa na disk ukladajú postupne do voľných klastrov). Pre disk pracujúci pod daným operačným systémom možno vybrať pri jeho formátovaní niektorý z možných súborových systémov (napr. FAT32, NTFS, exFAT) a niektorú z ponúkaných veľkostí klastra. Prípadne uvedieme a vysvetlíme vzťah medzi veľkosťou klastra a počtom klastrov na disku s ohľadom na celkovú veľkosť disku.

Úloha 5 je zameraná na prediskutovanie a zhrnutie individuálnych záverov žiakov z úloh 1 až 4. V podúlohe 5a majú žiaci uviesť celkový záver o faktoroch ovplyvňujúcich veľkosť textového súboru, resp. veľkosť textového súboru na disku a v podúlohe 5b uviesť čomu ešte nerozumejú a čo ďalšie by sa ešte chceli naučiť v tejto oblasti.

Napokon žiakom dáme vyplniť výstupný konceptuálny test (podobný vstupnému konceptuálnemu testu) a tiež stručný hodnotiaci dotazník (zameraný na určenie miery zaujímavosti a náročnosti úloh 1 až 5):

O1: Akú veľkosť má textový súbor obsahujúci 4 znaky „sôvä"? Zdôvodnite svoju odpoveď.

O2: Zdôvodnite, prečo sa na niektorých webových stránkach nezobrazia správne znaky s diakritikou.

O3: Po skopírovaní textového súboru na webový server sa stalo, že tento súbor mal inú veľkosť ako pôvodný súbor. Uveďte možné príčiny.

O4: O koľko bajtov sa zníži voľná kapacita disku po vytvorení a uložení textového súboru s veľkosťou 500 B? Zdôvodnite svoju odpoveď.

Otázky O1 a O2 mapujú znalosti pojmu kódovacia tabuľka, otázka O3 pojem znak(y) konca riadkov v rôznych operačných systémoch a otázka O4 pojem klaster.

Pozorovania a zistenia z výučby

V roku 2014 sme dali študentom učiteľského štúdia informatiky vyplniť pracovný list (alternatívu A), ktorý sa ukázal náročným pre niektorých študentov, ktorí ho nestihli vyplniť v čase 45 minút. V roku 2015 sme dali iným študentom učiteľského štúdia vyplniť pracovné listy (náhodne sme im pridelili alternatívy A, B, C). Ukázalo sa, že alternatíva A je prácna, vyžadujúca si určitý čas navyše pri vytváraní viacerých súborov. Pri alternatíve C boli poskytnuté tabuľky so zaznamenanými údajmi, ale bez pracovných súborov. Jednému študentovi nestačili zaznamenané údaje a v úlohe 3 si vytvoril vlastné súbory s rovnakou štruktúrou aká bola uvedená v tabuľke. Väčšina študentov sa vyjadrila, že úlohy boli zaujímavé s primeranou úrovňou náročnosti. V konceptuálnom teste sa v prvej otázke nelíšili odpovede výstupného testu od vstupného testu, študenti považujú za normálne kódovanie, v ktorom 1 znak zaberá 1 B, pričom nikto nedodal, že to platí len pre určité kódovania, napr. Windows CP1250. V druhej otázke odpovedali študenti správne, vo výstupnom teste uviedli precíznejšie odpovede. V tretej otázke vo vstupnom teste prevažovali nesprávne odpovede (napr. súbor sa nepreniesol celý na server), vo výstupnom teste väčšina uviedla správnu odpoveď. Vo štvrtej otázke sa vo vstupnom teste objavili len nesprávne odpovede, ale vo výstupnom teste aj niekoľko správnych odpovedí. študenti vypĺňali pracovné listy (alternatívy A, B, C) samostatne. Po kompletnom vyplnení pracovných listov im bola veľmi stručne zhrnutá preberaná problematika. Sme presvedčení, že by študenti dosiahli lepšie výsledky, ak by mali možnosť svoje pozorovania a závery pri riešení každej úlohy prediskutovať medzi sebou a aj s učiteľom, ktorý by ich myšlienkové pochody usmernil otázkami a po každej úlohe by vysvetlil správne riešenie úlohy a zosumarizoval práve prebrané učivo.

Alternatívy metodiky

Je možné dať žiakom vyplniť prvú stranu pracovného listu (vo všetkých troch alternatívach je obsahovo rovnaká) na konci jednej vyučovacej hodiny a podľa výsledkov konceptuálneho testu (prípadne aj úlohy 0) by sme sa mohli rozhodnúť pre použitie niektorej z alternatív A, B, C na nasledujúcej vyučovacej hodine, na ktorej sa budú riešiť úlohy 1 – 5 a výstupný konceptuálny test s dotazníkom.

Odporúčame použiť alternatívu B pracovných listov, pri ktorej môžu žiaci použiť už vytvorené pracovné súbory (v priečinkoch subory12, subory3, subory4 v archíve I 8.4).

Ak máme šikovných žiakov alebo máme k dispozícii 90 a viac minút výučby, odporúčame použiť najprácnejšiu alternatívu A pracovných listov, pri ktorej môžu žiaci vytvárať vlastné súbory, s ktorými experimentujú, do tabuľky zaznamenávajú výsledky a následne robia závery.

Pri alternatíve C pracovných listov žiaci neexperimentujú, robia len závery z poskytnutých údajov uvedených v tabuľkách, čo umožňuje realizovať výučbu aj za menej ako 90 minút.

Učiteľ môže z uvedených alternatív (A, B, C) pracovných listov, vytvoriť vlastnú alternatívu.

V odľahčenej alternatíve sa dá výučba redukovať len na skúmanie pojmu veľkosť súboru a príbuzný pojem veľkosť súboru na disku sa dá učiť v rámci inej témy. Alebo je možné nechať žiakov skúmať len kódovania Windows CP1250 a UTF-8.

V náročnejšej alternatíve výučby sa dajú skúmať aj ďalšie kódovania, rôzne súborové systémy, rôzne veľkosti klastrov, ďalšie operačné systémy. U šikovnejších žiakov je možné realizovať metodiku vo forme nasmerovaného bádania, kde sa im len zadá problém – preskúmať faktory ovplyvňujúce veľkosť textového súboru a veľkosť textového súboru na disku. Postupy riešenia a celkové závery vytvárajú žiaci bez pomoci učiteľa.

Záver

Bádateľsky orientované vyučovanie má svoju tradíciu najmä v prírodovedných predmetoch. Objavovať prírodné zákonitosti existujúce v reálnom svete, ktorý nás obklopuje je prirodzené. Matematika a informatika majú v tomto smere iné postavenie. Svet matematiky je abstraktný. Svet informatiky je definovaný človekom. Napriek tomu sme pri implementácii bádateľsky orientovaného vyučovania v matematike a informatike vychádzali z teórií, ktoré boli vyvíjané pre bádateľsky orientované vyučovanie prírodovedných predmetov. Pre vyučovanie matematiky a informatiky absentujú metodiky, ktoré by boli primárne zamerané na rozvoj bádateľských zručností.

Metodiky prezentované v publikácii sa okrem rozvoja bádateľských zručností žiaka zameriavajú aj na rozvoj konceptuálneho porozumenia matematického a informatického učiva. Učiteľovi dávame k dispozícii nie len rámcový postup bádateľského vyučovania založeného na riešení problémov a kladení otázok, ale aj pracovné listy a súbory pre žiakov, nástroje formatívneho hodnotenia a konceptuálne testy. Je na samotných učiteľoch a výskumníkoch, ako uvedenú teóriu a predložené metodiky využijú vo vlastnej výučbe a pri vývoji ďalších bádateľsky orientovaných metodík.

Z dôvodu komplexného rozvoja bádateľských zručností žiaka a z dôvodu špecifík jednotlivých predmetov odporúčame, aby sa s bádateľsky orientovaným vyučovaním žiak stretol v čo najpestrejšej množine predmetov. Kľúčovým faktorom úspešnej implementácie bádateľsky orientovaného vyučovania je učiteľ, ktorý by okrem pozitívneho postoja k bádateľsky orientovanému vyučovaniu mal byť sám bádateľom. Bádateľom vo svojom odbore a bádateľom vo vyučovaní svojho odboru.

Veríme, že publikácia bude využívaná vo vysokoškolskej príprave učiteľov a v rôznych formách celoživotného vzdelávania učiteľov.

Informačné zdroje

Koncepcia bádateľsky orientovaného vyučovania

- BALOGOVÁ, Brigita a Zuzana JEŠKOVÁ. Analýza bádateľských aktivít. *Zborník z konferencie Tvorivý učiteľ fyziky*, Slovenská fyzikálna spoločnosť, Košice, 2016, s. 14-21. ISBN 978-80-971450-8-8.
- BANCHI, Heather and Randy BELL. The many levels of inquiry. *Science and Children*, 2008, s. 26-29, [cit. 2016-10-21] dostupné z: http://www.miseagrant.umich.edu/lessons/files/2013/05/The-Many-Levels-of-Inquiry-NSTA-article.pdf
- FRADD, Sandra. H., Okhee LEE, Francis X. SUTMAN, a M. Kim SAXTON. Promoting Science literacy with English language learners through instructional materials development: A case study. *Billingual Research Journal*, 25 (4), 2001, 417-439. ISSN 1523-5882.
- GALLAVAN, Nancy, P. *Developing performance-based assessments, grades 6-12*. California, Corwin Press, 2009, 227 s. ISBN 978-1-4129-6981-9.
- HARLEN, Wynne. *Assessment & Inquiry-Based Science Education: Issues in Policy and Practice*. Trieste, Italy: Global Network of Science Academies, 2013. ISBN 978-129-1332-148. Dostupné z: http://www.interacademies.net/File.aspx?id=21245
- HELD, Ľubomír, Kristína ŽOLDOŠOVÁ, Mária OROLÍNOVÁ, Iveta JURICOVÁ a Katarína KOTUĽÁKOVÁ. *Výskumne ladená koncepcia prírodovedného vzdelávania (IBSE v slovenskom kontexte)*. Pedagogická fakulta Trnavskej Univerzity v Trnave, 2011, 138 s. ISBN 978-80-8082-486-0.
- KIREŠ, Marián, Zuzana JEŠKOVÁ, Mária GANAJOVÁ a Katarína KIMÁKOVÁ. *Bádateľské aktivity v prírodovednom vzdelávaní, časť A*. Štátny pedagogický ústav, 2016, 128 s. ISBN 978-80-8118-155-9.
- KIRSCHNER, Paul, John SWELLER a Richard CLARK. Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching. *EDUCATIONAL PSYCHOLOGIST*, 2006, 41(2), 75-86. ISSN 0046-1520.
- LLEWELLYN, Douglas. *Inquire Within: Implementing Inquiry-Bases Science Standards*. Corwin Press, 2002, 258 s. ISBN 978-1-4522-4445-7.

- MARSHALL, Jeff C. *Succeeding with Inquiry in Science and Math Classrooms*. ASCD, USA, 2013, 161 s. ISBN 978-1-4166-1608-5.
- ROCARD, Michel, Peter CSERMELY, Doris JORDE, Dieter LENZEN, Harriet WALBERG-HENRIKSSON a Valerie HEMMO. Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe. EUR / European Atomic Energy Community [online]. Belgium: European Communities, 2007, 29 [cit. 2016-10-12]. DOI: 978-92-79-05659-8. ISSN 978-92-79-05659-8. Dostupné z: http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf
- TAMIR, Pinchas and Vincent N. LUNETTA. Inquiry-Related Tasks in High School Science Laboratory. *Science Education,* 1981, 65(5), 1981, 477-484. ISSN 1098-237X.
- VAN DEN BERG, Ed. The PCK of Laboratory Teaching: Turning Manipulation of Equipment into Manipulation of Ideas. *Scientia in educatione*, 4(2), 2013, 74-92. ISSN: 1804-7106.

Vyučovanie matematiky

- BENNETT, Dan. *Exploring Geometry with the Geometer's Sketchpad*. Key Curriculum Press, Emeryville, 1999, 285 s. ISBN 978-1-55953-581-6.
- BENSON, John, Sara DODGE, Walter DODGE, Charles HAMBERG, George MILAUSKAS a Richard RUKIN. *Algebra 2 and trigonometry*. Evanston Illinois, 1991, 814 s. ISBN 0-8123-5869-4.
- DE VILLIERS, Michael D. *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. Key Curriculum Press, 2003, 214 s. ISBN 1-55953-646-2.
- FULIER, Jozef, Viliam ĎURIŠ a Petra FRANTOVÁ. *CAS systémy počítačovej algebry vo vyučovaní matematiky*. Univerzita Konštantína filozofa Nitra, 2007, 284 s. ISBN 978-80-8094-139-0.
- HECHT, Tomáš, Peter BERO a Pavol ČERNEK. *Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ, Čísla*. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 1996, 48 s. ISBN 80-7158-128-3.
- HECHT, Tomáš, Peter BERO a Pavol ČERNEK. *Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ, Planimetria*. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 1996, 48 s. ISBN 80-7158-130-5.

- HECHT, Tomáš a Pavol ČERNEK. *Matematika pre 2.ročník gymnázií a SOŠ, Zošit 1, Funkcie*. Orbis Pictus Istropolitana Bratislava, 1997, 64 s. ISBN 80-7158-041-4.
- JOHNSTON-WILDER, Sue a John MASON. *Developing Thinking in Geometry*. London, 2005, 288 s. ISBN 1-4129-1168-0.
- KOPKA, Jan. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Univerzita J.E. Purkyně, Ústí Nad Labem, 1999, 196 s., ISBN 80-7044-247-6.
- KUBÁČEK, Zbyněk. *Matematika pre 3. ročník gymnázia a 7. ročník gymnázia s osemročným štúdiom – 2. časť.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2013, 120 s. ISBN 978-80-10-02289-2, s. 120.
- KUBÁČEK, Zbyněk. *Matematika pre 2. ročník gymnázií a 6. ročník gymnázií s osemročným štúdiom druhá časť*. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2010, 152 s. ISBN 9788071589846.
- KUBÁČEK, Zbyněk. *Matematika pre 1. ročník gymnázií, 2. časť.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2010, 144 s. ISBN 978-80-10-01827-7.
- KUŘINA, František. *10 pohledů na geometrii*. Praha, 1996, 249 s., ISBN 80-85823-21-7.
- LEISCHNER, Pavel. Kritéria tětivového čtyřúhelníku. *Sborník 25. konference o geometrii a počítačové grafice*, Praha, 2005, s. 143-148. ISBN 80-7015-013-0. [cit. 2016-10-19]. Dostupné z: http://www.csgg.cz/25achat/25sbornik.pdf
- LUKÁČ, Stanislav. Stimulation of the development of inquiry skills in teaching functions. *International Journal of Information and Communication Technologies in Education* [online], 2015, **4**(4), 4-18, [cit. 2016-11-15]. ISSN 1805-3726. Dostupné z: https://periodicals.osu.eu/ictejournal/dokumenty/2015-04/ictejournal-2015-4-article-1.pdf
- LUKÁČ, Stanislav a Noémi SZÉKELYOVÁ. Investigation of divisibility in a spreadsheet environment. *Spreadsheets in Education, vol. 9, iss. 2, 2016, 1-12,* ISSN 1448-6156.
- MIHALÍKOVÁ, Božena, Daniela ONDOVČÍKOVÁ a Ingrid SEMANIŠINOVÁ. *Úlohy matematickej olympiády základnej školy*. UPJŠ v Košiciach, 2004, 222 s. ISBN 80-7097-563-6.

- ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia, Funkce*. Prometheus, Praha, 2014, 167 s. ISBN 978-80-7196-357-8.
- SMIDA, Jozef, Jaroslav ŠEDIVÝ, Júlia LUKÁTŠOVÁ a Jindřich VOCELKA. *Matematika pre 1. ročník gymnázia*. SPN Bratislava, 1984, 296 s. ISBN 9788008009393.
- ODVÁRKO, Oldřich, Miloš BOŽEK, Marta RYŠÁNKOVÁ a Jozef SMIDA. *Matematika pre 2. ročník gymnázia*. SPN Bratislava, 1985, 424 s.
- HÍC, Pavel a Milan POKORNÝ M. *Aritmetika, vysokoškolské učebné texty*. Trnavská univerzita, Pedagogická fakulta. [cit. 2016-10-11]. Dostupné z: http://pdf.truni.sk/pokorny/aritmetika/5.pdf
- SEKERÁK, Jozef a Dušan ŠVEDA. Is mathematics teaching developing leaner's key competences? *The teaching of Mathematics*, vol. 11, iss. 1, 2008, 41-52. ISSN 1451-4966.
- SPIŠIAK Ladislav. *Dôkazy v (stredoškolskej) matematike*. Gymnázium, Šrobárova 1, Košice, 2015, 68 s.
- ŠEDIVÝ, Ondrej a Dušan VALLO. *Základy elementárnej geometrie*. Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre, 2009, 126 s. ISBN: 978-80-8094-623-4.
- ŠVEDA, Dušan, Viera ŠVEDOVÁ, Stanislav LUKÁČ a Jozef SEKERÁK. Ako využiť digitálne technológie pri vyučovaní logaritmickej funkcie. *Učitel matematiky, roč. 21, č. 2, 2013, 92-106*. ISSN 1210-9037.
- VANÍČEK, Jiří. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Univerzita Karlova v Prahe, 2009, 212 s. ISBN 978-80-7290-394-8.

Vyučovanie informatiky

- COHEN, Jacob. *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. 2nd ed. Hove: Lawrence Erlbaum Associates, 1988. ISBN 08-058-0283-5.
- GAVORA, Peter. *Elektronická učebnica pedagogického výskumu* [online]. Bratislava: Univerzita Komenského, 2010 [cit. 2016-11-11]. ISBN 978-80-223-2951-4. Dostupné z: http://www.e-metodologia.fedu.uniba.sk/

- *INTERNET PROTOCOL: DARPA INTERNET PROGRAM, PROTOCOL SPECIFICATION*. 1. California, USA: Information Sciences Institute, University of Southern California, 1981. Dostupné z: https://tools.ietf.org/html/rfc791
- IPv4. In: *Wikipédia, Slobodná encyklopédia* [online]. 2016 [cit. 2016-11-14]. Dostupné z: https://sk.wikipedia.org/wiki/IPv4
- KALAŠ, Ivan a Michal WINCZER. *Tvorivá informatika: Informatika okolo nás: Učebnica pre predmet informatika pre prímu až kvartu gymnázií s osemročným štúdiom a druhý stupeň základných škôl*. 1. Bratislava: SPN – Mladé letá, 2007, 48 s. ISBN 978-80-10-00887-2.
- KALAŠ, Ivan a Daniela BEZÁKOVÁ. *Tvorivá informatika: 1. zošit o číslach a tabuľkách: Učebnica pre základné školy a gymnázia s osemročným štúdiom pre predmet informatika*. 1. Bratislava: SPN – Mladé letá, 2009, 48 s. ISBN 978-80-10-01718-8.
- MCSEVENY, Alan, Rob CONWAY, Steve WILKES a Michael SMITH. Guideline for Interpreting Correlation Coefficient by Ith Phanny. In: *SlideShare* [online]. 2014 [cit. 2016-11-16]. Dostupné z: http://www.slideshare.net/phannithrupp/guideline-for-interpreting-correlation-coefficient
- SEBERA, Martin. *Vybrané kapitoly z metodologie* [online]. Brno: Masarykova univerzita, Brno, 2012 [cit. 2016-11-11]. ISBN 978-80-210-5963-4. Dostupné z: https://publi.cz/books/54/Cover.html
- ŠNAJDER, Ľubomír. *Bádateľsky orientované vyučovanie informatiky*. Bratislava, 2015, 151 s. Habilitačná práca. Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky.
- ŠNAJDER, Ľubomír a Ján GUNIŠ. Bádateľsky orientované vyučovanie informatiky – priebežné výsledky pedagogického výskumu. In: *DidInfo 2016*. Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela, 2016a, s. 116-123. ISBN 978-80-557-1082-2.
- ŠNAJDER, Ľubomír a Ján GUNIŠ. Inquiry Based Education of Selected Informatics Topics – Analysis And Results. *International Journal of Information and Communication Technologies in Education* [online]. 2016b, **5**(2), 51-66

[cit. 2016-12-12]. ISSN 1805-3726. Dostupné z: https://periodicals.osu.eu/ictejournal/dokumenty/2016-02/ictejournal-2016-2-article-4.pdf

Zoznam príloh

Nižšie uvedené prílohy sú súčasťou externého archívu elektronickej verzie vedeckej monografie, ktorý je umiestnený na adrese: https://unibook.upjs.sk/dokumenty/bov_prilohy.zip

Matematika

- M 1.1 Pracovný list: Štvorciferné palindrómy
- M 1.2 Hárok na formatívne hodnotenie: Deliteľnosť štvorciferných palindrómov
- M 1.3 Interaktívny zošit na deliteľnosť číslom 11
- M 1.4 Hárok na formatívne hodnotenie: Deliteľnosť číslom 11
- M 1.5 Dotazník na sebareflexiu k deliteľnosti číslom 11
- M 1.6 Konceptuálne úlohy: Deliteľnosť
- M 2.1 Pracovný list: Stredná priečka trojuholníka
- M 2.2 Hárok na formatívne hodnotenie: Stredná priečka trojuholníka
- M 2.3 Pracovný list: Ťažisko trojuholníka
- M 2.4 Hárok na formatívne hodnotenie: Ťažisko trojuholníka
- M 2.5 Hárok na formatívne hodnotenie: Eulerova priamka
- M 3.1 Pracovný list: Stredové a obvodové uhly
- M 3.2 Hárok na formatívne hodnotenie: Obvodové a stredové uhly
- M 3.3 Hárok na formatívne hodnotenie: Množiny všetkých bodov s danou vlastnosťou
- M 4.1 Pracovný list: Skúmanie vlastností štvoruholníkov
- M 4.2 Hárok na formatívne hodnotenie: Vlastnosti štvoruholníkov
- M 4.3 Pracovný list: Tetivový štvoruholník
- M 4.4 Hárok na formatívne hodnotenie: Tetivový štvoruholník
- M 4.5 Konceptuálne úlohy: Vlastnosti geometrických útvarov
- M 5.1 Pracovný list: Vlastnosti lineárnej funkcie
- M 5.2 Hárok na formatívne hodnotenie: Vlastnosti lineárnej funkcie
- M 5.3 Pracovný list: Aplikácie lineárnej funkcie

- M 5.4 Hárok na formatívne hodnotenie: Aplikácie lineárnej funkcie
- M 6.1 Pracovný list: Monotónnosť funkcií
- M 6.2 Hárok na formatívne hodnotenie: Monotónnosť funkcií
- M 6.3 Pracovný list: Rastúce a klesajúce funkcie
- M 6.4 Pracovný list: Vlastnosti funkcií
- M 6.5 Pracovný list: Skúmanie súmernosti grafov funkcií
- M 6.6 Hárok na formatívne hodnotenie: Súmernosť grafov funkcií
- M 6.7 Pracovný list: Inverzná funkcia
- M 6.8 Hárok na formatívne hodnotenie: Inverzná funkcia
- M 6.9 Dotazník na sebareflexiu k porozumeniu pojmu inverzná funkcia
- M 7.1 Pracovný list: Kvadratická funkcia
- M 7.2 Hárok na formatívne hodnotenie: Kvadratická funkcia
- M 7.3 Interaktívny zošit na určovanie predpisov funkcií
- M 7.4 Pracovný list: Vlastnosti a aplikácie kvadratických funkcií
- M 7.5 Hárok na formatívne hodnotenie: Aplikácia kvadratickej funkcie
- M 7.6 Konceptuálne úlohy: Vlastnosti funkcií, kvadratická funkcia

Informatika

- I 1.1 Ukážka realizácia relačného výskumného problému s komentárom jednotlivých častí riešenia problému
- I 1.2 Šablóna rámca pre realizáciu žiackeho relačného výskumu
- I 1.3 Rubrika pre hodnotenie žiackych výskumov
- I 2.1 Pracovný list k metodike Komunikačné protokoly – papieriková komunikácia
- I 3.1 Pracovné súbory obrázkov v rôznych formátoch
- I 3.2 Pracovný list k metodike Komprimácia dát, komprimácia obrázkov
- I 4.1 Pracovný list k metodike Kódovanie znakov, kódovacie tabuľky
- I 5.1 Pracovný list k téme Bit, jednotka informácie

- I 5.2 Pracovné listy k programovaniu hry Hádaj číslo od 0 do 15 s kúzelnými kartami
- I 5.3 Konceptuálny test k téme Bit, jednotka informácie
- I 5.4 Scratch aplikácia na paralelné hádania 4 kariet z balíka 32 nemeckých kariet
- I 5.5 Pracovný súbor s nedokončenou Scratch aplikáciou na hádanie čísel pomocou 4 kúzelných kariet
- I 5.6 Scratch aplikácia na hádanie čísel pomocou 4 kúzelných kariet
- I 6.1 Pracovné listy k téme Odhaľujeme princípy fungovania čiernych skriniek
- I 6.2 Scratch aplikácia na odhalenie princípov fungovania 12 číselných čiernych skriniek
- I 7.1 Pracovný list k téme Vytvárame humorné kódy (jednoznačnosť de/kódovania)
- I 7.2 Interaktívny excelovský zošit k téme Vytvárame humorné kódy (jednoznačnosť de/kódovania)
- I 7.3 Videoukážka riešenia nájdenia kódovania pre rovnosť slov MAMA = OCKO
- I 8.1 Pracovný list (A) k téme Odhaľujeme tajomstvá textových súborov
- I 8.2 Pracovný list (B) k téme Odhaľujeme tajomstvá textových súborov
- I 8.3 Pracovný list (C) k téme Odhaľujeme tajomstvá textových súborov
- I 8.4 Pracovné súbory pre B alternatívu pracovného listu k téme Odhaľujeme tajomstvá textových súborov (v priečinkoch subory12. subory3 a subory4)

Bádateľsky orientované vyučovanie matematiky a informatiky na stredných školách

Vedecká monografia

Autori: Stanislav LUKÁČ, Ústav matematických vied PF UPJŠ v Košiciach
Ľubomír ŠNAJDER, Ústav informatiky PF UPJŠ v Košiciach
Ján GUNIŠ, Ústav informatiky PF UPJŠ v Košiciach
Zuzana JEŠKOVÁ, Ústav fyzikálnych vied PF UPJŠ v Košiciach

Vydavateľ: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Miesto vydania: Košice
Odborné poradenstvo: Univerzitná knižnica UPJŠ v Košiciach
http://www.upjs.sk/pracoviska/univerzitna-kniznica
Rok vydania: 2016
Dostupné od: 20. 12. 2016
Rozsah strán: 222
Rozsah: 18 AH
Vydanie: prvé
Umiestnenie príloh: https://unibook.upjs.sk/dokumenty/bov_prilohy.zip

ISBN 978-80-8152-471-4

ISBN 978-80-8152-471-4